ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RAINER J. NAGEL

Mittelergodische Halbgruppen linearer Operatoren

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 4 (1973), p. 75-87

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_4_75_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 4 (1973), 75-87.

MITTELERGODISCHE HALBGRUPPEN LINEARER OPERATOREN

von Rainer J. NAGEL

Mit Hilfe von Methoden und Ergebnissen aus der Theorie der Operator-Halbgruppen und aus der Theorie der Banachverbände werden Mittelergodensätze bewiesen, die wesentliche Verallgemeinerungen von klassischen (siehe dazu z.B. Dunford-Schwartz [5] und Jacobs [6]) und neueren (Aribaud [1], Sine [13]) Resultaten sind.

Dazu nennen wir eine Halbgruppe $\mathrm{H} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E})$, E Banachraum, mittelergodisch, wenn die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{H}$ ein Nullelement enthält (Definition 1.1). Es zeigt sich, daß dies für beschränkte Halbgruppen mit der Existenz von Fixpunkten in $\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{H}x$ und $\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{H}'x'$ für alle $x \in \mathrm{E}$, $x' \in \mathrm{E}'$ äquivalent ist. Daß eine kompakte Gruppe (1.9) bzw. eine kompakte abelsche Halbgruppe (1.10), oder auch eine kontraktive (Operator-) Halbgruppe auf einem Hilbertraum (1.4) immer mittelergodisch ist, läßt sich daraus leicht folgern.

Banachverbände schließlich bilden den geeigneten Rahmen für eine weitere Gruppe von Mittelergodensätzen. So ist eine beschränkte positive Halbgruppe $\mathrm{H} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E})$, E Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, schon dann mittelergodisch, wenn ein H-subinvarianter quasi-innerer Punkt aus E_+ und eine H'-subinvariante strikt positive Linearform aus E' existiert (2.2). Diese Bedingung ist besonders einfach zu erfüllen, wenn E ein AL-Raum ist (2.3. 2.4). In Abschnitt 3 benützen wir dies, um ein einfaches Irreduzibilitätskriterium für positive Operator-Halbgruppen zu beweisen.

1. Operatoren auf Banachräumen.

In diesem Abschnitt sei E ein (reeller oder komplexer) Banachraum und H eine Halbgruppe in $\mathscr{L}_S(E)$, dem Raum aller beschränkten linearen Operatoren auf E versehen mit der Topologie der einfachen Konvergenz. Da die Multiplikation in $\mathscr{L}_S(E)$ getrennt stetig ist, ist H eine (semi-) topologische Halbgruppe. Ebenso sind die konvexe Hülle co H und die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\mathrm{co}}\,H$ von H in $\mathscr{L}_S(E)$ topologische Halbgruppen. Schließlich nennt man $P \in \overline{\mathrm{co}}\,H$ ein *Nullelement*, wenn $TP = PT = P$ gilt für alle $T \in \overline{\mathrm{co}}\,H$ (siehe dazu [2], insbesondere II.1.1).

DEFINITION 1.1 — *Eine Halbgruppe* H *in* $\mathscr{L}_S(E)$ *heißt mittelergodisch, wenn* $\overline{\mathrm{co}}\,H$ *ein Nullelement besitzt* (1).

Das (eindeutig bestimmte) Nullelement einer mittelergodischen Halbgruppe H bezeichnen wir mit P. Für jedes $x \in E$ folgt $Px \in \overline{\mathrm{co}}\,Hx = \overline{\mathrm{co}}\,\{Tx : T \in H\}$ wegen der Stetigkeit der Abbildung $T \to Tx$ von $\mathscr{L}_S(E)$ in E. Da nach Definition $TP = PT = P^2 = P$ für alle $T \in H$ gilt, ist P eine Projektion auf den Fixraum $F := \{x \in E : Tx = x$ für alle $T \in H\}$ von H in E. Der Kern von P ist gerade die abgeschlossene lineare Hülle von

$$\{(1_E - T)x : T \in H,\ x \in E\}.$$

Man ersieht daraus, daß eine mittelergodische Halbgruppe die Eigenschaften besitzt, wie sie im Mittelergodensatz 1.2.1 in [6] angegeben werden (siehe auch [1], [4]). Daß in wichtigen Fällen auch die Umkehrung gilt, zeigt Theorem 1.2.

