ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HICHAM FAKHOURY

Extensions uniformes des formes linéaires positives

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 1 (1973), p. 75-93

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_1_75_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23,1 (1973), pp. 75-94

EXTENSIONS UNIFORMES DES FORMES LINEAIRES POSITIVES

par Hicham FAKHOURY

1. Introduction.

Soient V un espace de Banach ordonné par un cône convexe fermé saillant et M un sous-espace fermé de V muni de l'ordre induit. Ce travail propose certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe $a \geqslant 1$ tel que toute forme linéaire f positive et continue sur M admette un prolongement $\widetilde{f}$ positif et continu sur l'espace V et vérifiant $\|\widetilde{f}\| \leqslant a \|f\|$. Dans ce cas, nous dirons que le couple (M , V) possède la propriété de l'extension uniforme.

Dans la deuxième partie, après avoir précisé les notations utilisées, nous ferons quelques rappels concernant la dualité des espaces de Banach ordonnés. Ensuite, nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes pour que le couple (M , V) possède la propriété de l'extension uniforme. En particulier, il est établi que l'existence d'une telle propriété est équivalente à la possibilité de prolonger tout opérateur compact positif défini sur M et à valeurs dans $c_0(\mathrm{N})$, en un opérateur continu positif de V dans $c_0(\mathrm{N})$.

Dans la troisième partie, nous donnons une interprétation géométrique de la propriété de l'extension uniforme en termes d'absorbtion de convexes compacts dans les cônes faiblement complets. Cette interprétation permet de construire un contre exemple dans la dernière partie.

Dans la quatrième partie, nous avons consigné certains cas particuliers où les résultats des deux parties précédentes permettent de conclure à l'existence de la propriété de l'extension uniforme. En fait, il est établi que le couple (M , V) possède cette propriété dès que l'espace M est cofinal dans l'espace $\mathrm{V} = \mathrm{V}^+ - \mathrm{V}^+$. D'autre part, si l'espace M est isomorphe et isométrique à l'espace C(X) des fonctions continues sur un compact métrisable X, et si le couple (M , V) possède la propriété de l'extension uniforme, il existe un relèvement linéaire positif continu du dual de M dans le dual de V. Ce résultat vaut aussi si l'espace M est isomorphe pour l'ordre et isométrique à l'espace $c_0(\mathrm{I})$ associé à un ensemble d'indices I quelconque. Nous terminons par l'exemple d'un couple (M , V) d'espaces normaux positivement engendrés, tel que toute forme linéaire positive sur M se prolonge en une forme linéaire positive sur V ; cependant le couple (M , V) ne possède pas la propriété de l'extension uniforme.

2. Extensions uniformes des formes linéaires positives.

Soit V un espace de Banach ordonné par un cône convexe saillant fermé noté V^+, on désigne par V' l'espace de Banach dual muni de la norme canonique et de l'ordre associé au cône V'^+ polaire de V^+. Nous noterons dans la suite B(V) la boule unité fermée de l'espace V, et $\mathrm{B}(\mathrm{V}^+)$ la partie positive de cette boule. Si M est un sous-espace de V, l'espace M sera muni de l'ordre induit par celui de V. La surjection canonique de l'espace V' sur l'espace M' est notée R, et elle est définie par $\mathrm{R}(f) = f|_{\mathrm{M}}$ pour toute forme linéaire f de V'.

Rappelons qu'un espace de Banach ordonné V est dit normal s'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que les inégalités $y \leqslant x \leqslant z$ impliquent $x \leqslant \alpha\,(\|y\| \vee \|z\|)$. Une utilisation du théorème de Baire montre que si l'espace V est positivement engendré ($\mathrm{V} = \mathrm{V}^+ - \mathrm{V}^+$), il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{V}) \subset \alpha\, c(\mathrm{B}(\mathrm{V}^+) \cup -\mathrm{B}(\mathrm{V}^+))$. Ceci montre, entre autre chose, que toute forme linéaire positive sur V est continue. Rappelons aussi que l'espace V est positivement engendré (resp. normal) si, et seulement si, l'espace V' est normal (resp. positivement engendré) ; voir [2] par exemple.

Le résultat suivant est démontré dans [7], nous le citons en guise de rappel :

THEOREME 2.1. – *Soient* M *un sous-espace d'un espace vectoriel ordonné* V, *et* f *une forme linéaire sur* M ; *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *La forme linéaire f se prolonge en une forme linéaire positive $\tilde{f}$ définie sur* V ;

b) *Il existe un convexe* S *engendrant l'espace* V, *tel que f soit majorée par $0 \leqslant m < \infty$ sur le convexe* $M \cap (S - V^+)$.

Si (b) *est vérifiée, il existe un prolongement $\tilde{f}$ de f majorée par m sur le convexe* S.

Corollaire 2.2. – *Soient* M *un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné* V, *et f une forme linéaire sur* M. *Pour que f admette un prolongement $\tilde{f}$ linéaire, positif et de norme 1 sur* V, *il faut, et il suffit, que f soit bornée par 1 sur* $(B(V) - V^+) \cap M$.

S'il existe $a \geqslant 1$ tel que toute forme linéaire f de M'^+ se prolonge en une forme linéaire $\tilde{f}$ de V'^+ qui vérifie $\|\tilde{f}\| \leqslant a\, \|f\|$, nous dirons que le couple (M , V) possède la *propriété de l'extension uniforme ;* cette propriété sera simplement notée P.E.U. .

