ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

P. BÉNILAN
H. BRÉZIS

Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 2 (1972), p. 311-329
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_311_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 311-329.

SOLUTIONS FAIBLES D'ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DANS LES ESPACES DE HILBERT

par P. BENILAN et H. BREZIS

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbf{R}$. Rappelons qu'un opérateur (ou graphe) maximal monotone A est une application multivoque de H dans H vérifiant :

$$(f_1 - f_2, u_1 - u_2) \geqslant 0 \quad \text{pour tous} \quad [u_1, f_1], [u_2, f_2] \in \mathrm{A}$$

ainsi que $\mathrm{R}(\mathrm{I} + \mathrm{A}) = \mathrm{H}$.

On dit que $\mathrm{A} \in \mathcal{A}(\omega)$ avec $\omega \in \mathbf{R}$ si $\mathrm{A} + \omega\mathrm{I}$ est maximal monotone et on pose

$$\mathrm{D}(\mathrm{A}) = \{u \in \mathrm{H};\, \mathrm{A}u \neq \emptyset\}.$$

Étant donné $\mathrm{A} \in \mathcal{A}(\omega)$, il est bien connu (cf. [3], [6], [8], [9]) que l'équation d'évolution

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{A}u \ni f \quad \text{sur} \quad [0, \mathrm{T}], \qquad u(0) = u_0$$

admet une solution lorsque f est absolument continue sur $[0, \mathrm{T}]$ et $u_0 \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$. On introduit ici la notion de solution faible associée à $f \in \mathrm{L}^1(0, \mathrm{T}; \mathrm{H})$ et $u_0 \in \overline{\mathrm{D}(\mathrm{A})}$, définie par passage à la limite à partir de solutions fortes.

On établit diverses propriétés de la solution faible u; en particulier on montre qu'en un point de Lebesgue t_0 de f, u est dérivable à droite en t_0 si et seulement si $u(t_0) \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$.

On montre ensuite, dans le cas où $\mathrm{Int}\, \mathrm{D}(\mathrm{A}) \neq \emptyset$ que la solution faible u est à variation bornée et que $u(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ en tout point de Lebesgue de f.

On en déduit l'existence d'une solution forte lorsque f est continue sur $[0, T]$ et $u_0 \in \overline{D(A)}$. On établit enfin des résultats analogues pour le problème périodique :

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \qquad u(0) = u(T).$$

1. Étude des solutions faibles.

Définition 1.1. — *Soient* A *un opérateur de* H *et* $f \in L^1(0, T; H)$.

a) on appelle solution forte sur $[0, T]$ *de l'équation* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, *toute fonction* u *définie et continue sur* $[0, T]$ *à valeurs dans* H, *absolument continue sur tout intervalle compact contenu dans* $]0, T[$ *et donc p.p. dérivable sur* $]0, T[$ (cf [9] Appendix) *vérifiant*

$$u(t) \in D(A), \quad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[.$$

b) on dit que u *est solution faible sur* $[0, T]$ *de l'équation* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ *s'il existe* $f_n \in L^1(0, T, H)$, u_n *solution forte de* $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, *tel que* $f_n \to f$ *dans* $L^1(0, T; H)$ *et* $u_n \to u$ *uniformément sur* $[0, T]$.

Lemme 1.1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, f *et* $g \in L^1(0, T; H)$, u *et* v *des solutions faibles sur* $[0, T]$ *des équations* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ *et* $\frac{dv}{dt} + Av \ni g$ *respectivement. Alors pour tout* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, *on a*

$$|u(t) - v(t)| \leqslant e^{\omega(t-s)}|u(s) - v(s)| + \int_s^t e^{\omega(t-\tau)}|f(\tau) - g(\tau)|\, d\tau. \tag{1.1}$$

Démonstration du lemme 1.1.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer la relation (1.1) pour u et v solutions fortes et $0 < s \leqslant t < T$. En appliquant la monotonie de $A + \omega I$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2 \leqslant \omega|u(t) - v(t)|^2 + (f(t) - g(t),\ u(t) - v(t)) \quad p.p.\ t \in]0,\ T[$$

D'où la relation, par application du lemme de Gronwall.

