

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANNE-MARIE BERGÉ

## Sur l'arithmétique d'une extension diédrale

*Annales de l'institut Fourier*, tome 22, n° 2 (1972), p. 31-59

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1972\\_\\_22\\_2\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_31_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR L'ARITHMÉTIQUE D'UNE EXTENSION DIÉDRALE

par Anne-Marie BERGÉ

### 1. Introduction.

Rappelons d'abord quelques résultats relatifs aux extensions abéliennes. Soient  $E$  une extension abélienne de degré fini des rationnels, et  $G$  son groupe de Galois. Le théorème 132 de Hilbert, complété par Speiser, peut s'énoncer de la manière suivante :

Si l'extension  $E|\mathbb{Q}$  est modérément ramifiée, l'anneau des entiers de  $E$  est un  $\mathbb{Z}[G]$ -module libre.

Léopoldt [3] a étudié la structure de l'anneau des entiers de  $E$  sans hypothèse restrictive sur la ramification. On ne peut alors obtenir le même résultat. On démontre [4], en effet : soient  $A$  un anneau de Dedekind,  $K$  son corps des fractions,  $E$  une extension galoisienne de  $K$ ,  $G$  le groupe de Galois de  $E/K$ ,  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $E$ ; alors  $B$  est un  $A[G]$ -module projectif si, et seulement si, l'extension  $E/K$  est modérément ramifiée.

Conservons les notations ci-dessus. Pour étudier l'anneau  $B$  dans le cas d'une ramification quelconque, on est amené à le considérer comme module, non plus sur  $A[G]$ , mais sur le sous-anneau de  $K[G]$ , noté  $\mathfrak{D}(B)$ , et égal à l'ensemble des éléments  $\lambda$  de  $K[G]$  tels que, pour tout  $x \in B$ ,  $\lambda x$  appartienne à  $B$ . On verra que  $\mathfrak{D}(B)$  est un ordre de  $A$  dans  $K[G]$ , et on l'appellera *ordre associé à  $B$* .

On peut alors énoncer ainsi le résultat de Léopoldt :

L'anneau des entiers d'une extension abélienne des ration-

nels est un module libre sur l'ordre qui lui est associé dans  $\mathbb{Q}[G]$ .

La méthode employée pour les extensions abéliennes ne s'étend pas aux extensions galoisiennes quelconques. D'ailleurs, il n'y a pas de résultat général :

J. Martinet [5] a construit une extension galoisienne des rationnels de groupe de Galois quaternionien d'ordre 8, qui est modérément ramifiée, et dont l'anneau des entiers n'est pas un  $\mathbb{Z}[G]$ -module libre.

On se propose d'exposer ici un résultat analogue à celui de Léopoldt, dans le cas d'une extension galoisienne non abélienne de degré  $2p$  (où  $p$  est un nombre premier impair).

Dans toute la suite, on désigne par  $G$  un groupe diédral d'ordre  $2p$ , et par  $A$  un anneau principal de corps de fractions  $K$  qui vérifie les hypothèses suivantes :

1) 2 est inversible dans  $A$ , ou bien tel que  $A/2A$  soit un corps à 2 éléments ;

2)  $p$  est inversible dans  $A$ , ou bien tel que  $A/pA$  soit un corps à  $p$  éléments ;

3) Le polynôme  $\sum_{i=0}^{i=p-1} X^i$  est irréductible dans  $K[X]$ .

Remarquons que ces hypothèses sont stables par localisation, et que, lorsque  $p$  n'est pas inversible dans  $A$ , la troisième est une conséquence de la deuxième [4].

**THÉORÈME.** — *Si  $E$  est une extension galoisienne de  $K$ , dont le groupe de Galois est isomorphe à  $G$ , l'anneau des entiers de  $E$  est un module libre sur son ordre associé dans  $K[G]$ .*

Nous verrons que la nature de l'ordre associé à l'anneau  $B$  des entiers de  $E$  dépend de la ramification de  $E/K$ . Le résultat de J. Martinet [4] sur les extensions diédrales modérément ramifiées apparaîtra ainsi comme un cas particulier du théorème.

L'étude de  $B$  comme module sur son ordre associé sera rattachée à la recherche d'invariants, pour les  $A[G]$ -modules de type fini et de « rang 1 », qui permettent de caractériser ceux qui sont localement libres ou libres sur leurs « ordres associés » dans  $K[G]$ .

Il restera ensuite à calculer ces invariants pour l'anneau  $B$ .

## 2. Ordres de $A$ dans $K[G]$ contenant $A[G]$ .

On rappelle qu'un ordre de  $A$  dans  $K[G]$  est un sous-anneau de  $K[G]$  contenant une base de  $K[G]$  sur  $K$ , et dont tous les éléments sont entiers sur  $A$ .

*Notations.* — Soient  $H = \{1, \sigma, \dots, \sigma^{p-1}\}$  et  $g = \{1, \tau\}$  des sous-groupes de  $G$  d'ordres respectifs  $p$  et  $2$ . On pose

$$N = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i \quad \text{et} \quad L = (\sigma - \sigma^{-1})^{p-2}.$$

$K'$  désigne l'extension de  $K$  obtenue par adjonction des racines  $p$ -ièmes de l'unité,  $K'_0$  le sous-corps de  $K'$  de degré  $(p-1)/2$ ,  $A'_0$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $K'_0$ .

**PROPOSITION 2.1.** — *Les ordres de  $A$  dans  $K[G]$ , qui contiennent  $A[G]$ , sont les sous- $A$ -modules de  $K[G]$  suivants :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_0 &= A[G]; \mathfrak{D}_1 = [A[G], ((1 + \tau)N)/p]; \\ \mathfrak{D}_2 &= [A[G], ((1 - \tau)N)/p], \mathfrak{D}_3 = [A[G], N/p, \tau N/p]; \\ \mathfrak{D}_4 &= [\mathfrak{D}_3, ((1 + \tau)L)/p]; \mathfrak{D}_5 = [\mathfrak{D}_3, ((1 - \tau)L)/p], \end{aligned}$$

et, pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq 5$ ,  $\mathfrak{D}'_i = [\mathfrak{D}_i, ((1 + \tau)N)/2]$ .

*Démonstration.* — Il est facile de vérifier que les  $A$ -modules  $\mathfrak{D}_i$  et  $\mathfrak{D}'_i$  sont, pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq 5$ , des ordres de  $A$  dans  $K[G]$ . Pour vérifier qu'il n'y en a pas d'autres, on démontre d'abord le lemme suivant :

**LEMME 2.1.** —  *$\mathfrak{D}'_4$  et  $\mathfrak{D}'_5$  sont des ordres maximaux.*

On peut, pour cela, utiliser la théorie des discriminants d'algèbres (discriminants relatifs à la forme bilinéaire trace); on sait, en effet, que pour qu'un ordre de  $A$  dans  $K[G]$  soit maximal, il faut et il suffit que son discriminant soit égal au discriminant  $\Delta$  de la  $K$ -algèbre  $K[G]$ . Le calcul de  $\Delta$  se ramène, grâce à l'isomorphisme

$$K[G] \simeq K \times K \times \mathfrak{M}_2(K'_0)$$

(où  $\mathfrak{M}_2(K'_0)$  est l'algèbre des matrices d'ordre 2 à coefficients dans  $K'_0$ ), à celui du discriminant de l'ordre maximal  $\mathfrak{M}_2(A'_0)$  de  $A$  dans  $\mathfrak{M}_2(K'_0)$ .

Le calcul des discriminants des ordres  $\mathfrak{D}'_4$  et  $\mathfrak{D}'_5$  se ramène

à celui de  $A[G]$ , grâce aux isomorphismes

$$\mathfrak{D}_4/A[G] \simeq \mathfrak{D}'_5/A[G] \simeq A/pA \times A/pA \times A/2pA.$$

On trouve comme valeur commune à  $\Delta$  et à ces discriminants,  $2^{2p-2} \times p^{2p-6}$ , ce qui achève la démonstration du lemme.

Il est clair que l'on peut se borner, pour la démonstration de la proposition 2.1, aux cas où  $A$  est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal  $mA$ , avec  $m = 2$  ou  $m = p$ .

Dans le premier cas, on voit facilement que  $\mathfrak{D}_0$  et  $\mathfrak{D}'_0$  sont les seuls ordres de  $A$  dans  $K[G]$  contenant  $A[G]$ : tout ordre maximal doit en effet contenir l'entier du centre  $((1 + \tau)N)/2$ , donc, d'après le lemme 2.1, être égal à  $\mathfrak{D}'_0$ . On conclut en remarquant que le  $A$ -module  $\mathfrak{D}'_0/\mathfrak{D}_0$  est simple.

On suppose désormais  $A$  local d'idéal maximal  $pA$ , et on étudie les entiers de  $K[G]$  de la forme  $(1 + \varepsilon\tau)\mu$ , avec  $\varepsilon = \pm 1$  et  $\mu \in K[H]$ . Pour  $\mu = \sum_{i=0}^{p-1} k_i \sigma^i$ ,  $k_i \in K$ , on pose  $\bar{\mu} = \sum_{i=0}^{p-1} k_i \sigma^{-i}$ . On voit que, pour que  $(1 + \varepsilon\tau)\mu$  soit entier sur  $A$ , il faut et il suffit que  $\mu + \bar{\mu}$  soit entier sur  $A$ , donc, en raison de l'isomorphisme  $K[H]/(N) \simeq K'$ , de la forme  $aN/p + \alpha$ ,  $a \in A$ ,  $\alpha \in A[H]$ .

Soit  $\mathfrak{D}$  un ordre de  $A$  dans  $K[G]$  contenant  $A[G]$ , et soit  $\lambda \in \mathfrak{D}$ .

En écrivant que  $(1 + \varepsilon\tau)\lambda$  et  $(1 + \varepsilon\tau)\lambda\sigma$  appartiennent à  $\mathfrak{D}$ , pour  $\varepsilon = \pm 1$ , on déterminera la forme de  $\lambda$  grâce au lemme suivant :

LEMME 2.2. — Soient  $a, a' \in A$ ,  $\alpha, \alpha' \in A[H]$  et  $\mu \in K[H]$  tel que

$$\mu + \bar{\mu} = aN/p + \alpha \quad \text{et} \quad \mu\sigma + \bar{\mu}\sigma^{-1} = a'N/p + \alpha'.$$

Alors  $\mu$  est de la forme  $uN/p + vL/p + \beta$ ,  $u, v \in A$ ,  $\beta \in A[H]$ .