Theoreme 2.3 – *Pour que le couple* (M , V) *possède la* P.E.U., *il faut et il suffit, qu'il existe* $1 \leqslant a < \infty$ *tel que*

$$(B(V) - V^+) \cap M \subset a\,(B(M) - M^+).$$

Démonstration. – La condition est suffisante, en effet si f est un point de M'^+ de norme 1 et y un point de $(B(V) - V^+) \cap M$ il existe un point x de $B(M)$ tel que $y \leqslant ax$. Par conséquent, $f(y) \leqslant a\, f(x) \leqslant a$. Le corollaire précédent montre que f admet un prolongement $\tilde{f}$ dans V'^+ de norme inférieure à a. Inversement, si le couple (M , V) possède la P.E.U. il existe $a \geqslant 1$ tel que toute forme linéaire de M'^+ de norme 1 soit majorée par a sur $(B(V) - V^+) \cap M$. Ceci s'exprime par l'inclusion suivante :

$$B(M'^+) \subset -\, a\,[(B(V) - V^+) \cap M]^0.$$

En prenant les polaires des deux membres nous avons l'inclusion

$$\overline{(B(V) - V^+) \cap M} \subset -\, a\,(B(M'^+))^0.$$

Or nous avons l'égalité $(B(M'^+)^0 = \overline{(B(M) + M^+)}$. En effet, en utilisant le théorème des bipolaires, il suffit de montrer l'égalité

$$(B(M) + M^+)^0 = B(M'^+).$$

Soit f un point de $(B(M) + M^+)^0$; pour tout x de norme 1 et tout $y \geqslant 0$, nous avons $f(x + y) \geqslant -1$. Ce qui montre que f est positif, de plus pour $y = 0$, l'égalité précédente montre que f est de norme inférieure à 1. L'inclusion inverse se montre par la même méthode. Pour terminer nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 2.4. – *Si* M *est un espace de Banach ordonné par un cône fermé, les assertions suivantes sont vérifiées :*

a) $\overline{(B(M) - M^+)} \subset r(B(M) - M^+)$, *pour tout* $r > 1$;

b) *Si l'espace* M *est positivement engendré,* $\overline{(B(M^+) - M^+)}$ *est inclus dans* $r\,(B(M^+) - M^+)$, *pour tout* $r > 1$.

Démonstration. – La même méthode permet de montrer (a) et (b) ; nous donnerons seulement la démonstration de (b). Si l'espace M est positivement engendré, il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $B(M)$ soit inclus dans $\alpha\, c\,(B(M^+) \cup - B(M^+))$. Soient x un point de $\overline{B(M^+) - M^+}$, et $r > 1$, on peut choisir une suite $(x_n)_{n \in N}$ de point de $B(M^+) - M^+$ qui converge vers x et vérifie $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant r_n$ où r_n est le terme général d'une série de somme $\dfrac{r-1}{\alpha}$. Pour tout n dans N on a $x_n = y_n - z_n$, où y_n est dans $B(M^+)$ et z_n dans M^+. Posons $x_{n+1} - x_n = t_n = t_n^1 - t_n^2$ où le point t_n^i est positif et vérifie $\|t_n^i\| \leqslant \alpha \|t_n\| \leqslant \alpha\, r_n$. Un raisonnement de récurrence montre que $x_n \leqslant t_{n-1}^1 + \cdots + t_1^1 + y_1$. La série de terme général t_n^1 converge dans le cône M^+ vers le point t dont la norme est majorée par $\alpha\, \Sigma\, r_n$, et il est clair que nous avons $x \leqslant t + y_1$. La norme du deuxième membre est majorée par r, ce qui prouve que $x \in r\,B(M^+) - M^+$

COROLLAIRE 2.5. – *Si les espaces* M *et* V *sont positivement engendrés, le couple* (M , V) *possède la P.E.U. si, et seulement si, il existe* $a \geqslant 1$ *tel que* $(B(V^+) - V^+) \cap M \subset a\,B(M^+) - M^+$.

La démonstration est une application du théorème 2.3 et du lemme 2.4. Soit y un point de V^+ on pose $d(y\,, M)$ (resp. $d(y\,, M^+)$) la distance de y à l'espace M (resp. au cône M^+). Il est clair que nous avons les inégalités suivantes $\|y\| \geqslant d(y\,, M^+) \geqslant d(y\,, M)$.

THEOREME 2.6. – *Soit* M *un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné* V *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe* $r \geqslant 1$ *tel que* $V^+ \cap (B(V) + M) \subset r\,B(V) + M^+$;

b) *Il existe* $s \geqslant 1$ *tel que pour tout point* y *de* V^+ *on ait* $d(y, M^+) \leqslant s\, d(y, M)$;

c) *Le couple* (M , V) *possède la P.E.U.*

Démonstration. – (a) $\Leftrightarrow$ (b) Cette équivalence est simple à établir. (a) $\Rightarrow$ (c) (adaptation du théorème 2.2 de [3]). Supposons l'inclusion de (a) réalisée et prenons les polaires des deux membres ; nous obtenons $(B(V) + M^+)^0 \subset r\,[V^+ \cap (B(V) + M)]^0$. En notant M^{+0} le polaire du cône M^+ dans l'espace V', et en utilisant les propriétés classiques des polaires, nous pouvons écrire

$$M^{+0} \cap B(V') \subset r\,[V'^+ + (B(V') \cap M^0)].$$

Cette inclusion est vérifiée puisque le deuxième membre est $\sigma(V', V)$-fermé ; en effet, $B(V') \cap M^0$ est faiblement compact, et la somme d'un convexe fermé et d'un convexe compact forme un convexe fermé. L'ensemble M^{+0} n'est autre que le sous-cône (éventuellement non saillant) de V' constitué des formes linéaires dont la restriction à M est positive. Soit f une forme linéaire de M'^+ de norme 1, il existe d'après le théorème de Hahn-Banach une extension f_1 de f de norme 1. Comme f_1 est dans $M^{+0} \cap B(V')$, il existe deux formes linéaires h et g respectivement dans V'^+ et $B(V') \cap M^0$ telles que $f_1 = h + rg$. Par suite, $h = f_1 - rg$ est une extension positive de f et de plus $\|h\| \leqslant 1 + r$; ce qui montre que le couple (M , V) possède la P.E.U.

(c) $\Rightarrow$ (a) L'hypothèse (c) montre qu'il existe $s \geqslant 1$ tel que, pour toute forme linéaire f de $M^{+0} \cap B(V')$ on puisse trouver h de V'^+ qui prolonge $f|_M$ et qui vérifie $\|h\| \leqslant s$. Par suite, $f - h$ est un point de M^0, ce qui veut dire que $B(V') \cap M^{+0}$ est inclus dans

$$(s + 1)\,[V'^+ + B(V') \cap M^0].$$

En prenant les polaires des deux termes précédents nous avons

$$V^+ \cap (B(V) + M) \subset (s + 1)\,\overline{(B(V) + M^+)}\,.$$

Un raisonnement analogue à celui du lemme 2.4 montre que pour tout $r > 1$ nous avons $\overline{B(V) + M^+} \subset r\,(B(V) + M^+)$; ce qui achève la démonstration.

