ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LÊ DŨNG TRÁNG

Nœuds algébriques

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 2 (1973), p. 117-126
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_2_117_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1972), 117-126.

NŒUDS ALGÉBRIQUES

par LÊ DŨNG TRÁNG

(1.1). Soit $f: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ un polynôme complexe de deux variables. On supposera que $f(0) = 0$ et que $df(0) = 0$. Comme on ne s'intéressera qu'à la topologie de la courbe plane C_0 définie par $f = 0$, on supposera que f est *réduit*, i.e. f n'a pas de facteurs carrés dans sa décomposition en facteurs irréductibles dans l'anneau des polynômes $\mathbf{C}[X, Y]$. Ceci implique que f n'a pas de facteurs carrés dans l'anneau $\mathbf{C}[[X, Y]]$ des séries formelles en O et dans l'anneau $\mathbf{C}\{X, Y\}$ des séries convergentes en O. Les hypothèses faites entraînent que O est un point singulier isolé de la courbe C_0, i.e. O est isolé dans l'ensemble algébrique défini par $f = \partial f/\partial X = \partial f/\partial Y = 0$. En fait un *théorème de Bertini* (cf. corollary 2.8 [9]) implique que f n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques et que, par conséquent, O est un point critique isolé de f. Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{C}^*$ assez petit, la courbe C_t d'équation $f = t$ est non singulière.

(1.2). En utilisant à nouveau le théorème de Bertini pour la restriction de la fonction distance à O à la courbe C_0, on trouve que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, les sphères $S_{\varepsilon'}$ centrées en O de rayon ε', $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon$, sont transverses à la partie non singulière de C_0.

Fixons-nous un tel ε. L'entrelacement $C_0 \cap S_\varepsilon$ dans S_ε s'appelle l'entrelacement de la singularité $0 \in C_0$ et on peut montrer que son type différentiable ne dépend pas de $\varepsilon > 0$ assez petit (cf. theorem 2.10 [9]). On appelle *entrelacement algébrique* tout entrelacement ayant le même type topologique que ceux que l'on obtient de la manière ainsi décrite.

Remarquons alors que, pour tout $t \in \mathbf{C}$ assez petit, C_t est encore transverse à S_ε et que l'entrelacement $C_t \cap S_\varepsilon$ dans S_ε est du même type que $C_0 \cap S_\varepsilon$ dans S_ε.

(1.3). Soit D un disque de $\mathbf{C}$ de bord S, centré en O, de rayon assez petit pour que, pour tout $t \in D$, C_t soit transverse à S_ε et que, pour tout $t \in D - \{0\}$, la courbe C_t soit non singulière. Un lemme d'Ehresmann montre alors que l'application ψ de $f^{-1}(S) \cap B_\varepsilon$ sur S induite par f est une fibration localement triviale dont les fibres sont des surfaces réelles à bord non vide. En fait la fibration ainsi définie est isomorphe à la fibration φ de Milnor de $S_\varepsilon - C_0 \cap S_\varepsilon$ sur $\mathbf{S}^1$ définie par $\varphi(z) = f(z)/|f(z)|$ (cf. Theorem 4.8 [9]), l'isomorphisme de S sur $\mathbf{S}^1$ étant celui qui conserve les arguments. Dans ce cas particulier on voit bien que les fibres ont le type d'homotopie d'un graphe donc d'un bouquet de cercles et on peut montrer que le nombre de cercles est :

$$\mu = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X, Y\}/(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$$

où $(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$ est l'idéal engendré par les dérivées partielles de f dans $\mathbf{C}\{X, Y\}$ (cf. [9] et [10]).

Remarques. — L'ensemble des assertions précédentes ne sont, pour l'essentiel, que l'application aux courbes planes des résultats généraux de J. Milnor sur les singularités isolées des hypersurfaces complexes.

On aurait pu s'intéresser à une fonction analytique f définie sur un voisinage de l'origine U de O dans $\mathbf{C}^2$ et ayant un point critique isolé en O, mais un théorème de Samuel (cf. [11]) implique qu'en fait une telle situation est analytiquement équivalente en O à la situation que l'on considère ici. Cette remarque s'applique aussi au cas plus général des fonctions analytiques à plusieurs variables ayant un point critique isolé à l'origine O de $\mathbf{C}^n$.