Auf dem Dual E′ von E betrachten wir grungsätzlich die $\sigma(E', E)$-Topologie. Sei $H' = \{T' : T \in H\}$ die zu H adjungierte Halbgruppe in $\mathscr{L}(E')$ und P′ die Adjungierte von P. Dann gilt auch $P'x' \in \overline{\mathrm{co}}\,H'x'$ für alle $x' \in E'$, so daß P′ Projektion auf den Fixraum $F' := \{x' \in E' : T'x' = x'$ für alle $T \in H\}$ von H′ in E′ ist. Daraus ergibt sich schließlich die Isomorphie von P′E′ und (PE)′.

(1) Eine solche halbgruppentheoretische Fassung der Mittelergodeneigenschaft geht wohl auf H. P. Lotz zurück (siehe auch [8]).

THEOREM 1.2. — *Für eine beschränkte Halbgruppe* $H \subset \mathscr{L}_S(E)$ *sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(*a*) H *ist mittelergodisch.*

(*b*) *Es gibt eine Projektion* $P \in \mathscr{L}(E)$, *für die gilt* $PT = TP = P$ *für alle* $T \in H$ *und* $Px \in \overline{\text{co}}\, Hx$ *für alle* x *aus einem dichten, H-invarianten Teilraum von* E.

(*c*) *Für jedes* $x \in E$, $x' \in E'$ *enthält* $\overline{\text{co}}\, Hx$ *bzw.* $\overline{\text{co}}\, H'x'$ *einen H- bzw. H'-Fixpunkt.*

Beweis. — $(a) \Longrightarrow (c)$: Dies folgt aus den vorangehenden Überlegungen.

$(c) \Longrightarrow (b)$: Sei $x \in E$. Dann gibt es nach Voraussetzung einen H-Fixpunkt $y \in \overline{\text{co}}\, Hx$. Da für alle $x' \in E'$ auch $\overline{\text{co}}\, H'x'$ einen H'-Fixpunkt enthält, ist der H-Fixpunkt $y \in \overline{\text{co}}\, Hx$ eindeutig bestimmt. Durch $Px = y$ wird eine lineare, stetige Projektion $P \in \mathscr{L}(E)$ definiert. P erfüllt alle Eigenschaften von (*b*).

$(b) \Longrightarrow (a)$: Dazu müssen wir zeigen, daß $P \in \overline{\text{co}}\, H$ gilt für die Projektion P in (*b*). Sei also $\varepsilon > 0$ und $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E_1$ vorgegeben, wobei E_1 ein dichter, H-invarianter Teilraum von E ist mit $Px \in \overline{\text{co}}\, Hx$ für alle $x \in E_1$. Wir beweisen mittels Induktion, daß es einen Operator $S_n \in \text{co}\, H$ gibt, für den $\|S_n x_i - Px_i\| \leqslant \varepsilon$ gilt für $i = 1, \ldots, n$.
Dies ist für $n = 1$ der Fall. Es sei nun $S_{n-1} \in \text{co}\, H$ mit $\|S_{n-1}x_i - Px_i\| \leqslant \varepsilon/k$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $k := \sup \{\|T\| : T \in H\}$. Setze dann $y := S_{n-1}x_n \in E_1$.
Wegen Eigenschaft (*b*) gibt es $T_n \in \text{co}\, H$, so daß $\|T_n y - Py\| \leqslant \varepsilon$ gilt. Definiere nun

$$S_n := T_n \circ S_{n-1}.$$

Dafür gilt

$$S_n x_i - Px_i = T_n(S_{n-1}x_i - Px_i), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

und $S_n x_n - Px_n = T_n y - Py$.
Daraus folgt, daß P (bezüglich der Topologie der einfachen Konvergenz auf E_1) ein Häufungspunkt der Familie der so konstruierten Operatoren S_n ist. Nun ist $\text{co}\, H$ aber eine gleichstetige Menge in $\mathscr{L}(E)$, und E_1 ist dicht in E. Folglich gilt auch $P \in \overline{\text{co}}\, H$ in $\mathscr{L}_S(E)$ ([11], III.4.5).