Si E et F sont deux espaces de Banach ordonnés, un opérateur T de E dans F est dit *positif* si $T(E^+) \subset F^+$. L'ensemble des opérateurs positifs forment un cône convexe fermé. Cependant, ce cône n'est pas toujours saillant ; il l'est toute fois si l'espace E est positivement engendré et le cône F^+ saillant.

THEOREME 2.7. – *Soit* M *un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné* V, *les assertions suivantes sont équivalentes* :

a) *Le couple* (M , V) *possède la P.E.U.* ;

b) *Tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* $c_0(\mathrm{N})$ *admet une extension* $\widetilde{\mathrm{T}}$ *compacte positive de* V *dans* $c_0(\mathrm{N})$;

c) *Tout opérateur compact positif* T *de* M *dans* $c_0(\mathrm{N})$ *admet une extension* $\widetilde{\mathrm{T}}$ *linéaire positive et continue de* V *dans* $c_0(\mathrm{N})$.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, il existe a tel que pour tout opérateur compact positif T *de* M *dans* $c_0(\mathrm{N})$ *il existe un prolongement compact positif* $\widetilde{\mathrm{T}}$ *vérifiant* $\|\widetilde{\mathrm{T}}\| \leqslant a\,\|\mathrm{T}\|$.

Démonstration. – (a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que le couple (M , V) possède le P.E.U. ; pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ dans M'^+ qui converge fortement vers 0 ;il existe une suite $(\widetilde{f}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ dans V'^+ qui converge fortement vers 0 et telle que pour tout n de N on ait $\widetilde{f}_{n\,|\mathrm{M}} = f_n$. En effet, il existe $r \geqslant 1$, tel que pour tout n il existe $\widetilde{f}_n$ de V'^+ tel que $\|f_n\| \leqslant r\,\|f_n\|$. Soit $(\delta_n)_{n\in\mathrm{N}}$ l'ensemble des points extrémaux positifs de la boule unité de l'espace $l^1(\mathrm{N})$, muni de la topologie $\sigma(l^1(\mathrm{N}), c_0(\mathrm{N}))$. Cette suite converge vers 0. Soient T un opérateur compact positif de M dans c_0 (N), et T' l'opérateur transposé de T ; la suite $(\mathrm{T}'(\delta_n))_{n\in\mathrm{N}}$ converge fortement vers 0 dans M'^+. Soit $(\widetilde{f}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de V'^+ qui converge fortement vers 0 et qui relève la suite $(\mathrm{T}'(\delta_n))_{n\in\mathrm{N}}$; l'opérateur défini sur V par $\widetilde{\mathrm{T}}(x) = (\widetilde{f}_n(x))_{n\in\mathrm{N}}$ est compact positif de V dans l'espace $c_0(\mathrm{N})$, et par la construction de cet opérateur, il est clair qu'il prolonge T.

(b) $\Rightarrow$ (c) Il n'y a rien à démontrer.

(c) $\Rightarrow$ (a) Comme toute suite fortement convergente vers 0 dans M'^+ est canoniquement associée à un opérateur compact positif de M dans $c_0(\mathrm{N})$, l'hypothèse montre qu'une telle suite se relève en une suite $\sigma(\mathrm{V}', \mathrm{V})$-convergente vers 0 dans le cône V'^+. L'espace V étant tonnelé, cette suite est fortement bornée dans V'. Si le couple

(M , V) ne possède pas la P.E.U., il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans M'^+ telle que $\|f_n\| \leqslant 2^{-n}$, mais toute forme linéaire positive $\widetilde{f}_n$ qui prolonge f_n vérifie $\|\widetilde{f}_n\| \geqslant 2^n$; d'où la contradiction. La dernière assertion se déduit facilement de ce qui précède.

3. Interprétation géométrique.

Dans cette partie nous supposerons que toute forme linéaire positive sur M se prolonge en une forme linéaire positive sur V.

Soit $\mathrm{K} = \mathrm{R}(\mathrm{B}(\mathrm{V}'^+))$, il est clair que K est inclus dans $\mathrm{B}(\mathrm{M}'^+)$, de plus, l'application R étant surjective de V'^+ sur M'^+, le convexe K engendre le cône M'^+. Comme R est faiblement continue, K est faiblement compact ; par suite K est fermé pour la topologie forte sur M'. Un argument utilisant le théorème de Baire montre que K est d'intérieur non vide dans le cône M'^+. Remarquons d'autre part que la P.E.U. équivaut au fait que K est un voisinage de 0 dans M'^+. Sauf mention du contraire, K sera muni de la trace de la topologie $\sigma(\mathrm{M}', \mathrm{M})$; nous noterons $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$ l'espace des fonctions linéaires continues sur K et nulles à l'origine. L'espace $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$ sera muni de la topologie de la convergence uniforme sur K et de l'ordre naturel. On dira que X *absorbe* Y s'il existe r tel que $r\,\mathrm{X} \supset \mathrm{Y}$.

LEMME 3.1. — *Si l'espace* M *est normal, toute fonction de* $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$ *est la restriction à* K *d'une forme linéaire sur* M' *définie par un élément de* M.

Démonstration. — La restriction à K d'une forme linéaire $\sigma(\mathrm{M}', \mathrm{M})$ continue sur M' est évidemment une fonction de $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$. D'autre part, nous venons de voir que K est d'intérieur non vide dans M'^+ pour la topologie forte de M'. Comme M est normal, l'espace M' est positivement engendré, et il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que

$$\mathrm{B}(\mathrm{M}') \subset \alpha\, c(\mathrm{B}(\mathrm{M}'^+) \cup - \mathrm{B}(\mathrm{M}'^+)).$$

Une technique classique montre que $c(\mathrm{K} \cup - \mathrm{K})$ est un voisinage de 0 pour la topologie de la norme sur M'. Par suite, il existe $r \geqslant 1$, tel que $r\, c(\mathrm{K} \cup - \mathrm{K})$ contienne la boule $\mathrm{B}(\mathrm{M}')$. Soit f une fonction de l'espace $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$; on peut prolonger, d'une façon unique, la fonction f en une fonction $\widetilde{f}$ linéaire et $\sigma(M', M)$-continue sur $c(K \cup - K)$. La fonction $\widetilde{f}$ admet une extension unique en une forme linéaire définie sur M' puisque $c(K \cup - K)$ engendre cet espace. Ce prolongement est continu sur $B(M')$ puisque $B(M') \subset rc(K \cup - K)$, et appartient par suite à M ; ce qui achève la démonstration.