PROPOSITION 1.1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $f \in L^1(0,\ T;\ H)$ *et* $x_0 \in \overline{D(A)}$. *Il existe une solution faible unique sur* $[0,\ T]$ *de l'équation d'évolution.*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \qquad u(0) = x_0.$$

Démonstration de la proposition 1.1.

L'unicité résulte du lemme 1.1 en faisant $g = f$, $s = 0$. Pour l'existence, faisons appel au résultat de Kato [8] : « étant donné f absolument continue sur $[0, T]$ et $x_0 \in D(A)$, il existe une solution forte sur $[0, T]$ de l'équation d'évolution $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = x_0$ ».

Soit alors f_n absolument continue sur $[0,\ T]$ tel que $f_n \to f$ dans $L^1(0,\ T;\ H)$ et $x_n \in D(A)$ tel que $x_n \to x_0$ dans H. Il existe une solution forte u_n de l'équation $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n(0) = x_n$. Utilisant le lemme 1.1,

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leqslant e^{\omega t}|x_n - x_m| + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}|f_n(\tau) - f_m(\tau)|\, dt \quad \forall t \in [0,\ T].$$

Soit

$$\sup_{[0,\ T]} |u_n(t) - u_m(t)| \leqslant e^{|\omega|T}(|x_n - x_m| + \|f_n - f_m\|_{L^1(0,\ T;\ H)}).$$

Donc u_n converge uniformément vers une fonction u, par définition solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, et telle que $u(0) = x_0$.

LEMME 1.2. — *Soient* A *monotone*, $f \in L^1(0,\ T;\ H)$ *et* u *solution faible sur* $[0,\ T]$ *de l'équation* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. *Alors* *pour tout* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *et tout* $[x, y] \in A$, *on a*

$$(u(t) - u(s), u(s) - x) \leqslant \int_s^t (f(t) - y, u(\tau) - x)\, d\tau. \quad (1.2)$$

Démonstration du lemme 1.2.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer la relation (1.2) pour u solution forte et $0 < s \leqslant t < T$. En appliquant la monotonie de A, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - x|^2 \leqslant (f(t) - y, u(t) - x) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[$$

D'où en intégrant

$$(u(t) - u(s), u(s) - x) \leqslant \frac{1}{2} |u(t) - x|^2 - \frac{1}{2} |u(s) - x|^2$$
$$\leqslant \int_s^t (f(\tau) - y, u(\tau) - x)\, d\tau.$$

Le théorème suivant constitue le résultat principal de cette partie. Précisons d'abord la définition suivante :

Définition 1.2. — *Soit* $f \in L^1(0, T; H)$. *On dira que* $t \in [0, T[$ *est point de Lebesgue à droite* (resp. $t \in]0, T[$ *est point de Lebesgue*) *de* f, *s'il existe* $y \in H$ *tel que*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau) - y|\, d\tau = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(\tau) - y|\, d\tau = 0\right).$$

La valeur y *est alors unique, on la notera* $f(t + 0)$. *On a*

$$f(t + 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau)\, d\tau.$$

Rappelons (cf. [7] p. 217) que l'ensemble des points de Lebesgue de f est de complémentaire négligeable.

Notons enfin que si

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t + h) \text{ existe } \left(\text{resp. } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(t + h) \text{ existe}\right),$$

t est point de Lebesgue à droite (resp. point de Lebesgue) de f et $f(t + 0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(t + h)$.

THÉORÈME 1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $f \in L^1(0, T; H)$, u *solution faible sur* $[0, T]$ *de* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$, $t \in [0, T[$ *point de Lebesgue à droite de* f (resp. $t \in]0, T[$ *point de Lebesgue de* f). *Il y a équivalence entre les propriétés :*

a) $u(t) \in D(A)$;

b) u *est dérivable à droite en* t;

c)

$$\varlimsup_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty$$

$$\left(\text{resp. } \varlimsup_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty\right).$$

De plus sous ces conditions on a [1] :

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t+0) - Au(t))^0.$$

Pour la démonstration du théorème, remarquons que l'on peut supposer A monotone en remplaçant A par $A + \omega I$ et f par $f + \omega u$.

