Annales de l'institut Fourier

Jacqueline Détraz

Synthèse et algèbre de multiplicateurs de Re $A(D)$

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 1 (1973), p. 95-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_1_95_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23,1 (1973), pp. 95-112

SYNTHÈSE ET ALGÈBRE DE MULTIPLICATEURS DE Re A(D)

par Jacqueline DETRAZ

Soit Re A l'espace de Banach formé des fonctions continues réelles sur le cercle unité qui sont des parties réelles des éléments de l'algèbre du disque A(D). Dans cet article nous nous intéressons aux ensembles de synthèse pour Re A, i.e. les ensembles du cercle unité tels que toute fonction de Re A nulle sur E s'approche dans Re A par des fonctions nulles au voisinage de E. Nous montrons que tout fermé de mesure de Lebesgue nulle est de synthèse. Nous introduisons la notion de multiplicateurs de Re A ; ceci nous permet de trouver d'autres ensembles de synthèse en particulier les fermés à frontière dénombrable. Nous en déduisons le fait que si E est un fermé à frontière dénombrable, toute fonction de A(D) de norme $\leqslant 1$, de module 1 sur E est limite uniforme sur E de produits de Blaschke. Enfin, nous étudions plus systématiquement les propriétés de l'algèbre des multiplicateurs de Re A en montrant par exemple que cette algèbre n'est pas séparable.

1. Problème de synthèse dans Re A.

Soit D le disque unité ouvert, T le cercle unité qu'on identifiera à l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. On note A(D) l'algèbre des fonctions continues sur $D \cup T$, analytiques sur D, et Re A le sous-espace de de $C_R(T)$ formé des parties réelles des éléments de A(D).

Soit $f(\theta)$ un élément de Re A ; on note $\widetilde{f}(\theta)$ la fonction conjuguée de f qui est égale à l'intégrale singulière :

$$\widetilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta - t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} \frac{f(\theta - t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} \frac{f(\theta - t) - f(\theta)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt$$

Re A est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{Re\,A}} = \|f\|_\infty + \|\widetilde{f}\|_\infty \quad \text{où} \quad \| \ \|_\infty$$

désigne la norme sup. sur T ; Re A s'identifie à l'espace des fonctions continues réeles sur T dont la conjugée est continue.

Plus précisément, soit f une fonction de $C_R(T)$, $f(r, \theta)$ (resp. $\widetilde{f}(r, \theta)$ l'intégrale de Poisson de f (resp. l'intégrale de Poisson conjuguée de f) ; f sera dans Re A si et seulement si $\widetilde{f}(r, \theta)$ converge uniformément par rapport à θ, quand r tend vers 1.

Or, on sait ([3], p. 103) que

$$\widetilde{f}(r, \theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{1-r<|t|<\pi} \frac{f(\theta - t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformément}$$

par rapport à θ et $\widetilde{f}(\theta)$ est continue sur un intervalle de T si et seulement si cette dernière intégrale converge uniformément sur cet intervalle. Donc (*)

$$(*)\,\mathrm{Re\,A} = \left\{ f \ ;\ f \in C_R(T) \int_{\varepsilon<|t|<\pi} \frac{f(\theta - t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt \right.$$

$$\left. \text{converge uniformément en } \theta,\ \text{quand } \varepsilon \to 0 \right\}.$$

Les polynômes $\sum_1^p a_n z^n$ étant denses dans A(D), les polynômes trigonométriques réels sont denses dans Re A.

D'autre part, toute fonction f de C^∞ (indéfiniment dérivable) est dans Re A car

$$\left|\int_{|t|<\varepsilon} \frac{f(\theta - t) - f(\theta)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\, dt\right| \leqslant \|f'\|_\infty \times \varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc les fonctions C^∞ sont denses dans Re A, et le dual (Re A)' s'identifie à un espace de distributions ; plus précisément, si $M_R(T)$ (resp. $\widetilde{M}_R(T)$) désigne l'espace des mesures réelles sur T (resp. les conjuguées des mesures réelles sur T) on a

PROPOSITION 1. – $(\mathrm{Re}\, A)' \sim M_R(T) + \widetilde{M}_R(T)$.

En effet, Re A est isomorphe isométriquement au sous-espace de $C_R(T) \times C_R(T)$ formé des couples $(f, \widetilde{f})$ où f est dans Re A. Donc toute forme linéaire l sur Re A s'étend en un élément

$\mu_1 + \mu_2$ du dual $M_R(T) + M_R(T)$ de $C_R(T) \times C_R(T)$ et

$$l(f) = \mu_1(f) + \mu_2(\widetilde{f}) = \mu_1(f) + \widetilde{\mu}_2(f).$$

DEFINITION 1. – *Un fermé* D *de* T *est de synthèse* (resp. *de synthèse positive*) *pour* Re A *si tout élément de* Re A *nul sur* E (resp. *et positif*) *est limite dans l'espace de Banach* Re A *d'éléments de* Re A *nuls au voisinage de* E (*resp. et positifs*).

THEOREME 1. – *Tout fermé de* T *de mesure de Lebesgue nulle est de synthèse pour* Re A.

