ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHAEL R. HERMAN

Sur le groupe des difféomorphismes du tore

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 2 (1973), p. 75-86

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_2_75_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1973), 75-86.

SUR LE GROUPE DES DIFFEOMORPHISMES DU TORE

par Michael R. HERMAN

Soit $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ le tore de dimension n.

Si M est une variété lisse compacte, connexe, $\mathrm{Diff}^k(M)$ (k entier, $1 \leqslant k \leqslant +\infty$) est le groupe des difféomorphismes de classe C^k de M; pour la C^k topologie, c'est un groupe topologique; $\mathrm{Diff}^k_+(M)$ est le sous-groupe distingué composante connexe de l'élément neutre 1_M. Comme $\mathrm{Diff}^k(M)$ est localement connexe par arcs (voir [2]), $\mathrm{Diff}^k_+(M)$ est le groupe des difféomorphismes de classe C^k, qui sont C^k isotopes à l'identité.

Si G est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty_+(M)$, $W^\infty(G)$ désigne le plus petit sous-groupe distingué engendré par G dans $\mathrm{Diff}^\infty_+(M)$.

Si G est un groupe, on a les définitions suivantes.

DÉFINITION 1. — G *est un groupe parfait si* $G = [G, G]$ (1).

DÉFINITION 2. — *Si* G *est un groupe (resp. un groupe topologique),* G *est dit simple (resp. topologiquement simple) si* G *n'a pas d'autre sous-groupe distingué (resp. de sous-groupe distingué fermé) que l'élément neutre* $\{e\}$, *et* G *lui-même.*

On remarque que l'on a l'inclusion canonique

$$T^n \hookrightarrow \mathrm{Diff}^k_+(T^n)$$

qui à chaque $\alpha \in T^n$ associe la translation

$$R_\alpha : x \in T^n \to T^n \ni x + \alpha.$$

(1) [G, G] est le sous-groupe des commutateurs de G.

Par la suite, on identifie T^n à son image dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$. On a le théorème suivant (annoncé aussi par J. Mather [7]).

THÉORÈME. — *$\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$ est un groupe parfait* ([2]).

Pour démontrer ce théorème, on cherche le « plus possible » à conjuguer des éléments de $\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$ à des éléments de T^n; pour des raisons élucidées par V. I. Arnold [1], nous introduisons une condition diophantienne.

DÉFINITION 3. — *$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{R}^n$ satisfait à une condition diophantienne, s'il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout $(k_0, k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}^n - \{0\})$, on ait:*

$$\left|k_0 + \sum_{i=1}^n k_i\gamma_i\right| \geqslant \frac{c}{\left(\sum_{i=1}^n |k_i|\right)^\alpha}$$

Remarque. — On a nécessairement $\alpha \geqslant n$ d'après le principe des tiroirs de Dirichlet. Voir S. Lang et les références citées dans [6], § 6.

DÉFINITION 4. — *$\gamma \in T^n$ satisfait à une condition diophantienne si un relèvement $\tilde{\gamma} \in \mathbf{R}^n$ de γ satisfait à une condition diophantienne (cela ne dépend pas du relèvement).*

Introduisons quelques notations :

— si $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$, on pose $|k| = \sum_{i=1}^n |k_i|$;

— si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in T^n$, on pose

$$\langle k, \gamma\rangle = \sum_{i=1}^n k_i\gamma_i \in T^1;$$

— d désigne la métrique sur T^1, quotient de la métrique standard sur $\mathbf{R}$;

— si $\delta \in T^1$ et si 0 est l'élément neutre de T^1, on pose $\|\delta\| = d(0, \delta) \in \mathbf{R}^+$. La définition 4 est équivalente à la définition suivante.

DÉFINITION 4'. — *$\gamma \in T^n$ satisfait à une condition diophantienne s'il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout*

([2]) J'ai démontré que la composante connexe pour la C^∞ topologie du groupe des difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques de T^n est un groupe parfait (à paraître).

$k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, *on ait:*

$$\|\langle k, \gamma \rangle\| \geqslant \frac{c}{|k|^\alpha}.$$

On a la proposition de Kintchine, voir [6].

PROPOSITION 1. — *L'ensemble des* $\gamma \in \mathrm{T}^n$ *qui satisfont à une condition diophantienne pour* $\alpha = n + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ *est de mesure de Haar* 1.