(1.4). Nous faisons désormais l'hypothèse que $C_0 \cap S_\varepsilon$ est connexe, donc l'entrelacement de $C_0 \cap S_\varepsilon$ dans S_ε est un nœud. On peut montrer que ceci équivaut au fait que f est analytiquement irréductible, i.e. irréductible dans $\mathbf{C}[[X, Y]]$ ou $\mathbf{C}\{X, Y\}$. Grâce à un lemme bien connu de *Hensel*, ceci implique en particulier que C_0 n'a qu'une tangente en O, i.e. que la forme initiale de f est la puissance d'une forme linéaire. Nous allons donner une description des nœuds algébriques due à *K. Brauner*. Pour cela nous avons besoin de définir les paires de Puiseux de f en O.

Nous pouvons toujours supposer que la droite $Y = 0$ est la tangente à la courbe C_0 et que par conséquent la forme initiale de f est Y^n, où n est la multiplicité de $0 \in C_0$. Ceci étant, la normalisée de C_0 étant non singulière on peut paramétriser la courbe de telle sorte que :

$$X = t^n$$
$$Y = \sum_{\nu > n} a_\nu t^\nu.$$

On appelle ceci *le développement de Puiseux de f en* O.

Par abus de notations, on désigne par $X^{\frac{1}{n}}$ une racine de l'équation $T^n - X = 0$ dans une extension algébriquement close du corps des fractions de $\mathbf{C}\{X\}$. Les autres racines sont de la forme $\xi X^{\frac{1}{n}}$ où ξ est une racine n-ième de l'unité. On écrit alors :

$$Y = \sum_{\nu > n} a_\nu X^{\frac{\nu}{n}}.$$

Dans la suite des rationnels $\left\{ \frac{\nu}{n} \middle| a_\nu \neq 0 \right\}$ il y a nécessairement un terme non entier, sinon C_0 serait non singulière en O. Soit :

$$\beta_1 = \inf \left\{ \frac{\nu}{n} \middle| a_\nu \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\nu}{n} \notin \mathbf{N} \right\}.$$

Écrivons β_1 sous forme irréductible

$$\beta_1 = \frac{m_1}{n_1} \qquad \text{avec} \qquad (m_1, n_1) = 1.$$

Si $n_1 \neq n$, alors dans la suite $\left\{ \frac{\nu}{n} \middle| a_\nu \neq 0, \frac{\nu}{n} > \beta_1 \right\}$ il y a un terme qui n'est pas dans $\frac{1}{n_1}\mathbf{N}$ sinon f serait de multiplicité n_1 en O

Soit :

$$\beta_2 = \inf \left\{ \frac{\nu}{n} \middle| a_\nu \neq 0,\ \frac{\nu}{n} > \beta_1,\ \frac{\nu}{n} \notin \frac{1}{n_1}\mathbf{N} \right\}.$$

On peut toujours écrire de façon unique :

$$\beta_2 = \frac{m_2}{n_1 n_2} \qquad \text{avec} \qquad (m_2, n_2) = 1$$

et si $n_1 n_2 \neq n$ on continue ainsi de suite. Les produits $n_1 \dots n_i$ divisent n et pour tout i, $n_i \neq 1$, donc, comme n n'a qu'un nombre fini de diviseurs, il existe un entier g, aussi appelé le *genre de la singularité de* C_0 *en* O, tel que :

$$n = n_1 \dots n_g.$$

On a ainsi défini une suite croissante de rationnels :

$$(1.4.1) \qquad \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_g,$$

appelés *exposants de Puiseux de* f *en* O, et une suite de paires d'entiers (m_i, n_i) premiers entre eux que l'on appelle *paires de Puiseux de* f *en* O. Remarquons que (1.4.1) implique :

$$(1.4.2) \qquad m_{i-1} n_i < m_i \quad i = 2, \dots, g.$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème (K. Brauner [2]) (1.4.3). — *Le nœud* $C_0 \cap S_\varepsilon$ *dans* S_ε *est le nœud torique itéré défini par la suite des paires de Puiseux* $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ *de* f *en* O.

(1.5). Nous allons définir précisément ce que l'on entend par nœud torique itéré. Soit λ_i la suite d'entiers définie par :

$$(1.5.1) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= m_1 \\ \lambda_i &= m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i \quad i = 2, \dots, g. \end{aligned}$$

