Annales de l'institut Fourier

Robert Cauty

Une méthode de construction squelette par squelette dans les espaces paracompacts

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 1 (1973), p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23,1 (1973), pp. 1-18

UNE MÉTHODE DE CONSTRUTION SQUELETTE PAR SQUELETTE DANS LES ESPACES PARACOMPACTS

par Robert CAUTY

Introduction.

L'un des procédés de construction les plus efficaces dans la théorie des CW-complexes est la méthode de récurrence sur les squelettes. Dans ses applications, il est souvent essentiel que chaque cellule ne rencontre qu'un nombre fini de cellules de dimensions inférieures, car ceci permet, à chaque étape de la récurrence, de n'avoir "qu'un nombre fini de conditions" sur les objets que l'on cherche à construire.

Nous nous proposons de développer une méthode analogue dans le cadre des espaces paracompacts. Elle peut se schématiser comme suit : Soit $\mathfrak{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ une famille de fermés recouvrant un espace X ; supposons chaque $\mathfrak{F}_n$ discrète et, pour $n \geqslant 0$, notons X_n la réunion des éléments des familles $\mathfrak{F}_p$ telles que $p \leqslant n$. Les X_n joueront le rôle des squelettes d'un CW-complexe et les éléments de $\mathfrak{F}_{n+1}$ celui des cellules de dimension $n + 1$. Pour que cette interprétation soit utile, il faut que chaque élément de $\mathfrak{F}_{n+1}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\bigcup_{p \leqslant n} \mathfrak{F}_p$. Notre théorème principal montre que l'on peut toujours remplir cette dernière condition si X est paracompact.

Nous appliquons cette méthode au paragraphe deux au problème du prolongement de certaines fonctions continues et, au paragraphe trois, à l'existence de fonctions canoniques dans les nerfs de recouvrement fermés.

1. Le théorème fondamental.

Si $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles d'un espace topologique X, nous noterons $\overline{\mathcal{V}}$ la famille $\{\overline{V}_i\}_{i\in I}$ et nous appellerons $\mathcal{V}^*$ la réunion de la famille $\mathcal{V}$. Nous dirons que $\mathcal{V}$ est discrète si chaque point de X a un voisinage rencontrant au plus un élément de $\mathcal{V}$; nous dirons que $\mathcal{V}$ est σ-discrète si elle est réunion dénombrable de familles discrètes. Un espace séparé X est dit collectivement normal si, pour toute famille discrète $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ de fermés de X, il existe une famille discrète $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ d'ouverts de X telle que V_i contienne F_i quel que soit i.

THEOREME 1. – *Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace paracompact* X, *il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de* X *tel que $\overline{\mathcal{V}}$ soit plus fin que $\mathcal{U}$ et que $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ où chaque $\mathcal{V}_n$ est une famille discrète telle que, pour tout $n > 1$, chaque élément de $\overline{\mathcal{V}}_n$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\bigcup_{p<n} \overline{\mathcal{V}}_p$.*

Démonstration. – La paracompacité de X implique l'existence d'un recouvrement ouvert σ-discret $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ (chaque $\mathcal{G}_n$ est une famille discrète d'ouverts) tel que $\overline{\mathcal{G}}$ soit plus fin que $\mathcal{U}$ (voir par exemple [2]). Nous allons construire par récurrence une suite croissante $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ d'entiers et des familles discrètes $\mathcal{V}_n (n \geq 1)$ d'ouverts vérifiant :

1) $$\bigcup_{k=1}^{\alpha_n} \mathcal{V}_k^* \supset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{G}_k^*$$

2) Chaque $\overline{\mathcal{V}}_n$ est plus fine que $\mathcal{U}$.

3) Chaque élément de $\overline{\mathcal{V}}_n$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\bigcup_{p<n} \overline{\mathcal{V}}_p$ $(n > 1)$.

Il sera alors clair que $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ a les propriétés demandées. Prenons $\mathcal{V}_1 = \mathcal{G}_1$ et $\alpha_1 = 1$. Supposons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ définis ainsi que $\mathcal{V}_k$ $(k \leq \alpha_n)$ pour $n \geq 1$. Pour définir α_{n+1} et $\mathcal{V}_{\alpha_n+1}, \ldots, \mathcal{V}_{\alpha_{n+1}}$ nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

LEMME. 1 — *Soit* $\mathcal{U}$ *un recouvrement ouvert d'un espace collectivement normal* X. *Soient*

$$\mathcal{G} = (G_i)_{i\in I} \ , \ \mathcal{H} = (H_j)_{j\in J} \text{ et } \mathcal{U}_k \ (k = 1 , \ldots , n)$$

des familles discrètes d'ouverts de X *telles que*

$$\overline{\mathcal{G}} \, , \, \overline{\mathcal{H}} \text{ et } \overline{\mathcal{U}}_k \ (k = 1 , \ldots , n)$$

soient plus fines que $\mathcal{U}$. *Alors il existe deux familles discrètes d'ouverts de* X, $\mathcal{M} = (M_j)_{j\in J}$ *et* $\mathcal{N} = (N_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *vérifiant*

i) $\overline{\mathcal{M}}$ *et* $\overline{\mathcal{N}}$ *sont plus fines que*

ii) $\mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^* \supset \mathcal{H}^*$

iii) *Aucun élément de* $\overline{\mathcal{M}}$ *ne rencontre un élément de* $\overline{\mathcal{G}}$

iv) *Chaque élément de* $\overline{\mathcal{N}}$ *ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de* $\overline{\mathcal{G}}$ *et de* $\overline{\mathcal{M}}$.

(v) *Si* $U_k \in \mathcal{U}_k$ *et* $M_j \in \mathcal{M}$, *alors* $\overline{U}_k \cap \overline{M}_j \neq \emptyset$ *implique* $\overline{U}_k \cap \overline{H}_j \neq \emptyset$.

(vi) Si $U_k \in \mathcal{U}_k$ *et* $N_{i,j} \in \mathcal{N}$, *alors* $\overline{U}_k \cap \overline{N}_{i,j} \neq \emptyset$ *implique* $\overline{U}_k \cap \overline{H}_j \neq \emptyset$ *et* $\overline{U}_k \cap \overline{G}_i \neq \emptyset$.