Remarque. — On peut expliciter des $\gamma \in \mathbf{R}^n$ qui satisfont à une condition diophantienne.

Si $a \in \mathbf{R}$ est un nombre algébrique de degré d, avec $d \geqslant n + 1$, vérifiant pour i entier $\sum_{i=1}^{n} |a^i| < 1$, alors $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, avec $\gamma_i = a^i$ $1 \leqslant i \leqslant n$ satisfait à une condition diophantienne avec $\alpha = d - 1$ et $c > 0$. Il suffit d'appliquer le théorème 3, chapitre I, § 3 de [11].

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME FONDAMENTAL [5], [9]. — *Soit* $\mathrm{R}_\gamma \in \mathrm{T}^n$ *une translation satisfaisant à une condition diophantienne pour un* $\alpha > 0$, *et un* $c > 0$.

Soit Φ_γ *l'application continue (c'est même un* $\mathscr{L}$*-morphisme de classe* C^∞ *:*

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma : \ \mathrm{Diff}^\infty_+(\mathrm{T}^n) \times \mathrm{T}^n &\to \mathrm{Diff}^\infty_+(\mathrm{T}^n) \\ (\psi, \lambda) &\to \mathrm{R}_\lambda \circ \psi^{-1} \circ \mathrm{R}_\gamma \circ \psi. \end{aligned}$$

Alors, il existe un voisinage V *de* R_γ *dans* $\mathit{Diff}^\infty_+(\mathrm{T}^n)$ *pour la* C^∞ *topologie et une application continue (c'est même un* $\mathscr{L}$*-morphisme faible) :*

$$s : \mathrm{V} \to \mathit{Diff}^\infty_+(\mathrm{T}^n) \times \mathrm{T}^n$$

telle que si 1_V *est l'identité de V.*

$$\Phi_\gamma \circ s = 1_\mathrm{V}$$

Le lemme fondamental est un corollaire du théorème des fonctions implicites de F. Sergeraert, mais nous aurions besoin de nombreux préliminaires et nous n'en donnerons qu'une esquisse. Pour les définitions de $\mathscr{L}$-morphisme, $\mathscr{L}$-groupe, et l'énoncé du théorème des fonctions implicites, voir le résumé dans ce volume par F. Sergeraert ainsi que [9].

On peut aussi montrer une version légèrement différente de ce lemme en utilisant J. Moser [8], à savoir que l'image de Φ_γ (resp. l'image par Φ_γ des difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques) contient un voisinage de R_γ dans la C^∞ topologie, (resp. un voisinage de R_γ dans les difféomorphismes $\mathbf{R}$-analytiques pour la C^∞ topologie).

Esquisse de la démonstration du lemme fondamental.

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites de F. Sergeraert, on remarque que Φ_γ est un $\mathscr{L}$-morphisme (comme composé de $\mathscr{L}$-morphismes) de classe C^∞, entre les $\mathscr{L}$-groupes de classe I C^∞ $\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n) \times T^n$ et $\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$, voir [9] et [10].

On cherche à montrer que la différentielle $T\Phi_\gamma$ de Φ_γ a une $\mathscr{L}$-section au voisinage de I $(1_{T^n}, 0)$, $(\Phi_\gamma(1_{T^n}, 0) = R_\gamma)$; pour cela,

a) on exprime Φ_γ dans une carte,

b) on calcule la différentielle de Φ_γ dans la carte,

c) on réduit l'inversion de $T\Phi_\gamma$ à une équation fonctionnelle que l'on résoud en *d*).

a) *Expression de* Φ_γ *dans des cartes.*

1) *Cartes de* $\mathit{Diff}_+^\infty(\mathrm{M})$ *pour* M *variété compacte lisse.*

Soit $C^\infty(M, M)$ l'espace des applications de classe C^∞ de M dans M. On munit M d'une métrique riemanienne m (nécessairement complète) de classe C^∞.

m définit une application exponentielle $\exp : T(M) \to M$ si $\xi \in T_p(M)$, alors $\exp$ I $(t\xi)$ est la géodésique telle que $\exp(t\xi)|_{t=0} = p$, et $\dfrac{d}{dt}(\exp(t\xi)|_{t=0} = \xi$.

Soit $\mathrm{Exp} : T(M) \to M \times M$ l'application définie par $\mathrm{Exp} = \pi \times \exp$ où π est la projection canonique $\pi : T(M) \to M$.