Il suffit de montrer par dualité que l'espace $(\mathrm{Re}\, A)'(E)$ formé des éléments de Re A', à support dans E et qui est l'orthogonal des éléments de Re A nuls au voisinage de E est égal à l'espace $M_R(E)$ des mesures portées par E, qui est l'orthogonal des éléments de Re A nuls sur E. Soit donc V un élément de $(\mathrm{Re}\, A)'(E)$, d'après la proposition 1, V s'écrit $V = \mu_1 + \widetilde{\mu}_2$ où μ_1 et μ_2 sont dans $M_R(T)$.

Considérons l'intégrale de Poisson de V : $V(z) = (\mathrm{I.P.V})(z)$; V étant une distribution portée par E, la limite radiale de V est nulle hors de E donc est nulle p.p. ; or la limite radiale de l'intégrale de Poisson de μ_1 existe p.p. et définit une fonction g de $L^1(T)$ égale à la partie absolument continue de μ_1 par rapport à la mesure de Lebesgue m, donc la limite radiale de l'intégrale de Poisson de $\widetilde{\mu}_2$ est égale p.p. à la fonction $-g$ de $L^1(T)$.

D'autre part, l'intégrale de Poisson $F(z)$ de $\mu_2 + i\widetilde{\mu}_2$ est une fonction analytique de H^α, i.e. telle que $\sup_{r<1} \int |F(re^{i\theta})|^\alpha \, d\theta < \infty$ pour tout $\alpha < 1$. Or, la limite radiale de I.P μ_2 est dans $L^1(T)$ et d'après ce qui précède, la limite radiale de I.P $\widetilde{\mu}_2$ est dans $L^1(T)$; $F(z)$ est donc une fonction de H^α ($\alpha < 1$) dont les limites radiales sont dans $L^1(T)$; on sait alors que $F(z)$ est une fonction de H^1 ([3], p. 270) ; donc $\mu_2 + i\widetilde{\mu}_2$ est une fonction de $L^1(T)$; $\widetilde{\mu}_2$ est une mesure et V aussi. c.q.f.d.

2. Multiplicateurs et synthèse.

DEFINITION 2. – *Une fonction u de $C_R(T)$ est un multiplicateur de* Re A *si uf est dans* Re A *pour tout élément f de* Re A.

On désigne par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des multiplicateurs. On a $\mathfrak{M} \subset$ Re A car Re A est unitaire. $\mathfrak{M}$ est une algèbre strictement incluse dans Re A (car Re A n'est pas une algèbre [1]).

D'après le théorème du graphe fermé, la multiplication par un multiplicateur est une application linéaire continue sur Re A ; $\mathfrak{M}$ est donc muni d'une structure d'algèbre de Banach avec la norme $\|u\|_{\mathfrak{M}} = \sup \{ \|fu\|_{\mathrm{Re\,A}} \; ; \; \|f\|_{\mathrm{Re\,A}} \leq 1 \}$.

PROPOSITION 2. – *Soit u une fonction de $C_R(T)$ telle que*

$$\int_{\pi > |t| > \varepsilon} \left| \frac{u(\theta - t) - u(\theta)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| dt$$

converge uniformément/θ si $\varepsilon \to 0$, *alors u est un multiplicateur.*

Soit f un élément de Re A et

$$I_\varepsilon = \int_{\varepsilon < |t| < \pi} \frac{f(\theta - t)\, u(\theta - t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \, dt$$

$$I_\varepsilon = u(\theta) \int_{\varepsilon < |t| < \pi} \frac{f(\theta - t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \, dt + \int_{\varepsilon < |t| < \pi} \frac{f(\theta - t)\, u(\theta - t) - u(\theta)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \, dt$$

La première intégrale converge uniformément quand $\varepsilon \to 0$, d'après (*) car f est dans Re A. La seconde converge aussi uniformément car

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(\theta - t) \frac{u(\theta - t) - u(\theta)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \, dt \right| \leqslant \|f\|_\infty \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{u(\theta - t) - u(\theta)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| dt$$

et cette dernière intégrale converge uniformément vers zéro par hypothèse. Donc I_ε converge uniformément et d'après (*) uf est dans Re A.

COROLLAIRE 1. – *Pour tout $\alpha > 0$ l'espace Λ_α des fonctions réelles lipschitziennes d'ordre α est contenu dans $\mathfrak{M}$.*

Soit u un élément de Λ_α, il existe M tel que

$$|u(\theta - t) - u(\theta)| < Mt^\alpha \quad \left| \frac{u(\theta - t) - u(\theta)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| < M' \times t^{\alpha - 1}.$$

La fonction $t^{\alpha-1}$ est intégrable pour tout $\alpha > 0$; les hypothèses de la proposition 2 sont vérifiées.

PROPOSITION 3. – *Il existe une constante k, une suite $\alpha_n > 0$ et une suite u_n de fonctions continues sur $[-\pi, +\pi]$ telle que u_n soit égale à 1 sur $[-\alpha_n, +\alpha_n]$, nulle en dehors de $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, linéaire sur $\left[-\frac{1}{n}, -\alpha_n\right]$ et $\left[\alpha_n, \frac{1}{n}\right]$ et $\|u_n\|_{\mathfrak{M}} < k$.*

De telles fonctions sont dans Λ_1 donc dans $\mathfrak{M}$.

La norme des fonctions de A(D) donc de Re A donc de M est invariante par les transformations conformes de D sur D.