Démonstration. — Puisque $\overline{\mathcal{G}}$ est discrète et plus fine que $\mathcal{U}$, la normalité collective de X permet de trouver une famille discrète d'ouverts $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ telle que $\overline{G}_i$ soit contenu dans W_i pour tout i appartenant à I et que $\overline{\mathcal{W}}$ soit plus fine que $\mathcal{U}$. Puisque $\overline{\mathcal{U}}_k$ est une famille discrète ($k = 1 , \ldots , n$), la réunion des ensembles de $\overline{\mathcal{U}}_k$ qui ne rencontrent pas $\overline{G}_i$ est un fermé disjoint de $\overline{G}_i$ ce qui permet de supposer en outre, quitte à prendre des W_i plus petits, que, si $U_k \in \mathcal{U}_k$ ($k = 1 , \ldots , n$) et si $\overline{U}_k \cap \overline{W}_i \neq \emptyset$, alors $\overline{U}_k \cap \overline{G}_i \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{M}$ la famille des ensembles

$$M_j = H_j - (\overline{\mathcal{W}})^* \qquad (j \in J).$$

$\mathcal{W}$ étant discrète, $(\overline{\mathcal{W}})^*$ est fermé, donc ces ensembles sont ouverts. Puisque M_j est contenu dans H_j et que $\mathcal{H}$ est discrète, $\mathcal{M}$ est discrète. L'inclusion $\overline{M}_j \subset \overline{H}_j$ ($j \in J$) implique que $\overline{\mathcal{M}}$ est plus fine que $\mathcal{U}$. Puisque, pour tout i, $\overline{G}_i \subset W_i \subset (\overline{\mathcal{W}})^*$ et que W_i est un ouvert disjoint de chaque M_j, donc de chaque $\overline{M}_j$, la condition iii) est vérifiée. La condition v) est trivialement vérifiée.

Considérons la famille

$$\mathcal{F} = \{\overline{H}_j \cap \overline{W}_i \,/\, j \in J \ , \ i \in I\}$$

de fermés de X. Cette famille est discrète car chaque point x de X a un voisinage rencontrant au plus un élément de $\mathcal{H}$ et un voisinage rencontrant au plus un élément de $\mathcal{W}$; l'intersection de ces voisinages rencontre au plus un élément de $\mathcal{F}$. En outre, $\mathcal{F}$ est plus fine que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}^* \cup \mathcal{M}^*$ contient $\mathcal{H}^*$. La normalité collective de X permet de trouver une famille discrète $0 = \{0_{i,j}\}_{i \in I, j \in J}$ d'ouverts de X telle que $\overline{H}_j \cap \overline{W}_i \subset 0_{i,j}$ et que $\overline{0}$ soit plus fine que $\mathcal{U}$. Comme cí-dessus, nous pouvons supposer que si $U_k \in \mathcal{U}_k$ $(k = 1 , \ldots , n)$ et si $\overline{U}_k \cap \overline{0}_{i,j} \neq \emptyset$, alors $\overline{U}_k \cap \overline{H}_j \neq \emptyset$ et $\overline{U}_k \cap \overline{W}_i \neq \emptyset$.

Pour i appartenant à I, soit $\mathcal{W}_i = \{W_{i'} / i' \in I$ et $i' \neq i\}$ et pour j appartenant à J, soient $\mathcal{H}_j = \{H_{j'} / j' \in J$ et $j' \neq j\}$ et $\mathcal{M}_j = \{M_{j'} / j' \in J$ et $j' \neq j\}$. Puisque $\mathcal{W}$ et $\mathcal{H}$ sont des familles discrètes, on a

$$\overline{W}_i \cap (\overline{\mathcal{W}}_i)^* = \emptyset \text{ et } \overline{H}_j \cap (\overline{\mathcal{M}}_j)^* \subset \overline{H}_j \cap (\overline{\mathcal{H}}_j)^* = \emptyset,$$

donc il existe un voisinage ouvert $A_{i,j}$ de $\overline{H}_j \cap \overline{W}_i$ tel que

$$\overline{A}_{i,j} \cap ((\overline{\mathcal{M}}_j)^* \cup (\overline{\mathcal{W}}_i)^*) = \emptyset.$$

Soit $\mathcal{N}$ la famille des ensembles.

$$N_{i,j} = 0_{i,j} \cap A_{i,j}.$$

Puisque $N_{i,j}$ est contenu dans $0_{i,j}$, $\mathcal{N}$ est une famille discrète et $\overline{\mathcal{N}}$ est plus fine que $\mathcal{U}$. Il est clair que $\mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^* \supset \mathcal{M}^* \cup \mathcal{F}^* \supset \mathcal{H}^*$. Si i appartient à I et si $i' \neq i$, alors $\overline{W}_{i'} \subset (\overline{\mathcal{W}}_i)^*$ donc $\overline{W}_{i'} \cap \overline{N}_{i,j} = \emptyset$ et, à fortiori, $\overline{G}_{i'} \cap \overline{N}_{i,j} = \emptyset$; de même, si j' appartient à J et si $j' \neq j$, alors $\overline{M}_{j'} \cap \overline{N}_{i,j} = \emptyset$; ceci vérifie la condition iv). Enfin, si $U_k \in \mathcal{U}_k$ $(k = 1 , \ldots , n)$ et si $\overline{U}_k \cap \overline{N}_{i,j} \neq \emptyset$, alors $\overline{U}_k \cap \overline{0}_{i,j} \neq \emptyset$, donc $\overline{U}_k \cap \overline{H}_j \neq \emptyset$ et $\overline{U}_k \cap \overline{W}_i \neq \emptyset$, d'où $\overline{U}_k \cap \overline{G}_i \neq \emptyset$. Le lemme est démontré.

Notons que les conditions v) et vi) impliquent que si chaque $\overline{H}_j \in \overline{\mathcal{H}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments d'une $\overline{\mathcal{U}}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, alors chaque $\overline{M}_j \in \overline{\mathcal{M}}$ et chaque $\overline{N}_{i,j} \in \overline{\mathcal{N}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathcal{U}}_k$. En outre, si chaque élément de $\overline{\mathcal{U}}_k$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathcal{G}}$ et un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathcal{H}}$, alors chaque élément de $\overline{\mathcal{U}}_k$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathcal{M}}$ et de $\overline{\mathcal{N}}$.

Suite de la démonstration du théorème : Le lemme implique l'existence de deux familles discrètes d'ouverts, ${}^1_1\mathcal{V}$ et ${}^1_2\mathcal{V}$ vérifiant :

$1)_1$ ${}^1_1\mathcal{V}^* \cup {}^1_2\mathcal{V}^* \supset \mathcal{G}^*_{n+1}$

$2)_1$ ${}^1_1\overline{\mathcal{V}}$ et ${}^1_2\overline{\mathcal{V}}$ sont plus fines que $\mathcal{U}$

$3)_1$ Aucun élément de ${}^1_1\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre un élément de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$

$4)_1$ Chaque élément de ${}^1_2\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de ${}^1_1\overline{\mathcal{V}}$ et de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$.

