ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS LAUDENBACH

Quelques problèmes d'homotopie et d'isotopie dans les variétés de dimension 3 non irréductibles

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 2 (1973), p. 109-115

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_2_109_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1973), 109-115.

QUELQUES PROBLÈMES D'HOMOTOPIE ET D'ISOTOPIE DANS LES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 NON IRRÉDUCTIBLES

par François LAUDENBACH

1. Introduction, énoncé des résultats.

Il est rare en topologie que la relation d'homotopie $(\sim)$ soit équivalente à celle d'isotopie $(\approx)$. Cependant, en dimension 3, F. Waldhausen a décrit une classe de variétés pour laquelle ce genre de phénomène arrive : il s'agit des variétés *irréductibles* (toute 2-sphère y borde une boule) *suffisamment grandes*, c'est-à-dire contenant une surface *incompressible* ($M^2 \subset V^3$ est incompressible si M ne borde pas une boule et si $\pi_1(M) \to \pi_1(V)$ injectif).

Problème. — Est-ce que, pour toute variété compacte de dimension 3, un difféomorphisme est isotope à l'identité dès qu'il est homotope à l'identité?

La réponse est oui pour S^3 (Cerf [1]), pour les variétés de Waldhausen [4] et pour $\#_p S^2 \times S^1$ (*) comme nous allons le voir plus loin. A ma connaissance elle est inconnue pour les espaces lenticulaires, qui sont des variétés irréductibles mais non suffisamment grandes.

On peut obtenir des résultats sur les difféomorphismes en commençant, comme Waldhausen, par prouver que les rela-

(*) Le signe $\#$ désigne l'opération de somme connexe.

tions d'homotopie et d'isotopie coïncident dans certains espaces de sous-variétés de codimension 1.

Remarque. — L'exemple suivant prouve qu'il ne faut pas chercher à paramétrer ces sous-variétés.

Soient $f, g : S^2 \to \mathbf{R}^3$ deux plongements tels que

$$f(x) = g(-x).$$

Alors $f \sim g$, $f \not\approx g$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.

On introduit donc la définition suivante :

DÉFINITION. — *Soient* M_1, M_2 *deux sous-variétés de* V. *On dit que* M_1 *est homotope à* M_2 ($M_1 \sim M_2$), *s'il existe une variété* M *et deux plongements* $f_1, f_2 : M \to V$, *homotopes, d'images respectives* M_1 et M_2.

Conjecture. — Si S et S′ sont deux sphères plongées dans V^3, et si $S \sim S'$, alors S et S′ sont isotopes.

Cette conjecture est équivalente à la conjecture de Poincaré : soient V^3 compacte contractile, $S = \partial V^3$ et S′ le bord d'une petite boule intérieure à V^3 ; on a $S \sim S'$. Si $S \approx S'$, $V^3 = D^3$. Réciproquement on a le

THÉORÈME 1. — *Soit* V^3 *une variété satisfaisant à la conjecture de Poincaré (toute* 3*-variété compacte contractile plongée dans* V *est une vraie boule). Soient* S, S′ *deux sphères plongées homotopes dans* V. *Alors elles sont isotopes.*

Ce théorème n'a d'intérêt que si V n'est pas irréductible.

Applications. — Soit H un automorphisme de $\#_p S^1 \times S^2$, induisant l'identité sur le groupe fondamental et conservant l'orientation. On vérifie sans peine que H induit l'identité sur π_2. Alors, d'après le théorème 1, H est isotope à un difféomorphisme qui est l'identité sur chacune des sphères transverses $\{x_i\} \times S^2$, $i = 1, \ldots, p$. A ce point il n'est pas difficile de prouver les théorèmes suivants :

THÉORÈME 2. — (avec Poenaru [3]) : *Soient*

$$X(p) = \#_p S^2 \times D^2,\ Y(p) = \#_p D^3 \times S^1$$

et $f : \partial X(p) \to \partial Y(p)$ *un difféomorphisme. Alors* $X(p) \underset{f}{\cup} Y(p)$ *est difféomorphe à* S^4.