Remarquons qu'à cause de (1.4.2) on a :

$$(1.5.2) \qquad \lambda_i > \lambda_{i-1} n_{i-1} n_i \quad i = 2, \dots, g.$$

Construisons alors le nœud torique (m_1, n_1) défini par l'application de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ qui à z fait correspondre z fait correspondre (z^{m_1}, z^{n_1}). Le cercle $\mathbf{S}^1$ étant orienté, l'image K_1 de cette application est une courbe fermée orientée de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Les cercles $\mathbf{S}_1 x \{e^{i\theta}\}$ sont les méridiens de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et les cercles $\{e^{i\theta}\} \times \mathbf{S}^1$ sont les parallèles de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Considérons alors dans $\mathbf{R}^3$ un voisinage tubulaire de ce nœud torique K_1. Donnons un paramétrage du bord de ce voisinage tubulaire en choisissant deux courbes fermées orientées de ce bord, l'une, qui nous donnera les méridiens, a un nombre d'entrelacements égal à 1 avec K_1, l'autre, qui nous donnera les parallèles, a un nombre d'entrelacements avec K_1 égal à 0 et est orientée de façon que la restriction de la projection du voisinage tubulaire de K_1 sur K_1 soit de degré 1. Le bord du voisinage tubulaire de K_1 est alors homéomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et l'image inverse du nœud torique (λ_2, n_2) par cet homéomorphisme définit le nœud K_2 et ainsi de suite à l'aide des (λ_i, n_i) on définit K_g que l'on appelle le nœud torique itéré défini par la suite des paires de Puiseux $(m_1, n_1), \ldots, (m_g, n_g)$.

Réciproquement tout nœud construit de cette manière à l'aide d'une suite (μ_i, ν_i) $(i = 1, \ldots, g)$ de paires d'entiers relativement premiers est un nœud algébrique si et seulement si on a les inégalités :

$$\mu_{i-1}\nu_i < \mu_i \quad i = 2, \ldots, g.$$

Nous allons donner quelques propriétés intéressantes de ces nœuds et quelques conséquences topologiques.

(2.1). Un des invariants topologiques associés, aux nœuds est le groupe du nœud $G = \pi_1(S_\varepsilon - C_0 \cap S_\varepsilon, x)$ avec

$$x \in S_\varepsilon - C_0 \cap S_\varepsilon.$$

Celui-ci a été calculé par O. Zariski dans [12] : il en a donné une présentation par générateurs et relations en fonction des paires de Puiseux.

Remarquons alors que l'abélianisé de G égal à $H_1(S_\varepsilon - C_0 \cap S_\varepsilon, \mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$, on a donc la courte suite exacte :

$$(2.1.1) \qquad \begin{array}{c} 1 \to [G, G] \to G \to G/[G, G] \to 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wr\| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{Z} \end{array}$$

et la suite exacte d'homotopie de la fibration de Milnor :

(2.1.2)

$$1 \to \pi_1(F_\theta, x) \to \pi_1(S_\varepsilon - C_0 \cap S_\varepsilon, x) \to \underset{\displaystyle \mathbf{Z}}{\underset{\wr\|}{\pi_1(\mathbf{S}^1, e^{i\theta})}} \to 1$$

avec F_θ fibre de la fibration de Milnor au-dessus de $e^{i\theta}$. Les suites exactes (2.1.1) et (2.1.2) sont isomorphes car l'abélianisé de G est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Comme $\mathbf{Z}$ est un groupe libre, la suite (2.1.2) donne une autre présentation de G en fonction de la monodromie locale. Précisément on sait que $\pi_1(F_\theta, x)$ est un groupe libre de μ générateurs $g_1, \ldots, g_\mu$; soit ξ un élément de G qui s'envoit sur le générateur de $\pi_1(\mathbf{S}^1, e^{i\theta})$; comme G est le produit semi-direct de $\pi_1(F_\theta, x)$ et de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ opère sur $\pi_1(F_\theta, x)$ et l'action du générateur de $\mathbf{Z}$ sur g_i donne un élément $\Phi_i(g_1, \ldots, g_\mu)$ de $\pi_1(F_\theta, x)$. Les générateurs de G sont alors $g_1, \ldots, g_\mu$, ξ et les relations sont :

$$(2.1.3) \qquad \xi g_i \xi^{-1} = \Phi_i(g_1, \ldots, g_\mu) \quad i = 1, \ldots, \mu.$$

Quand on abélianise $\pi_1(F_\theta, x)$ pour obtenir $H_1(F_\theta)$, l'image de $\Phi_i(g_1, \ldots, g_\mu)$ dans $H_1(F_\theta)$ est précisément le transformé par la monodromie locale de l'image de g_i dans $H_1(F_\theta)$.

Cette remarque nous permet de donner une démonstration algébrique et calculatoire de la finitude de la monodromie locale (cf. [8]). Rappelons que A'Campo en a donné une version géométrique plus compréhensible (cf. [1]).

(2.2). Nous allons rapidement indiquer comment une présentation du groupe G du nœud permet de définir d'autres invariants topologiques appelés les polynômes d'Alexander du nœud. Nous suivons pour cela la démarche de R. Fox et R. Crowell dans [4].