Il en résulte que  $\lambda$  est de la forme :

$$\lambda = u_\lambda \frac{(1 + \tau)N}{p} + u'_\lambda \frac{(1 - \tau)N}{p} + v_\lambda \frac{(1 + \tau)L}{p} + v'_\lambda \frac{(1 - \tau)L}{p} + \gamma, \quad (1)$$

$$u_\lambda, u'_\lambda, v_\lambda, v'_\lambda \in A, \quad \gamma \in A [6].$$

Pour discuter les valeurs de  $u_\lambda, u'_\lambda, v_\lambda, v'_\lambda$  modulo  $p$ , on utilisera la remarque suivante :

Si une somme  $S$

$$S = u \frac{(1 + \tau)N}{p} + u' \frac{(1 - \tau)N}{p} + v \frac{(1 + \tau)L}{p} + v' \frac{(1 - \tau)L}{p}$$

appartient à  $\mathfrak{D}$ , chacun de ses quatre termes appartient à  $\mathfrak{D}$ .

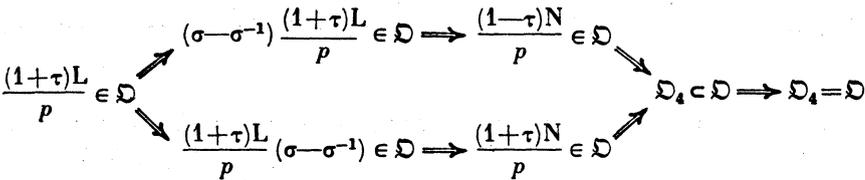
Il suffit en effet d'écrire  $(1 + \varepsilon\tau)S(1 - \varepsilon'\tau) \in \mathfrak{D}$  avec  $\varepsilon = +1$  ou  $-1$ ,  $\varepsilon' = +1$  ou  $-1$ , en tenant compte des relations

$$(1 + \varepsilon\tau)L(1 + \varepsilon\tau) = 0, (1 + \varepsilon\tau)L(1 - \varepsilon\tau) = 2(1 + \varepsilon\tau)L.$$

De sorte qu'une condition telle que : «  $\frac{(1 + \tau)L}{p}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}$  » par exemple se traduira, dans la formule (1), par la condition «  $v_\lambda$  est congru à 0 modulo  $p$  pour tout  $\lambda$  », et donc par l'inclusion  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}_5$ .

On remarque par ailleurs que  $\mathfrak{D}_4$  (resp.  $\mathfrak{D}_5$ ) est le seul ordre  $\mathfrak{D}$  qui contienne  $\frac{(1 + \tau)L}{p}$  (resp.  $\frac{(1 - \tau)L}{p}$ ).

L'élément  $L = (\sigma - \sigma^{-1})^{p-2}$  vérifie en effet la congruence  $L(\sigma - \sigma^{-1}) \equiv N$  modulo  $p$ , d'où les implications :



On peut donc supposer que  $\frac{(1 + \tau)L}{p}$  et  $\frac{(1 - \tau)L}{p}$  n'appartiennent pas à  $\mathfrak{D}$ , c'est-à-dire que, dans la formule (1),  $v_\lambda$  et  $v'_\lambda$  sont congrus à 0 modulo  $p$  pour tout  $\lambda$ , soit encore :  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}_3$ . En discutant suivant l'appartenance à  $\mathfrak{D}$  des éléments  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  et  $\frac{(1 - \tau)N}{p}$ , (la condition  $\frac{(1 + \tau)N}{p} \in \mathfrak{D}$  se traduit par l'inclusion  $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}$ , sa négation se traduit par l'inclusion  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}_2$ ), on achève l'identification de  $\mathfrak{D}$  avec l'un des ordres  $\mathfrak{D}_i (i = 0, 1, 2, 3)$ .

Citons ici une propriété des ordres maximaux :

**PROPOSITION 2.2.** — *Les  $\mathfrak{D}_3$ -modules  $\mathfrak{D}_4$  et  $\mathfrak{D}_5$  (respectivement  $\mathfrak{D}_3$ -modules  $\mathfrak{D}'_4$  et  $\mathfrak{D}'_5$ ) sont projectifs.*

*Démonstration.* — Nous verrons plus loin (théorème 4.1) qu'en fait le  $\mathfrak{D}_3$ -module  $\mathfrak{D}_4 \oplus \mathfrak{D}_5$  est libre. Mais il nous suffit ici de vérifier cette propriété localement, et même dans le seul cas où  $A$  est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal  $pA$ .

**LEMME 2.3.** — *On pose*

$$L' = \sum_{i=0}^{p-1} i\sigma^{2i} \quad \text{et} \quad L'_0 = ((p-1)/2)(\sigma^2 - 1) + N/p.$$

*Alors  $L'$  est congru à  $-L$  modulo  $pA[H]$ , et on a*

$$L'L'_0 = p((p-1)/2).$$

On peut alors construire une suite exacte et scindée de  $\mathfrak{D}_3$ -modules

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \mathfrak{D}_4 \oplus \mathfrak{D}_5 \xrightarrow{f} \mathfrak{D}_3 \rightarrow 0,$$

où  $f$  associe, à  $(x, y) \in \mathfrak{D}_4 \oplus \mathfrak{D}_5$ ,  $((x-y)L'_0)/(p-1)$ . Il est facile de voir que  $\text{Ker } f$  est isomorphe à  $\mathfrak{D}_3$ , d'où la proposition 2.2.

*Remarque.* — On peut construire une représentation  $\varphi$  (respectivement  $\psi$ ) de  $K[G]$  sur  $K \times K \times \mathfrak{M}_2(K'_0)$ , qui envoie l'ordre  $\mathfrak{D}'_4$  (respectivement  $\mathfrak{D}'_5$ ) sur  $A \times A \times \mathfrak{M}_2(A'_0)$  :

Soit  $\omega$  une racine  $p$ -ième primitive de l'unité. Définissons  $\psi$  à partir des caractères  $\chi_0, \chi_1, \chi$  suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_0 : G \rightarrow K^* \\ \quad \text{défini par } \chi_0(\sigma) = 1, \chi_0(\tau) = 1, \\ \chi_1 : G \rightarrow K^* \\ \quad \text{défini par } \chi_1(\sigma) = 1, \chi_1(\tau) = -1, \\ \chi : G \rightarrow (\mathfrak{M}_2(K'_0))^* \\ \quad \text{défini par } \chi(\sigma) = \begin{pmatrix} \omega + \omega^{-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \chi(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

L'image de  $\mathfrak{D}'_5$  par  $\psi$  est un ordre maximal contenu dans  $A \times A \times \mathfrak{M}_2(A'_0)$ , donc lui est égal.

(Pour  $\varphi$ , on remplace  $\chi$  par  $\chi'$  :  $\chi'(\sigma) = \chi(\sigma)$ ,  $\chi'(\tau) = -\chi(\tau)$ ).

### 3. Invariants associés à un $\mathfrak{D}$ -module.

On désignera désormais par  $\mathfrak{D}$  un ordre de  $A$  dans  $K[G]$  contenant  $A[G]$  et par  $M$  un  $\mathfrak{D}$ -module vérifiant les hypothèses suivantes :

*Hypothèses* ( $H_0$ ). —  $M$  est de type fini sur  $\mathfrak{D}$ , sans torsion sur  $A$ , et son rang est défini : rappelons que  $M$  est de rang  $r$  si le  $K[G]$ -module  $M_K = K \otimes_A M$  est libre avec une base à  $r$  éléments.

$M$ , étant sans  $A$ -torsion, sera considéré comme un sous- $\mathfrak{D}$ -module du  $K[G]$ -module  $M_K$ .

Nous allons associer au  $\mathfrak{D}$ -module  $M$  vérifiant les hypothèses ( $H_0$ ) deux invariants par isomorphisme  $d(M)$  et  $h(M)$ , qui permettront de reconnaître si  $M$  est localement libre, puis s'il est libre, sur  $\mathfrak{D}$ .

1) Pour tout sous-groupe  $G'$  de  $G$ , nous notons  $M^{G'}$  le sous- $A$ -module de  $M$  invariant par  $G'$ . Considérons en particulier les  $A$ -modules  $M^g$  et  $M^G$ . On a clairement  $M^g \supset M^G$ .

Les générateurs  $\sigma$  et  $\tau$  de  $G$  étant liés par  $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ , on voit que  $\sigma + \sigma^{-1}$  appartient au centre de  $A[G]$ ;  $M^g$  et  $M^G$  sont donc des sous- $A[\sigma + \sigma^{-1}]$ -modules de  $M$  (où  $A[\sigma + \sigma^{-1}]$  désigne la sous- $A$ -algèbre de  $A[G]$  engendrée par  $\sigma + \sigma^{-1}$ ).

De plus, il est clair que, pour tout  $x \in M^g$ ,  $Nx$  appartient à  $M^G$ .

Le  $A$ -module quotient  $M^g/M^G$  peut donc être canoniquement muni d'une structure de module sur l'anneau quotient  $R = A[\sigma + \sigma^{-1}]/(N)$ . Ce  $R$ -module sera noté  $M^*$ .

Or  $R$  est un anneau de Dedekind. Plus précisément, il est isomorphe à l'anneau d'entiers  $A'_0$  (un tel isomorphisme n'est pas canonique : il y a autant d'isomorphismes que de couples  $(\chi, \chi^{-1})$  de caractères non triviaux de  $H$  dans  $K^*$ , c'est-à-dire  $(p-1)/2$ ).

Comme le  $R$ -module  $M^*$  est sans torsion, de type fini, et de rang  $2r$ , il est isomorphe à une somme directe  $R^{2r-1} \oplus \mathfrak{A}$ , où  $\mathfrak{A}$  est un idéal de  $R$  que cette condition détermine, à la multiplication par un idéal principal près [1].