Démonstration de $a) \Longrightarrow b)$. — Supposons donc $u(t) \in D(A)$ et posons $z = (f(t+0) - Au(t))^0$. Appliquons le lemme 1.1 avec $g \equiv f(t+0) - z \in Au(t)$ et $v \equiv u(t)$, on a pour tout $h > 0$, $|u(t+h) - u(t)| \leqslant \int_t^{t+h} |f(\tau) - f(t+0) + z| \, d\tau$ et donc

$$\varlimsup_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} \leqslant |z|.$$

Soit $h_n > 0$, $h_n \to 0$ tel que $\dfrac{u(t+h_n) - u(t)}{h_n} \rightharpoonup \xi$. Pour tout $[x, y] \in A$, on a d'après le lemme 1.2

$$\left(\frac{u(t+h_n) - u(t)}{h_n}, \, u(t) - x\right) \leqslant \frac{1}{h_n} \int_t^{t+h_n} (f(\tau) - y, u(\tau) - x) \, d\tau$$

[1] Étant donné un ensemble convexe fermé C, on désigne par C^0 la projection de 0 sur C.

d'où à la limite, $(\xi,\ u(t) - x) \leqslant (f(t+0) - y,\ u(t) - x)$. Donc $f(t+0) - \xi \in \mathrm{A}u(t)$, c'est-à-dire $\xi \in f(t+0) - \mathrm{A}u(t)$; d'où puisque $|\xi| \leqslant |z|$, on a $\xi = z$. Donc $\dfrac{u(t+h) - u(t)}{h} \to z$ lorsque $h \downarrow 0$.

b) $\Longrightarrow$ *c*) étant immédiat passons à la

Démonstration de *c*) $\Longrightarrow$ *a*).

Sous les hypothèses *c*), il existe $h_n > 0$, $h_n \to 0$ (resp. $h_n \neq 0$, $h_n \to 0$) tel que $\dfrac{u(t+h_n) - u(t)}{h_n} \rightharpoonup \xi$. Dans tous les cas pour $[x, y] \in \mathrm{A}$,

$$\frac{1}{h_n} \int_t^{t+h_n} (f(\tau) - y,\ u(\tau) - x)\, d\tau \to (f(t+0) - y,\ u(t) - x).$$

Si

$$h_n > 0,\ \left(\frac{u(t+h_n) - u(t)}{h_n},\ u(t) - x\right) \leqslant \frac{1}{h_n} \int_t^{t+h_n} (f(\tau) - y,\ u(\tau) - x)\, d\tau.$$

Si

$$h_n < 0,\ \left(\frac{u(t) - u(t+h_n)}{-h_n},\ u(t+h_n) - x\right) \leqslant -\frac{1}{h_n} \int_{t+h_n}^{t} (f(\tau) - y,\ u(\tau) - x)\, d\tau.$$

Dans tous les cas, à la limite,

$$(\xi,\ u(t) - x) \leqslant (f(t+0) - y,\ u(t) - x).$$

Donc $u(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$.

Remarque 1.1. — En fait, un raisonnement identique montre que si u est solution faible de

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{A}u \ni f$$

et $t \in [0, \mathrm{T}]$ vérifie $\displaystyle\varlimsup_{\substack{s \to t \\ s \in [0,\mathrm{T}]}} \left|\frac{1}{s-t} \int_t^s |f(\tau)|\, d\tau\right| < +\infty$

alors $u(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ si et seulement si $\displaystyle\varliminf_{\substack{s \to t \\ s \in [0,\mathrm{T}]}} \frac{|u(t) - u(s)|}{t - s} < +\infty$.

Remarque 1.2. — Lorsque A est univoque, u étant une solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, t un point de Lebesgue de f, si l'on suppose $\overline{\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}}} \frac{|u(t+h) - u(t)|}{h} < +\infty$ alors u est faiblement dérivable en t.

Remarque 1.3. — L'inégalité intégrale (1.2) qui joue un rôle essentiel dans la démonstration a été introduite en [1] pour des opérateurs accrétifs dans les espaces de Banach. Elle est aussi utilisée sous une forme sensiblement plus générale dans [5].

COROLLAIRE 1.1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $f \in L^1(0, T; H)$ *et* u *fonction définie sur* $[0, T]$. *Il y a équivalence entre les propriétés*

a) u *est solution forte de* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

b) u *est solution faible de* $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ *et* u *est absolument continue sur tout intervalle compact contenu dans* $]0, T[$.

Remarque 1.4.