Soit F un groupe libre de type fini dont G est un quotient et dont le noyau de $F \to G \to 1$ est engendré par un nombre fini de relations. Nous allons définir la matrice de Fox de cette représentation, les coefficients de cette matrice étant dans l'algèbre $\mathbf{Z}[F]$ du groupe F.

Tout d'abord nous appelons dérivation de $\mathbf{Z}[F]$ un homomorphisme de groupes $D : \mathbf{Z}[F] \to \mathbf{Z}[F]$ tel que :

$$D(\nu_1\nu_2) = D(\nu_1)\tau(\nu_2) + \nu_1 D(\nu_2)$$

où $\tau : \mathbf{Z}[F] \to \mathbf{Z}[F]$ est défini par $\tau(\Sigma n_i x_i) = \Sigma n_i$. On montre alors qu'il existe une dérivation unique, notée $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, de $\mathbf{Z}[F]$ telle que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{(symbole de Kronecker)}$$

où les (x_i), $1 \leqslant i \leqslant k$, désignent une base de F.

Soit $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ les relations. La matrice « jacobienne » $(\partial r_i/\partial x_j)$ à k lignes et s colonnes est appelée matrice de Fox de la présentation du groupe G.

On a un homomorphisme naturel de $\mathbf{Z}[G]$ sur $\mathbf{Z}[G/[G, G]]$ et l'homomorphisme $F \to G$ donne $\mathbf{Z}[F] \to \mathbf{Z}[G]$. Ceci définit $\mathbf{Z}[F] \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Z}[G/[G, G]]$. Comme $G/[G, G] \simeq \mathbf{Z}$ on identifie $\mathbf{Z}[G/[G, G]] \simeq \mathbf{Z}[\mathbf{Z}]$ avec $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$. Quitte à rajouter des relations triviales, on peut toujours supposer $s \geqslant k$. Les mineurs de rang $k - p$ de la matrice $(\sigma(\partial r_i/\partial x_j))$ à coefficients dans $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ engendrent un idéal $\mathscr{E}_p$ de l'anneau $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ et on a :

$$\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{E}_k.$$

Cette suite d'idéaux est appelée suite des *idéaux élémentaires* associée à la présentation de G. On peut montrer que cette suite est indépendante de la présentation de G. On peut alors définir le plus grand idéal principal contenant $\mathscr{E}_i$. Soit $\Delta_i(t)$ le générateur de cet idéal. On appelle $\Delta_i(t)$ le i-ème polynôme d'Alexander du nœud. Évidemment $\Delta_i(t)$ est déterminé à la multiplication d'une puissance entière de t près.

(2.3). Appliquons ce qui précède à la présentation (2.1.3) du groupe G utilisant la monodromie locale. Dans ce cas la matrice $(\sigma(\partial r_i/\partial x_j))$ avec $r_{\mu+1} = 1$ égale la matrice $(\mu + 1) \times (\mu + 1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & h_* - t\mathrm{Id} & & \vdots \\ \hline 0 & \dots & & 0 \end{array}\right)$$

avec h égale à la monodromie locale de f en 0. On obtient donc :

(2.3.1) $$\mathscr{E}_0 = (0);$$

$\mathscr{E}_1 = (\Delta_1(t))$ et $\Delta_1(t)$ égale le polynôme caractéristique de h_*; le quotient de $\Delta_1(t)$ par $\Delta_2(t)$ donne le polynôme minimal de h_* à une puissance entière de t près.

En utilisant les calculs de Zariski on obtient Δ_1 et le polynôme minimal de h_*(cf. [8]). Précisément soit :

$$P_{\lambda,n}(t) = \frac{(t^{\lambda n} - 1)(t-1)}{(t^{\lambda} - 1)(t^{n} - 1)}$$

on obtient :

Théorème (W. Burau-O. Zariski) (2.3.2).

$$\Delta_1(t) = \prod_{i=1}^{g} P_{\lambda_i, n_i}(t^{\nu_{i+1}})$$

avec

$$\nu_i = n_i \ldots n_g \quad i = 1, \ldots, g$$
$$\nu_{g+1} = 1.$$

Théorème (2.3.3) (cf [8]). *Le polynôme minimal de la monodromie locale n'a que des racines simples. La monodromie locale est donc semi-simple et finie.*

Remarque. — A'Campo a montré que le théorème (2.3.3) est faux si la courbe C_0 n'est pas analytiquement irréductible en O.