**DÉFINITION 3.1.** — *On notera  $h(M)$  la classe, dans le groupe  $\mathfrak{K}(R)$  des classes d'idéaux de  $R$ , d'un idéal  $\mathfrak{A}$  de  $R$  tel que  $M^g/M^g = M^*$  soit isomorphe à  $R^{2r-1} \oplus \mathfrak{A}$ .*

Il est clair que, si  $M$  est un  $\mathfrak{D}$ -module libre, on a  $h(M) = h(\mathfrak{D})$ . Cette condition n'est évidemment pas suffisante pour que  $M$  soit libre, car elle ne fait intervenir que la structure sous-jacente de  $A[G]$ -module de  $M$  (de même d'ailleurs que les hypothèses  $(H_0)$ ).

*Montrons que  $h(\mathfrak{D})$  est la classe principale de  $\mathfrak{K}(R)$ . Soit  $i$  l'entier  $0 \leq i \leq 5$  tel que  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_i$  ou  $\mathfrak{D}'_i$  (proposition 2.1). On remarque d'abord que l'on a  $h(\mathfrak{D}_i) = h(\mathfrak{D}'_i)$  pour tout  $i$  et que pour  $i \neq 4$ , le  $R$ -module  $\mathfrak{D}_i^* = \frac{\mathfrak{D}_i^g}{\mathfrak{D}_i^g}$  admet pour base  $\{[1 + \tau], [(1 + \tau)\sigma]\}$  où, pour  $x \in M^g$ , on note  $[x]$  la classe de  $x$  modulo  $M^g$ ,*

Reste à vérifier que les classes  $h(\mathfrak{D}_4)$  et  $h(\mathfrak{D}_5)$  sont inverses dans  $\mathfrak{K}(R)$ . On construit pour cela, comme pour la proposition 2.2, une suite exacte de  $R$ -modules :

$$0 \rightarrow \text{Ker } F \rightarrow \mathfrak{D}_4^* \oplus \mathfrak{D}_5^* \xrightarrow{F} \mathfrak{D}_3^* \rightarrow 0$$

où  $F$  associe au couple  $([x], [y])$ , où  $x$  appartient à  $\mathfrak{D}_4^g$  et  $y$  à  $\mathfrak{D}_5^g$ , l'élément  $[x - y][\sigma^2 - 1]$ . On achève en remarquant que  $\text{Ker } F$  est isomorphe à  $\mathfrak{D}_3^*$ , lequel est  $R$ -libre.

2) Pour permettre une étude locale du  $\mathfrak{D}$ -module  $M$  on lui associe un entier défini, lorsque  $p$  n'est pas inversible dans  $A$ , de la façon suivante :

Le  $A$ -module  $M/pM + M^H$  peut être canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $A/pA$ . On définit alors une application  $f$  de  $M^*$  dans cet espace vectoriel :

Pour  $X \in M^*$ ,  $f(X)$  désigne la classe modulo  $pM + M^H$  de l'élément  $Lx$ , où  $x$  est un représentant de  $X$  dans  $M^g$  (on vérifie aisément que l'élément  $Lx$  est indépendant du choix de ce représentant).

Cette application  $f$  vérifie la propriété suivante : pour tous

$X \in M^*$   $Y \in M^*$ ,  $\alpha \in R$ ,  $\beta \in R$ , on a :

$$f(\alpha X + \beta Y) = \text{Tr}\alpha f(X) + \text{Tr}\beta f(Y),$$

où, pour  $\alpha = \left[ \sum_{i=0}^{p-1} a_i \sigma^i \right] \in R$ ,  $\text{Tr}\alpha$  désigne la classe modulo  $pA$  de  $\sum_{i=0}^{p-1} a_i$ . Nous dirons que  $f$  est une  $R$ -application de  $M^*$  dans le  $A/pA$ -espace vectoriel  $M/pM + M^H$ . Il en résulte que l'image  $f(M^*)$  est un sous-espace vectoriel de  $M/pM + M^H$ , de dimension invariante par localisation en  $p$ , et donc inférieure ou égale à  $2r$  (si  $M^*$  est  $R$ -libre de base  $\mathcal{B}$ ,  $f(M^*)$  sera engendré par  $f(\mathcal{B})$ ).

DÉFINITION 3.2. — On note  $d(M)$  l'entier défini de la façon suivante: lorsque  $p$  n'est pas inversible dans  $A$ , on pose

$$d(M) = n - r,$$

où  $n$  est la dimension de  $f(M^g/M^G)$ , et  $r$  le rang de  $M$ .

Pour plus de généralité dans l'énoncé de résultats, on posera  $d(M) = 0$  lorsque  $p$  est inversible dans  $A$ .

L'entier  $d(M)$  est invariant par isomorphisme et vérifie  $d(M \oplus M') = d(M) + d(M')$ , de sorte que, si  $M$  est localement libre sur  $\mathfrak{D}$ , on doit avoir

$$d(M) = rd(\mathfrak{D}).$$

Dans le cas général nous allons voir que quelques hypothèses rattachant  $M$  à  $\mathfrak{D}$  permettent de limiter les valeurs prises par  $d(M)$  :

Introduisons pour cela quelques définitions :

DÉFINITION 3.3. — Soit  $h$  (resp.  $\bar{h}$ ) le plus grand entier  $m \in \{1, 2, p, 2p\}$  tel que  $\frac{(1 + \tau)N}{m}$  (resp.  $\frac{(1 - \tau)N}{m}$ ) appartienne à  $\mathfrak{D}$ . Nous posons

$$T = \frac{(1 + \tau)N}{h}, \quad \bar{T} = \frac{(1 - \tau)N}{\bar{h}}.$$

DÉFINITION 3.4. — L'ensemble  $\mathfrak{D}(M)$  des éléments  $\lambda \in K[G]$  tels que pour tout  $x \in M$ ,  $\lambda x$  appartienne à  $M$  est un ordre de  $A$  dans  $K[G]$  qui contient  $\mathfrak{D}$  et que l'on appelle : ordre associé à  $M$ .

Nous désignerons enfin par  $\overline{M}^G$  le sous-A-module des éléments  $x$  de  $M$  qui vérifient  $\tau x = -x$  et  $\sigma x = x$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer, en nous bornant au cas où  $A$  est un anneau local d'idéal maximal  $pA$ , quelques résultats relatifs au signe de  $d(M)$ .

**PROPOSITION 3.1.** — *Soit  $M$  un  $\mathfrak{D}$  module vérifiant les hypothèses suivantes :*

(H<sub>0</sub>)  $M$  est de type fini, sans  $A$  torsion, de rang défini et égal à  $r$ .

(H<sub>1</sub>) Les applications  $x \rightarrow Tx$  et  $x \rightarrow \overline{T}x$  de  $M$  dans  $M^G$  et  $\overline{M}^G$  respectivement sont surjectives.

Alors

1) si  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  (resp.  $\frac{(1 - \tau)N}{p}$ ) n'appartient pas à  $\mathfrak{D}$ , on a  $d(M) \geq 0$  (resp.  $d(M) \leq 0$ ).

2) si  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  (resp.  $\frac{(1 - \tau)N}{p}$ ) appartient à  $\mathfrak{D}$ , la condition  $d(M) = +r$  (resp.  $d(M) = -r$ ) est équivalente à  $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}_4$  (resp.  $\mathfrak{D}_5$ ).

On déduit de cette proposition (qui sera démontrée au paragraphe 5) les valeurs de  $d(\mathfrak{D})$  (nul pour  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}_3$ , égal à  $+1$  pour  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_4$ , à  $-1$  pour  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_5$ ). On en déduit aussi que les conditions (H<sub>0</sub>) et (H<sub>1</sub>) suffisent, dans le cas des ordres  $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_4, \mathfrak{D}_5$ , à assurer la relation  $d(M) = rd(\mathfrak{D})$ . On va énoncer d'autres conditions suffisantes :

**COROLLAIRE 3.1.** — *Soit  $M$  un  $\mathfrak{D}$ -module projectif et vérifiant les hypothèses (H<sub>0</sub>). Alors il vérifie la condition (H<sub>1</sub>), et la relation  $d(M) = rd(\mathfrak{D})$  sauf peut-être dans le cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_3$  pour lequel  $d(M)$  peut prendre toutes valeurs entières  $m$  telles que  $-r \leq m \leq +r$ .*

La proposition 2.2. nous permet d'ailleurs de construire tout de suite un  $\mathfrak{D}_3$ -module projectif d'invariant  $m$  donné. Supposons par exemple  $m > 0$ . Le  $\mathfrak{D}_3$ -module

$$M = \underbrace{\mathfrak{D}_4 \oplus \dots \oplus \mathfrak{D}_4}_m \oplus \underbrace{\mathfrak{D}_3 \oplus \dots \oplus \mathfrak{D}_3}_{r-m}$$

est projectif de rang  $r$ , et d'invariant  $d(M) = m$ .

**COROLLAIRE 3.2.** — Soit  $M$  un  $\mathfrak{D}$ -module vérifiant les hypothèses  $(H_0)$ , de rang 1 et tel que  $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}$ . Alors il vérifie la propriété  $(H_1)$  et la relation  $d(M) = rd(\mathfrak{D})$  sauf peut-être dans les cas suivants :

$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$  auquel cas on peut avoir  $d(M) = 0$  ou  $d(M) = -1$ ,  
 $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_2$  auquel cas on peut avoir  $d(M) = 0$  ou  $d(M) = +1$ .

Le cas d'un  $A[G]$ -module de rang 1, d'ordre associé  $\mathfrak{D}_1$  non localement libre et même non projectif sur  $\mathfrak{D}_1$  peut en effet se présenter : c'est le cas du  $A$ -module engendré par  $\mathfrak{D}_1$  et  $(1 - \tau)L$ .

$P$

Nous allons maintenant justifier le choix des invariants  $h(M)$  et  $d(M)$ .

#### 4. Résultats sur les $\mathfrak{D}$ -modules.

**THÉORÈME 4.1.** — Soient  $\mathfrak{D}$  un ordre de  $A$  dans  $K[G]$  contenant  $A[G]$  et  $M$  un  $\mathfrak{D}$ -module de type fini sans  $A$ -torsion, de rang défini et égal à  $r$ . On suppose de plus que  $M$  vérifie les hypothèses suivantes :

- $(H_1)$  Les applications  $x \rightarrow Tx$  et  $x \rightarrow \bar{T}x$  de  $M$  dans  $M^G$  et  $\bar{M}^G$  respectivement sont surjectives.
- $(H_2)$   $d(M) = rd(\mathfrak{D})$ .
- $(H_3)$   $h(M)$  est la classe principale de  $\mathfrak{K}(R)$ .