Par récurrence, supposons définies, pour $1 \leqslant k < \alpha_n$, des familles discrètes d'ouverts

$$ {}^k_1\mathcal{V}, \ldots, {}^k_{2^k}\mathcal{V} $$

vérifiant :

$1)_k$ ${}^k_1\mathcal{V}^* \cup \ldots \cup {}^k_{2^k}\mathcal{V}^* \supset \mathcal{G}^*_{n+1}$

$2)_k$ Chaque ${}^k_i\overline{\mathcal{V}}$ est plus fine que $\mathcal{U}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^k)$.

$3)_k$ Chaque élément de ${}^k_i\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n - k+1}, \ldots, \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^k)$

$4)_k$ Chaque élément de ${}^k_i\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de ${}^k_j\overline{\mathcal{V}}$ pour $1 \leqslant j < i \leqslant 2^k$.

Le lemme 1 et les remarques qui le suivent, appliqués en prenant $\mathcal{G} = \mathcal{V}_{\alpha_n - k}$, $\mathcal{H} = {}^k_{2^k}\mathcal{V}$ et pour $\mathcal{U}_k$ les familles ${}^k_\alpha\mathcal{V}$ $(\alpha < 2^k)$ et $\mathcal{V}_p$ $(\alpha_n - k + 1 \leqslant p \leqslant \alpha_n)$, montrent l'existence de deux familles discrètes ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\mathcal{V}$ et ${}^{k+1}_{2^{k+1}}\mathcal{V}$ vérifiant :

$\mathrm{i})_{2^k}$ ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\mathcal{V}^* \cup {}^{k+1}_{2^{k+1}}\mathcal{V}^* \supset {}^k_{2^k}\mathcal{V}^*$

$\mathrm{ii})_{2^k}$ ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\overline{\mathcal{V}}$ et ${}^{k+1}_{2^{k+1}}\overline{\mathcal{V}}$ sont plus fines que $\mathcal{U}$.

iii)$_{2^k}$ Aucun élément de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre un élément de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k}$

iv)$_{2^k}$ Chaque élément de ${}^{k+1}_{2^{k+1}}\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k}$ et de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\overline{\mathcal{V}}$

v)$_{2^k}$ Chaque élément de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\overline{\mathcal{V}}$ et de ${}^{k+1}_{2^{k+1}}\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de ${}^{k}_{\alpha}\overline{\mathcal{V}}$ $(\alpha < 2^k)$ et de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k+1}, \dots, \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$.

Appliquons à nouveau le lemme 1 en prenant

$$\mathcal{G} = \mathcal{V}_{\alpha_n-k}\,, \quad \mathcal{H} = {}^{k}_{2^k-1}\mathcal{V}$$

et pour $\mathcal{U}_k$ les familles

$${}^{k}_{i}\mathcal{V}\ (i < 2^k - 1),\ \mathcal{V}_p\ (\alpha_n - k + 1 \leqslant p \leqslant \alpha_n),\ {}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\mathcal{V} \text{ et } {}^{k+1}_{2^{k+1}}\mathcal{V}.$$

On obtient deux familles discrètes d'ouverts, ${}^{k+1}_{2^{k+1}-3}\mathcal{V}$ et ${}^{k+1}_{2^{k+1}-2}\mathcal{V}$ vérifiant :

i)$_{2^k-1}$ ${}^{k+1}_{2^{k+1}-3}\mathcal{V}^* \cup {}^{k+1}_{2^{k+1}-2}\mathcal{V}^* \supset {}^{k}_{2^k-1}\mathcal{V}^*$

ii)$_{2^k-1}$ ${}^{k+1}_{2^{k+1}-3}\overline{\mathcal{V}}$ et ${}^{k+1}_{2^{k+1}-2}\overline{\mathcal{V}}$ sont plus fines que $\mathcal{U}$.

iii)$_{2^k-1}$ Aucun élément de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-3}\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre un élément de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k}$

iv)$_{2^k-1}$ Chaque élément de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-2}\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k}$ et de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-3}\overline{\mathcal{V}}$

v)$_{2^k-1}$ Chaque élément de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-3}\overline{\mathcal{V}}$ et de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-2}\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de

$${}^{k}_{\alpha}\overline{\mathcal{V}}\,(\alpha < 2^k - 1) \text{ et de } \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k+1}, \dots, \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$$

vi)$_{2^{k+1}}$ Chaque élément de ${}^{k+1}_{2^{k+1}}\overline{\mathcal{V}}$ ou de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\overline{\mathcal{V}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-3}\overline{\mathcal{V}}$ et de ${}^{k+1}_{2^{k+1}-2}\overline{\mathcal{V}}$.

Continuons ainsi par récurrence descendante jusqu'à ce que l'on ait construit tous les ${}^{k+1}_{\alpha}\mathcal{V}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant 2^{k+1})$. Les conditions $(1)_{k+1}$ à $(4)_{k+1}$ se vérifient sans peine. Ceci achève de construire par récurrence les familles ${}^{k}_{i}\mathcal{V}$ pour $k \leqslant \alpha_n$ et $i \leqslant 2^k$. Posons alors

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2^{\alpha_n} \text{ et } \mathcal{V}_{\alpha_n+i} = {}^{\alpha_n}_{i}\mathcal{V} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 2^{\alpha_n}$$

Alors les $\mathcal{V}_{\alpha_n+i}$ sont des familles discrètes d'ouverts et chaque $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n+i}$ est plus fine que $\mathcal{U}$ d'après $(2)_{\alpha_n}$. D'autre part, $(1)_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 2^{\alpha_n})$ implique

$$\bigcup_{i=1}^{2^{\alpha_n}} \mathcal{V}^*_{\alpha_n+i} \supset \mathcal{G}^*_{n+1}$$

d'où

$$\bigcup_{p=1}^{\alpha_{n+1}} \mathcal{V}^*_p \supset \bigcup_{p=1}^{n+1} \mathcal{G}^*_p$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

D'après $(3)_{\alpha_n}$ et $(4)_{\alpha_n}$, chaque élément de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_{n+i}}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\overline{\mathcal{V}}_1, \dots, \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$ et de $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n+j}$ pour $j < i$. La construction par récurrence des $\mathcal{V}_n$ est ainsi achevée c.q.d.f.