THÉORÈME 3. — *Si* H *est un difféomorphisme de* $\#_p S^1 \times S^2$ *homotope à l'identité, alors* H *est isotope à l'identité.*

La topologie nous montre assez que la résolution de problèmes de disjonction est un outil très puissant (penser par exemple à tous les théorèmes qui utilisent le théorème de disjonction de Whitney). Ici aussi, on peut déduire le théorème 1 d'un théorème de disjonction.

2. Un théorème de disjonction.

DÉFINITION. — *Soient* $M, M' \subset V$ *deux sous-variétés. Une application* $h : M' \times [0,1] \to V$ *est une homotopie de disjonction de* M' *par rapport à* M *si* $h|M' \times \{0\}$ *est l'inclusion canonique et si* $h(M' \times \{1\}) \subset V - M$.

THÉORÈME 4. — *Soit* V^3 *une variété satisfaisante à la conjecture de Poincaré et soient* S, S' *deux sphères plongées dans* V. *S'il existe une homotopie de disjonction de* S' *par rapport à* S, *alors il existe aussi une isotopie de disjonction.*

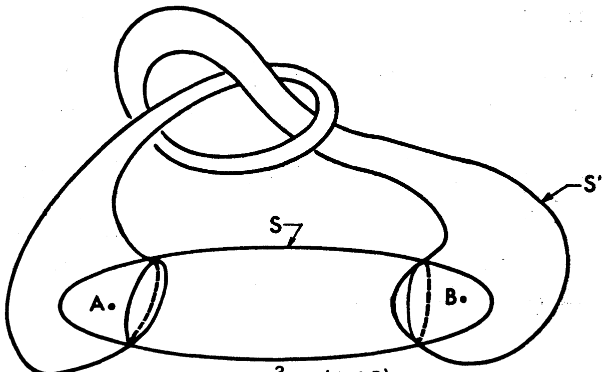
Le théorème 4 implique le théorème 1, car si $S \sim S'$, il existe une homotopie (donc une isotopie) de disjonction de S' par rapport à S. Or dans le théorème 1, si $S \cap S' = \emptyset$, ou bien S et S' bordent des boules ou bien $S \cup S'$ est le bord d'un h-cobordisme, qui est trivial par hypothèse sur V.

Remarque. — Le théorème 4 est immédiat si l'une des sphères est homotope à zéro, car, alors, elle borde une boule. Dans la suite nous exclurons ce cas.

3. Idée de la démonstration du théorème 4.

On commence par mettre S et S' en position transversale. On pourrait espérer diminuer petit à petit le nombre de courbes d'intersection sans en faire apparaître de nouvelles.

L'exemple ci-dessous montre que cet espoir est illusoire.



$V = S^3 - (A \cup B)$

Étant donnée $f : S^2 \to V$ transversale sur S, quelle est l'*obstruction* à disjoindre f de S homotopiquement?

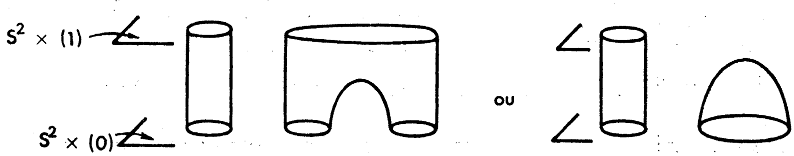
Nous esquisserons au paragraphe 4 la réponse à cette question. Elle permet d'affirmer la

Proposition 1. — *Si* $f \sim f' : S^2 \to V - S$, *alors nécessairement, il existe une homotopie élémentaire de* f *qui réduit le nombre de courbes d'intersection, c'est-à-dire il existe* h : $S^2 \times [0,1] \to V$, *transversale sur* S, *telle que*

1) $h | S^2 \times \{0\} = f$

2) $h^{-1}(S)$ *est un cobordisme élémentaire pour la projection* $p_2 : S^2 \times [0,1] \to [0,1]$.