Korollar 1.3. — *Zu jeder beschränkten Halbgruppe* $H \subset \mathscr{L}_S(E)$ *gibt es einen eindeutig bestimmten abgeschlossenen Teilraum* E_0, *der maximal ist bezüglich folgender Eigenschaften*:

(i) E_0 *ist* H-*invariant.*

(ii) *Die Einschränkung von* H *auf* E_0 *ist mittelergodisch in* $\mathscr{L}_S(E_0)$.

Beweis. — Betrachte die Familie $\mathscr{F}$ aller abgeschlossenen Teilräume von E mit den Eigenschaften (i) und (ii). Da die Abschließung der Vereinigung einer aufsteigenden Teilfamilie aus $\mathscr{F}$ offenbar Bedingung 1.2.*b* erfüllt, ist $\mathscr{F}$ (bezüglich der Inklusion) induktiv geordnet. Außerdem ist $(0) \in \mathscr{F}$. Folglich existiert ein maximales Element $E_0 \in \mathscr{F}$. Dieses ist eindeutig bestimmt, da die Abschließung der Summe zweier Teilräume $E_1, E_2 \in \mathscr{F}$ wieder in $\mathscr{F}$ liegt: Sei nämlich $P_1 \in \mathscr{L}(E_1)$ und $P_2 \in \mathscr{L}(E_2)$ die zu $H|_{E_1}$ bzw. $H|_{E_2}$ gehörige Projektion. Dann stimmen P_1 und P_2 auf $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{F}$ überein, so daß es eine Fortsetzung $P \in \mathscr{L}(\overline{E_1 + E_2})$ von P_1, P_2 gibt, die 1.2.*b* erfüllt, d.h. $\overline{E_1 + E_2} \in \mathscr{F}$.

Das folgende Korollar enthält (für E Hilbertraum) das klassische Beispiel einer mittelergodischen Halbgruppe. Dabei heißt H *kontraktiv*, wenn $\|T\| \leqslant 1$ ist für alle $T \in H$.

Korollar 1.4. — *Wenn* E *und* E′ *gleichmäßig konvexe Norm haben, dann ist jede kontraktive Halbgruppe* $H \subset \mathscr{L}_S(E)$ *mittelergodisch.*

Beweis. — Unter diesen Voraussetzungen existiert jeweils in $\overline{\text{co}}\, Hx$ und $\overline{\text{co}}\, H'x'$ ein eindeutig bestimmtes Element minimaler Norm ([6], 8.5.10). Für eine kontraktive Halbgruppe H sind diese Elemente H-bzw. H′-invariant. Folglich ist die Bedingung 1.2.*c* erfüllt.

In Korollar 1.4 erzwingt die spezielle Normstruktur von E und E′ schon die Mittelergodizität einer beliebigen kontraktiven Operator-Halbgruppe. Um aber in beliebigen Banachräumen einfache Kriterien angeben zu können, benötigen wir gewisse Voraussetzungen über die algebraische Struktur der Halbgruppe. Die folgende Eigenschaft ist in der Theorie der Halbgruppen gut erforscht und deshalb für unsere Zwecke am besten geeignet.

DEFINITION 1.5. — *Eine topologische Halbgruppe* H *heißt (rechts-) amenabel, wenn es auf dem Raum* $C_b(H)$ *aller beschränkten stetigen Funktionen auf* H *ein (rechts-)invariantes Mittel gibt.*

Für eine ausführliche Definition amenabler Halbgruppen verweisen wir auf den Bericht von Day [4] und die dort angegebene Literatur. Dort wird H allerdings meistens mit der diskreten Topologie versehen, was für Operator-Halbgruppen häufig zu speziell ist. Im Anschluß an einige wohlbekannte Beispiele formulieren wir dann die für uns wesentliche Eigenschaft rechts-amenabler Operator-Halbgruppen.

Beispiele. — 1. Jede *abelsche Halbgruppe* ist amenabel (Markov-Kakutani-Theorem, siehe z.B. [4], Section 6).

2. Aus der Existenz des Haarschen Maßes folgt, daß jede *kompakte Gruppe* amenabel ist.

3. Eine kompakte Halbgruppe ist genau dann rechts-amenabel, wenn ihr minimales Ideal ein minimales Linksideal ist ([4], Section 10).