Le lemme 3.1 montre que les structures uniformes sur M'^{+} obtenues par la dualité avec M et avec $A_0(K)$ sont égales. Si l'espace M est positivement engendré toute forme linéaire positive est continue ; par conséquent, le cône M'^{+} est $\sigma(M'^{+}, A_0(K))$-complet. Nous supposerons dorénavant que cette hypothèse est réalisée.

LEMME 3.2. – *Le couple* (M, V) *possède la* P.E.U. *si, et seulement si,* K *absorbe* $K' = c(K \cup - K) \cap M'^{+}$.

Démonstration. – Considérons le cône M'^{+} comme un cône convexe saillant abstrait engendré par un convexe compact K contenant l'origine. Les méthodes de [4] montrent que $A_0(K)'^{+}$ s'identifie au cône M'^{+}, et que la partie positive de la boule unité de $A_0(K)'$ est égale à $K' = c(K \cup - K) \cap M'^{+}$. Comme $B(M'^{+})$ est $\sigma(M', A_0(K))$-compacte, elle est fortement bornée, et K' absorbe $B(M'^{+})$. Si K absorbe K', il absorbe aussi $B(M'^{+})$. Inversement, si K absorbe $B(M'^{+})$, il absorbe aussi K', puisque K' est inclus dans $B(M'^{+})$.

Soit C un cône convexe saillant engendré par un convexe compact K contenant l'origine ; on désigne par H(K) l'espace des fonctions positivement homogènes sur C dont la restriction à K est continue. Cet espace sera muni de l'ordre naturel et de la norme de la convergence uniforme sur K ; ainsi, il définit un M-espace de Kakutani qui est étudié dans [8].

LEMME 3.3. – *Soit* C *un cône convexe saillant engendré par un convexe compact contenant* 0, *si le cône* C *est* $\sigma(C, A_0(K))$*-complet, le couple* $(A_0(K), H(K))$ *possède la P.E.U. si, et seulement si,* K *absorbe* $K' = c(K \cup - K) \cap C$.

Démonstration. – Considérons l'application de restriction de $H(K)'^{+}$ sur C, nous savons d'après le lemme 29 de [8] que l'image de la partie positive de la boule unité de $H(K)'$ coïncide avec K. Comme la partie positive de $B(A_0(K)')$ coïncide avec K', la conclusion provient de la définition de la P.E.U.

THEOREME 3.4. – *Soit* C *un cône convexe saillant engendré par un convexe compact contenant l'origine ; si le cône* C *est* $\sigma(\mathrm{C}, \mathrm{A}_0(\mathrm{K}))$-*complet, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le couple* $(\mathrm{A}_0(\mathrm{K}), \mathrm{H}(\mathrm{K}))$ *possède la P.E.U. ;*

b) *Toute fonction convexe de* H(K) *est majorée sur* K *par une fonction de* H(K) *croissante pour l'ordre de* C ;

c) *Il existe* $m \geqslant 1$ *tel que toute* f *de* $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$ *majorée par* 1 *sur* K *soit majorée par une fonction* g *de* $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})^+$ *de norme inférieure à* m.

Démonstration. – (a) $\Leftrightarrow$ (c) Cette équivalence est une conséquence immédiate du corollaire 2.5, puisque aussi bien l'espace $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$ que H(K) sont positivement engendrés.

(a) $\Rightarrow$ (b) Le théorème de Stone-Kakutani montre que l'espace des fonctions linéaires par morceaux (c'est-à-dire les fonctions $h = \bigvee_{i=1}^{n} g_i$ où g_i est une fonction de l'espace $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$) est total dans H(K) muni de la topologie de la convergence uniforme sur K. Soit f une fonction convexe de H(K) de norme strictement plus petite que 1, on peut supposer la fonction f positive et poser $\varepsilon = 1 - \|f\| < 1$. Il existe une fonction linéaire par morceaux $h_1 = \bigvee_{i=1}^{n} g_i$, telle que $h_1 - \varepsilon f \leqslant f \leqslant h_1 + \varepsilon f$. Ces inégalités montrent que la fonction h_1 est majorée par 1 sur K, et à fortiori, il en est de même pour les fonctions $(g_i)_{i=1}^{n}$. Comme le couple $(\mathrm{A}_0(\mathrm{K}), \mathrm{H}(\mathrm{K}))$ possède la P.E.U., il existe $a \geqslant 1$ tel que toute fonction g_i de $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})$ majorée par 1 sur K soit majorée par une fonction positive g_i' de $\mathrm{A}_0(\mathrm{K})^+$ dont la norme est inférieure à a. La fonction $h_1' = \bigvee_{i=1}^{n} g_i'$ est croissante pour l'ordre du cône, $f \leqslant h_1' + \varepsilon f$ et de plus $\|h_1'\| \leqslant a$. Le même raisonnement appliqué à $f_1 = f - h_1'$ montre l'existence d'une fonction linéaire par morceaux h_2', croissante pour l'ordre du cône et vérifiant $f_1 \leqslant h_2' + \varepsilon^2 f$, et $\|h_2'\| \leqslant a\varepsilon$. Un raisonnement de récurrence permet de construire une suite $(h_p)_{p \in \mathrm{N}}$ de fonctions linéaires par morceaux, continues croissantes pour l'ordre de C et vérifiant :

i) $$f - \sum_{i=1}^{p} h_n' \leqslant h_{p+1}' + \varepsilon^p f$$

ii) $$\|h'_{p+1}\| \leqslant a\varepsilon^p$$

La série de terme général $(h'_p)_{p\in N}$ converge vers une fonction h de $H(K)^+$ croissante pour l'ordre du cône C et qui majore f.