Soit U une fonction continue sur T, égale à 1 sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, nulle en dehors de $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ linéaire ailleurs.

Soit $l_n(e^{i\theta}) = \dfrac{e^{i\theta} - a_n}{1 - a_n e^{i\theta}}$ (où a_n est réelle), la représentation conforme telle que $l_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Posons $u_n = \mathrm{U} \circ l_n$, $\| u_n \|_{\mathfrak{M}} = \| \mathrm{U} \|_{\mathfrak{M}}$, les fonctions u_n satisfont les conditions cherchées avec $\alpha_n = l_n^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

On vérifie que α_n est équivalent à $\frac{1}{n}$ à une constante multiplicative près.

COROLLAIRE 2. – *Soit f un élément de* Re A *nul en zéro, alors* $\| f u_n \|_{\mathrm{Re\,A}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

En effet, d'après le théorème 1, le point 0 est de synthèse ; donc pour tout p il existe un élément f_p de Re A nulle au voisinage de zéro telle que $\| f - f_p \|_{\mathrm{Re\,A}} < \frac{1}{p} \cdot$ Or, pour tout n assez grand,

$$f_p u_n \equiv 0 \text{ donc } \| f u_n \|_{\mathrm{Re\,A}} = \| (f - f_p)\, u_n \|_{\mathrm{Re\,A}} \leqslant \frac{1}{p} \times k \;;$$

donc $\| f u_n \|_{\mathrm{Re\,A}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

DEFINITION 3. – *Soit* E *un fermé de* T ; *on note* $\mathrm{J_E}$ (resp. $\mathrm{J_E^+}$) *l'espace fermé des éléments de* Re A *qui sont limites dans* Re A *de fonctions quelconques (resp. positives) de* Re A *nulles au voisinage de* E. *Soit θ un point de* T, *une fonction f définie sur* T *appartient localement en θ à* $\mathrm{J^+(E)}$ (resp. J(E)) *s'il existe un voisinage* $\mathrm{V}(\theta)$ *et une fonction g de* $\mathrm{J^+(E)}$ (resp. J(E)) *tel que $f = g$ sur* $\mathrm{V}(\theta)$.

PROPOSITION 4. – *Une fonction définie sur* T *qui appartient localement en tout point à* $\mathrm{J^+(E)}$ (resp. J(E)) *est dans* $\mathrm{J^+(E)}$ (resp. J(E)).

Soit f une fonction appartenant à $\mathrm{J^+(E)}$ localement en tout point. Par compacité, il existe un recouvrement de T par n ouverts $\mathrm{U_1}, \mathrm{U_2}, \ldots, \mathrm{U}_n$ et n fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de $\mathrm{J^+(E)}$ telle que $f(\theta) = g_i(\theta)$ pour θ dans U_i

Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une partition de l'unité dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{T})$ relativement à ce recouvrement : $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty$, $\Sigma\, \varphi_i = 1$; support $\varphi_i \subset \mathrm{U}_i$; $\varphi_i \geqslant 0$. En particulier, φ_i est un multiplicateur positif de Re A et

$$f = \Sigma \varphi_i f = \Sigma \varphi_i\, g_i$$

or $\varphi_i g_i$ est, comme g_i, dans $J^+(E)$, donc f est dans $J^+(E)$. La même démonstration s'applique à J(E).

THEOREME 2. – *Soit* E *un fermé de* T *dont la frontière* δE *ne contient aucun ensemble parfait (en particulier est dénombrable). Alors* E *est de synthèse positive.*

Soit f une fonction positive de Re A, nulle sur E.

Si θ est un point de T\E, il existe une fonction φ de $\mathcal{C}^\infty$, positive, nulle, au voisinage de E, égale à 1 au voisinage de θ, $f\varphi = f$ au voisinage de θ.

Si θ est dans l'intérieur de E, $f = 0$ au voisinage de θ.

Donc f est dans $J^+(E)$ localement en tout point de $T\setminus\delta E$. Soit K l'ensemble des points de δE tel que f n'appartienne pas localement à $J^+(E)$ en ces points.

Si K n'est pas vide, par hypothèse il n'est pas parfait, il a donc des points isolés. Soit x_0 un tel point, on peut supposer $0 = x_0$. Il existe donc un voisinage U(0) tel que f appartienne localement à $J^+(E)$ en tout point de $U(0)\setminus\{0\}$.

Soit ν une fonction positive de $\mathcal{C}^\infty$ à support dans U(0), égale à 1 au voisinage de 0, $f\nu(0) = 0$, et d'après le corollaire 2, en utilisant les fonctions u_n de la proposition 3,

$$\|f\nu u_n\|_{\mathrm{Re\,A}} \to 0, \text{ i.e. } f\nu(1 - u_n) \to f\nu \text{ dans Re A or } f\nu(1 - u_n)$$

appartient comme f à $J^+(E)$ localement en tout point différent de 0 et en 0 aussi car elle est nulle au voisinage de zéro. Donc $f\nu(1 - u_n)$ d'où $f\nu$ est dans $J^+(E)$. Or $f\nu = f$ au voisinage de 0 ; donc f est dans $J^+(E)$ localement en zéro ; d'où une contradiction et $K = \emptyset$. Donc f est dans $J^+(E)$ et E est de synthèse positive.