LEMMA 1.6. (Day [3]). — *Es sei* E *ein Banachraum und* $H \subset \mathscr{L}_S(E)$ *eine beschränkte Halbgruppe.*

(i) *Wenn* H *rechts-amenabel ist, dann enthält* $\overline{\text{co}}\, H'x'$ *in* $(E', \sigma(E', E))$ *für jedes* $x' \in E'$ *einen* H'*-Fixpunkt.*

(ii) *Wenn* H *links-amenabel ist, dann enthält* $\overline{\text{co}}\, Hx$ *in* $(E'', \sigma(E'', E'))$ *für jedes* $x \in E$ *einen* H''*-Fixpunkt.*

Beweisskizze. — (i) : Es sei $x' \in E'$ fest. Dann definiert $x \to \langle Tx, x' \rangle$ eine stetige lineare Abbildung von E in $C_b(H)$, deren Adjungierte das rechts-invariante Mittel $\mu \in C_b(H)'$ in ein Element $x_0' \in E'$ abbildet. $x_0' \in \overline{\text{co}}\, H'x'$ in $(E', \sigma(E', E))$ ist H'-invariant. (ii) : Nun sei $x \in E$ fest. Dann definiert $x' \to \langle Tx, x' \rangle$ eine stetige lineare Abbildung von $(E', \beta(E', E))$ in $C_b(H)$, deren Adjungierte das links-invariante Mittel $\nu \in C_b(H)'$ in ein Element $x_0'' \in E''$ abbildet. $x_0'' \in \overline{\text{co}}\, Hx$ in $(E'', \sigma(E'', E'))$ ist H''-invariant.

THEOREM 1.7. — *Für eine beschränkte, rechts-amenable Halbgruppe* $H \subset \mathscr{L}_S(E)$ *sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(*a*) H *ist mittelergodisch.*

(*b*) *Der Fixraum* F *von* H *trennt den Fixraum* F' *von* H'.

(*c*) *Für alle* $x \in E$ *ist* $(\overline{\text{co}}\, Hx) \cap F \neq \emptyset$.

Beweis. — (*b*) $\Longrightarrow$ (*a*) : Wegen (*b*) und 1.6. i enthält $\overline{\text{co}}\, H'x'$ für jedes $x' \in E'$ genau einen H'-Fixpunkt y'. Die Projektion $P' : E' \to F'$ definiert durch $P'x' = y'$ ist stetig für $\sigma(E', E)$ auf E' und $\sigma(F', F)$ auf F'. Da aber F' $\sigma(E', E)$-abgeschlossener Teilraum von E' ist, stimmt $\sigma(E', E)$ auf den gleichstetigen Teilmengen von F' mit $\sigma(F', F)$ überein. Deshalb ist $P' \in \mathscr{L}(E')$ $\sigma(E', E)$-stetig, und die Präadjungierte $P \in \mathscr{L}(E)$ erfüllt 1.2.*b*.

(*a*) $\Longrightarrow$ (*c*) $\Longrightarrow$ (*b*) : Dies folgt sofort aus Theorem 1.2.

Kompaktheitsbedingungen für $H \subset \mathscr{L}_S(E)$ sind die einfachsten Voraussetzungen, um genügend viele Fixpunkte in E zu garantieren. Dabei zeigt sich, wie mühelos man aus Definition 1.1 und den Kriterien 1.2 und 1.7 die bekannten Spezialfälle ableiten kann. Die Existenz des Nullelements unter den Voraussetzungen von 1.9 und 1.10 wird z.B. in [2], II.3.3 und II.3.15 bewiesen. Einen vollständigen Uberblick über Literatur und bekannte Ergebnisse findet man in [6], Kapitel 1, § 2 und auch in [4], Section 8.

SATZ 1.8. — *Es sei* $H \subset \mathscr{L}_S(E)$ *eine beschränkte, amenable Halbgruppe. Wenn* Hx $\sigma(E, E')$-*relativkompakt ist für alle* x *aus einem dichten Teilraum von* E, *dann ist* H *mittelergodisch.*

Beweis. — Aus der Voraussetzung und aus [11], III.4.5, IV.11.4 folgt, daß $\text{co}\, Hx$ $\sigma(E, E')$-kompakt ist für alle $x \in E$. Andererseits enthält die $\sigma(E'', E')$-Abschließung von $\text{co}\, Hx$ in E'' für alle $x \in E$ einen H''-Fixpunkt (Lemma 1.6.ii). Dieser muß aber aus Kompaktheitsgründen schon in E liegen, so daß der Satz aus 1.7.*c* folgt.