(2.4). En fait, du théorème (2.3.2) et des inégalités (1.5.2) on déduit facilement le

Lemme (2.4.1). — *Soit* $\Delta_1(t) = \prod_{\alpha \in A} p_\alpha(t)^{r_\alpha}$ *la décomposition de* $\Delta_1(t)$ *en polynômes cyclotomiques irréductibles,* $p_\alpha(t)$ *désignant le polynôme des racines* α*-ièmes primitives de l'unité. Alors :*

i) $n_g \lambda_g = \operatorname{Sup}_{\alpha \in A} \alpha$;

ii) λ_g *est le plus grand diviseur de* $\operatorname{Sup}_{\alpha \in A} \alpha$ *qui ne soit pas dans* A;

iii) *Si* $\alpha \in A$ *et* $\alpha > \lambda_g$ *alors* α *divise* $n_g \lambda_g$ *et* $r_\alpha = 1$;

iv) *Si* α *divise* $n_g \lambda_g$ *et* $\alpha \notin A$ *alors* α *divise* n_g *ou* λ_g;

v) *Si* α *divise* $n_g \lambda_g$ *et ne divise ni* n_g, *ni* λ_g *alors* $\alpha \in A$.

Grâce au lemme précédent on obtient :

THÉORÈME (W. Burau [3]) (2.4.2). — *Un nœud algébrique est déterminé par son polynôme d'Alexander.*

THÉORÈME ([7]) (2.4.3). — *Deux nœuds concordants ont le même type.*

Pour démontrer le théorème (2.4.3) on utilise le théorème de R. Fox et J. Milnor qui nous dit que si deux nœuds K et L sont concordants leurs polynômes d'Alexander Δ_K et Δ_L vérifient :

$$\Delta_K(t)\,\Delta_L(t) = F(t)t^m F\left(\frac{1}{t}\right)$$

où m est le degré de F et $F(t) \in \mathbf{Z}[t]$.

Récemment Cevdet Has Bey a démontré :

THÉORÈME (Cevdet Has Bey [5]) (2.4.4). — *Le polynome d'Alexander d'un nœud algébrique n'est pas égal au produit de k polynômes d'Alexander de nœuds algébriques non triviaux avec $k \geqslant 2$.*

Ce théorème permet de démontrer (cf. [6]) que si $f_t : U \subset \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C} (t \in \mathbf{C})$ est une famille analytique de fonctions analytiques définies sur un voisinage ouvert U de $\mathbf{C}^2$ alors si f_0 a un point critique isolé en O unique dans un voisinage ouvert B de O et si pour tout t assez petit les points critiques isolés de f_t dans B ont la même valeur critique alors f_t n'a qu'un point critique x_t dans B et en x_t le type topologique de $f_t = 0$ est égal à celui de $f_0 = 0$ en O.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. A'CAMPO, Exposé au Colloque International du CNRS sur la Topologie, Strasbourg (Juin 1972), *Annales de l'Institut Fourier*, 23 (1972).

[2] K. BRAUNER, Zur Geometrie der Funktionen Zweier komplexen Veränderlichen, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 6 (1928), 1-54.

[3] W. BURAU, Kennzeichnung der Schlauchknoten, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 9 (1932), 125-133.

[4] R. CROWELL and R. FOX, Introduction to Knot theory, Ginn, 1963.

[5] CEVDET HAS BEY, Sur l'irréductibilité de la monodromie locale, *Note aux C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 275 (3 juil. 1972), Série A, 21-24.

[6] Cevdet Has Bey, Sur l'irréductibilité de la monodromie locale : applications à l'équisingularité, *Note aux C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 275, (10 juil. 1972), Série A, 105-107.

[7] Lê Dũng Tráng, Les nœuds algébriques FM-équivalents sont égaux, *Note aux C.R. Acad. Sc. Paris*, 1971.

[8] Lê Dũng Tráng, Nœuds algébriques, *Compositio Matematica*. Vol. 25, 1972, p. 281-321.

[9] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Stud.* 61, Princeton, Univ. Press.

[10] V. P. Palamodov, O kratnosti golomorfnovo otobrajienia (Sur la multiplicité des applications holomorphes), *Founk. Anal. i ievo prilojienia*, tome 1, fasc. 3, (1967), 54-65 (en russe).

[11] P. Samuel, Algébricité de certains points singuliers algébroïdes, *J. Math. Pures appl.*, 35 (1956), 16.

[12] O. Zariski, On the Topology of Algebroid Singularities, *Amer. J. Math.*, 54 (1932), 453-465.

Lê Dũng Tráng,
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes,
Paris V, France.