La même démonstration montre que E est aussi de synthèse.

3. Approximation par des produits de Blaschke.

Le théorème précédent permet d'obtenir pour l'algèbre A(D) des théorèmes d'approximation en particulier par des produits de Blaschke.

On sait [2] que si E est un fermé de mesure nulle, toute fonction continue de module 1 sur E est limite uniforme sur E de produits de Blaschke finis. On va s'intéresser ici aux ensembles de mesure quelconque.

PROPOSITION 5. – *Soit* E *un fermé de* T ; *toute fonction extérieure de* A(D) *de module* 1 *sur* E *est limite uniforme sur* T *de fonctions inversibles de* A(D) *de module* 1 *sur* E.

Si de plus la fonction initiale est de norme 1, *les fonctions qui approchent peuvent être choisies de norme* 1.

Soit F une telle fonction ; F s'annule sur un fermé K de T, disjoint de E, de mesure nulle et F s'écrit

$$F(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} f(\theta)\, d\theta$$

où f est une fonction réelle intégrable (positive si $\|F\| = 1$) continue ainsi que sa fonction conjuguée hors de K, nulle sur E et tendant vers $+\infty$ si θ tend vers les points de K. Pour tout ε il existe un voisinage $V_0(K)$ disjoint de E telle que $|F(\theta)| < \varepsilon$ pour θ dans V_0.

Soit V_1 un voisinage de K tel que $V_0 \supset \overline{V}_1$ tel que

$$\sup \left\{ \int_{V_1} |f(t)|\, dt, \int_{V_1} dt \right\} < \frac{\varepsilon \times (-\operatorname{Log} \varepsilon)}{\operatorname{distance}(V_1, T \backslash V_0)}.$$

Soit $V_2(K)$ et $V_3(K)$ tel que $\overline{V}_3 \subset V_2$ et $\overline{V}_2 \subset V_1$.

Soit u_1 et u_2 deux fonctions positives de C^∞ telles que

$$\|u_1\|_\infty = 1 = u_1(\theta)$$

pour θ dans $T \backslash V_2$, $u_1(\theta) = 0$ pour θ dans V_3,

$$\|u_2\|_\infty = -\log \varepsilon = u_2(\theta)$$

pour θ dans V_2, $u_2(\theta) = 0$ pour θ dans $T \backslash V_1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha<|t|<\pi} \frac{f(\theta - t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\, dt$ converge uniformément sur tout compact de $T \backslash K$, quand $\alpha \to 0$, car $\widetilde{f}$ y est continue ; on déduit comme dans la proposition 1 que $\displaystyle\int_{\alpha<|t|<\pi} \frac{f(\theta - t)\, u_1(\theta - t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt$

converge aussi uniformément sur ces compacts, donc sur T tout entier car u_1 est nul dans le voisinage V_3 de K. Donc fu_1 est continue sur T et $fu_1 + u_2$ est un élément de Re A.

Posons

$$G(z) = \exp - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} (fu_1 + u_2)\, d\theta$$

G est un élément inversible de Re A de module 1 sur E car

$$|G(e^{i\theta})| = \exp - (fu_1 + u_2(\theta)) \text{ et } \|G\| = 1 \text{ si } \|F\| = 1.$$

D'autre part, pour θ dans V_2 $|G(e^{i\theta})| \leqslant \exp - u_2(\theta) < \varepsilon$

pour θ dans $V_0 \backslash V_2$, $|G(e^{i\theta})| \leqslant \exp - f(\theta) =$

$= |F(e^{i\theta})| < \varepsilon$.

Donc, pour θ dans V_0, $|(G - F)(\theta)| < 2\varepsilon$.

Pour θ dans $T \backslash V_0$, $fu_1 + u_2 = f$

$$|\widetilde{fu_1 + u_2}(\theta) - \tilde{f}(\theta)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\theta - t \in V_1} \frac{dt}{\left|\operatorname{tg} \frac{(\theta - t)}{2}\right|} \Big(|f(\theta - t)| + |u_2(\theta - t)|\Big)$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\text{distance } (V_1, T \backslash V_0)} \times$$

$$\times \left[\int_{V_1} |f(t)|\, dt + - \log \varepsilon \int_{V_1} dt\right] \leqslant c\varepsilon$$

où c est une constante absolue. On a donc $\|G - F\|_\infty \leqslant c\varepsilon$; d'où la proposition.

COROLLAIRE 3. – *Soit* E *un ensemble de synthèse positive ; toute fonction extérieure, de norme* 1, *de module* 1 *sur* E, *est limite uniforme sur* T *de fonctions inversibles de* A(D) *de norme* 1, *de module* 1 *au voisinage de* E.

Soit F une telle fonction : d'après la proposition précédente, elle est limite uniforme sur T de fonctions inversibles G de norme 1, de module 1 sur E ; G s'écrit $G = e^{-H}$ où H est dans A(D), $\operatorname{Re} H \geqslant 0$ et $\operatorname{Re} H = 0$ sur E qui est de synthèse positive ; donc Re H est limite dans Re A de fonctions $\operatorname{Re} H_n$ de Re A, positives nulles au voisinage de E. D'où G, et donc F, est limite uniforme sur T des fonctions e^{-H_n}. c.q.f.d.