3) *Dans* $S^2 \times [0,1]$, $h^{-1}(S)$ *est de la forme*



(H 1) (H 2)

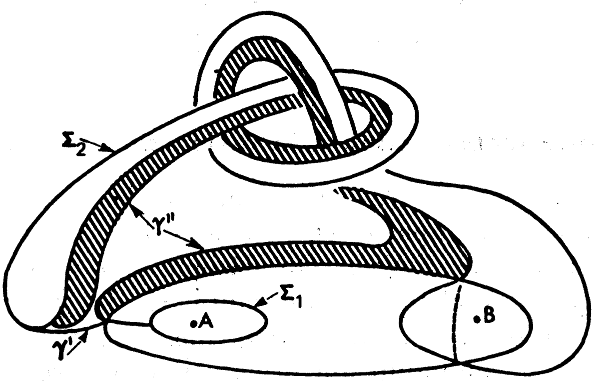
Proposition 2. — *Si* f *est un plongement et si on suppose*
ou (H 1)
ou (H 2) *et que* V *satisfait à la conjecture de Poincaré, alors* f *est isotope à un plongement* f', $f' \pitchfork S$, *tel que*

$$\operatorname{card} \pi_0(f'^{-1}(S)) < \operatorname{card} \pi_0(f^{-1}(S)).$$

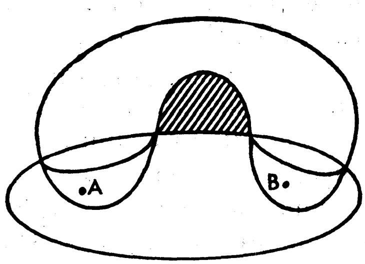
Remarques. — 1) Les propositions 1) et 2) impliquent le théorème 4.

2) L'isotopie de f à f' n'est pas élémentaire (cf. l'exemple).

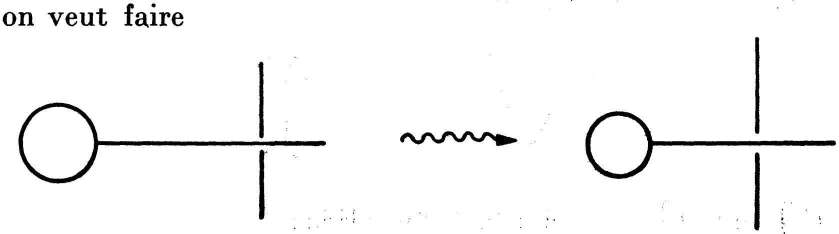
Nous allons esquisser sur le même exemple la démonstration de la proposition 2 dans le cas où (H 1) est vraie. Observons que S′ est une somme connexe $\Sigma_1 \#_{\gamma'} \Sigma_2$.



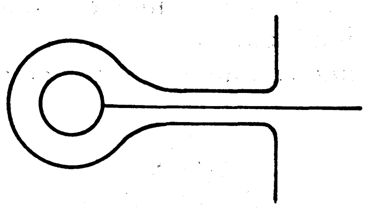
Or $S'' = \Sigma_1 \#_{\gamma''} \Sigma_2$ est clairement isotope à



situation dans laquelle la réduction par isotopie du nombre de courbes d'intersection est immédiate. Il reste à voir que S′ et S″ sont isotopes. Or (H 1) implique que γ' et γ'' sont homotopes à extrémités fixes. Leurs extrémités communes appartenant à des sphères distinctes, γ' et γ'' sont isotopes : chaque fois que, dans une homotopie régulière de γ' à γ'' on veut faire



on peut par isotopie contourner la sphère :