2. Application au prolongement de certaines fonctions continues.

Nous dirons qu'un espace topologique X a la propriété d'extension locale par rapport à un espace topologique Y si, pour tout fermé A de Y, toute fonction continue f de A dans X peut se prolonger à un voisinage de A dans Y (ce voisinage dépendant de f).

THEOREME 2. – *Soient* X *un espace topologique et* $\{X_i\}_{i\in I}$ *une famille de fermés de* X ; *soient* Y *un espace paracompact complètement normal,* A *un fermé de* Y *et* f : A → X *continue. Supposons vérifiées les conditions suivantes :*

1) *Quels que soient* $i_1, \dots, i_n$ *appartenant à* I, $\bigcap_{k=1}^{n} X_{i_k}$ *a la propriété d'extension locale par rapport à* Y.

2) *Chaque point* x *de* A *a un voisinage* U_x *dans* A *tel que* $f(U_x)$ *soit contenu dans la réunion d'une sous-famille finie de* $\{X_i\}_{i \in I}$.
Alors f *peut se prolonger à un voisinage de* A *dans* Y.

Démonstration. – Montrons d'abord que si $i_1, \ldots, i_n$ appartiennent à I, alors $\bigcup_{k=1}^{n} X_{i_k}$ a la propriété d'extension locale par rapport à Y. Pour cela, il suffit de vérifier, par récurrence sur n, que si chacun des sous-ensembles $Z_1, \ldots, Z_n$ de X est l'intersection d'une sous-famille finie de $\{X_i\}_{i \in I}$, alors $Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ a la propriété d'extension locale par rapport à Y. Cela est clair pour $n = 1$. Si cela est vrai pour n, alors $\left(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i\right) \cap Z_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i \cap Z_{n+1}$ a la propriété d'extension locale par rapport à Y ainsi que $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ et Z_{n+1} ; d'après le lemme suivant, $\bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$ a aussi cette propriété.

LEMME 2. – *Soit* X *un espace topologique. Supposons que* X *soit réunion de deux fermés* X_1 et X_2 *et que* X_1, X_2 *et* $X_0 = X_1 \cap X_2$ *aient la propriété d'extension locale par rapport à un espace complètement normal* Y. *Alors* X *a la propriété d'extension locale par rapport à* Y.

Démonstration du lemme. – Soient A un fermé de Y et $f : A \to X$ continue ; soit $A_i = f^{-1}(X_i)$, $i = 0, 1, 2$. Alors $A = A_1 \cup A_2$ et $A_0 = A_1 \cap A_2$. La complète normalité de Y permet de trouver des fermés Z_1, Z_2 de Y tels-que

$$Y = Z_1 \cup Z_2$$

$$Z_i \cap A = A_i \qquad i = 1, 2.$$

En effet, $Y \setminus A_0$ étant normal, les fermés $A_1 \setminus A_0$ et $A_2 \setminus A_0$, qui sont disjoints, sont contenus dans des ensembles O_2 et O_1 disjoints et ouverts dans $Y \setminus A_0$, donc dans Y. Il suffit de prendre

$$Z_i = Y \setminus O_i \ (i = 1, 2).$$

Soit $Z_0 = Z_1 \cap Z_2$; alors $Z_0 \cap A = A_0$. La fonction

$$f | A_0 : A_0 \to X$$

a un prolongement $f_0 : \overline{W}_0 \to X_0 \subset X$, où W_0 est un voisinage ouvert de A_0 dans Z_0. Pour $i = 1, 2$, la fonction $f_i : A_i \cup \overline{W}_0 \to X_i$ définie par

$$\left| \begin{array}{l} f_i \mid A_i = f \mid A_i \\ f_i \mid \overline{W}_0 = f_0 \end{array} \right.$$

est continue, donc a un prolongement $g_i : V_i \to X_i$, où V_i est un voisinage ouvert de $A_i \cup \overline{W}_0$ dans Z_i. Soit

$$U_i = V_i \cap (Z_i \backslash (Z_0 \backslash W_0)) \quad i = 1, 2.$$

Puisque W_0 est ouvert dans Z_0, $Z_0 \backslash W_0$ est fermé dans Z_0, donc dans Z_i ; par suite, U_i est ouvert dans Z_i. Puisque A_0 est contenu dans W_0, U_i contient A_i. Enfin, on vérifie que $U_i \cap Z_0 = W_0$. Posons

$$U = U_1 \cup U_2.$$

D'après ce qui précède, U contient A et $U \cap Z_i = U_i$ qui est ouvert dans Z_i ; puisque Y est réunion des fermés Z_1 et Z_2, U est ouvert dans Z. Enfin, puisque $U_1 \cap U_2 = W_0$ et que $g_i \mid W_0 = f_0 \mid W_0$ $(i = 1, 2)$, on définit sans ambiguité une fonction $g : U \to X$ par

$$g \mid U_i = g_i \mid U_i \quad i = 1, 2,$$

qui prolonge évidemment f. Sa continuité résulte de la continuité de $g_i \mid U_i$ $(i = 1, 2)$ et du fait que $U_i = U \cap Z_i$ est fermé dans U.

c.q.f.d

Suite de la démonstration du théorème 2. – Pour tout x appartenant à A, soit U_x un voisinage ouvert de x dans A tel que $f(U_x)$ soit contenu dans la réunion d'une sous-famille finie de $\{X_i\}_{i \in I}$. Soit V_x un ouvert de Y tel que $V_x \cap A = U_x$. Soit $\mathcal{V}$ le recouvrement ouvert $\{X \backslash A\} \cup \{V_x\}_{x \in A}$ de Y. D'après le théorème 1, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$ de Y, où chaque $\mathcal{W}_n$ est une famille discrète, tel que $\overline{\mathcal{W}}$ soit plus fin que $\mathcal{V}$ et que, quel que soit n, chaque élément de $\overline{\mathcal{W}}_n$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\bigcup_{p<n} \overline{\mathcal{W}}_p$. Soit $\mathcal{U} = \{W \in \mathcal{W} / W \cap A \neq \emptyset\}$. On peut écrire $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$,

où chaque $\mathcal{U}_n$ est une famille discrète et chaque $\overline{W}$ appartenant à $\overline{\mathcal{U}}_n$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\bigcup_{p<n} \overline{\mathcal{U}}_p$.