(b) $\Rightarrow$ (c) Si la propriété (c) n'est pas vérifiée, il existe une suite $(h_n)_{n\in N}$ de fonctions de $A_0(K)$ majorées par 1 sur K mais telle que toute fonction positive g_n de $A_0(K)$ qui majore la fonction h_n ait une norme supérieure à 2^{2n}. Posons $f = \sum_n \frac{h_n^+}{2^n}$ cette fonction est évidemment dans $H(K)^+$, et elle est convexe. D'après (b), la fonction f est majorée par une fonction h de $H(K)^+$ croissante pour l'ordre de C. Cette fonction est bornée par $\|h\|$ sur $K' = c(K \cup -K) \cap C$, puisque K' est inclus dans $(K - C) \cap C$. Il en est de même pour la fonction f, ce qui montre que chacune des fonctions h_n est majorée par $\|h\|2^n$ sur le convexe K'. Or le lemme 3.3 montre que le couple $(A_0(K'), H(K'))$ possède la P.E.U. ; d'après l'équivalence de (a) et de (c), le convexe compact K' possède donc la propriété (c). Par suite, pour tout n de N, il existe g_n dans $A_0(K')^+$ qui majore h_n sur K' et dont la norme est inférieure à $m\,\|h\|2^n$ (la norme étant celle de la convergence uniforme sur K', et m indépendant de la fonction considérée). Ceci contredit l'hypothèse faite sur la suite $(h_n)_{n\in N}$

COROLLAIRE 3.5. – *Soit* V *un espace de Banach ordonné positivement engendré, le convexe compact* $K = B(V'^+)$ *vérifie les conditions du théorème* 3.4.

DEFINITION 3.6. – (a) *Soit* C *un cône convexe saillant, on appelle mesure conique sur* C *toute forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues linéaires par morceaux définies sur* C, *et muni de l'ordre naturel.*

(b) *Soit* K *un convexe compact qui engendre* C ; *une mesure conique* m *sur* C *est dite localisable en une mesure de Radon sur K s'il existe une mesure de Radon* μ *sur* K *telle que pour toute fonction linéaire par morceaux* h, *on a* $m(h) = \int_K h(k)\,d\mu(k)$.

PROPOSITION 3.7. – *Soit* C *un cône convexe saillant engendré par un convexe compact* K *contenant l'origine, si* C *est* $\sigma(C, A_0(K))$ *complet et si toute mesure conique sur* C *est localisable en une mesure de Radon sur* K, *le couple* $(A_0(K), H(K))$ *possède la P.E.U.*

Démonstration. – Soit δ le plongement canonique de C dans $H(K)'^{+}$ défini par $\delta(k)(h) = h(k)$, pour toute fonction h de H(K). Il est établi dans [8] que l'image de C par l'application δ coïncide avec l'ensemble des génératrices extrémales du cône $H(K)'^{+}$. L'ensemble $\widetilde{K}' = \delta(K')$ est compact s'il est muni de la trace de la topologie $\sigma(H(K)', h(K))$; où $h(K)$ désigne l'espace des fonctions continues linéaires par morceaux définies sur K. Par conséquent, le complété $\widehat{c(\widetilde{K}')}$ de l'ensemble $c(\widetilde{K}')$ est compact ; mais ce compact est inclus dans l'ensemble des mesures coniques dont la résultante est dans K'. Comme toute mesure conique sur C admet une localisation en une mesure de Radon sur K, toute mesure conique m admet un prolongement canonique unique en une forme linéaire $\widetilde{m}$ de $H(K)'^{+}$. En effet, si μ est une localisation de m, il suffit de poser $\widetilde{m}(h) = \mu(h_K)$, pour toute fonction h de H(K). La forme linéaire $\widetilde{m}$ ne dépend pas de la localisation choisie à cause de la densité de $h(K)$ dans H(K). Ceci montre que $\widehat{c(\widetilde{K}')}$ est inclus dans $H(K)'^{+}$; par conséquent, $c(\widetilde{K}')$ est relativement compact dans $H(K)'^{+}$ pour la topologie induite par $\sigma(H(K)', h(K))$. Le corollaire 10 de [4] montre que $\widetilde{K} = \delta(K)$ absorbe $\widetilde{K}'$. Comme l'application δ est positivement homogène, l'ensemble K absorbe K' ; et la conclusion provient du lemme 3.2.

DEFINITION 3.8. – Un convexe compact K contenant 0 comme point extrémal est dit *α-conique en 0* s'il existe une fonction linéaire f définie sur C et vérifiant $p_K \leqslant f \leqslant \alpha p_K$, où p_K est la jauge de K.

COROLLAIRE 3.9. – *Soit* C *un cône convexe saillant faiblement complet engendré par un convexe compact* K *contenant l'origine. Le convexe* K *est α-conique si et seulement si toute mesure conique sur* C *est localisable en une mesure de Radon sur* K.

Démonstration. – Soient $h(C)$ l'espace des fonctions continues linéaires par morceaux sur C, et M(C) le cône des mesures coniques sur C muni de la topologie $\sigma(M(C), h(C))$. Pour cette topologie l'ensemble des mesures coniques dont la résultante parcourt un convexe compact X forment un convexe compact noté M_X. Pour tout m dans M_K on peut construire $\widetilde{m}$ dans $H(K)'^{+}$ qui prolonge m, en posant $\widetilde{m}(h) = \int_K h\,d\mu$, pour tout h dans H(K), où μ est une localisation de

m. La forme linéaire $\widetilde{m}$ ne dépend pas du choix de μ à cause de la densité de $h(C)$ dans H(K) ; pour la même raison l'application $m \to \widetilde{m}$ est affine. Soit M_K l'ensemble formé par les $\widetilde{m}$ quand m parcourt l'ensemble M_K ; c'est un convexe de $H(K)'^+$ qui est $\sigma(H(K)'^+, h(C))$-compact. d'après le corollaire 10 de [4], il existe $a \geqslant 1$ tel que $\|\widetilde{m}^2\| \leqslant a$ pour tout m dans M_K. Le couple (H(K) , (C(K)) possède la P.E.U. d'après [8] avec le coefficient 1 ; par suite, toute mesure conique de résultante dans K est localisable en une mesure de Radon portée par $K_1 = \{k \in K\ ; p_K(k) = 1\}$ et de masse inférieure à a. Soient x un point de K_1, et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ une décomposition quelconque de x ; le point x est résultante de la mesure $m = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{x_i}$, or cette mesure admet une unique localisation portée par K_1 définie par $\mu = \Sigma P(x_i)\varepsilon_{x_i}/P(x_i)$. Par suite, l'inégalité $\|\mu\| \leqslant a$ implique $\sum_{i=1}^{n} P_k(x_i) \leqslant aP_k$ ce qui montre que K est a^2-conique à l'origine d'après les résultats d'Asimow (Trans. Amer. Math. Soc. 143, (1969), 117-132). L'assertion inverse est établie dans [8].