On sait que Exp est un C^∞ difféomorphisme d'un voisinage V de la section nulle de T(M) sur un voisinage W de la diagonale de $M \times M$.

Si $\xi \in V$, on note : $\exp(\xi) = \pi(\xi) + \xi \in M$ et si $(x, y) \in W$, on écrit : $\operatorname{Exp}^{-1}(x, y) = y - x \in \pi^{-1}(x)$.

Soit $f \in C^\infty(M, M)$ et $f^*(T(M))$ le fibré image-réciproque du fibré tangent de M. On sait que les sections de classe C^∞ du fibré $f^*(T(M)$ s'identifient aux applications I C^∞ $\gamma : M \to T(M)$ telles que $\pi \circ \gamma = f$ (i.e. les sections de $T(M)$ au-dessus de f). On note cet espace $\Gamma_f^\infty(M)$.

Soient :

a) W_f l'ensemble des $g \in C^\infty(M, M)$ telles que pour tout x de M, $(f(x), g(x)) \in W$ (i.e. un voisinage de f dans $C^\infty(M, M)$) ;

b) V_f l'ensemble des $\gamma \in \Gamma_f^\infty(M)$ telles que pour tout x de M, $\gamma(x) \in V$. Alors, on a l'homéomorphisme suivant : $\psi_f : V_f \to W_f$ défini par

i) $\psi_f(\gamma)(x) = f(x) + \gamma(x)$ (si $\gamma \in V_f$) ;
ii) $\psi_f^{-1}(g)(x) = g(x) - f(x)$ (si $g \in W_f$).

ψ_f définit une carte au voisinage de $f \in C^\infty(M, M)$; on montre (voir [9]) que les changements de cartes sont des $\mathscr{L}$-morphismes de classe C^∞, et que l'espace tangent en $f \in C^\infty(M, M)$ est $\Gamma_f^\infty(M)$.

$\operatorname{Diff}_+^\infty(M)$ qui est un ouvert de $C^\infty(M, M)$ est donc une $\mathscr{L}$-variété de classe C^∞ ; de plus (voir [9]), on montre que c'est un $\mathscr{L}$-groupe de classe C^∞ ([3]).

2) *Cas de* $\mathit{Diff}_+^\infty(T^n)$.

On munit $\mathbf{R}^n$ de la structure euclidienne canonique : si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. On munit T^n de la métrique riemanienne quotient. Le fibré tangent $T(T^n)$ est canoniquement isomorphe à $T^n \times \mathbf{R}^n$, et l'on peut identifier $\Gamma_f^\infty(T^n)$ aux applications de classe C^∞ $\eta : T^n \to T^n \times \mathbf{R}^n$ telles que $\eta(x) = (f(x), \xi(x)) \in T^n \times \mathbf{R}^n$; $\Gamma_f^\infty(T^n)$ est donc isomorphe à $C^\infty(T^n, \mathbf{R}^n)$. On note $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = T^n$, la projection canonique.

Si $\bar{f}$ est un revêtement du difféomorphisme $f \in \operatorname{Diff}_+^\infty(T^n)$,

([3]) Dans le cadre des groupes de difféomorphismes H^s, avec des inégalités analogues à ceux des $\mathscr{L}$-morphismes voir D. G. Ebin, Espaces des métriques riemaniennes et mouvement des fluides via les variétés d'applications, cours ronéotypé, Centre de Math. de l'E.P., 17, rue Descartes, Paris V.

et si V est un voisinage assez petit de

$$0 \in \Gamma_f^\infty(T^n) \cong C^\infty(T^n, \mathbf{R}^n)$$

dans la C^1 topologie, à $\xi \in V$, on associe le difféomorphisme $\tilde{f} + \xi \circ p$ de $\mathbf{R}^n$ qui par passage au quotient définit un difféomorphisme $\overline{\tilde{f} + \xi \circ p} \in \mathrm{Diff}_+^\infty(T^n)$.

On a défini ainsi une application (elle ne dépend pas du relèvement $\tilde{f}$) qui est un homéomorphisme sur son image

$$\psi_f: \quad \Gamma_f^\infty(T^n) \supset V \to W_f \subset \mathrm{Diff}_+^\infty(T_n)$$

et l'on vérifie, en utilisant le fait que les géodésiques de T^n pour la métrique choisie sont les quotients des droites de $\mathbf{R}^n$, que ψ_f n'est rien d'autre que l'application définie en 1) et que les notations i) et ii) sont cohérentes quand on les interprète dans le revêtement universel $\mathbf{R}^n$ de T^n.