Définissons par récurrence une suite croissante $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ de fermés de Y, une suite $\mathcal{U}'_n = \{W'/W \in \mathcal{U}_n\}$ de familles de fermés de Y ($n \geqslant 1$) et des fonctions continues $f_k : A_k \to Y$ vérifiant

i) $A_0 = A$ et $f_0 = f$

ii) Si $W \in \mathcal{U}_n$, alors $W \cap A$ est contenu dans l'intérieur de A_n.

iii) $A_n = A \cup \left(\bigcup_{p \leqslant n} \mathcal{U}'^{*}_n\right)$

iv) Pour tout $W \in \mathcal{U}_n$, $W' = \overline{W} \cap A_n$

v) Si $W' \in \mathcal{U}'_n$, alors $f_n(W')$ est contenu dans la réunion d'une sous-famille finie de $\{X_i\}_{i\in I}$

vi) $f_{n+1} | A_n = f_n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

La condition i) définit A_0 et f_0. Supposons $A_0, \ldots, A_n$ et $f_0, \ldots, f_n$ construits, ainsi que $\mathcal{U}'_1, \ldots, \mathcal{U}'_n$ (Pour $n = 0$, il n'y a pas de familles $\mathcal{U}'_1, \ldots, \mathcal{U}'_n$, mais l'argument est analogue). Soit W un élément de $\mathcal{U}_{n+1}$. D'après la condition iii),

$$\overline{W} \cap A_n = (\overline{W} \cap A) \cup \left(\bigcup_{p \leqslant n} \overline{W} \cap (\overline{\mathcal{U}}'_p)^{*}\right).$$

Puisque $\overline{W}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de chaque $\overline{\mathcal{U}}_p$, il ne rencontre, d'après la condition iv), qu'un nombre fini d'éléments de chaque $\mathcal{U}'_p$ ($p \leqslant n$) ; la condition v) et le fait que la suite $A_0, \ldots, A_n$ est croissante impliquent que l'image par f_n d'un tel élément est contenue dans la réunion d'une sous-famille finie de $\{X_i\}_{i\in I}$; comme en outre $A \cap \overline{W}$ est contenu dans l'un des U_x, on voit que $f_n(\overline{W} \cap A_n)$ est contenu dans la réunion Z d'une sous-famille finie de $\{X_i\}_{i\in I}$. Puisque Z a la propriété d'extension locale par rapport à Y, il y a un voisinage fermé W' de $\overline{W} \cap A_n$ dans $\overline{W}$ et un prolongement $h_W : W' \to Z$ de

$f_n | \overline{W} \cap A_n$ à W'. Soit $\mathcal{U}'_{n+1} = \{W'/W \in \mathcal{U}_{n+1}\}$

et soit

$$A_{n+1} = A_n \cup \left(\bigcup_{W \in \mathcal{U}_{n+1}} W'\right).$$

Puisque $\mathfrak{U}_{n+1}$ est une famille discrète et que W' est contenu dans $\overline{W}$, la famille $\mathfrak{U}'_{n+1}$ est discrète, donc A_{n+1} est fermé. Il est clair que la condition iii) est vérifiée. Puisque W' est un voisinage de $\overline{W} \cap A$ dans $\overline{W}$, $W' \cap W$ est un voisinage de $W \cap A$ dans W ; comme W est ouvert, l'intérieur de W' contient $W \cap A$, donc la condition ii) est vérifiée. Puisque $\mathfrak{U}_{n+1}$ est discrète, la condition iv) se vérifie facilement.

Définissons $f_{n+1} : A_{n+1} \to X$ par

$$f_{n+1} | A_n = f_n$$

$$f_{n+1} | W' = h_W \qquad (W \in \mathfrak{U}_{n+1})$$

Cette définition a un sens puisque

$$h_W | W' \cap A_n = h_W | \overline{W} \cap A_n = f_n | \overline{W} \cap A_n$$

et que, si W, W_1 appartiennent à $\mathfrak{U}_{n+1}$ et si $W \neq W_1$,

$$W' \cap W'_1 \subset \overline{W} \cap \overline{W}_1 = \emptyset.$$

La continuité de $f_{n+1} | \mathfrak{U}'^*_{n+1}$ résulte de la continuité des h_W ($W \in \mathfrak{U}_{n+1}$) et du fait que la famille $\mathfrak{U}'_{n+1}$ est discrète. Puisque $f_{n+1} | A_n$ est aussi continue et que A_{n+1} est réunion des deux fermés A_n et $\mathfrak{U}'^*_{n+1}$, f_{n+1} est continue. Si W appartient à $\mathfrak{U}_{n+1}$, alors $f_{n+1}(W')$ est, par construction, contenu dans la réunion d'une sous-famille finie de $\{X_i\}_{i \in I}$, donc la condition v) est vérifiée et la récurrence est achevée.

Posons alors

$$0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int} A_n .$$

D'après ii) et le fait que $\mathfrak{U}$ recouvre A, 0 est un voisinage de A. D'après vi), on définit sans ambiguïté une fonction $g : 0 \to X$ par

$$g | \operatorname{Int} A_n = f_n | \operatorname{Int} A_n \qquad (n \geqslant 1).$$

Cette fonction est continue car chaque f_n est continue et $(\operatorname{Int} A_n)_{n=1}^{\infty}$ est un recouvrement ouvert de 0 ; en outre, elle prolonge f d'après i) et vi). c.q.d.f.

O. Hanner a construit [3] un exemple d'espace compact X qui est réunion de deux fermés X_1 et X_2 tels que X_1, X_2 et $X_1 \cap X_2$

soient des rétractes absolus dans la catégorie des espaces compacts, mais que X ne soit pas un rétracte absolu de voisinage dans cette catégorie. Cet exemple montre que la complète normalité joue un rôle essentiel dans le lemme 2 et le théorème 2.

La condition de complète normalité sur Y sert seulement à garantir que la réunion d'une sous-famille finie de $\{X_i\}_{i \in I}$ a la propriété d'extension locale par rapport à Y ; on peut donc la remplacer par tout autre condition garantissant cette affirmation. Notons aussi que le prolongement g que nous avons construit dans la démonstration du théorème 2 est tel que tout point x de 0 a un voisinage dont l'image par g est contenue dans la réunion d'une sous-famille finie de $\{X_i\}_{i \in I}$. Ces remarques démontrent le

COROLLAIRE. — *Soient* K *un* CW*-complexe,* Y *un espace paracompact,* A *un fermé de* Y *et* $f : A \to K$ *une fonction continue localement finie. Alors il y a un prolongement localement fini de* f *à un voisinage de* A *dans* Y.

(Nous disons qu'une fonction f d'un espace topologique X dans un CW-complexe K est localement finie si tout point de X a un voisinage dont l'image par f est contenue dans un sous complexe fini de K).