Remarque 3.10 – (a) le corollaire 3.9 a été indépendamment obtenu par A. Goullet de Rugy ; la méthode qu'il utilise est très différente de la nôtre.

b) Il existe des convexes compacts K contenant l'origine comme point extrémal tel que le cône C engendré par K soit $o(C, A_0(K))$-complet, et le couple $(A_0(K), H(K))$ possède la P.E.U. ; cependant K n'est pas α-conique à l'origine. En effet, soit C le cône positif de l'espace $l^\infty(N)$ muni de la topologie faible $\sigma(l^\infty(N), l^1(N))$; on pose $K = B(l^{\infty+})$. Comme $C \cap K - C = K$, le couple $(A_0(K), H(K))$ possède la P.E.U. Cependant, K n'est pas α-conique à l'origine puisque une fonction linéaire f positive sur K qui vérifie $p_K \leqslant f$ ne peut pas être finie sur K. En effet, une telle fonction est supérieure à 1 en tout point de la forme $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$; par suite, au point k_1 dont toutes les coordonnées sont égales à 1 on a $f(k_1) \geqslant n$ pour tout n dans **N**.

4. Etude de certains cas particuliers et d'un contre-exemple.

PROPOSITION 4.1. – *Si l'espace* M *rencontre l'intérieur du cône* V^+, *le couple* (M , V) *possède la P.E.U.*

Pour démontrer ce résultat il suffit de se reporter à [3] où il est établi que l'hypothèse implique la condition (b) du théorème 2.6 ; la conclusion provient de là.

PROPOSITION 4.2. – *Si les espaces* M *et* V *sont positivement engendrés, et si le sous-espace* M *est cofinal dans* V, *le couple* (M , V) *possède la P.E.U.*

Démonstration. – L'hypothèse montre que nous pouvons écrire $V = M^+ - V^+$. Ceci s'exprime aussi par l'égalité $V = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} nB(M^+) - V^+$.
Le théorème de Baire et le lemme 2.4 montre l'existence de $n \geqslant 1$ tel que $B(V) \subset n\,B(M^+) - V^+$. Ceci implique l'inclusion

$$(B(V) - V^+) \cap M \subset n(B(M^+) - V^+) \cap M.$$

Mais le deuxième membre n'est autre que $nB(M^+) - M^+$; la conclusion est une conséquence du théorème 2.3.

PROPOSITION 4.3. – *Soient* M *et* V *deux espaces de Banach ordonnés normaux et positivement engendrés, avec* $M \subset V$, *tels que toute forme linéaire de* M'^+ *se prolonge en une forme linéaire de* V'^+. *Si pour tout* f *de* M *et* g *de* V^+ *tel que* $f \leqslant g$, *il existe* h *de* M^+ *qui vérifie* $f \leqslant h \leqslant g$ *le couple* (M , V) *possède la P.E.U.*

Démonstration. – Munissant V d'une norme équivalente, on peut supposer que l'on a $B(V) = (B(V) - V^+) \cap (B(V) + V^+)$; par suite, l'espace V est isomorphe et isométrique à l'espace $A_0(B(V'^+))$, (cf. [1], par exemple). D'après le lemme 3.1 l'espace M s'identifie à l'espace $A_0(K)_0R$ formé des fonctions f_0R, où f parcourt l'espace $A_0(K)$. D'après le corollaire 3.5, il existe $a \geqslant 1$ tel que pour tout f de M majorée par 1 sur $B(V'^+)$ il existe g de V^+ qui majore f et qui est de norme inférieure à a. Grâce à l'hypothèse on peut trouver

(*) Cette proposition montre que si M est cofinal dans V il est "uniformément cofinal".

h dans M^+ qui vérifie $f \leqslant h \leqslant g$. Il est clair que $\|h\| \leqslant \|g\| \leqslant a$. Par suite, le couple (M , V) possède la P.E.U. d'après le théorème 3.4 (c).

Cette proposition montre que si le sous-espace M est un sous-espace fortement réticulé de V (c'est-à-dire M est réticulé et tout couple (f, g) de points de M admet une borne supérieure dans V qui coïncide avec la borne supérieure dans M) le couple (M , V) possède la P.E.U.

Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné V ; l'espace V'' est canoniquement ordonné par le cône polaire de V'^+. L'espace M'' peut être identifié au bipolaire M^{00} de M dans V'' ; aussi existe-t-il deux ordres naturels sur M'' : celui construit à partir de M', et celui induit par V''.

LEMME 4.4. – *Si toute forme linéaire positive sur* M *se prolonge en une forme linéaire de* V'^+, *les deux ordres naturels définis sur* M'' *sont identiques.*

Démonstration. – Soit Φ la surjection canonique de V' sur V'/M^0 ; cet espace peut être ordonné par le cône $\Phi(V'^+)$. Comme on peut le vérifier, le cône $\Phi(V'^+)$ est saillant puisque l'espace M^0 vérifie la propriété suivante : pour tout couple (h , g) de points de M^0 et tout f de V', les inégalités $h \leqslant f \leqslant g$ impliquent que le point f est dans M^0. L'hypothèse montre que l'isométrie canonique de V'/M^0 sur M' est bipositive. Par suite, sa transposée est une application bipositive de M'' sur $(V'/M^0)'$. Vérifions que l'opérateur canonique T de M^{00} sur $(V'/M^0)'$ est bipositif. Soit y'' un point de M^{00+}, pour tout point f de V' nous avons $T(y'')\,(\Phi(f)) = y''(f)$. Si $\Phi(f)$ est positif dans (V'/M^0) il existe $f_1 \geqslant 0$ tel que $\Phi(f) = \Phi(f_1)$; par conséquent, $T(y'')$ est positif. Inversement, soit x un point de $(V'/M^0)'^+$, la forme linéaire composée $x_0 \Phi$ est dans V''^+, de plus elle appartient à M^{00} et vérifie $T(x_0\Phi) = x$. Ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 4.5. – *Soit* M *un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné* V, *tel que toute forme linéaire de* M'^+ *se prolonge en une forme linéaire de* V'^+. *Le couple* (M , V) *possède la* P.E.U. *si, et seulement si, le couple* (M'' , V'') *la possède aussi.*