KOROLLAR 1.9. — *Jede kompakte Operator-Gruppe ist mittelergodisch.*

KOROLLAR 1.10. — *Jede kompakte abelsche Operator-Halbgruppe ist mittelergodisch.*

KOROLLAR 1.11. — *Jede beschränkte, amenable Operator-Halbgruppe auf einem reflexiven Banachraum ist mittelergodisch.*

Bemerkung. — Ein Operator $T \in \mathscr{L}(E)$ heißt mittelergodisch, wenn $H = \{T^n : n \in \mathbf{N}\}$ mittelergodisch in $\mathscr{L}_S(E)$ ist. H ist dann abelsch, also amenabel. Aus 1.7, 1.8 und 1.11 ergeben sich dann leicht die bekannten Resultate (siehe z.B. [5], [13]).

2. Operatoren auf Banachverbänden.

Nun sei E ein reeller Banachverband mit positivem Kegel E_+. Um die in [12] entwickelte Darstellungstheorie anwenden zu können, setzen wir zusätzlich voraus, daß E_+ *quasi-innere* Punkte besitzt, d.h. $E_u := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} n[-u, u]$ für geeignete $u \in E_+$ ist dichtes Ideal in E. Schließlich hat ein Banachverband E *ordnungsstetige Norm*, wenn $\lim_\pi \|x_\pi\| = 0$ gilt für jede nach unten gerichtete Familie $\{x_\pi\} \subset E$ mit $\inf_\pi x_\pi = 0$. Die Eigenschaften solcher Banachverbände werden z.B. in [7] untersucht.

Ein Operator $T \in \mathscr{L}(E)$ heißt *regulär*, wenn T Differenz zweier positiver Operatoren aus $\mathscr{L}(E)$ ist. Der Raum $\mathscr{L}^r(E)$ aller regulären Operatoren auf E ist ein ordnungsvollständiger Vektorverband, falls E ordnungsvollständig ist ([9], IV.3.2). Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn E ordnungsstetige Norm hat ([7], 4.2.) Für Halbgruppen H aus $\mathscr{L}^r(E)$ werden wir nun Mittelergodensätez beweisen sowohl vom Typ 1.2 als auch 1.7, d.h. ohne bzw. mit zusätzlichen Voraussetzungen an die algebraische Struktur der Halbgruppe.

Das folgende Lemma ist zwar ein Spezialfall des Konvexitätssatzes von M. Riesz ([6], 9.11.13), soll aber hier direkt bewiesen werden. Dazu sei E ein AL-Raum mit quasi-innerem Punkt $u \in E_+$. Wie in [12] (oder auch [7]) kann E identifiziert werden mit $L^1(X, \mu)$ für ein endliches Maß μ auf dem kompakten Strukturraum X von E. Insbesondere enthält dann jede Äquivalenzklasse in $L^1(X, \mu)$ genau eine stetige numerische Funktion, und u entspricht der Einsfunktion auf X. Weiter sei daran erinnert, daß in diesem Fall $\mathscr{L}^r(E) = \mathscr{L}(E)$ ist ([9], IV.3.8).

Lemma 2.1. — *Es sei* $T \in \mathscr{L}(L^1(X, \mu))$ *mit* $\|T\| \leqslant 1$ *und* $|T|u \leqslant u$. *Dann induziert* T *eine Kontraktion auf* $L^p(X, \mu)$ *für alle* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Beweis. — Da es genügt, die Behauptung für T^+ und T^- zu beweisen, kann man T positiv voraussetzen. Weiter ist auf Grund der gewählten Darstellung $L^\infty(X, \mu) = C(X)$.

Sei $t \in X$ und δ_t das zugehörige Diracmaß. Aus $Tu \leqslant u$ folgt $T' \delta_t \in C(X)'$. Setze $\mu_t := T' \delta_t$. Auf Grund der Hölderschen Ungleichung gilt dann für $x \in C(X)_+$ und $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned} T(x^p)(t) &= \int x^p(s)\, d\mu_t(s) \\ &\geqslant \Big(\int x(s)\, d\mu_t(s)\Big)^p = (Tx(t))^p. \end{aligned}$$

Da T Kontraktion auf $L^1(X, \mu)$ ist, folgt sofort

$$\int x^p\, d\mu \geqslant \int T(x^p)\, d\mu \geqslant \int (Tx)^p\, d\mu$$

und damit die Behauptung.