En particulier, il résulte de ce corollaire que si un sous-ensemble fermé A d'un espace paracompact Y est localement compact ou vérifie le premier axiome de dénombrabilité, alors toute fonction continue de A dans un CW-complexe peut se prolonger à un voisinage de A dans Y.

Nous dirons qu'un espace topologique X est un R.A.V. (compact) s'il est compact et s'il a la propriété d'extension locale par rapport à tous les espaces compacts.

THEOREME 3. — *Soit* X *un espace séparé tel que tout sous-ensemble compact de* X *soit contenu dans un sous-ensemble de* X *qui est un* R.A.V. *(compact). Alors, si* A *est un sous-ensemble fermé localement compact d'un espace paracompact* Y, *toute fonction continue de* A *dans* X *peut se prolonger à un voisinage de* A *dans* Y.

La démonstration du théorème 3 est analogue à celle du théorème 2. Les seules modifications à faire sont les suivantes :

a) Prendre pour $U_x (x \in A)$ un voisinage tel que $f(U_x)$ soit relativement compact dans X (donc contenu dans un R.A.V. (compact), lequel a, comme il est connu, la propriété d'extension locale par rapport à tout espace normal, donc par rapport à Y),

b) Remplacer la condition v) par v') : Si $W' \in \mathcal{U}'_n$, alors $f_n(W')$ est relativement compact dans X.

Le théorème 3 a diverses variantes, parmi lesquelles le théorème suivant que l'on peut démontrer en modifiant de façon évidente la démonstration du théorème 3 :

THEOREME 4. – *Soit* (E , p , B) *un fibré localement trivial dont la base* B *est paracompacte et la fibre* F *a les propriétés imposées à* X *au théorème* 3. *Alors, si* A *est un sous-ensemble fermé localement compact de* B, *toute section de p au-dessus de* A *peut se prolonger à un voisinage de* A *dans* B.

3. Applications canoniques dans les nerfs de recouvrements fermés.

Si K est un complexe simplicial et σ un simplexe de K, nous noterons $[\sigma]$ le barycentre de σ. Nous appellerons $\mathrm{Lk}_K(\sigma)$, ou $\mathrm{Lk}(\sigma)$, le sous-complexe de la subdivision barycentrique K' de K formé des simplexes $([\sigma_1], \ldots, [\sigma_s])$ tels que $\sigma < \sigma_1 < \ldots < \sigma_s$ ($\sigma < \tau$ signifie que σ est une face *propre* de τ) et nous noterons $\mathrm{Tr}_K(\sigma)$, ou $\mathrm{Tr}(\sigma)$, le joint de $[\sigma]$ et de $\mathrm{Lk}(\sigma)$; $\mathrm{Tr}(\sigma)$ est donc formé des simplexes de K' de la forme $([\sigma], [\sigma_1], \ldots, [\sigma_s])$ où $\sigma < \sigma_1 < \ldots < \sigma_s$ et de toutes leurs faces. Il est clair que si L est un sous-complexe de K et σ un simplexe de L, alors $\mathrm{Lk}_L(\sigma)$ et $\mathrm{Tr}_L(\sigma)$ sont des sous-complexes de $\mathrm{Lk}_K(\sigma)$ et $\mathrm{Tr}_K(\sigma)$ resp.

Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une famille de sous-ensembles d'un espace topologique et si $\sigma = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ est un simplexe du nerf $N(\mathcal{U})$ de $\mathcal{U}$, nous noterons $\mathrm{Car}(\sigma)$ l'ensemble $\bigcap_{i=0}^{n} U_{\alpha_i}$. Si Y est un sous-espace de X, nous noterons $\mathcal{U}|Y$ la famille $\{U_\alpha \cap Y\}_{\alpha \in A}$ de sous-ensembles de Y ; alors $N(\mathcal{U}|Y)$ est un sous-complexe de $N(\mathcal{U})$.

Le théorème suivant a été prouvé par J. Dugundji [1] dans le cas où X est un espace métrique et où le nerf de $\mathfrak{F}$ est localement de dimension finie.

THEOREME 5. – *Soit* X *un espace paracompact et soit* $\mathfrak{F}$ *un recouvrement fermé localement fini de* X *dont les éléments sont du type* G_δ *dans* X. *Alors il y a une fonction continue* $\lambda : X \to N(\mathfrak{F})$ *telle que* $\lambda^{-1}(\mathrm{Tr}\,\sigma) = \mathrm{Car}(\sigma)$ *pour tout simplexe* σ *de* $N(\mathfrak{F})$.

Démonstration. – Puisque $\mathfrak{F}$ est localement fini, on peut, à l'aide du théorème 1, trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ de X tel que chaque $\mathcal{V}_n$ soit une famille discrète, que, quel que soit $n > 1$, chaque élément de $\overline{\mathcal{V}}_n$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\bigcup_{p<n} \overline{\mathcal{V}}_p$ et que chaque élément de $\mathcal{V}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{F}$. On sait que si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert d'un espace paracompact, alors il existe un recouvrement fermé $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$, dont les éléments sont du type G_δ, tel que U'_α soit contenu dans U_α quel que soit α et que les intérieurs des $U'_\alpha (\alpha \in A)$ recouvrent X. En appliquant ceci au recouvrement ouvert $\mathcal{V}$, on voit que l'on peut trouver une famille $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ de G_δ fermés de X vérifiant :

1) Chaque $\mathcal{G}_n$ est une famille discrète.

2) Chaque élément de $\mathcal{G}_n$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\bigcup_{p<n} \mathcal{G}_n$.

3) Les intérieurs des éléments de $\mathcal{G}$ recouvrent X.

4) Chaque élément de $\mathcal{G}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{F}$.

Pour $n \geqslant 1$, posons $G_n = \mathcal{G}_1^* \cup \ldots \cup \mathcal{G}_n^*$; par commodité, posons aussi $G_0 = \emptyset$. Les familles $\mathcal{G}_n$ étant discrètes, les G_n sont des fermés du type G_δ. Nous allons construire, pour tout entier $n \geqslant 0$, une fonction continue $\lambda_n : G_n \to N(\mathfrak{F})$ de façon que

5) $\lambda_n^{-1}(\mathrm{Tr}\,\sigma) = \mathrm{Car}(\sigma) \cap G_n$.

6) Pour tout élément G de $\mathcal{G}_n$, $\lambda_n(G)$ est contenu dans un sous-complexe fini de $N(\mathfrak{F})$.

7) $\lambda_{n+1} | G_n = \lambda_n$ quel que soit n.