Démonstration. – D'après le lemme précédent on peut supposer que M'' est un sous-espace ordonné de V'' ; et montrer que $B(M^+)$ est $\sigma(M'', M')$-dense dans $B(M''^+)$ en remarquant que leurs polaires coïncident avec $- B(M'^+) + M'^+$. Soit f une forme linéaire de M'''^+ de norme 1, il existe une famille ultrafiltrée $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ dans M'^+ avec $\|f_\alpha\| \leqslant 1$ qui converge vers f pour la topologie $\sigma(M''', M'')$. S'il existe $a \geqslant 1$ tel que pour tout α la forme linéaire f_α se prolonge en $\tilde{f}_\alpha$ dans V'^+ vérifiant $\|\tilde{f}_\alpha\| \leqslant a$, la famille $(\tilde{f}_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge dans le cône V'''^+ pour la topologie $\sigma(V''', V'')$ vers une forme linéaire positive $\tilde{f}$ qui prolonge f et vérifie $\|\tilde{f}\| \leqslant a \, \|f\|$.

La condition suffisante est facile à établir et achève la démonstration de la proposition.

LEMME 4.6. – *Soient* M *un sous-espace fermé d'un espace de Banach ordonné* V, *et* $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ *une famille filtrante croissante de sous-espaces de* M *tels que* $M = \overline{\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha}$. *S'il existe une famille* $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$ *de projections positives de* V *sur* M_α *telles que* $\|P_\alpha\| \leqslant a$, *il existe un relèvement linéaire positif de norme inférieur à* a de M' *dans* V'.

Démonstration. – Posons Q_α l'opérateur linéaire positif de M' dans V' défini par $Q_\alpha(x) = P'_\alpha(x|_E)$, où P'_α est la transposée de la projection P_α. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur A plus fin que le filtre des sections finissantes, comme pour tout x dans M' nous avons $Q_\alpha(x) \leqslant a \, \|x\|$, nous pouvons poser $T(x) = \lim_{\mathcal{U}} Q_\alpha(x)$, où la limite est prise au sens de la topologie faible $\sigma(V', V)$. Il est aisé de vérifier que l'application T est linéaire positive de M' dans V' et de norme inférieure à a. Par construction, les formes linéaires x et $T(x)|_M$ coïncident sur le sous-espace $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$; comme cette réunion est dense dans M, la forme linéaire $T(x)$ est un prolongement de x. L'opérateur T est le relèvement recherché.

DEFINITION 4.7. – *Un espace de Banach ordonné* M *est dit* π_a*-espace s'il existe une famille* $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ *filtrante croissante de sous-espaces de dimension finie tels que* $M = \overline{\bigcup M_\alpha}$, vérifiant :

a) *Chaque espace* M_α *est isomorphe pour l'ordre, et isométrique à l'espace* $l^\infty_{n_\alpha}$ *(c'est-à-dire l'espace* R^{n_α} *muni de la norme*

$$\|(x_i)\| = \text{Sup}\,(|x_i|\,,\, i = 1, \ldots, n_\alpha)).$$

b) *Pour tout* α, *il existe une projection positive de norme inférieure à a de* M *sur* M_α.

Si I est un ensemble d'indices quelconque, l'espace $c_0(I)$ est un π_1-espace ; de même si X est un espace compact métrisable, l'espace C(X) des fonctions définies continues sur X est un π_1-espace (ce résultat est démontré dans [5]).

PROPOSITION 4.8. – *Soient* V *un espace de Banach ordonné et* M *un sous-espace fermé qui soit un* π_a *espace, si* (M ,V) *possède la P.E.U., il existe un relèvement linéaire positif continu de la surjection canonique de* V′ *sur* M′.

Démonstration. – Le couple (M_α, V) possède la P.E.U. . L'espace M'_α est isomorphe et isométrique à l'espace $l^1_{n_\alpha}$. Soient $k_1, \ldots, k_{n_\alpha}$ les points extrémaux non nuls du simplexe $B(M'^+_\alpha)$; il existe n_α fonctions affines continues $(f_i)_{i=1}^{n_\alpha}$ définies sur $B(M'^+_\alpha)$ vérifiant :

a) $f_i(k) \geqslant 0$, pour tout k dans $B(M'^+_\alpha)$ et $i = 1, \ldots, n_\alpha$;

b) $\sum_{i=1}^{n\alpha} f_i(k) = 1$;

c) $k = \sum_{i=1}^{n\alpha} f_i(k)\, k_i$;

Pour tout $i = 1, \ldots, n_\alpha$ choisissons un prolongement $\widetilde{k}_i$ de k_i qui vérifie $\|\widetilde{k}_i\| \leqslant m \|k_i\|$ (où m est indépendant de α), l'application T_α de M'^+_α dans V'^+ défini par $T_\alpha(k) = \|k\| \sum_{i=1}^{n_\alpha} f_i(k/\|k\|)\, \widetilde{k}_i$ se prolonge en un opérateur linéaire de M'_α dans V' qui est un relèvement positif continu de M'_α dans V'. Par suite, il existe une projection linéaire positive continue de norme inférieure à m de V sur M_α, comme l'espace M est un π_a espace nous pouvons conclure grâce au lemme précédent.

Nous allons construire un couple $M \subset V$ d'espaces de Banach ordonnés, normaux, positivement engendrés, l'espace M étant réticulé pour son ordre propre, tels que toute forme linéaire de M'^+ se prolonge en une forme linéaire de V'^+, mais tel que le couple (M , V) ne possède pas la propriété de l'extension uniforme. Si X est un compact, on note M(X) l'espace des mesures sur X.