Alors  $M$  est libre sur  $\mathfrak{D}$ .

La conjonction des hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  caractérise donc les  $\mathfrak{D}$ -modules localement libres (parmi ceux qui vérifient les hypothèses  $H_0$ ), la condition  $(H_3)$  caractérisant parmi eux ceux qui sont libres sur  $\mathfrak{D}$ . Les corollaires 3.1. et 3.2. peuvent maintenant s'exprimer ainsi :

**COROLLAIRE 4.1.** — Soit  $M$  un  $\mathfrak{D}$ -module projectif vérifiant les hypothèses  $(H_0)$ . Alors, dans le cas  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}_3$  et  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}'_3$ ,  $M$  est localement libre, et dans les cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_3$  ou  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'_3$  il est localement libre s'il vérifie  $d(M) = 0$ .

Le corollaire 4.1. sera utilisé au paragraphe 6 dans l'étude

du groupe des classes projectives de  $\mathfrak{D}$ . En arithmétique, nous utiliserons plutôt le résultat suivant :

**COROLLAIRE 4.2.** — Soit  $M$  un  $A[G]$ -module de rang 1 et  $\mathfrak{D}$  son ordre associé dans  $K[G]$ . Alors, dans les cas où  $\mathfrak{D}$  est différent de  $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}'_2$ ,  $M$  est localement libre sur  $\mathfrak{D}$ . Dans les autres cas, il en est ainsi si et seulement si  $d(M) = 0$ .

On peut en déduire que les ordres  $\mathfrak{D}'_3, \mathfrak{D}'_4$  et  $\mathfrak{D}'_5$  sont héréditaires (pour  $\mathfrak{D}'_3$  on utilise la proposition 2.2). Ce sont d'ailleurs les seuls possibles car les seuls à contenir les idempotents du centre  $\frac{(1 + \tau)N}{2p}$  et  $\frac{(1 - \tau)N}{2p}$ .

### 5. Démonstrations de la proposition 3.1 et du théorème 4.1.

Désormais  $M$  désignera un  $\mathfrak{D}$ -module vérifiant les hypothèses  $(H_0)$  et  $(H_1)$ .

A. — Quelques propriétés du  $R$ -module  $M^* = M^g/M^g$ .

**LEMME 5.1.** — Soit  $X \in M^*$ . Alors :

- 1) Il existe  $x \in M$  tel que  $X = [(1 + \tau)x]$ .
- 2) Lorsque  $(1 + \tau)x$  décrit  $X$ ,  $Tx$  décrit

$$\left\{ \begin{array}{l} M^g \text{ dans le cas où } \frac{(1 + \tau)N}{p} \text{ appartient à } \mathfrak{D}; \\ \text{sa classe modulo } pM^g \text{ dans le cas contraire.} \end{array} \right.$$

Rappelons que la notation  $[y]$  désigne l'image canonique dans  $M^g/M^g$  de l'élément  $y$  de  $M^g$ .

*Démonstration du lemme 5.1.* — Soit  $y \in M^g$ . L'égalité  $2y = (1 + \tau)y$  permet de supposer  $p$  inversible pour la recherche des représentants de  $X$  de la forme  $(1 + \tau)x$ . L'identité :  $p\tau = pN\tau + L'(1 - \tau) - (1 + \tau)L'$  (lemme 2.3) montre que  $y$  est congru modulo  $pM^g$  à un élément  $(1 + \tau)x$ ,  $x \in M$ , d'où 1.

Si on suppose de plus  $y \in M^g$ , et si l'on pose  $h = u\upsilon$ , avec  $u = 1$  ou  $2$ ,  $\upsilon = 1$  ou  $p$ , l'hypothèse  $(H_1)$  permet d'écrire :  $uy = (1 + \tau)y'$ ,  $y' \in M^g$ . De sorte que, pour tout  $x \in M$ ,

tout  $y \in M^G$ , l'élément  $(1 + \tau)x + uy$  est de la forme  $(1 + \tau)x'$ , où  $x' \in M$  vérifie  $Tx' = Tx + \frac{p}{\varphi}y$ , ce qui prouve 2.

*Notation.* — Pour  $x \in M$ , on notera  $clx$  sa classe modulo  $pM$ .

**DÉFINITION 5.1.** — Dans le cas où  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}$ , on désigne par  $g$  l'application de  $M^*$  dans  $M^G/pM^G$  qui, à  $X = [(1 + \tau)x]$  associe  $cl(Tx)$ .

Il est clair que  $g$  est une R-application, surjective grâce à l'hypothèse  $(H_1)$ .

Les R-applications  $f$  (cf. paragraphe 3) et  $g$  vérifient les propriétés suivantes :

**LEMME 5.2.** — Soit  $X \in M^*$ ,  $(1 + \tau)x$  un de ses représentants dans  $M^G$ .

1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $f(x) = 0$ ;

b) Il existe  $y \in M$  tel que :  $X = [(1 + \tau)(\sigma - \sigma^{-1})y]$ ;

c) il existe  $z \in M$  tel que :  $L(1 + \tau)x \equiv (1 - \tau)Nz$  modulo  $p$ .

2) Si  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}$ , la condition a) ci-dessus implique la condition :

d)  $g(X) = 0$ .

*Démonstration du lemme 5.2.* — Les conditions a), c) et d) sont invariantes par localisation en  $p$ . La relation

$$pX = \sum_{i=0}^{p-1} [(1 + \tau)(1 - \sigma^i)x]$$

montre qu'il en est de même pour b).

Supposons donc 2 inversible dans  $A$ .

1. a)  $\implies$  b) se déduit de la congruence modulo  $\mathfrak{D}_0$  :

$$p(1 + \tau) \sim (1 + \tau)(\sigma - \sigma^{-1}) \frac{\sigma L'}{2} (1 + \tau) \quad (\text{lemme 2.3})$$

b)  $\implies$  c) se déduit de la congruence modulo  $p$  :

$$L(1 + \tau)(\sigma - \sigma^{-1}) \equiv (1 - \tau)N$$

c)  $\implies$  a) résulte de la définition de  $f$ .

2. b)  $\implies$  d) provient de  $T(\sigma - \sigma^{-1}) = 0$ .

B. — *Démonstration de la proposition 3.1.*

1) Si  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}$  : la partie 2 du lemme 5.2. montre que l'on a  $\dim f(M^*) \geq \dim g(M^*) = r$ .

2) Si  $\frac{(1 - \tau)N}{p}$  appartient à  $\mathfrak{D}$ . Soit

$$x \in M, \quad \text{et} \quad X = [(1 + \tau)x].$$

On a

$$f(X) = 0 \iff (1 - \tau)Lx \equiv 0 \pmod{pM} \quad (\text{lemme 5.2., partie 1}).$$

D'où les équivalences :

$$\begin{aligned} (d(M) = -r) &\iff (f(X) = 0 \text{ pour tout } X \in M^*) \\ &\iff \left( \frac{(1 - \tau)L}{p} \in \mathfrak{D}(M^*) \right). \end{aligned}$$

3) Pour achever la démonstration de la proposition 3.1, introduisons l'automorphisme  $\psi$  de l'algèbre  $K[G]$  définie par  $\psi(\sigma) = \sigma$ ,  $\psi(\tau) = -\tau$ . Soit  $\overline{\mathfrak{D}}$  l'ordre image de  $\mathfrak{D}$  par  $\psi$ . On peut, grâce à  $\psi$ , munir le groupe additif sous-jacent de  $M$  d'une structure de  $\overline{\mathfrak{D}}$  module notée  $\overline{M}$ . Les  $\mathfrak{D}$ -module  $M$  et  $\overline{\mathfrak{D}}$  module  $\overline{M}$  ont même structure. Montrons que l'on a  $d(M) = -d(\overline{M})$  soit encore :

$$\dim f(M^*) + \dim f(\overline{M}^*) = 2r.$$

Considérons pour cela l'élément  $\alpha = [(\sigma - \sigma^{-1})^{p-3}]$  de  $R$  et l'application  $\varphi: M^* \rightarrow M^*/pM^*$  qui à  $X \in M^*$  associe  $\alpha X$ . On montre que c'est une  $R$ -application et que  $\varphi(M^*)$  a pour dimension  $2r$  sur  $A/pA$  (il suffit pour cela de localiser en  $p$ ). La relation  $\alpha[(1 + \tau)(\sigma - \sigma^{-1})] = [L(1 - \tau)]$  conduit aux équivalences :

$$\begin{aligned} f(X) = 0 &\iff (\text{il existe } x \in M \text{ tel que } X = [(1 + \tau)(\sigma - \sigma^{-1})x]) \\ &\iff (\varphi(X) \text{ appartient à } \overline{f}(\overline{M}^*)). \end{aligned}$$

4) Supposons ici  $M$  projectif sur  $\mathfrak{D}$  : il existe un  $\mathfrak{D}$ -module  $M'$  vérifiant les hypothèses  $(H_0)$  tel que l'on ait :

$$M \oplus M' \simeq \mathfrak{D}^k.$$

$\{T\}$  et  $\{\bar{T}\}$  étant des  $A$ -bases de  $\mathfrak{D}^G$  et  $\overline{\mathfrak{D}}^G$ , le  $\mathfrak{D}$ -module  $\mathfrak{D}^k$  vérifie les hypothèses  $(H_1)$ . Il est aisé d'en conclure qu'il en est de même pour  $M$  et  $M'$ .

Les hypothèses de la proposition 3.1. sont donc vérifiées par  $M$  et  $M'$ . Il suffit donc, pour démontrer le corollaire 3.1., d'examiner les cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_2$ . La relation :

$$d(M) + d(M') = kd(\mathfrak{D}) = 0,$$

et le fait que  $d(M)$  et  $d(M')$  ont le même signe, prouve  $d(M) = d(M') = 0$ .