PROPOSITION 6. – *Soit* E *un fermé de synthèse positive pour* Re A ; *toute fonction de* A(D) *de norme* 1, *de module* 1 *sur* E *est limite uniforme sur* E *de produits de Blaschke.*

La condition que la fonction soit de norme 1 est nécessaire ; en effet, soit B_n une suite de Blaschke tendant uniformément sur E vers une fonction F ; pour tout $z = re^{i\theta}$ de D, $P_r(t)$ étant le noyau de Poisson au point r, on a

$$\operatorname{Log} |B_n - F|(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_E \operatorname{Log} |B_n - F|(e^{it}) P_r(\theta - t)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{T\setminus E} \operatorname{Log} |B_n - F|(e^{it}) P_r(\theta - t)\, dt.$$

Les fonctions B_n étant bornées, la deuxième intégrale est bornée supérieurement, alors que la première tend vers $-\infty$, donc

$$B_n(z) \to F(z) \quad \text{et} \quad \|F\| \leqslant 1.$$

La proposition est une conséquence classique [2] du corollaire 3. En effet, soit F une fonction de A(D) telle que $\|F\| = 1 = |F(\theta)|$ pour θ dans E F = BSG ; le support de la mesure singulière définissant la fonction singulière S, et l'ensemble des points d'accumulation des zéros du produit de Blaschke B sont contenus dans l'ensemble K des zéros de la fonction extérieure G, on a

$$K \cap E = \emptyset \quad \text{et} \quad \|G\| = 1 = |G(\theta)|$$

pour θ dans E. D'après le corollaire 3, F est limite uniforme sur T de fonctions BG_n avec $G_n(z) = \exp - \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta)$ où μ est une mesure positive à support disjoint de E ; on peut conclure alors par exemple en discrétifiant la mesure π et en remarquant que les fonctions $\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$ forment une famille équicontinue de fonctions de θ, sur le support de μ, lorsque z parcourt E et que pour tout $a \neq 0$, $|a| < 1$ et pour $\lambda > 0$, α avec $|\alpha| = 1$, la fonction singulière $\dfrac{\exp\left(\lambda \dfrac{\alpha + z}{\alpha - z}\right) - a}{1 - a \exp \lambda \dfrac{\alpha + z}{\alpha - z}}$

est un produit de Blaschke.

Finalement F est limite uniforme sur E de produits de Blaschke dont les zéros s'accumulent sur des compacts disjoints de E, donc limite uniforme sur E des sous produits finis de ces produits. c.q.f.d.

En particulier, d'après le théorème 2, tout ensemble à frontière sans ensemble parfait a la propriété d'approximation précédente.

4. Etude de l'algèbre des multiplicateurs.

On note H^∞ l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur D. Elle s'identifie à une sous algèbre fermée de l'algèbre $L^\infty(T)$ des fonctions essentiellement bornées sur T. Re H^∞ est aussi un espace de Banach avec la norme $\|f\|_{\mathrm{Re\,H}^\infty} = \|f\|_\infty + \|\widetilde{f}\|_\infty$. On peut définir les multiplicateurs de Re H^∞ dans Re H^∞, (resp. les multiplicateurs de Re A dans Re H^∞) comme étant les fonctions u de $L^\infty(T)$ telles que u Re $H^\infty \subset$ Re H^∞ (resp. u Re A $\subset$ Re H^∞). D'après le graphe fermé les multiplicateurs sont des opérateurs bornés.

Proposition 7. — *Soit u un élément de* Re A, *multiplicateur de* Re A *dans* Re H^∞, *alors u est dans* $\mathfrak{M}$.

Soit f un élément dans Re A, pour tout ε il existe g dans $C^\infty(T)$ tel que $\|f - g\|_{\mathrm{Re\,A}} \leqslant \varepsilon$; soit α la norme d'opérateur de u de Re A dans Re H^∞, on a alors $\|u(f - g)\|_{\mathrm{Re\,H}^\infty} \leqslant \alpha\varepsilon$.

Or, ug est dans Re A, donc uf et sa conjuguée sont approchées uniformément sur T par des fonctions de Re A et leurs conjuguées ; donc uf est dans Re A et u est dans $\mathfrak{M}$.

Proposition 8. — *Tout multiplicateur de* Re A *est un multiplicateur de* Re H^∞.

Soit u dans $\mathfrak{M}$ et f dans Re H^∞ ; on a $f =$ Re F avec F dans H^∞. Posons $f_n(\theta) =$ I.P $f(r_n e^{i\theta})$ où r_n est une suite tendant vers 1. Alors

f_n est dans Re A ; donc uf_n = Re G_n est dans Re A et

$$\|G_n\|_\infty \leqslant \|uf_n\|_{\mathrm{Re\,A}} \leqslant \|u\|_{\mathfrak{M}} \, \|f_n\|_{\mathrm{Re\,A}} \leqslant 2\,\|u\|_{\mathfrak{M}} \, \|F\|_\infty .$$

Les fonctions G_n forment une famille bornée dans H^∞ ; il existe donc une sous suite G_{n_p} convergeant ponctuellement sur D vers une fonction G de H^∞. En particulier (I.P. uf_{n_p}) $(z) \to$ Re $G(z)$ pour z dans D.