Theorem 2.2. — E *sei ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und* H *eine beschränkte Halbgruppe in* $\mathscr{L}^r(E)$. *Wenn es einen quasi-inneren Punkt* $u \in E_+$ *und eine strikt positive Linearform* $\mu \in E'$ *gibt, für die* $|T|u \leqslant u$ *und* $|T|'\mu \leqslant \mu$ *gilt für alle* $T \in H$, *dann ist* H *mittelergodisch.*

Beweis. — E sei (wie in [12]) dargestellt als Vektorverband stetiger numerischer Funktionen auf dem kompakten Strukturraum X mit u als Einsfunktion. $L^1(X, \mu)$ enthält dann E als dichtes Ideal ([7], 3.4). Jeder Operator $T \in H$ kann nun wegen $|T|'\mu \leqslant \mu$ zu einer Kontraktion T_1 auf $L^1(X, \mu)$ fortgesetzt werden, für die außerdem $|T_1|u \leqslant u$ und damit die Voraussetzung von 2.1 gilt. Sei $H_2 := \{T_2 : T \in H\}$ die Halbgruppe der von H auf $L^2(X, \mu)$ induzierten Kontraktionen. H_2 ist mittelergodisch (1.4) und besitzt P_2 als zugehörige Projektion.

Sei nun $x \in C(X)$ mit $0 \leqslant x \leqslant u$. Da auf Ordnungsintervallen von $C(X)$ die von E und von $L^2(X, \mu)$ induzierten Topologien übereinstimmen ([7], 4.7), ist $\overline{co}\, Hx$ bezüglich E und $L^2(X, \mu)$ identisch. $P_2 x$ liegt also in der in E abgeschlossenen Hülle von $co\, Hx$. Da H gleichstetig auf E ist, kann die Einschränkung von P_2 auf $C(X)$ somit stetig zu einer Projektion $P \in \mathscr{L}(E)$ fortgesetzt werden. Auch für diese gilt $PT = TP = P$ für alle $T \in H$. Aus 1.2.*b* folgt schließlich sogar $P \in \overline{co}\, H$ in $\mathscr{L}_S(E)$, da $C(X)$ dicht in E und H-invariant ist.

Besonders einfach läßt sich das obige Theorem anwenden, wenn E ein AL-Raum ist. Dann erfüllt nämlich jede kontraktive Halbgruppe $H \subset \mathscr{L}(E) = \mathscr{L}^r(E)$ die Bedingung $|T|'\mu \leqslant \mu$ für ein strikt positives $\mu \in E'$ und alle $T \in H$.

Korollar 2.3. — *E sei AL-Raum, H eine kontraktive Halbgruppe in* $\mathscr{L}(E)$. *Wenn es einen quasi-inneren Punkt* $u \in E_+$ *gibt mit* $|T|u \leqslant u$ *für alle* $T \in H$, *dann ist H mittelergodisch.*

Korollar 2.4. — *Es sei* (Ω, μ) *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $E = L^1(\Omega, \mu)$ *und H eine kontraktive Halbgruppe in* $\mathscr{L}(E)$. *Wenn* $|T|u \leqslant u$ *gilt für alle* $T \in H$ *und u die Einsfunktion auf* Ω, *dann ist die von H auf* $L^p(\Omega, \mu)$ *induzierte Halbgruppe mittelergodisch für alle* $1 \leqslant p < \infty$.

Beweis. — Der Fall $p = 1$ folgt aus 2.2, während 1.4 den Fall $1 < p < \infty$ erledigt.

Bemerkungen. — 1. Die Voraussetzungen von 2.4 sind insbesondere erfüllt, wenn die Operatoren aus H durch maßtreue Transformationen von Ω in sich induziert sind. Theorem A aus [1] ist somit nur ein sehr spezieller Fall von Korollar 2.4.