5) On suppose ici que  $M$  est de rang 1 et vérifie  $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}$ .

Montrons par exemple que  $x \rightarrow Tx$  est une surjection de  $M$  sur  $M^G$ . La relation :  $2py = (1 + \tau)Ny$  pour tout  $y \in M^G$  permet de se borner aux cas où  $A$  est local d'idéal maximal sur  $A$ , avec  $m = 2$ , ou  $m = p$ , et où  $\frac{(1 + \tau)N}{m}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}$ . Le  $A$ -module libre de rang 1  $M^G$  admet alors pour base tout élément de  $M^G$  non congru à 0 modulo  $m$ . L'hypothèse «  $\frac{(1 + \tau)N}{m}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}(M)$  » permet de trouver un tel élément de la forme  $(1 + \tau)Nx$ , avec  $x \in M$ .

$M$  vérifie ainsi les hypothèses de la proposition 3.1. : il nous suffit donc, pour démontrer le corollaire 3.2., d'examiner le cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_3$ . L'hypothèse  $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}_3$  permet alors, d'après la partie 2 de la proposition 3.1., d'éliminer les cas

$$d(M) = +1 \quad \text{et} \quad d(M) = -1.$$

C. — Une propriété du quotient  $M/\overline{M}^G$ .

Le  $\mathfrak{D}$ -module quotient  $M/\overline{M}^G$  peut être canoniquement muni d'une structure de module sur l'anneau  $\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{D}}^G$ , sans  $A$ -torsion, de « rang »  $r$ .

Nous nous proposons de montrer ici que s'il est libre sur  $\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{D}}^G$ , alors  $M$  est libre sur  $\mathfrak{D}$ .

Pour  $x \in M$ , nous noterons  $\bar{x}$  sa classe modulo  $\overline{M^G}$ . Il s'agit de prouver que, si  $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)$  est une base de  $M/\overline{M^G}$  sur  $\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{D}^G}$ , il existe un système de représentants  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  de  $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)$  dans  $M$  tel que les  $(\overline{T}\varphi_i)_{i=1, \dots, r}$  constituent une A-base de  $\overline{M^G}$ .

Soient  $\{\bar{e}_i\}_{i=1, 2, \dots, r}$  une A-base de  $\overline{M^G}$  fixée.

A tout  $r$ -uple  $(x_1, \dots, x_r)$  d'éléments de  $M$  on peut associer la matrice  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$  de  $\mathfrak{M}_r(A)$  définie par

$$\overline{T}x_i = \sum_{j=1}^{j=r} a_{ij} \bar{e}_j.$$

Lorsque  $x_i$  décrit sa classe modulo  $\overline{M^G}$ , chaque  $a_{ij}$  décrit sa classe modulo  $\frac{2p}{h}A$  (cf. définition 3.3). Nous sommes amenés à introduire les notations suivantes :

Deux matrices  $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$  et  $\mathfrak{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$  sont équivalentes — relation notée  $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$  — si l'on a

$$a_{ij} \equiv b_{ij} \text{ modulo } \frac{2p}{h} \text{ pour tous } i, j \in \{1, \dots, r\}.$$

La classe de  $\mathfrak{A}$  sera notée  $\mathfrak{A}$  et représentée par une matrice d'ordre  $r$  à coefficients dans  $A/\frac{2p}{h}A$ .

Ainsi, on peut à tout  $r$ -uple  $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r)$  de  $M/\overline{M^G}$  associer une classe  $\mathfrak{A}$  de matrices telle que :

Pour qu'il existe un système  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$  de représentants dans  $M$  de ce  $r$ -uple tel que les  $(\overline{T}\xi_i)_{i=1, \dots, r}$  soient linéairement indépendants sur  $A$  (respectivement constituent une A-base de  $\overline{M^G}$ ) il faut et il suffit qu'il existe dans la classe  $\mathfrak{A}$  une matrice régulière (respectivement inversible).

L'étude de telles conditions pour  $\mathfrak{A}$  nous conduit au résultat suivant :

LEMME 5.3. — Soit  $\mathfrak{A}$  une classe de matrices. Alors :

1) Il existe une matrice régulière équivalente à  $\mathfrak{A}$ .

2) Si  $\mathfrak{A}$  est inversible dans  $\mathfrak{M}_r\left(A/\frac{2p}{h}A\right)$ , alors il existe une matrice  $\mathfrak{B}$  inversible dans  $\mathfrak{M}_r(A)$ , et  $r$  entiers  $n_1, \dots, n_r$ , tels que

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Ces propriétés, triviales dans le cas  $\bar{h} = 2p$ , sont dans le cas  $r = 1$ , conséquences immédiates des hypothèses :  $A/_{2A} \simeq Z/_{2Z}$  (pour  $\bar{h} \not\equiv 0(2)$ ) et  $A/pA \simeq Z/pZ$  (pour  $\bar{h} \not\equiv 0(p)$ ). Notons que cette dernière hypothèse n'intervient que dans cette démonstration.

Le lemme se démontre dans le cas général par récurrence sur  $r$ .

Pour interpréter la classe de matrices  $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} \mathfrak{A}$ , on utilise une propriété de l'algèbre  $A[G]$  démontrée par J. Martinet [4].

Pour tout  $n \in Z$  inversible modulo  $2p$  il existe  $\omega_n \in \mathfrak{D}_0$ , inversible modulo  $\overline{\mathfrak{D}}_0^G$  et tel que l'on ait  $\overline{T}\omega_n = n\overline{T}$ .

De sorte que si la classe  $\mathfrak{A}$  est associée au  $r$ -uplet  $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_r)$ ,

la classe  $\begin{pmatrix} \vdots \\ n_r \end{pmatrix} \mathfrak{A}$  est associée au  $r$ -uplet  $(\widehat{\omega_{n_1}x_1}, \dots, \widehat{\omega_{n_r}x_r})$  (les  $n_i, 1 \leq i \leq r$  sont en effet inversibles modulo  $\frac{2p}{h}$  donc  $2p$ ).

Supposons maintenant que le  $\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{D}}^G$ -module  $M/\overline{M}^G$  soit libre et admette pour base :  $(\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_r)$ . La classe de matrices  $\mathfrak{A}$  associée au  $r$ -uplet  $(\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_r)$  est inversible : il suffit pour s'en assurer d'écrire sur  $(\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_r)$  les éléments  $\dot{y}_j \in M/\overline{M}^G$  tels que l'on ait  $\overline{T}y_j = \overline{e}_j (j = 1, \dots, r)$  (nous utilisons ici l'hypothèse  $(H_1)$ ).

D'après l'étude faite ci-dessus, il existe  $r$  éléments  $\omega_i$  de  $\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{D}}^G$ , inversibles, tels que la classe de matrice associée au  $r$ -uplet  $(\widehat{\omega_1\theta_1}, \dots, \widehat{\omega_r\theta_r})$  admette un représentant  $\mathfrak{B}$  inversible. Ce  $r$ -uplet, qui constitue une base de  $M/\overline{M}^G$ , admettra alors un système de représentants  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  tels que les

$(\overline{T}\varphi_i)_{i=1, \dots, r}$  soient une base de  $\overline{M}^G$ , donc constituant une  $\mathfrak{D}$ -base de  $M$ .

Remarquons que si  $\frac{(1 - \tau)N}{p}$  appartient à  $\mathfrak{D}$ , on peut prendre  $\omega_i = 1$  pour tout  $i$ .

Nous allons maintenant montrer que, si  $M$  vérifie les hypothèses  $(H_2)$  et  $(H_3)$ , le  $\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{D}}^G$ -module  $M/\overline{M}^G$  est libre, ce qui achèvera la démonstration du théorème 4.1.

Nous allons, pour cela, construire des bases particulières de  $M^*$ .

D. — *Bases normales et semi-normales de  $M^* = M^g/M^G$ .*

1) Soit  $\{[\lambda_1], [\lambda_2]\}$  une  $R$ -base de  $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}^g/\mathfrak{D}^G$ .

Une base de  $M^*$  sur  $R$  est *semi-normale* si elle est de la forme  $\{X_i, Y_i\}_{i=1, \dots, r}$ , où l'on a, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $X_i = [\lambda_1 x_i]$ , les  $x_i$  étant des éléments de  $M$  tels que  $(Tx_1, \dots, Tx_r)$  soit une  $A$ -base de  $M^G$ .

Une base de  $M^*$  sur  $R$  est *normale* si elle est de la forme  $\{X_i, Y_i\}_{i=1, \dots, r}$ , où l'on a pour tout

$$i \in \{1, \dots, r\} : X_i = [\lambda_1 \theta_i], Y_i = [\lambda_2 \theta_i]$$

les  $\theta_i$  étant des éléments de  $M$  tels que  $(T\theta_1, \dots, T\theta_r)$  soit une  $A$ -base de  $M^G$ .

La notion de base normale est indépendante du choix de la base  $([\lambda_1], [\lambda_2])$  de  $\mathfrak{D}^*$ , et signifie que *tout*  $x \in M^g$  s'écrit d'une façon unique sous la forme  $x = \sum_{i=1}^{i=r} \mu_i \theta_i$ ,  $\mu_i \in \mathfrak{D}$  pour tout  $i$ .

Nous serons amenés, pour construire une telle base, à distinguer le cas des ordres  $\mathfrak{D}_4$  et  $\mathfrak{D}'_4$ .

Pour  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}_4$ ,  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}'_4$ , nous choisirons  $\lambda_1 = 1 + \tau$ ,  $\lambda_2 = (1 + \tau)\sigma$ .

Dans le cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_4$  ou  $\mathfrak{D}'_4$ , on montre qu'on peut supposer  $\lambda_1 \in A[G]$ , ce que nous ferons. Nous utiliserons les propriétés suivantes d'une telle base :

LEMME 5.4. — 1) Il existe  $\mu_1$  et  $\nu$  appartenant à  $A[G]$  tels que :

$$(1 + \tau) \sim \lambda_1 \mu_1 \quad \text{et} \quad 0 \sim \lambda_1 \nu.$$

2) Dans le cas des ordres  $\mathfrak{D}_4$  ou  $\mathfrak{D}'_4$ , il existe  $\mu_2 \in A[G]$  tel que

$$1 + \tau \sim \lambda_2 \nu \mu_2$$

(tous les symboles  $\sim$  désignent des congruences modulo  $\mathfrak{D}^G$ ).