Cela étant, la condition 7) permettra de définir une fonction λ de $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ dans $N(\mathfrak{F})$ par $\lambda | G_n = \lambda_n$ quel que soit n. La continuité de λ résultera de la continuité des λ_n et de 3). Enfin, 5) garantira que λ satisfait à la condition du théorème.

Reste à construire les λ_n. Puisque G_0 est vide, il n'y a pas de problème pour construire λ_0. Nous allons donc construire λ_{n+1} en supposant λ_n déjà construite. Soit G un élément de $\mathcal{G}_{n+1}$. D'après 2) et 6), l'ensemble $\lambda_n(G \cap G_n)$ est contenu dans un sous-complexe fini de $N(\mathfrak{F})$. Soit $L_G = N(\mathfrak{F} | G)$; d'après 4), c'est un sous-complexe fini de $N(\mathfrak{F})$. Si σ est un simplexe de L_G, soit $d_G(\sigma) = \dim L_G - \dim \sigma$. Posons

8) $A_k = \cup \{\mathrm{Car}(\sigma) \cap G / \sigma \in L_G \text{ et } d_G(\sigma) \leqslant k\}$ $0 \leqslant k \leqslant \dim L_G$.

Convenons que A_{-1} est vide ; alors les A_k sont des fermés de G et l'on a

9) $\emptyset = A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{\dim L_G} = G$

Nous allons définir des fonctions continues

$$\lambda_{G,k} : (G \cap G_n) \cup A_k \to N(\mathfrak{F}) \quad (-1 \leqslant k \leqslant \dim L_G)$$

de façon que

10) $\lambda_{G,k} | G \cap G_n = \lambda_n | G \cap G_n$

11) $\lambda_{G,k}^{-1}(\mathrm{Tr}\,\sigma) = \mathrm{Car}(\sigma) \cap G$ pour tout $\sigma \in L_G$ avec $d_G(\sigma) \leqslant k$

12) $\lambda_{G,k} | A_{k-1} = \lambda_{G,k-1} | A_{k-1}$

13) $\lambda_{G,k}((G \cap G_n) \cup A_k)$ est contenu dans un sous-complexe fini de $N(\mathfrak{F})$.

Pour $k = -1$, prenons $\lambda_{G,k} = \lambda_n | G \cap G_n$. Soit $k < \dim L_G$ et supposons $\lambda_{G,k}$ construite. Notons que si σ, σ' sont deux simplexes distincts de L_G avec $d_G(\sigma) = k + 1 = d_G(\sigma')$, alors $\mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{Car}(\sigma') \cap G$ est contenu dans A_k. Ceci résulte du fait que si

$$\mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{Car}(\sigma') \cap G \neq \emptyset,$$

alors $\mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{Car}(\sigma') = \mathrm{Car}(\tau)$ où τ est le plus petit simplexe de $\mathrm{N}(\mathfrak{F})$ contenant a la fois σ et σ' ; mais alors τ appartient à $\mathrm{L_G}$ et, puisque σ est une face propre de τ, on a $d_{\mathrm{G}}(\tau) < d_{\mathrm{G}}(\sigma)$. Il suffit donc, pour construire $\lambda_{\mathrm{G},k+1}$, de prolonger séparément $\lambda_{\mathrm{G},k}$ à chacun des $\mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{G}$ tels que $\sigma \in \mathrm{L_G}$ et $d_{\mathrm{G}}(\sigma) = k + 1$.

Pour cela, remarquons que, pour un tel σ, $\lambda_{\mathrm{G},k}(\mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{A}_k)$ est contenu dans $\mathrm{Lk}(\sigma)$. En effet, si y appartient à $\mathrm{Car}\,(\sigma) \cap \mathrm{A}_k$, alors y appartient à $\mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{Car}(\tau) \cap \mathrm{G}$ pour quelque $\tau \in \mathrm{L_G}$ avec $d_{\mathrm{G}}(\tau) \leqslant k$. Alors, il y a un simplexe ρ de $\mathrm{L_G}$ contenant à la fois σ et τ ; on a $d_{\mathrm{G}}(\rho) \leqslant d_{\mathrm{G}}(\tau) \leqslant k$, donc $\lambda_{\mathrm{G},k}(y) \in \mathrm{Tr}(\rho) \subset \mathrm{Lk}(\sigma)$ (Car lorsque $\sigma < \rho$, on a $\mathrm{Tr}(\rho) \subset \mathrm{Lk}(\sigma)$). Alors $\lambda_{\mathrm{G},k}(((\mathrm{G} \cap \mathrm{G}_n) \cup \mathrm{A}_k) \cap \mathrm{Car}(\sigma))$ est, d'après 13), contenu dans un sous-complexe fini de $\mathrm{Lk}(\sigma)$. Soit K_σ le joint de $[\sigma]$ et de ce sous-complexe. Puisque K_σ est un complexe fini contractile, il a la propriété d'extension par rapport aux espaces normaux, donc il existe une fonction continue $\Psi_\sigma : \mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{G} \to \mathrm{K}_\sigma$ prolongeant $\lambda_{\mathrm{G},k} \mid ((\mathrm{G} \cap \mathrm{G}_n) \cup \mathrm{A}_k) \cap \mathrm{Car}(\sigma)$. Il résulte facilement du fait que chaque élément de $\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{G}$ est un G_δ que l'ensemble $(\mathrm{G} \cap \mathrm{G}_n) \cup \mathrm{A}_k$ est un G_δ dans X. Par suite, il existe une fonction continue $c_\sigma : \mathrm{Car}(\sigma) \to \mathrm{I}$ telle que $c_\sigma^{-1}(0) = ((\mathrm{G} \cap \mathrm{G}_n) \cup \mathrm{A}_k) \cap \mathrm{Car}(\sigma)$. Soit $\varphi_\sigma : \mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{G} \to \mathrm{N}(\mathfrak{F})$ la fonction définie par

$$14)\quad \varphi_\sigma(y) = c_\sigma(y) \cdot [\sigma] + (1 - c_\sigma(y))\, \Psi_\sigma(y).$$

Puisque φ_σ prend ses valeurs dans le complexe fini K_σ, elle est continue. Définissons alors $\lambda_{\mathrm{G},k+1}$ par

$$15)\quad \begin{aligned} &\lambda_{\mathrm{G},k+1} \mid (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}_n) \cup \mathrm{A}_k = \lambda_{\mathrm{G},k} \\ &\lambda_{\mathrm{G},k+1} \mid \mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{G} = \varphi_\sigma \quad \text{pour } \sigma \in \mathrm{L_G} \text{ avec } d_{\mathrm{G}}(\sigma) = k + 1 \end{aligned}$$