3) *Expression de* Φ_γ.

On regarde Φ_γ dans des cartes des $\mathscr{L}$-groupes $\mathrm{Diff}_+^\infty(T^n) \times T^n$ et $\mathrm{Diff}_+^\infty(T)^n$ au voisinage respectivement de $(1_{T^n} \times 0)$ et R_γ.

On peut prendre par exemple les espaces tangents $\Gamma^\infty(T^n) \times \mathbf{R}^n$ et $\Gamma_{R_\gamma}^\infty(T^n)$ où $\Gamma^\infty(T^n)$ désigne les champs de vecteurs de classe C^∞ sur T^n (au-dessus de l'identité de T^n).

Si r est un entier, $r \geq 1$, $\Gamma^r(T^n)$ (resp. $\Gamma_{R_\gamma}^r(T^n)$) désignent les espaces de Banach complétés de $\Gamma^\infty(T^n)$ (resp. $\Gamma_{R_\gamma}^\infty(T^n)$) pour la norme $|\ |_r$ définissant la C^r topologie; $\Gamma^r(T^n)$ est l'espace tangent en l'identité de $\mathrm{Diff}_+^r(T^n)$.

On peut alors écrire le prolongement de Φ_γ aux complétés (pour tout entier $k \leq r$) :

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma: \quad & \Gamma^r(T^n) \times \mathbf{R}^n \to \Gamma_{R_\gamma}^{r-k}(T^n) \\ (\xi, \lambda) & \longmapsto (1+\xi)^{-1} \circ R_\gamma \circ (1+\xi) + \lambda - \gamma \end{aligned}$$

ξ étant petit dans la C^1-topologie.

On pose $(1+\xi)^{-1} = 1 + \mu$.

Φ_γ^r est alors de classe C^k ([4]) (cf. J. Dieudonné [3] VIII 12 problème 9) et l'on montre que Φ_γ est un $\mathscr{L}$-morphisme de classe C^∞ [9], [10].

([4]) Dans la littérature, c'est aussi appelé le α et Ω lemmes.

b) Application différentielle de Φ_γ $(k \geqslant 1)$.

L'application différentielle appliquée à

$$(\hat{\xi}, \hat{\lambda}) \in \Gamma^r(\mathrm{T}^n) \times \mathbf{R}^n$$

est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\Phi_\gamma^r(\xi, \lambda) \bullet (\hat{\xi}, \hat{\lambda}) = {} & \mathrm{T}(1+\mu)_{\circ \mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi)} \bullet \hat{\xi} \\ & - \mathrm{T}(1+\mu)_{\circ \mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi)} \bullet \hat{\xi} \circ (1+\mu) \circ \mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi) + \hat{\lambda}\end{aligned}$$

où $\mathrm{T}(1+\mu)$ est la différentielle de $(1+\xi)^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ et $(\mathrm{T}(1+\mu)_{\circ \mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi)} \bullet \hat{\xi})(x)$ est la différentielle de $(1+\xi)^{-1}$ au point $\mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi)(x)$ appliquée au vecteur $\hat{\xi}(x)$ et

$$(\mathrm{T}(1+\mu)_{\circ \mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi)} \bullet \xi \circ (1+\mu) \circ \mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi)\ (x)$$

est la différentielle de $(1+\xi)^{-1}$ au point $\mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi)\ (x)$ appliquée au vecteur $\xi((1+\mu) \circ \mathrm{R}_\gamma \circ (1+\xi)(x))$.

En particulier :

$$d\Phi_\gamma^r(0, 0) \bullet (\hat{\xi}, \hat{\lambda}) = \hat{\xi} - \hat{\xi} \circ \mathrm{R}_\gamma + \hat{\lambda}.$$

c) Inversion de la différentielle de Φ_γ.

On cherche si la différentielle $\mathrm{T}\Phi_\gamma(\xi, \lambda)$ a une $\mathscr{L}$-section au voisinage de $(0, 0)$.

On a donc à résoudre $\mathrm{T}\Phi_\gamma^r(\xi, \lambda) \bullet (\hat{\xi}, \hat{\lambda}) = \eta$ où ξ, λ, η sont donnés, et $\hat{\xi}, \hat{\lambda}$ inconnus.