4. Théorie d'obstruction à la disjonction homotopique.

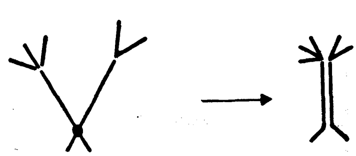
Étant donnée $f\colon S^2 \to V$ transversale sur S, sphère plongée non homotope à 0, on considère la stratification de S^2 définie par $f^{-1}(S)$. On désigne son nerf par $\Gamma(f)$; c'est un *arbre*. A chaque composante C de $f^{-1}(S)$ correspond une arête $A(C)$. En fixant une orientation du fibré normal $\nu(S, V)$ on induit une orientation des arêtes de $\Gamma(f)$.

La courbe C borde dans S^2 un disque D_+ dans lequel la normale positive rentre et un disque D_- d'où elle sort. On note $\alpha_+(C)$ et $\alpha_-(C)$ les classes d'homotopies de $f|D_+$ et $f|D_-$ parmi les applications de paires $(D^2, \partial D^2) \to (V, S)$. Puisque S est 1-connexe, ces classes appartiennent naturellement à $\pi_2(V)$. D'autre part si C et C' sont deux composantes de $f^{-1}(S)$ on choisit un chemin γ joignant C à C' dans S^2 et on considère la classe d'homotopie ω de $f|\gamma$ parmi les applications de paires $(I, \partial I) \to (V, S)$. C'est naturellement un élément de $\pi_1(V)$. Dans la suite $\Gamma(f)$ désigne l'arbre orienté muni des poids α_+, α_- et ω.

Soit H une homotopie élémentaire de f à f'; alors on passe de $\Gamma(f)$ à $\Gamma(f')$ par l'une des opérations :

(1) effondrement (collapsing) d'une arête $A(C)$ ayant une extrémité libre.

(2) Coalescence (folding) de deux arêtes $A(C_1)$ et $A(C_2)$ ayant un sommet commun



(1′) ou (2′) leurs contraires respectifs.

Nous appellerons (1) et (2) des *réductions*. Bien entendu toute opération formelle sur $\Gamma(f)$ n'est pas *admissible* c'est-à-dire induite par une homotopie élémentaire de f.

PROPOSITION 3. — (1) *est admissible si et seulement si* $\alpha_\varepsilon(C) = 0$, *où* ε *est le signe de l'extrémité libre de* $A(C)$;

(2) *est admissible si et seulement si* $\omega(C_1, C_2) = 1$.

Enfin dans l'hypothèse d'admissibilité, $\Gamma(f')$ *ne dépend que de* $\Gamma(f)$ *et non de l'homotopie* h *de* f *à* f' *qui induit l'opération formelle.*

Remarque. — Ce dernier point ne serait pas vrai pour les opérations (1') et (2').

DÉFINITION. — $\Gamma(f)$ *est réduit s'il n'admet pas de réduction admissible.*

THÉORÈME 5. — Si $f, f' : S^2 \to V$ *sont homotopes et si* $\Gamma(f)$ *et* $\Gamma(f')$ *sont réduits, alors* $\Gamma(f) = \Gamma(f')$.

COROLLAIRE. — *Il existe une homotopie de disjonction de* f *par rapport à* S *si et seulement si la forme réduite de* $\Gamma(f)$ *(unique d'après le théorème* 5*) est un point.*

Ce corollaire implique la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CERF, Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois (Γ_4=0), *Lect. Notes in Math.*, n° 53.

[2] F. LAUDENBACH, Sur les deux sphères d'une variété de dimension 3 (à paraître dans *Annals of Math*).

[3] F. LAUDENBACH et V. POENARU, A note on 4-dimensional handlebodies *Bull. Soc. Math. de France*, 100, (1972), 337-334.

[4] F. WALDHAUSEN, On irreductible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.*, 87 (1968) p. 56-88.

F. LAUDENBACH,
130, boulevard Murat,
75016-Paris.