*Démonstration.* — Pour  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}'_4$  et  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}_4$ , on prendra  $\mu_1 = 1$  et  $\nu = 1 - \tau$ . Supposons  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_4$  ou  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'_4$ , et posons

$$\begin{aligned} [1 + \tau] &= \alpha_1[\lambda_1] + \alpha_2[\lambda_2] \\ [(1 + \tau)\sigma] &= \beta_1[\lambda_1] + \beta_2[\lambda_2] \end{aligned}$$

où  $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2$  appartiennent à  $R$ .

On montre que l'on peut choisir :

$$\mu_1 \sim (\alpha_1\sigma^{-1} - \beta_1) \frac{(1 - \tau)L'\sigma}{p}; \quad \nu \sim \frac{\alpha_2\sigma^{-1} - \beta_2}{(\sigma - \sigma^{-1})^2} (1 - \tau)$$

et

$$\mu_2 \sim (\sigma - \sigma^{-1})^2 \frac{L'\sigma}{p}.$$

2) Supposons maintenant que  $M$  vérifie l'hypothèse  $(H_3)$ , c'est-à-dire que  $M^*$  soit libre sur  $R$ , et construisons une  $R$ -base semi-normale. Pour cela, étudions la condition « il existe  $x \in M$  tel que  $X = [\lambda_1 x]$  et  $Tx = e$  » où  $X \in M^*$  et  $e \in M^G$  sont donnés.

Cette condition est toujours vérifiée si  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  appartient à  $\mathfrak{D}$  cela résulte, dans le cas  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}_4, \mathfrak{D}'_4$ , du lemme 5.1, et dans le cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_4$  ou  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'_4$  des lemmes 5.1. et 5.4 : soient en effet  $x_1 \in M$  tel que  $X = [(1 + \tau)x_1]$ , et  $x_2 \in M$  tel que  $Tx_2 = e - T(\mu_1 x_1)$ . Alors l'élément  $x = \mu_1 x_1 + \frac{N}{p} x_2$  de  $M$  convient.

Donc si  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  appartient à  $\mathfrak{D}$ , toute  $R$ -base de  $M^*$  est semi-normale.

Supposons que  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  n'appartienne pas à  $\mathfrak{D}$ . La condition  $X = [(1 + \tau)x]$ ,  $Tx = e$  équivaut, d'après le lemme 5.1, à  $g(X) = cl(e)$ . Soit alors  $\{E_k\}_{1 \leq k \leq 2r}$  une  $R$ -base de  $M^*$  numérotée de façon que  $\{g(E_k)\}_{r+1 \leq k \leq 2r}$  soit une  $A/pA$ -base de  $M^G/pM^G$ . Si  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq r}$  est une  $A$ -base de  $M^G$ ,

écrivons :

$$cl(e_i) - g(E_i) = \sum_{j=1}^{j=r} cl(a_{ij})g(E_{r+j}) \quad i \in \{1, \dots, r\}$$

où  $a_{ij} \in A$ .

Alors on obtient une R-base semi-normale de  $M^*$  en prenant

$$\begin{aligned} X_i &= E_i + \sum_{j=1}^r a_{ij}E_{r+j} \quad \text{pour } i = 1, \dots, r. \\ Y_i &= E_{r+i}. \end{aligned}$$

3) Supposons maintenant qu'en outre  $M$  vérifie l'hypothèse  $d(M) \leq r d(\mathfrak{D})$ ; nous allons construire une R-base normale de  $M^*$ .

Soit  $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq r}$  une base semi-normale de  $M^*$ , avec  $X_i = [\lambda_1 x_i]$ , et posons  $Z_i = [\lambda_2 x_i]$  pour  $i = 1, \dots, r$ .

Il est facile de voir que si  $Y_i - Z_i$  est de la forme  $[\lambda_2 v y_i]$  avec  $y_i \in M$  pour tout  $i$ , la base  $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq r}$  est une base normale (si  $v$  est l'élément introduit dans le lemme 5.4.,  $\theta_i = x_i + v y_i$  vérifie en effet  $X_i = [\lambda_1 \theta_i]$ ,  $Y_i = [\lambda_2 \theta_i]$ ,  $T\theta_i = T x_i$ ).

Étudions donc la condition « il existe  $x \in M$  tel que  $X = [\lambda_2 v x]$ ,  $X$  étant donné ».

La congruence  $1 + \tau \sim \lambda_2 v \mu_2$  du lemme 5.4., jointe au lemme 5.1, montre qu'elle est toujours vérifiée dans le cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_4$  ou  $\mathfrak{D}'_4$ . Dans les autres cas, on a

$$\lambda_2 v = (1 + \tau)(\sigma - \sigma^{-1})$$

et donc la condition ci-dessus équivaut à  $f(X) = 0$ .

D'où il résulte que, dans le cas des ordres  $\mathfrak{D}_4, \mathfrak{D}'_4, \mathfrak{D}_5$  et  $\mathfrak{D}'_5$  toute R-base de  $M^*$  est normale. On suppose désormais  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}'_3$ , et on est alors amenés à construire une R-base semi-normale  $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, r}$  telle que  $f(X_i) = f(Y_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, r$ . Soit donc  $(X'_i, Y'_i)_{1 \leq i \leq r}$  une R-base semi-normale quelconque de  $M^*$ .

— Si  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}$ , les éléments  $(g(X'_i))_{i=1, \dots, r}$  sont linéairement indépendants sur  $A/pA$  et donc aussi les  $(f(X'_i))_{i=1, \dots, r}$  (lemme 5.2).

— Dans le cas contraire, les  $X'_i$  et  $Y'_i$  jouent le même rôle. L'hypothèse  $d(M) \leq 0$  permet donc, dans tous les cas, de considérer que les  $(f(X'_i))_{i=1, \dots, r}$  engendrent  $f(M^*)$ : il

existe donc des éléments  $a_{ij}$  de  $A$  tels que l'on ait

$$f(X'_i) - f(Y'_i) = \sum_{j=1}^{j=r} cl(a_{ij})f(X'_j) \quad i = 1, \dots, r.$$

On obtient alors une base normale en posant

$$\begin{aligned} X_i &= X'_i \\ Y_i &= Y'_i + \sum_{j=1}^{j=r} a_{ij}X'_j. \end{aligned}$$

4) Supposons enfin que  $M$  vérifie en outre  $d(M) \geq rd(\mathfrak{D})$ . Soit  $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, r}$  une base normale de  $M^*$ . Les conditions :

$$X_i = [\lambda_1 \theta_i], \quad Y_i = [\lambda_2 \theta_i], \quad T\theta_i = e_i \quad i = 1, \dots, r$$

ne définissent  $\theta_i$  que modulo  $\overline{M}^G$ . A la base normale  $(X_i, Y_i)$  est donc associé en fait un  $r$ -uplet  $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)$  de  $M/\overline{M}^G$ . Nous allons montrer que c'est une base de  $M/\overline{M}^G$  sur  $\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{D}}^G$ .

Pour cela, choisissons-en un système de représentants  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  tel que les  $(T\varphi_i)_{i=1, \dots, r}$  soient linéairement indépendants sur  $A$  (lemme 5.3).

Tout  $x \in M^g$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^r \mu_i \varphi_i \quad \text{avec} \quad \mu_i \in \mathfrak{D}. \quad (1)$$

Soit une relation  $\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i = 0$ , avec  $\alpha_i \in \mathfrak{D}$ .

L'unicité de la forme (1) montre que l'on a  $\mu \alpha_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, r$ , et pour tout  $\mu \in \mathfrak{D}^g$ , et donc que  $\alpha_i$  est de la forme  $\alpha_i = a_i \overline{T}$ , avec  $a_i \in A$  pour tout  $i$ . Ainsi le choix des représentants  $(\varphi_i)_{i=1, \dots, r}$  assure leur indépendance linéaire sur  $\mathfrak{D}$ . Ils constituent donc une  $K[G]$  base

de  $KM$ : tout  $x \in M$  peut s'écrire  $x = \sum_{i=1}^r \xi_i \varphi_i$  avec  $\xi_i \in K[G]$  pour tout  $i$ .

Soit  $\mu \in \mathfrak{D}^g$ . L'écriture de  $\mu x$  sous la forme (1) prouve que  $\mu \xi_i$  appartient à  $\mathfrak{D}$  pour tout  $i$ .  $\xi_i$  est donc de la forme :

$$\xi_i = \mu_i + \frac{a_i}{p} (1 - \tau)L + k_i(1 - \tau)N,$$

avec  $\mu_i \in \mathfrak{D}$ ,  $k_i \in K$ ,  $a_i \in A$  et  $a_i \equiv 0(p)$  sauf peut-être dans les cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}'_3$ . Montrons que l'hypothèse  $d(M) \geq 0$  permet de conclure, dans ces cas aussi,  $a_i \equiv 0(p)$ .

L'élément  $x$  appartenant à  $M$ , les  $a_i$  vérifient :

$$\sum_{i=1}^r a_i L(1 + \tau)\varphi_i \equiv 0 \text{ modulo } pM + \overline{M}^G,$$

soit encore

$$\sum_{i=1}^r cl(a_i)f(X_i) = 0.$$

Or on a  $f(X_i) = f(Y_i)$  pour tout  $i$ . L'hypothèse  $\dim f(M^*) \geq r$  montre donc que les  $(f(X_i))_{i=1, \dots, r}$  constituent une base de  $f(M^*)$  d'où la conclusion.

On en déduit aisément que les  $(\varphi_i)_{i=1, \dots, r}$  sont une  $\mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{D}}^G$ -base de  $M/\overline{M}^G$ .

## 6. Groupe des classes projectives d'un ordre $\mathfrak{D}$ .

Soit  $\mathfrak{D}$  un ordre de  $A$  dans  $K[G]$  contenant  $A[G]$ .

Deux  $\mathfrak{D}$ -modules projectifs de type fini, de rangs définis,  $M_1$  et  $M_2$ , sont dits équivalents, s'il existe deux modules libres  $L_1$  et  $L_2$  de type fini tels que  $M_1 \oplus L_1$  soit isomorphe à  $M_2 \oplus L_2$ .