Pour ce faire, on compose à droite avec $(1+\xi)^{-1} = 1 + \mu$, puis on applique à gauche $\mathrm{T}(1+\mu) \circ (1+\mu) \circ \mathrm{R}_\gamma$ et l'on pose

$$\tilde{\xi} = \xi \circ (1+\mu) \tag{1}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} - \tilde{\xi} \circ \mathrm{R}_\gamma = {} & \mathrm{T}(1+\mu)_{\circ(1+\mu)\circ \mathrm{R}_\gamma} \bullet \eta \circ (1+\mu) \\ & - \mathrm{T}(1+\mu)_{\circ(1+\mu)\circ \mathrm{R}_\gamma} \bullet \hat{\lambda}.\end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{\eta} = \mathrm{T}(1+\mu)_{\circ(1+\mu)\circ \mathrm{R}_\gamma} \bullet \eta \circ (1+\mu) \tag{2}$$

et

$$\chi(\xi) = \mathrm{T}(1+\mu)_{\circ(1+\mu)\circ \mathrm{R}_\gamma} \tag{3}$$

On a à résoudre :

$$\tilde{\xi} - \tilde{\xi} \circ \mathrm{R}_\gamma = \tilde{\eta} - \chi(\xi) \bullet \hat{\lambda}.$$

On est ramené à résoudre l'équation fonctionnelle suivante : si

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{T}^n,$$
$$\tilde{\xi}(x) - \tilde{\xi}(x + \gamma) = \tilde{\eta}(x) - \chi(\xi)(x) \bullet \hat{\lambda} \qquad (+)$$

d) Résolution de l'équation fonctionnelle.

On remarque que si $dx = dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$ désigne la mesure de Haar sur T^n, alors :

$$\int_{\mathrm{T}^n} (\tilde{\xi}(x) - \tilde{\xi}(x + \gamma))\, dx = 0$$

Ce qui nous permet de déterminer $\hat{\lambda}$.

Si ξ est assez petit (dans la C^1 topologie), alors $\mathrm{M} = \int_{\mathrm{T}^n} \chi(\xi)(x)\, dx$ est une matrice proche de l'identité et donc inversible, et il suit nécessairement :

$$\hat{\lambda} = \mathrm{M}^{-1} \int_{\mathrm{T}^n} \tilde{\eta}(x)\, dx \qquad (4)$$

On a ainsi déterminé $\hat{\lambda}$.

Pour calculer $\tilde{\xi}$, on cherche son développement de Fourier :

$$\tilde{\xi}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} a_k e^{2i\pi \langle k, x\rangle}$$

connaissant celui de

$$\tilde{\eta}(x) - \chi(\xi)(x) \bullet \lambda = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} b_k e^{2i\pi \langle k, x\rangle}$$

avec $a_k \in \mathbf{C}^n$, $b_k \in \mathbf{C}^n$, $b_{-k} = \bar{b}_k$, $a_{-k} = \bar{a}_k$.

On a posé $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $\langle k, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$, le choix de $\hat{\lambda}$ donne $b_0 = 0$.

L'identification des coefficients de Fourier des deux membres de $(+)$ donne alors :

$$a_k = \frac{b_k}{1 - e^{2i\pi \langle k, \gamma\rangle}}, \qquad k \neq 0 \quad \text{et} \quad a_0 = 0.$$

On pose $|k| = \sum_{i=1}^{n} |k_i|$; et $|a_k|$ est la norme hermitienne (standard) de $a_k \in \mathbf{C}^n$. La condition diophantienne sur γ donne une majoration $|a_k| \leqslant \mathrm{C}|b_k||k|^\alpha$ avec C une constante dépendant seulement de γ.

On déduit l'existence d'une constante β (dépendant de γ et de n) telle que si $\Sigma b_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$ est de classe C^r, alors $\Sigma a_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$ est de classe $C^{r-\beta}$.