Or $f_{n_p}(\theta) \to f(\theta)$ p.p., donc $uf_{n_p}(\theta) \to uf(\theta)$ p.p. ; on en déduit que (I.P uf_{n_p}) $(z) \to$ (I.P. uf) (z) pour tout z de D.

D'où (I.P. uf) (z) = Re $G(z)$ pour z dans D et uf est dans Re H^∞. c.q.f.d.

PROPOSITION 9. — *Soit u_n une suite de multiplicateurs de* Re H^∞ *tel que* $\sup_n \|u_n\|_{\mathfrak{M}_{H^\infty}} = K < \infty$, *et u_n converge vers u pour la topologie* $\sigma(L^\infty, L^1)$ *alors u est un multiplicateur de* Re H^∞.

Soit f une fonction de Re H^∞, alors

$$\|(u_n f + i u_n f\| \leqslant \|u_n\|_{\mathfrak{M}_{H^\infty}} \, \|f\|_{\mathrm{Re\,H^\infty}} < K \, \|f\|_{\mathrm{Re\,H^\infty}}.$$

Il existe une sous suite n_p et une fonction G de H^∞ telle que

(I.P $(u_{n_p} f + i u_n f)$ $(z) \to G(z)$ pour z dans D
or
(I.P $u_{n_p} f$) $(z) \to$ (I.P uf) (z), donc uf = Re G $\in$ Re H^∞. c.q.f.d.

Des propositions 7, 8, 9 on déduit :

COROLLAIRE 4. — *Soit u_n une suite de $\mathfrak{M}$ et u une fonction de* Re A *telles que $u_n(\theta) \to u(\theta)$ pour θ dans* T *et* $\sup_n \|u_n\|_{\mathfrak{M}} < \infty$, *alors u est dans $\mathfrak{M}$.*

PROPOSITION 10. — *Soit u dans* $L^\infty(T)$, tel que

$$\sup_\theta \int \left| \frac{u(\theta + t) - u(\theta)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| dt = \|u\|_{\mathfrak{L}} < \infty$$

alors u est un multiplicateur de Re H^∞ *dans* Re H^∞ *de norme inférieure à* $\|u\|_\infty + \|u\|_{\mathfrak{L}}$.

En effet, une fonction de $L^\infty(T)$ est dans Re H^∞ si sa fonction conjuguée (qui existe presque partout) est bornée essentiellement. Et l'hypothèse ci-dessus garantit (cf. la proposition 2) que $\widetilde{uf}$ est borné pour tout f dans Re H^∞.

THEOREME 3. — *L'algèbre $\mathfrak{M}$ n'est pas séparable.*

Soit I un intervalle ouvert quelconque ; par régularisation par convolution les fonctions C^∞ à support dans I (donc les multiplicateurs à support dans I) sont denses pour la norme de Re A dans l'ensemble des fonctions de Re A à support dans I ; d'autre part, cet ensemble n'est pas une algèbre, sinon pour tous les translatés de I ce serait une algèbre, et en utilisant une partition de l'unité dans C^∞ associée à un recouvrement par des translatés de I on déduirait que Re A est une algèbre.

Donc, pour les multiplicateurs à support dans I, les normes $\| \ \|_{\mathfrak{M}}$ et $\| \ \|_{\mathrm{Re\,A}}$ ne sont pas équivalentes, il existe des multiplicateurs u à support dans I tel que $\|u\|_{\mathfrak{M}} = 1$ et $\|u\|_{\mathrm{Re\,A}}$ soit arbitrairement petit.

Il existe donc une suite w_n d'éléments de Re A à support dans $\left[-\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^3}\right]$ telle que $\|w_n\|_{\mathrm{Re\,A}} \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\|w_n\|_{\mathfrak{M}} = 1$.

Posons $v_n(\theta) = w_n\left[\frac{1}{n} - \theta\right]$, on a encore

$$\|w_n\|_{\mathrm{Re\,A}} \leqslant \frac{1}{n^2}, \ \|w_n\|_{\mathfrak{M}} = 1$$

et v_n est à support dans $I_n = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right]$ et les I_n sont disjoints.

Posons $v(\theta) = \sum_1^\infty v_n(\theta)$ cette série converge dans Re A donc v est dans Re A. Pour montrer que v est dans $\mathfrak{M}$, il suffit, d'après la proposition 7, de montrer que c'est un multiplicateur de Re A dans Re H^∞.

Soit f un élément de Re A

$$|\widetilde{fv}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int \left[\frac{f(\theta - t)\ \sum_{1}^{\infty} v_n(\theta - t)\, dt}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right]$$

Si θ appartient à un intervalle

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_0 + 1} + \frac{1}{n_0}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_0 - 1} + \frac{1}{n_0}\right)\right] = \mathrm{J}_{n_0}$$

$$|\widetilde{fv}(\theta)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int \frac{f(\theta - t)\ v_{n_0}(\theta - t)\, dt}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\ \|f\|_\infty \sum_{n \neq n_0} \|v_n\|_\infty \int_{\theta - t \in \mathrm{I}_n} \left|\frac{dt}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right|.$$

$$\leqslant \|f\|_{\mathrm{Re\,A}}\ \|v_{n_0}\|_{\mathcal{M}} + \frac{1}{2\pi}\ \|f\|_\infty \sum_{n \neq n_0} \frac{m(\mathrm{I}_n)}{\frac{1}{2}\operatorname{dis}(\theta\ , \mathrm{I}_n)}.$$