L'ensemble quotient muni de la loi induite par la somme directe est un groupe abélien, que l'on notera  $\mathfrak{P}(\mathfrak{D})$ , et que le théorème 4.1., complété du corollaire 4.1., nous permet de décrire en distinguant le cas des ordres  $\mathfrak{D}_3$  et  $\mathfrak{D}'_3$ .

**THÉORÈME 6.1.** — *L'application  $[M] \rightarrow h(M)$  est, dans le cas  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}_3$  et  $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}'_3$ , un isomorphisme de groupes de  $\mathfrak{P}(\mathfrak{D})$  sur  $\mathfrak{K}(R)$ .*

*L'application  $[M] \rightarrow \{h(M), d(M)\}$  est, dans le cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_3$  ou  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'_3$ , un isomorphisme de groupes de  $\mathfrak{P}(\mathfrak{D})$  sur  $\mathfrak{K}(R) \times \mathbb{Z}$ .*

*De plus, toute relation  $M \oplus L_1 \simeq L_2$ , où  $L_1$  et  $L_2$  sont des  $\mathfrak{D}$ -modules libres, implique que  $M$  est libre.*

*Remarque.* — Swan [8] a construit un groupe  $G$  (groupe des

quaternions généralisés d'ordre 32) pour lequel il existe des idéaux non libres  $J$  de  $Z[G]$  tels que  $J \oplus Z[G]$  soit isomorphe à  $Z[G] \oplus Z[G]$ .

*Démonstration du théorème 6.1.* — Le théorème 4.1, complété du corollaire 4.1, montre que la classe neutre de  $\mathfrak{L}(\mathfrak{D})$  est composée de  $\mathfrak{D}$ -modules libres, et que les applications  $[M] \rightarrow h(M)$  et  $[M] \rightarrow (h(M), d(M))$  sont injectives.

Soit  $\mathfrak{A}$  un idéal de  $R$ . On se propose de construire un idéal à gauche  $I$  de  $\mathfrak{D}$ , qui soit projectif sur  $\mathfrak{D}$ , et pour lequel  $h(I)$  soit la classe de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{K}(R)$ .

Nous utiliserons pour cela les remarques suivantes :

1° On peut se borner aux cas où  $\mathfrak{D}$  est un ordre maximal : Soient en effet  $\mathfrak{D}'$  et  $\mathfrak{D}''$  deux ordres tels que :  $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}''$ .

Si  $\mathfrak{J}(\mathfrak{D}')$  (resp.  $\mathfrak{J}(\mathfrak{D}'')$ ) désigne l'ensemble des idéaux à gauche localement libres de  $\mathfrak{D}'$  (resp.  $\mathfrak{D}''$ ), on sait que l'application  $I \rightarrow \mathfrak{D}''I$  est une surjection de  $\mathfrak{J}(\mathfrak{D}')$  sur  $\mathfrak{J}(\mathfrak{D}'')$ . On a de plus  $h(I) = h(\mathfrak{D}''I)$  si toutefois l'élément  $\frac{(1 + \tau)L}{p}$  n'appartient à  $\mathfrak{D}''$  que s'il appartient à  $\mathfrak{D}'$ .

2° Soient  $\varphi$  et  $\psi$  les isomorphismes de  $K[G]$  sur  $K \times K \times \mathfrak{M}_2(K'_0)$  décrits à la fin du paragraphe 2, et  $\mathfrak{B}$  l'idéal de  $A'_0$  image de  $\mathfrak{A}$  par l'isomorphisme de  $R$  sur  $A'_0$  associé à  $\varphi$  et  $\psi$ . On a vu que  $\varphi(\mathfrak{D}'_4)$  et  $\psi(\mathfrak{D}'_5)$  sont égaux à l'ordre  $\Omega = A \times A \times \mathfrak{M}_2(A'_0)$ .

Soit  $\mathfrak{J}$  le sous-ensemble des éléments  $\left[ a, b, \begin{pmatrix} u & \nu \\ \varpi & h \end{pmatrix} \right]$  de  $\Omega$ , où  $u$  et  $\varpi$  appartiennent à  $\mathfrak{B}$ . C'est un idéal à gauche de  $\Omega$ .

Montrons que l'idéal à gauche  $I = \varphi^{-1}(\mathfrak{J})$  de  $\mathfrak{D}'_4$  admet pour invariant  $\{I\}$  la classe de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{K}(R)$  :

Il est immédiat de voir que  $\varphi(I^\rho)$  est défini, dans  $\mathfrak{J}$ , par les relations  $b = 0$ ,  $\varpi = -u$ , et  $h = -\nu$ , et que  $\varphi(I^\sigma)$  est défini, dans  $\mathfrak{J}$ , par  $b = 0$ ,  $\varpi = u = h = \nu = 0$ .

Le  $A'_0$ -module quotient  $\varphi(I^\rho)/\varphi(I^\sigma)$  est donc isomorphe à  $\mathfrak{B} \oplus A'_0$ .

On montre de même que l'idéal à gauche  $I' = \psi^{-1}(\mathfrak{J})$  de  $\mathfrak{D}'_5$  admet pour invariant  $h(I')$  la classe de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{K}(R)$ .

Dans le cas  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_3$  ou  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'_3$ , on achève la démonstration de la surjectivité de  $[M] \rightarrow (h(M), d(M))$  en utilisant le corollaire 3.1.

*Remarque.*

M. P. Lee a montré que  $\mathfrak{K}(Z[G])$  est isomorphe au groupe  $\mathfrak{K}(Z'_0)$  des classes d'idéaux de  $Z'_0$  (anneau des entiers du sous-corps réel maximal de  $\mathbf{Q}'$ ) [2].

Dans le cas où  $H$  est un groupe cyclique d'ordre premier  $p$ , D.S. Rim a montré que  $\mathfrak{K}(Z[H])$  est isomorphe au groupe  $\mathfrak{K}(Z')$ , où  $Z'$  est l'anneau d'entiers de  $\mathbf{Q}'$  [6].

### 7. Application à l'arithmétique.

Soient  $E/K$  une extension galoisienne, dont le groupe de Galois est isomorphe à  $G$ , et  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $E$ .

D'après le théorème de la base normale,  $B$  est un  $A[G]$  module de rang 1 [4]. Nous allons d'abord déterminer, suivant la ramification de l'extension  $E/K$  en  $p$  et 2, l'ordre  $\mathfrak{D}(B)$ .

*Notations.* — Soient  $F$  et  $F'$  les sous-corps de  $E$  invariants par  $H$  et  $g$  respectivement, et  $C$  et  $C'$  les clôtures intégrales de  $A$  dans  $F$  et  $F'$ .

Supposons ici  $p$  non inversible dans  $A$ . Pour tout idéal maximal  $\mathfrak{P}$  de  $B$  au-dessus de l'idéal  $pA$ , nous désignerons par  $\nu_{\mathfrak{P}}$  la valuation de  $E$  correspondante, et par  $H_i$ ,  $-1 \leq i$ , la suite des sous-groupes de ramification de  $\mathfrak{P}$  dans  $H$  [7].

Nous définirons enfin l'entier  $t$  par  $H_t = H$ ,  $H_{t+1} = \{1\}$ . On montre que, lorsque l'extension  $E/K$  n'est pas modérément ramifiée en  $p$ , on a  $t = 1$ , sauf peut-être pour  $p = 3$  dans le cas où l'extension  $E/K$  est totalement ramifiée: on peut, en effet, avoir alors  $t = 1$  ou  $t = 3$  [4].

**THÉORÈME 7.1.** — *L'ordre associé à  $B$  dans  $K[G]$  est de type  $\mathfrak{D}_i$  ou  $\mathfrak{D}'_i$ , suivant que l'extension  $E/K$  est ou n'est pas modérément ramifiée en 2, avec  $i = 0$  si elle est modérément ramifiée en  $p$ ,  $i = 1$  si elle est totalement ramifiée en  $p$  avec  $t \neq 3$ ,  $i = 3$  dans tous les autres cas.*

*Démonstration du théorème 7.1.* — Il est clair qu'on peut se borner aux cas où  $A$  est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal  $mA$ , avec  $m = 2$  et  $m = p$ .

L'extension  $E/K$  est modérément ramifiée si et seulement

si l'on a  $\text{Tr}_{E/K}(B) = A$  [4], donc si et seulement si  $\frac{(1 + \tau)N}{m}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}(B)$ .

De plus, si l'extension  $E/K$  est modérément ramifiée, l'existence d'une application  $f \in \text{End}_A(B)$  telle que pour tout  $x \in B$  on ait  $x = \sum_{s \in G} sf(s^{-1}x)$  [4] implique que  $\frac{(1 - \tau)N}{m}$  n'appartient pas à  $\mathfrak{D}(B)$ . Ces remarques permettent de se borner désormais au cas où  $A$  est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal  $pA$ , et où l'extension  $E/K$  n'est pas modérément ramifiée. On vient de voir qu'alors  $\frac{(1 + \tau)N}{p}$  appartient à  $\mathfrak{D}(B)$ .

Désignons par  $\mathfrak{D}_{B/C}$  la différentielle de  $B$  par rapport à  $C$ . Des relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{B/C}) = (t + 1)(p - 1) \text{ pour tout idéal maximal } \mathfrak{P} \text{ de} \\ \hspace{10em} B \text{ [7]} \\ \text{et} \\ \text{Tr}_{E/F}(B) \subset pC \iff B \subset p\mathfrak{D}_{B/C}^{-1} \end{array} \right.$$

on déduit que  $N/p$  appartient à  $\mathfrak{D}(B)$  si et seulement si l'on a  $(t + 1)(p - 1) \geq \nu_{\mathfrak{P}}(p)$ , c'est-à-dire si l'extension  $E/K$  ou bien n'est pas totalement ramifiée, ou bien est totalement ramifiée dans le cas  $p = 3$ ,  $t = 3$ .

Pour montrer qu'alors l'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  n'est pas maximal, nous utiliserons les lemmes suivants (où l'on suppose seulement l'extension  $E/K$  non modérément ramifiée), qui précisent la ramification en  $\mathfrak{P}$  de l'extension quadratique  $E/F'$  et de l'extension cyclique de degré  $pE/F$ .