L'existence de β résulte du cas **R**-analytique et par approximation des fonctions de C^r par les **R**-analytiques (voir J. Moser [8]). On peut aussi raisonner ainsi :

Soit $L^2(T^n, dx, \mathbf{R}^n)$ l'espace des applications de T^n dans $\mathbf{R}^n$ de carré intégrable pour la mesure de Haar dx sur T^n. Si $f \in L^2(T^n, dx, \mathbf{R}^n)$ on désigne par $a_k(f)$, $k \in \mathbf{Z}^n$ les coefficients de Fourier de f. Pour r entier, $r \geqslant 0$ (par exemple) on pose

$$H^r(T^n, \mathbf{R}^n) = \{f \in L^2(T^n, dx, \mathbf{R}^n) \,\Big|\, \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (1 + |k|^2)^r |a_k(f)|^2 < +\infty\}$$

Soit $C_0^r(T^n, \mathbf{R}^n)$ (resp $H_0^r(T^n, \mathbf{R}^n)$) l'espace des $f \in C^r(T^n, \mathbf{R}^n)$ (resp. $f \in H^r(T^n, \mathbf{R}^n)$) vérifiant $a_0(f) = \int_{T^n} f(x)\,dx = 0$.

On a (par récurrence par exemple) $C^r(T^n, \mathbf{R}^n) \subset H^r(T^n, \mathbf{R}^n)$.

On voit facilement que la majoration $|a_k| \leqslant C|b_k||k|^\alpha$ (α entier) implique si $r \geqslant \alpha$, on a :

$$L : H_0^r(T^n, \mathbf{R}^n) \to H^{r-\alpha}(T^n, \mathbf{R}^n)$$

$$(b_k(f), k \in \mathbf{Z}^n) \to \left(a_k(L(f)) = \frac{b_k}{1 - e^{2i\pi\langle k,\gamma\rangle}} \text{ si } k \neq 0 \text{ et } a_0 = 0\right)$$

et par le théorème de Sobolev

$$L : C_0^r(T^n, \mathbf{R}^n) \to C^{r-\beta}(T^n, \mathbf{R}^n) \quad \text{avec} \quad \beta = \alpha + \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Autrement dit, l'application linéaire

$$L : \Sigma b_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle} \to \Sigma a_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$$

est un 1-$\mathscr{L}$ morphisme (i.e. pour tout $r > \beta$

$$L : C_0^r(T^n, \mathbf{R}^n) \to C^{r-\beta}(T^n, \mathbf{R}^n)$$

est linéaire continue).

On détermine $\tilde{\xi}$ et donc par (1) :

$$\hat{\xi} = \tilde{\xi} \circ (1 + \xi) \tag{5}$$

L'application $(\xi, \lambda, \eta) \to (\hat{\xi}, \hat{\lambda})$ étant une composée de $\mathscr{L}$-morphismes (voir les expressions (1), (2), (3), (4), (5) et [9], [10])) est un $\mathscr{L}$-morphisme qui est une $\mathscr{L}$-section de

$T\Phi_\gamma(\xi, \lambda)$ au voisinage de $(0, 0)$ et l'on peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites de F. Sergeraert, voir [9] et [10].

Il existe un voisinage de V de R_γ dans $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ pour la C^∞ topologie et une application continue

$$s : V \to \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n) \times T^n$$

telles que $\Phi_\gamma \circ s = 1_V$.

Ce qui termine l'esquisse de la démonstration du lemme fondamental.

Corollaire du lemme fondamental. — *Le plus petit sous-groupe distingué engendré par* T^n *dans* $\mathit{Diff}^\infty_+(T^n)$ *est* $\mathit{Diff}^\infty_+(T^n)$.

Démonstration. — $W^\infty(T^n)$ est d'après le lemme fondamental un sous-groupe ouvert au voisinage d'une translation R_γ satisfaisant à une condition diophantienne (il en existe); $W^\infty(T^n)$ est donc un sous-groupe ouvert et donc un sous-groupe fermé, et l'on a bien $W^\infty(T^n) = \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ car $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ est un groupe topologique connexe.

Démonstration du théorème. — Soit $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ et

$$S^1 = \partial\bar{\Delta} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

On a l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : T^1 &\to S^1 \\ t &\to e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Soit H_1 le groupe des applications biholomorphes de Δ.

Par le lemme de Schwarz, on voit facilement que $g \in H_1$ si et seulement s'il est de la forme :

$$z \in \Delta \to g(z) = \frac{\alpha(z - a)}{1 - \bar{a}z} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \partial\bar{\Delta} \text{ et } a \in \Delta \qquad (\mathrm{I})$$

H_1 est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ car g se prolonge uniquement à un difféomorphisme de $\partial\bar{\Delta} = S^1$ (voir la formule I); et donc par l'isomorphisme φ de T^1 sur S^1, H_1 est isomorphe à un sous-groupe H de $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^1)$.