LEMME 4.9. – *Soit* $M^{1+}([0,1])$ *le convexe des mesures de probabilité sur* $[0,1]$ *muni de la topologie vague ; il existe une fonction convexe,* s.c.i., *définie sur* $M^{1+}([0,1])$, *minorée par* 1, *et non bornée supérieurement.*

Démonstration. – Notons φ l'application s.c.i. définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = t\chi[0,1[$; où $\chi[0,1[$ est la fonction caractéristique de $[0,1[$. Si $\widetilde{\varphi}$ désigne le prolongement canonique de φ défini par $\widetilde{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$ pour toute mesure μ de $M^{1+}(0,1)$, la fonction $\widetilde{\varphi}$ est affine, s.c.i., et vérifie $0 \leqslant \widetilde{\varphi} < 1$. En effet, la première assertion est élémentaire, la deuxième se vérifie en utilisant l'égalité

$$\widetilde{\varphi}(\mu) = \operatorname{Sup}\{\mu(f) ; f \in C(X), f \leqslant \varphi\}$$

Soit μ une mesure de $M^{1+}([0,1])$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\mu([0,1-\varepsilon])>0$; on peut vérifier que $\widetilde{\varphi}(\mu) < 1$. Si par contre $\mu([0, 1-\varepsilon]) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, la mesure μ coïncide avec ε_1 et $\widetilde{\varphi}(\varepsilon_1) = 0$; ce qui achève de démontrer la troisième assertion. Posons $f(\mu) = 1/1 - \widetilde{\varphi}(\mu)$; cette fonction est définie sur tout $M^{1+}([0,1])$ puisque $0 \leqslant \widetilde{\varphi} < 1$, elle est convexe et s.c.i. car l'application $t \to 1/1 - t$ est convexe continue sur $[0,1[$. Comme la borne supérieure de $\widetilde{\varphi}$ sur $M^{1+}([0,1])$ est égale à 1, la fonction f n'est pas bornée sur $M^{1+}([0,1])$, et est minorée par 1.

PROPOSITION 4.10. – *Le cône des mesures positives sur* $[0,1]$ *est engendré par un convexe compact* K *tel que* $A_0(K)$ *soit réticulé mais où le couple* $(A_0(K), H(K))$ ne possède pas la P.E.U.

Démonstration. – Soit f la fonction construite au lemme précédent la fonction positivement homogène $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(\mu) = \|\mu\| f(\mu/\|\mu\|)$$

qui prolonge f au cône $M^{+}([0,1])$ est convexe et s.c.i. La convexité est facile à établir, pour montrer que $\widetilde{f}$ est s.c.i. on peut vérifier, par exemple, que pour toute suite $(\mu_n)_{n\in N}$ qui converge vers une mesure μ, on a $\widetilde{f}(\mu) \leqslant \liminf \widetilde{f}(\mu_n)$. Comme f est supérieure à 1 sur $M^{1+}([0,1])$, la fonction $\widetilde{f}$ ne s'annule qu'en 0 ; de plus l'ensemble $\widetilde{f}^{-1}([0,1])$ est compact. Posons $K = \widetilde{f}^{-1}([0,1])$; la jauge p_K de K est identique à $\widetilde{f}$. Comme le cône $M^{+}([0,1])$ est vaguement complet, le convexe $K' = c(K \cup - K) \cap C$ est vaguement compact. Par suite, le cône $M^+([0, 1])$ est $\sigma(M^+([0, 1]), A_0(K))$-complet car l'espace $A_0(K)$ s'identifie à $C([0, 1])$. Il suffit de montrer que K' absorbe $M^{1+}([0, 1])$, en effet, $c(K \cup - K)$ est $B(M([0, 1]))$ sont deux convexes compacts symétriques qui peuvent être considérés comme les boules unités pour deux normes définies sur l'espace $M([0, 1])$ pour lesquelles c'est un espace de Banach dual. Comme $c(K \cup - K) \subset B(M([0, 1]))$, le théorème des homomorphismes de Banach montre l'existence de $a \geqslant 1$ tel que

$$B(M([0, 1])) \subset ac(K \cup - K);$$

par conséquent, $M^{1+}([0, 1]) \subset aK'$. Si K absorbait K', il absorberait $M^{1+}([0, 1])$, ce qui est impossible car la jauge de K n'est pas bornée. D'après le lemme 3.3 le couple $(A_0(K), H(K))$ ne possède pas la P.E.U.

Remarques 4.11. – (a) D'après [6] tout opérateur compact positif T de $A_0(K)$ dans $c_0(N)$ admet une extension compact $\widetilde{T}$ de $H(K)$ dans $c_0(N)$; le théorème 2.7 montre qu'il existe au moins un opérateur T qui n'admet aucune extension positive continue $\widetilde{T}$.

b) Comme K' absorbe $M^{1+}([0, 1])$, il existe une norme (notée $|||\cdot|||$) sur $A_0(K)$ équivalente à la norme de $A_0(K)$ pour laquelle $A_0(K)$ est isométrique à l'espace $C([0, 1])$. Il est possible de construire une norme (notée $|||\cdot|||_H$) sur $H(K)$ équivalente à celle de la convergence uniforme sur K, qui induise la norme $|||\cdot|||$ sur $A_0(K)$. Ainsi, il existe un couple $M \subset V$ d'espaces de Banach ordonnés, normaux, positivement engendrés, l'espace M étant de plus isomorphe et isométrique à $C([0, 1])$, tels que toute forme linéaire de M'^+ se prolonge en une forme linéaire de V'^+, mais le couple (M, V) ne possède pas la P.E.U.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. ASIMOW, Well-capped convex cones ; *Pacific J. Math. 26*, (1968), 421-431.

[2] L. ASIMOW, Partially ordered Banach spaces and their duals ; à paraître.

[3] L. ASIMOW, Monotone extensions in ordered Banach spaces and their duals ; à paraître.

[4] H. FAKHOURY, Structures uniformes faibles sur une classe de cônes et d'ensembles convexes ; *Pacific J. Math.* Vol 39, 1972, 641-654.

[5] E. MICHAEL and A. PELCZYNSKI, Peaked partition subspaces of C(X) ; *Illinois J. Math.* 11, (1967), 555-562.

[6] J. LINDENSTRAUSS, Extensions of compact operators ; *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 48, (1964).

[7] I. NAMIOKA, Partially ordred linear vector spaces ; *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 24, (1957).

[8] M. ROGALSKI, L'espace des fonctions homogènes sur certains cônes bien coiffés ; *Bull. Sci, Math.* 95, (1972), 305-325.

manuscrit reçu le 8 mai 1972
accepté par G. Choquet

Hicham FAKHOURY
(Equipe de Recherche Associée au
C N.R.S. n° 294)
Université de Paris VI
Département de Mathématique
11, quai Saint-Bernard, (Tour 46)
75005 – Paris - France.