**LEMME 7.1.** — *Soit  $e$  l'indice de ramification de  $\mathfrak{P}$  dans l'extension  $E/F'$ . Alors il existe deux éléments  $x_{-1}$  et  $x_1$  de  $B$  tels que*

$$\nu_{\mathfrak{P}}((1 + \tau)x_1) = e, \quad \nu_{\mathfrak{P}}[(1 - \tau)x_{-1}] = 1.$$

La démonstration du lemme 7.1. repose sur le fait que l'extension  $E/F'$  est modérément ramifiée en  $\mathfrak{P}$ :

Si on désigne par  $\mathfrak{D}_{E/F'}$  la différentielle de  $B$  par rapport à  $C'$  et par  $\mathfrak{p}'$  la trace de  $\mathfrak{P}$  sur  $C'$ , on a :

$$\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E/F'}) = e - 1, \quad \text{d'où } \nu_{\mathfrak{p}'}[\text{Tr}_{E/F'}(\mathfrak{P})] = 1.$$

Il existe donc bien dans  $\mathfrak{P}$  un élément  $x_1$  tel que  $\nu_{\mathfrak{P}}[(1 + \tau)x_1] = 1$ , soit :  $\nu_{\mathfrak{P}}[(1 + \tau)x_1] = e$ .

Soit  $(g_i)_{i \leq -1}$  la suite des groupes de ramification de  $\mathfrak{P}$  dans  $g$ ; on a  $g_1 = (1)$  car l'extension  $E/F'$  est modérément ramifiée. La nature de  $g_0$  dépend de la valeur de  $e$ : si  $e = 1$ ,  $\tau$  n'appartient pas à  $g_0$ ; il existe donc  $x \in B$  tel que  $\nu_{\mathfrak{P}}[(1 - \tau)x] = 0$ . On choisira alors, pour le lemme;  $x_{-1} = \omega x$  où  $\omega$  est un élément de  $F'$  tel que  $\nu_{\mathfrak{P}}(\omega) = 1$ . Si  $e = 2$ ,  $\tau$  appartient à  $g_0$  et on a  $\nu_{\mathfrak{P}}[(1 - \tau)x] \geq 1$  pour tout  $x \in B$ . En écrivant que  $\tau$  n'appartient pas à  $g_1$  on trouve un élément  $x_{-1} \in B$  tel que  $\nu_{\mathfrak{P}}(1 - \tau)x_{-1} = 1$ .

LEMME 7.2. — Soit  $x \in B$  tel que :

$$1 \leq \nu_{\mathfrak{P}}(x) < p.$$

Alors on a

$$\nu_{\mathfrak{P}}[(\sigma - \sigma^{-1})x] = t + \nu_{\mathfrak{P}}(x).$$

*Démonstration.* — Cette propriété de la ramification de  $\mathfrak{P}$  dans l'extension totalement ramifiée  $E/F$  est invariante par localisation de  $C$  en  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap C$ . Nous supposons donc que  $C$  et  $B$  sont des anneaux de valuation discrète d'idéaux maximaux  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{P}$  respectivement, et nous désignerons par  $\pi$  une uniformisante de  $\mathfrak{P}$ . Posons  $y = (\sigma - \sigma^{-1})(\pi)$ .

Par définition de  $t$  et par choix de  $\pi$  on a

$$\nu_{\mathfrak{P}}(y) = t + 1.$$

Calculons, pour  $n$  entier,  $1 \leq n < p$ ,  $\nu_{\mathfrak{P}}[(\sigma - \sigma^{-1})(\pi^n)]$ : si on pose  $\sigma^{-1}(\pi) = z$ , on a :

$$(\sigma - \sigma^{-1})[\pi^n] = \sum_{k=1}^n C_n^k y^k z^{n-k}.$$

L'hypothèse  $n < p$  implique que  $C_n^k$  est premier à  $p$ , et on a donc

$$\nu_{\mathfrak{P}}(C_n^k y^k z^{n-k}) = kt + n \quad \text{pour tout } k$$

d'où

$$\nu_{\mathfrak{P}}[(\sigma - \sigma^{-1})(\pi^n)] = \nu_{\mathfrak{P}}[C_n^1 y z^{n-1}] = t + n.$$

Soit alors  $x = u\pi^n$  où  $u$  est une unité de  $B$ .

La relation :

$$(\sigma - \sigma^{-1})(x) = (\sigma - \sigma^{-1})(u) \times \sigma(\pi^n) + \sigma^{-1}(u) \times (\sigma - \sigma^{-1})(\pi^n)$$

et l'inégalité

$$\nu_{\mathfrak{P}}[(\sigma - \sigma^{-1})(u)] \geq t + 1$$

permettent d'achever la démonstration.

Nous pouvons maintenant calculer la valuation en  $\mathfrak{P}$  de l'élément  $L(1 + \varepsilon)x_\varepsilon$  où, pour  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $x_\varepsilon$  est défini dans le lemme 7.1.

On déduit en effet du lemme 7.2., par récurrence sur l'entier  $h$ , que, pour tout  $x \in B$  vérifiant

$$1 \leq \nu_{\mathfrak{P}}(x) < p - (h - 1)t,$$

on a

$$\nu_{\mathfrak{P}}[(\sigma - \sigma^{-1})^h(x)] = ht + \nu_{\mathfrak{P}}(x).$$

Pour  $h = p - 2$ , on a  $p - (h - 1)t = 3$  dans tous les cas, d'où l'on déduit la formule :

$$\nu_{\mathfrak{P}}L(1 + \varepsilon\tau)x_\varepsilon = (p - 2)t + \nu_{\mathfrak{P}}[(1 + \varepsilon\tau)x_\varepsilon]. \quad (1)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la détermination de l'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  dans les cas où il contient  $N/p$ , c'est-à-dire  $e = 1$  ou bien  $e = 2$ ,  $t = 3$ ,  $p = 3$  :

La formule (1) et le lemme 7.1. donnent alors :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } e = 1 & \nu_{\mathfrak{P}}[L(1 + \varepsilon\tau)x_\varepsilon] = p - 1 \\ \text{pour } e = 2 & \nu_{\mathfrak{P}}[L(1 + \varepsilon\tau)x_\varepsilon] \leq 5 \end{array}$$

et dans tous les cas  $\nu_{\mathfrak{P}}[L(1 + \varepsilon\tau)x_\varepsilon] < ep = \nu_{\mathfrak{P}}(p)$ .

Les deux éléments  $L(1 + \tau)x_1$  et  $L(1 - \tau)x_{-1}$  ne sont donc pas congrus à 0 modulo  $p$ , et l'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  n'est donc ni  $\mathfrak{D}_5$  ni  $\mathfrak{D}_4$  :  $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}_3$ .

Nous allons maintenant appliquer à l'étude du  $\mathfrak{D}(B)$ -module  $B$  les résultats du paragraphe 4.

1°  $B$  est localement libre sur  $\mathfrak{D}(B)$ .

D'après le corollaire 4.2, il suffit de vérifier que, dans le cas  $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}_1$  ou  $\mathfrak{D}'_1$ , on a  $d(B) \neq -1$  : supposons donc que  $A$  soit un anneau de valuation, discrète d'idéal maximal  $pA$ , l'extension  $E/K$  étant totalement ramifiée avec  $t = 1$ .

Désignons par  $m$  un élément de  $A$  tel que  $F = K[\sqrt{m}]$ , par  $\mathfrak{P}$  l'idéal maximal de  $B$ , par  $x_{-1}$  l'élément défini par le lemme 7.1., et par  $x$  l'élément  $x = \sqrt{m}x_{-1}$ .

On a :

$$L(1 + \tau)x = \sqrt{m} \times [L(1 - \tau)x_{-1}]$$

et, d'après la formule (1) :

$$\nu_{\mathfrak{p}}[L(1 - \tau)x_{-1}] = p - 1,$$

d'où

$$\nu_{\mathfrak{p}}[L(1 + \tau)x] = 2p - 1.$$

Or, tout  $y \in C$  a une valuation  $\nu_{\mathfrak{p}}(y)$  congrue à 0 modulo  $p$ .

L'élément  $x$  considéré est donc tel que  $L(1 + \tau)x$  ne soit pas congru modulo  $p$  à un élément de  $C$ . L'application  $f$  introduite au paragraphe 3 n'est donc pas nulle, d'où

$$d(B) \neq -1.$$

2°  $B$  est libre sur  $\mathfrak{D}(B)$ .

Le théorème 4.1. montre qu'il suffit, pour s'en assurer, de déterminer  $h(B)$ . C'est la classe principale de  $\mathfrak{K}(R)$  comme le montre le résultat de J. Martinet suivant :

**THÉORÈME 7.2.** [4]. — La clôture intégrale  $C'$  de  $A$  dans  $F'$  admet une base sur  $A$  de la forme

$$1, \varphi, \psi, (\sigma^i + \sigma^{-i})\varphi, (\sigma^i + \sigma^{-i})\psi, 1 \leq i \leq i \frac{p-3}{2}.$$

Cela achève la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Chapitre 7, Paris, Hermann, (1965) (Act. scient. et ind., 1314; Bourbaki, 31).
- [2] M. P. LEE, Integral representations of dihedral groups of order  $2p$ . *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 110, (1964), 213-231.
- [3] H. W. LEOPOLDT, Über die Hauptordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers, *J. für reine angew. Math.*, t. 201, (1959), 119-149.
- [4] J. MARTINET, Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral d'ordre  $2p$ , *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 19, (1969), 1-80 (thèse Fac. Sc. Grenoble, 1968).
- [5] J. MARTINET, Modules sur l'algèbre du groupe quaternionien (à paraître aux *Annales de l'E.N.S.*).

- [6] D. S. RIM, Modules over finite groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 69, 1959, 700-712.
- [7] J.-P. SERRE, Corps locaux. Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind. 1296; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 8).
- [8] G. SWAN, Projective modules over groups rings and maximal orders, *Annals of Math.*, séries 2, t. 76, (1962), 55-61.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1971.

accepté par J. L. Koszul.

Anne-Marie BERGÉ,

Université de Bordeaux 1,

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,

351, cours de la Libération,

33-Talence.

---