2. Wenn der Fixraum eines kontraktiven positiven Operators $T \in \mathscr{L}(E)$, E AL-Raum, nur aus $\{0\}$ besteht und $\lim_n \|T^n x\| > 0$ gilt für alle $x \in E_+$, dann enthält der in 1.3 konstruierte Teilraum keine positiven Elemente ungleich 0. Dies ist z.B. der Fall für $E = l^1$ und

$$T(\{x_1, x_2, \ldots\}) = \{0, x_1, x_2, \ldots\}.$$

Für amenable, also insbesondere abelsche Halbgruppen können wir die Voraussetzungen des Theorems 2.2 etwas abschwächen: Wie man weiß, ist ein Banachverband E mit ordnungsstetiger Norm ein Ideal in seinem Bidual. Daraus folgt wie in [11], V. 8.6, Cor. 1, daß Ordnungsintervalle in E schwachkompakt sind. Sei nun $u \in E_+$ ein quasi-innerer Punkt mit $|T|u \leqslant u$ für alle $T \in H \subset \mathscr{L}^r(E)$. Für alle $x \in [-u, u]$ ist dann $\overline{\text{co}}\, Hx$ in dem Ordnungsintervall $[-u, u]$ enthalten, also schwachkompakt. Da der von $[-u, u]$ erzeugt lineare Teilraum dicht in E ist, ergibt sich aus 1.8 der folgende Satz.

Satz 2.5. — E *sei ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, und* H *sei eine beschränkte, amenable Halbgruppe in* $\mathscr{L}^r(E)$. *Wenn es einen quasi-inneren Punkt* $u \in E_+$ *gibt mit* $|T|u \leqslant u$ *für alle* $T \in H$, *dann ist* H *mittelergodisch.*

3. Ein Irreduzibilitätskriterium.

Als Anwendung beweisen wir ein Irreduzibilitätskriterium für positive Operator-Halbgruppen (3.3), das ein bekanntes Resultat aus der Ergodentheorie ([6], 4.2.3) verallgemeinert. Dazu sei E wieder ein Banachverband.

Definition 3.1. — *Eine Halbgruppe* $H \subset \mathscr{L}(E)$ *heißt irreduzibel, wenn* $\{0\}$ *und* E *die einzigen* H-*invarianten, abgeschlossenen Ideale in* E *sind.*

Einen positiven Operator $T \in \mathscr{L}(E)$ nennen wir irreduzibel, wenn die von T erzeugte zyklische Halbgruppe $H = \{T^n : n \in \mathbf{N}\}$ irreduzibel ist. Solche Operatoren werden insbesondere in [10] untersucht. Auch in [8] spielt obige Definition und das Lemma 3.2 eine wesentliche Rolle.

Beispiele. — 1. Jede minimale Transformationsgruppe auf einem kompakten Raum X induziert eine irreduzible Gruppe von Markov-Operatoren auf C(X) (und umgekehrt).

2. Sei (Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und φ eine maßtreue Transformation von Ω in sich. Der von φ indu-

zierte Operator T_φ in $L^p(\Omega, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, ist genau dann irreduzibel, wenn φ ergodisch ist.

Lemma 3.2. — H *sei eine mittelergodische Halbgruppe positiver Operatoren auf einem Banachverband* E *mit zugehöriger Projektion* $P > 0$. *Dann sind äquivalent:*

(*a*) H *ist irreduzibel.*

(*b*) P *ist strikt positiv, und es ist* $PE = \{\alpha u : \alpha \in \mathbf{R}\}$ *für einen quasi-inneren Punkt* $u \in E_+$.

(*c*) P′ *ist strikt positiv, und es ist* $P'E' = \{\alpha\mu : \alpha \in \mathbf{R}\}$ *für eine strikt positive Linearform* $\mu \in E'$.

Beweis. — $(a) \Longrightarrow (b)$: Da $\{x \in E : P(|x|) = 0\}$ und die Abschließung von $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} n[-Px, Px]$ für jedes $0 \neq x \in E_+$ abgeschlossene H-invariante Ideale in E sind, muß P strikt positiv und Px quasi-innerer Punkt von E_+ sein. Für eine strikt positive Projektion P ist aber PE ein Unterverband von E. Für $y \in PE$ erzeugen damit die orthogonalen Elemente y^+ und y^- verschiedene H-invariante, abgeschlossene Ideale in E. Folglich muß jeweils y^+ oder y^- gleich 0 sein. Dann ist aber PE ein totalgeordneter Vektorverband und somit eindimensional.