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de simplexes σ, $\lambda_{\mathrm{G},k+1}$ est continue et son image est contenue dans un sous-complexe fini de $\mathrm{N}(\mathfrak{F})$. Montrons que, pour tout simplexe τ de $\mathrm{L_G}$ tel que $d_{\mathrm{G}}(\tau) \leqslant k + 1$, on a $\lambda_{\mathrm{G},k+1}^{-1}(\mathrm{Tr}\,\tau) = \mathrm{Car}(\tau) \cap \mathrm{G}$. Si $d_{\mathrm{G}}(\tau) \leqslant k$ et si $\sigma \in \mathrm{L_G}$ vérifie $d_{\mathrm{G}}(\sigma) = k + 1$, alors $\mathrm{Tr}(\tau) \cap \mathrm{Tr}(\sigma)$ ne contient pas $[\sigma]$ (car sinon τ serait une face de σ et l'on aurait $d_{\mathrm{G}}(\sigma) \leqslant d_{\mathrm{G}}(\tau)$) donc $\mathrm{Tr}(\tau) \cap \mathrm{Tr}(\sigma)$ est un sous-complexe de $\mathrm{Lk}(\sigma)$. Puisque $\lambda_{\mathrm{G},k+1}$ n'envoie aucun point de $\mathrm{Car}(\sigma) \cap \mathrm{G} \backslash (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}_n) \cup \mathrm{A}_k$ dans $\mathrm{Lk}(\sigma)$, on a

$$\lambda_{\mathrm{G},k+1}^{-1}(\mathrm{Tr}(\tau)) = \lambda_{\mathrm{G},k}^{-1}(\mathrm{Tr}(\tau)) = \mathrm{Car}(\tau) \cap \mathrm{G}.$$

Si $d_G(\tau) = k + 1$, il est clair, d'après la construction, que $\lambda_{G,k+1}^{-1}(\mathrm{Tr}(\tau))$ contient $\mathrm{Car}(\tau) \cap G$. Inversement, soit y un point de $(G \cap G_n) \cup A_k$ tel que $\lambda_{G,k+1}(y)$ appartienne à $\mathrm{Tr}(\sigma)$. Si y appartient à G_n ou à $A_{k+1} \backslash A_k$, il est clair que y appartient à $\mathrm{Car}(\tau)$. Si y appartient à $A_k \backslash G_n$, alors, d'après la construction des $\lambda_{G,k}$, il existe un $l \leqslant k$ et un simplexe σ de L_G tels que $\lambda_{G,k+1}(y) = \lambda_{G,l}(y)$ appartienne à $\mathrm{Tr}(\sigma) \backslash \mathrm{Lk}(\sigma)$. Alors $[\sigma]$ est un sommet de $\mathrm{Tr}(\tau)$, i.e. $\tau < \sigma$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $y \in \mathrm{Car}(\sigma) \subset \mathrm{Car}(\tau)$.

La construction par récurrence des $\lambda_{G,k}$ étant ainsi achevée, définissons une fonction $\lambda_{n+1} : G_{n+1} \to N(\mathfrak{F})$ par

$$16)\quad \begin{aligned} &\lambda_{n+1} \mid G_n = \lambda_n \\ &\lambda_{n+1} \mid G \;= \lambda_{G,\dim L_G} \quad \text{pour } G \in \mathfrak{G}_{n+1}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathfrak{G}_{n+1}$ est discrète, il est clair que $\lambda_{n+1} \mid \mathfrak{G}_{n+1}^*$ est continue ; comme G_n et $\mathfrak{G}_{n+1}^*$ sont fermés, λ_{n+1} est continue sur

$$G_{n+1} = G_n \cup \mathfrak{G}_{n+1}^*.$$

La condition 13), appliquée à $h = \dim L_G$, montre que λ_{n+1} vérifie la condition 6). Soit σ un simplexe de $N(\mathfrak{F})$; alors

$$\lambda_{n+1}^{-1}(\mathrm{Tr}(\sigma)) \cap G_n = \lambda_n^{-1}(\mathrm{Tr}(\sigma)) = \mathrm{Car}(\sigma) \cap G_n,$$

donc, pour montrer que $\lambda_{n+1}^{-1}(\mathrm{Tr}(\sigma)) = \mathrm{Car}(\sigma) \cap G_{n+1}$, il suffit de montrer que $\lambda_{n+1}^{-1}(\mathrm{Tr}(\sigma)) \cap G = \mathrm{Car}(\sigma) \cap G$ quel que soit G appartenant à $\mathfrak{G}_{n+1}$. Si σ appartient à L_G, ceci résulte de 11) et 16). Sinon, $\mathrm{Car}(\sigma) \cap G$ est vide donc, puisque λ_n vérifie 5), $\lambda_{n+1}^{-1}(\mathrm{Tr}(\sigma)) \cap G$ est contenu dans $G \backslash G_n$. D'après 16) et la construction des $\lambda_{G,k}$, si y est un point de $G \backslash G_n$, il existe un simplexe τ de L_G tel que

$$\lambda_{n+1}(y) = \lambda_{G,k}(y)$$

appartienne à $\mathrm{Tr}(\tau) \backslash \mathrm{Lk}(\tau)$. Si $\lambda_{n+1}(y)$ appartenait à $\mathrm{Tr}(\sigma)$, $[\tau]$ serait un sommet de $\mathrm{Tr}(\sigma)$, donc σ serait une face de τ et, d'après 11), y appartiendrait à $\mathrm{Car}(\tau) \subset \mathrm{Car}(\sigma)$ contrairement au fait que $\mathrm{Car}(\sigma) \cap G$ est vide, ce qui montre que $\lambda_{n+1}(\mathrm{Tr}(\sigma)) \cap G$ est vide, donc égal à $\mathrm{Car}(\sigma) \cap G$. Par conséquent, λ_{n+1} vérifie 5). La construction des λ_n, donc aussi la démonstration, est achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUGUNDJI, Maps Into nerves of closed coverings, Annali della Scuola Normale Superiore di Pise (3) 21 (1967) p. 121-136.

[2] R. ENGELKING, Outline of general topology, North Holland 1968.

[3] O. HANNER, Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces, Ark. för Mat. 2 (1952) p. 315-360.

Manuscrit reçu le 25 janvier 1972
article accepté par J.L. Koszul

Robert CAUTY
88, rue de Clichy
Paris 9ème
et Université Paris VI