C désignera dans la suite une constante absolue

$$\operatorname{dis}(\theta\ , \mathrm{I}_n) > \mathrm{C}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}\right| \qquad n \neq n_0$$

donc

$$\sum_{n \neq n_0} \frac{m(\mathrm{I}_n)}{\operatorname{dis}(\theta\ , \mathrm{I}_n)} \leqslant \sum_{n \neq n_0} n^{-3} \frac{n_0}{|n - n_0|} \leqslant \Big(\sum_{n < \frac{n_0}{2}} + \sum_{n > \frac{n_0}{2}}^{\infty}\Big) n^{-3} \frac{n_0}{\left|\frac{n - n_0}{2}\right|}$$

$$\leqslant \sum_{n < \frac{n_0}{2}} n^{-3} \frac{n_0}{\frac{n_0}{2}} + \sum_{n > \frac{n_0}{2}} n^{-3}\, 4n \leqslant \sum_{n \in \mathrm{N}} 2n^{-3} +$$

$$+ \sum_{n \in \mathrm{N}} 4n^{-2} = \mathrm{C} < \infty.$$

Et $\widetilde{fv}(\theta) \leqslant \|f\|_{\mathrm{Re\,A}}\mathrm{C}$.

Si θ n'appartient à aucun des intervalles J_n

$$\widetilde{fv}(\theta) \leqslant \frac{1}{2\pi} \|f\|_\infty \sum_n \|v_n\|_\infty \frac{m(I_n)}{\mathrm{dis}(\theta\ ,I_n)} \leqslant C \|f\|_\infty \Sigma \|v_n\|_\infty \frac{n^{-3}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= C \|f\|_\infty \Sigma \frac{1}{n^2}.$$

On a donc $\sup\limits_{\theta \in T} |\widetilde{fv}(\theta)| \leqslant \infty$, fv est dans $\mathrm{Re}\,H^\infty$; donc v est dans $\mathcal{M}$. De la même façon si J est une partie quelconque de $\mathbf{N}$, on démontre que $v_J = \sum\limits_{n \in J} v_n$ est dans $\mathcal{M}$.

Considérons deux parties J et J′ différentes de $\mathbf{N}$ et soit n_0 tel que $n_0 \in J$, $n_0 \notin J'$. Il existe f dans Re A tel que $\|v_{n_0} f\|_{\mathrm{Re\,A}} \geqslant \frac{1}{2}$ et $\|f\|_{\mathrm{Re\,A}} < 1$ (car $\|v_{n_0}\|_{\mathcal{M}} = 1$).

Considérons la fonction $u_{n_0^2}$, les nombres α_{n^2} et k définis dans la proposition 3 alors la fonction $k_{n_0}(\theta) = u_{n_0^2}\left(\frac{1}{n_0} - \theta\right)$ vérifie $v_n k_{n_0} = 0$ pour $n \neq n_0$, $v_{n_0} k_{n_0} = 1$ (car $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$ à un cste près) et $\|k_{n_0} f\|_{\mathrm{Re\,A}} \leqslant \|k_{n_0}\|_{\mathrm{M}} \leqslant k$. D'où

$$\|(v_J - v_{J'})\, k_{n_0}(f)\|_{\mathrm{Re\,A}} = \|v_{n_0} f\|_{\mathrm{Re\,A}} \geqslant \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2k} \|k_{n_0} f\|_{\mathrm{Re\,A}}, \text{ donc}$$

$$\|v_j - v_{j'}\|_{\mathrm{M}} \geqslant \frac{1}{2k}$$

Les fonctions v_j forment une famille non dénombrable dans $\mathcal{M}$ dont les distances deux à deux sont supérieures à une constante, $\mathcal{M}$ n'est pas séparable.

COROLLAIRE 5. – *Un point n'est pas de synthèse pour* $\mathcal{M}$.

Soit v la fonction de $\mathcal{M}$ définie dans le théorème précédent ; pour toute fonction w de $\mathcal{M}$ nulle au voisinage de zéro, on a, comme précédemment, pour n assez grand $\|v - w\|_{\mathcal{M}} \geqslant \frac{1}{2k} \|v_n\|_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2k}$.

COROLLAIRE 6. – *La translation n'opère pas continuement dans* $\mathfrak{M}$.

Posons ${}_s\nu(\theta) = \nu(\theta - s)$ pour s positif ; on a encore pour n assez grand $\|\nu - {}_s\nu\|_{\mathfrak{M}} \geqslant \frac{1}{2k} \|\nu_n\|_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2k}$.

Pour préciser la proposition 7 et le corollaire 4 on peut énoncer

PROPOSITION 11. – *Il existe des multiplicateurs continus de* Re H^∞ *dans* Re H^∞ *qui ne sont pas dans* Re A.