$(b) \Longrightarrow (a)$: Sei $(0) \neq I$ ein H-invariantes, abgeschlossenes Ideal in E. Für $0 < x \in I$ ist auch $0 < Px \in I$. Da Px quasi-innerer Punkt von E_+ ist, folgt $I = E$.

$(b) \Longleftrightarrow (c)$: Beide Bedingungen bedeuten, daß $P = u \otimes \mu$ gilt für einen quasi-inneren Punkt $u \in E_+$ und eine strikt positive Linearform $\mu \in E'$.

In der Situation von Beispiel 2 ist es bekannt (siehe z.B. [6], 4.2.3), daß man die Irreduzibilität von T_φ allein durch die Eindimensionalität des T_φ-Fixraumes charakterisieren kann. Mit Hilfe unseres Ergebnisses über mittelergodische Halbgruppen in 2.2 können wir ein solches Kriterium auch für Halbgruppen beweisen.

Theorem 3.3. — E *sei ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, und* H *sei eine beschränkte, positive Halbgruppe in* $\mathscr{L}(E)$ *mit* $Tu = u$ *und* $T'\mu = \mu$ *für alle* $T \in H$, *einen* *quasi-inneren Punkt* $u \in E_+$ *und eine strikt positive Linearform* $\mu \in E'$. *Dann sind äquivalent:*

(*a*) H *ist irreduzibel.*

(*b*) *Der Fixraum von* H *in* E *ist eindimensional.*

(*c*) *Der Fixraum von* H′ *in* E′ *ist eindimensional.*

Beweis. — Wegen 2.2 ist H mittelergodisch, woraus sofort die Äquivalenz von (*b*) und (*c*) folgt. Für das Nullelement $P \in \overline{\mathrm{co}}\, H \subset \mathscr{L}_s(E)$ und für $0 \neq x \in E_+$, $0 \neq x' \in E'_+$ gilt $0 \neq \langle x, \mu \rangle = \langle Px, \mu \rangle$ und $0 \neq \langle u, x' \rangle = \langle u, P'x' \rangle$. P und P′ sind also strikt positiv. Die Äquivalenz von (*a*) und (*b*) ergibt sich dann aus Lemma 3.2.

Korollar 3.4. — *Es sei* T *ein positiver Operator auf einem* AL-*Raum* E. *Sei weiter* $Tu = u$ *für einen quasi-inneren Punkt* $u \in E_+$ *und* $\|Tx\| = \|x\|$ *für alle* $x \in E_+$. T *ist genau dann irreduzibel, wenn der Fixraum von* T *in* E *eindimensional ist.*

LITERATUR

[1] F. Aribaud, Un théorème ergodique pour les espaces L^1, *Journ. Functional Anal.*, **5**, 395-411 (1970).

[2] J. F. Berglund et K. H. Hofmann, Compact semitopological semigroups and weakly almost periodic functions, *Lecture Notes Math.* 42, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.

[3] M. M. Day, Fixed point theorems for compact convex sets, *Ill. Journ. Math.* **5**, 585-590 (1961).

[4] M. M. Day, Semigroups and Amenability. Enthalten in: Folley, K. W.: Semigroups, New York-London: Academic Press 1969.

[5] N. Dunford et J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I. New York: Interscience 1958.

[6] K. Jacobs, Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Ergebnisse der Math. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[7] R. J. Nagel, Ordnungsstetigkeit in Banachverbänden. Manuscripta Math. 9, 9-27 (1973).

[8] R. J. Nagel et M. Wolff, Abstract dynamical systems with an application to operators with discrete spectrum, *Archiv der Math.* **23**, 170-176 (1972).

[9] A. L. Peressini, Ordered Topological Vector Spaces. New York: Harper and Row 1967.

[10] H. H. Schaefer, Invariant ideals of positive operators in C(X), I. *Ill. Journ. Math.* **11**, 703-715 (1967).

[11] H. H. Schaefer, Topological Vector Spaces, 3rd print. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1971.
[12] H. H. Schaefer, On the representation of Banach lattices by continuous numerical functions. *Math. Z.* **125**, 215-232 (1972).
[13] R. Sine, A mean ergodic theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24**, 438-439 (1970).

Manuscrit reçu le 17 janvier 1973.

Accepté par G. Choquet

Rainer J. Nagel,
Mathematisches Institut
der Universität,
7400 Tübingen,
Auf der Morgenstelle 10.