Si l'on fait $a = 0$ dans (I), on a, une fois sur T^1 :

$$T^1 \hookrightarrow H \hookrightarrow \mathrm{Diff}^\infty_+(T^1).$$

H est aussi isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/\{-1, +1\}$, d'où il résulte que $H = [H, H]$. On a, si H^n est le produit de n exemplaires de H :

$$T^n \subset H^n \subset \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n).$$

Mais, on a :

$$H^n = [H^n, H^n] \subset [\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n), \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)]$$

et donc d'après le corollaire du lemme fondamental, on a les inclusions :

$$\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n) = W^\infty(H^n) \subset [\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n), \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)]$$

d'où il résulte que $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ est un groupe parfait.

Corollaire 1. — *$[Diff^k_+(T^n), Diff^k_+(T^n)]$, si k est un entier, $k \geqslant 1$, est un sous-groupe partout dense dans $Diff^k_+(T^n)$ pour la C^k topologie.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que le groupe $\mathrm{Diff}^\infty_+(T^n) \hookrightarrow [\mathrm{Diff}^k_+(T^n), \mathrm{Diff}^k_+(T^n)]$ est dense dans $\mathrm{Diff}^k_+(T^n)$ par la C^k topologie par approximation.

Corollaire 2. — *$Diff^k_+(T^n)$ est un groupe topologiquement simple si $1 \leqslant k \leqslant +\infty$ pour la C^k topologie et simple si $k = +\infty$.*

Démonstration. — Ce corollaire résulte d'une proposition d'Epstein [4] qui affirme que tout sous-groupe distingué différent de $\{1_M\}$ du groupe $\mathrm{Diff}^k_+(M)$, où M est une variété compacte connexe, contient le groupe des commutateurs $[\mathrm{Diff}^k_+(M), \mathrm{Diff}^k_+(M)]$ et le corollaire 2 résulte du corollaire 1.

Corollaire 3. — *Les difféomorphismes de T^n de classe C^∞ qui sont sur un groupe à un paramètre de classe C^∞ engendrent $Diff^\infty_+(T^n)$.*

Démonstration. — Chaque translation $R_\alpha \in T^n \subset \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ est sur un groupe à un paramètre de classe C^∞. On remarque que si $g \in \mathrm{Diff}^\infty_+(T^n)$ est sur un groupe à un paramètre de classe C^∞, alors pour tout $\psi \in \mathrm{Diff}^\infty(T^n)$, le conjugué $\psi^{-1} \circ g \circ \psi$ est aussi sur un groupe à un paramètre de classe C^∞. Le corollaire 3 résulte du corollaire du lemme fondamental (il résulte aussi du corollaire 2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. ARNOLD, Small denominators I, Trans. A.M.S. 2e série, v. 46, p. 213-284.

[2] J. CERF, *Bull. soc. Math.* Fr., 89, 1961, p. 227-380.

[3] J. DIEUDONNÉ, Fondements de l'analyse moderne, t. I, Gauthier-Villars, Paris 1967.

[4] D. B. A. EPSTEIN, « Diff (M) is simple? » Symposium on differential equations and Dynamical systems, lecture notes nº 206, Springer-Verlag, 1971, p. 52-54, voir aussi du même auteur. The simplicity of certain groups of Homeomorphisms, composito Mathematica, vol. 22, fasc. 2, 1970, p. 165-173.

[5] M. HERMAN et F. SERGERAERT, Sur un théorème d'Arnold et Kolmogorov, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, p. 409-411.

[6] S. LANG, Transcendental numbers and diophantine approximations, B.A.M.S., volume 77, Sep. 1971, p. 635-677.

[7] J. MATHER, On Heafliger's classifying, Space I, B.A.M.S., nov. 1971, p. 1111-1115.

[8] J. MOSER, *Ann. Scuola. Norm. Sup. di Pisa*, 20, 1966, p. 265-315.

[9] F. SERGERAERT, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications, *Ann. Scient. Éc. Nor. Sup.*, 4e série, t. 5, 1972, p. 599-660.

[10] F. SERGERAERT, Annonce dans ce volume.

[11] T. SCHNEIDER, « Introduction aux nombres transcendants ». Traduction Gauthiers-Villars, 1959.

Michaël R. HERMAN,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes, Paris 5e.