$\mathfrak{M}$ *n'est pas fermé pour les limites uniformes sur* T *de suites bornées en norme de multiplicateurs.*

Pour cela, nous pouvons choisir les fonctions w_n considérées au début de la démonstration du théorème 3 de façon que a_n étant une suite tendant vers zéro

$$\|w_n\|_\infty < a_n \ , \ |\widetilde{w}_n(0)| > \frac{1}{2} \quad \|w_n\|_{\mathfrak{M}} = 1 \ ; \text{ et}$$

Si on pose $h_n(\theta) = \sum_1^n \nu_p(\theta)$ où $\nu_n(\theta) = w_n\left(\frac{1}{n} - \theta\right)$. h_n converge uniformément vers la fonction $h = \sum_1^\infty \nu_n$.

La démonstration du théorème 3 montre qu'on a encore

$$\sup_n \|h_n\|_{\mathfrak{M}} < \infty$$

et que h est un multiplicateur de Re H^∞. Mais h n'est pas dans Re A. En effet,

$$\int_{|t|<\frac{1}{n_0^3}} \frac{h\left(\frac{1}{n_0} - t\right) dt}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \geqslant \widetilde{w}_{n_0}(0) - \frac{1}{2\pi} \sum_{p \neq n_0} \|w_p\| \frac{m(\mathrm{I}_p)}{\operatorname{dis}\left(\frac{1}{n_0}, \mathrm{I}_p\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} - \mathrm{C} \sum_{p \neq n_0} a_p \, p^{-2}$$

et on choisit a_n de façon que C $\Sigma\, a_p\, p^{-2}$ soit inférieur à $\frac{1}{4}$.

La condition (*) n'est pas vérifiée pour h, donc h n'est pas dans Re A. c.q.f.d.

Plus généralement, on peut s'intéresser aux algèbres $\mathfrak{M}_A$ de multiplicateurs des parties réelles d'une algèbre uniforme A, en cherchant en particulier dans quelles conditions cette algèbre $\mathfrak{M}_A$ est réduite aux constantes.

1/ Si on considère Re A(D) comme espace de fonctions continues sur $\bar{D}$, $\mathfrak{M}_A$ se réduit aux constantes car le produit de deux fonctions harmoniques n'est harmonique que si l'une est constante.

2/ Soit A l'algèbre de l'anneau des fonctions continues sur l'anneau $\left\{ \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1 \right\}$ et analytiques à l'intérieur de l'anneau.

Soit $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ la frontière de l'anneau.

Soit Re A le sous-espace de $C_R(\gamma)$ des parties réelles de A ; dans ce cas $\mathfrak{M}_A$ = cte. En effet, la mesure $d\mu$ égale à $d\theta$ sur γ_1, et $-d\theta$ sur γ_2 est une mesure réelle orthogonale à Re A ; et la fermeture uniforme de Re A dans γ est l'orthogonal de $d\mu$ dans $C_R(\gamma)$.

Si u est un multiplicateur de Re A on doit avoir $\int_\gamma fu\, d\mu = 0$ pour tout f dans Re A.

Soit $\int_\gamma fu\, d\mu = 0$ pour tout f de $C_R(\gamma)$ telle que $\int_\gamma f\, d\mu = 0$ et donc $\int_\gamma fu\, d\mu = \int_\gamma f\, d\mu \int_\gamma u\, d\mu$ pour tout f de $C_R(\gamma)$ donc $u\, d\mu = \left(\int_\gamma u\, d\mu\right) d\mu$; donc $u = \int_\gamma u\, d\mu$ = cte.

3/ Pour une algèbre de Dirichlet, des multiplicateurs peuvent être réduits aux constantes.

Soit B la sous-algèbre de A(D) formée des fonctions F de A(D) tel que $F(1) = F(-1)$. C'est une algèbre de Dirichlet sur l'espace obtenu en identifiant les deux points 1 et -1 de T.

T étant identifié à l'intervale $(-\pi, -\pi)$ on a

$$\text{Re B} = \{f \,;\, f \in \text{Re A}\,,\, f(0) = f(-\pi)\,,\, \tilde{f}(0) = \tilde{f}(\pi)\}$$

l'hortogonal de Re B dans (Re A)$'$ est l'espace vectoriel à deux dimensions engendré par la mesure $\delta_0 - \delta_\pi$ et l'intégrale singulière

$$V_0 = \int \frac{dt}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - \int \frac{dt}{\operatorname{tg}\frac{t-\pi}{2}}$$

Soit u une fonction de $C_R(T)$ qui est un multiplicateur de Re B. On doit avoir $u(0) = u(\pi)$ et d'autre part, $V_0 u$ est orthogonal à Re B. Il existe donc deux constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$V_0 u = \lambda_1(\delta_0 - \pi) + \lambda_2 V_0 .$$

Le support de V_0 étant le cercle T on doit avoir

$$u = \lambda_2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = 0$$

donc u est constante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNARD, Espace des parties réelles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions, *Journal of Functional Analysis* (Vol. 10, n° 4, p. 387-409).

[2] FISHER, Approximation by unimodular functions, *Can.J. Math.* vol. XXIII, 257-269.

[3] ZYGMUND, Trigonometric series, Vol. I (Cambridge University Press), 1959.

Manuscrit reçu le 29 juillet 1972
accepté par J.P. Kahane

Jacqueline DETRAZ
Mathématiques – Bât. 425
Université de Paris XI
91 – Orsay
et
Mathématiques, Centre de St-Jérôme
Université de Provence
13-Marseille