Ces deux propriétés sont équivalentes aussi à la propriété plus faible *a priori* : u est absolument continue sur tout intervalle compact contenu dans $]0, T[$, continue sur $[0, T]$ et vérifie l'inéquation intégrale (1.2). Il serait intéressant de savoir si toute solution continue sur $[0, T]$ de l'inéquation intégrale (1.2) est solution faible de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$.

DÉFINITION 1.3. — *On dit qu'une fonction* f *de* $[0, T]$ *dans* H *est à variation bornée s'il existe* C *tel que pour toute subdivision* $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = T$ *de* $[0, T]$ *on a* $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \leqslant C$. *On appelle variation totale de* f *la borne inférieure des* C.

Nous résumons dans le lemme suivant quelques propriétés des fonctions à variation bornée (cf. par exemple [3]).

Lemme 1.3. — *Soit* f *une fonction à variation bornée sur* $[0, T]$. *Alors* f *vérifie :*

1) f *admet une limite à droite (resp. à gauche) en tout* $t \in [0, T[$ *(resp.* $]0, T]$),

2) $\int_0^{T-h} |f(\tau + h) - f(\tau)| \, dt \leqslant Ch$ *pour tout* $h \in]0, T[$,

3) f *est faiblement dérivable* p.p. *sur* $]0, T[$ *et* $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; H)$,

4) *Si de plus* f *est continue et faiblement dérivable à droite (resp. à gauche) en tout point de* $]0, T[$, *alors* f *est absolument continue.*

Corollaire 1.2. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, f *à variation bornée sur* $[0, T]$ *et* $x \in \overline{D(A)}$. *Soit* u *la solution faible sur* $[0, T]$ *de l'équation d'évolution*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \; u(0) = x. \tag{1.3}$$

Il y a équivalence entre les propriétés :

a) $x \in D(A)$,

b) u *est lipschitzienne.*

De plus sous ces conditions u *est la solution forte de* (1.3), $u(t) \in D(A)$ *en tout* $t \in [0, T]$.

u *est dérivable à droite en tout* $t \in [0, T[$ *et*

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t + 0) - Au(t))^{\circ}.$$

Si de plus A *est univoque et* f *continue,* u *est faiblement dérivable en tout* $t \in [0, T]$ *et* $\frac{du}{dt}(t)$ *est faiblement continue.*

Démonstration du corollaire 1.2. — Supposons d'abord $x \in D(A)$. D'après le théorème 1, u est dérivable à droite en 0 et

$\frac{d^+u}{dt}(0) = (f(0 + 0) - Ax)^{\circ}$. Soit $0 \leqslant t_0 \leqslant t_0 + h \leqslant T$;

appliquons le lemme 1.1. avec $g(t) = f(t + h)$, $v(t) = u(t + h)$,

$s = 0$: on obtient

$$|u(t_0 + h) - u(t_0)| \leqslant e^{\omega t_0}|u(h) - x| + \int_0^{t_0} e^{\omega(t_0-\tau)}|f(\tau + h) - f(\tau)| \, d\tau. \quad (1.4)$$

Soit $|u(t_0 + h) - u(t_0)| < e^{|\omega|\mathrm{T}} \left\{ \left|\frac{d^+u}{dt}(0)\right| + \text{variation totale de } f \right\} h$. Donc u est lipschitzienne.

Supposons maintenant u lipschitzienne. D'après le théorème 1, pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$, $u(t) \in \mathrm{D(A)}$, (donc en particulier $b) \Longrightarrow a)$), u est dérivable à droite en t et

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t+0) - \mathrm{A}u(t))^0.$$

D'après le corollaire 1.1, u est solution forte. Enfin si A est univoque, $\mathrm{A}u(t)$ étant borné est faiblement continu; si de plus f est continue, $\frac{d^+u}{dt}(t)$ est faiblement continue et donc u est faiblement dérivable.

Corollaire 1.3. — *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}(\omega)$ *tel que* $\mathrm{D(A)}$ *soit fermé et* A^0 *soit borné sur les compacts de* $\mathrm{D(A)}$.

Soit $f \in \mathrm{L}^1(0, \mathrm{T};\ \mathrm{H})$ *et* $x \in \overline{\mathrm{D(A)}}$.

Alors il existe une solution forte de l'équation $\frac{du}{dt} + \mathrm{A}u \ni f$, $u(0) = x$. *De plus* u *est dérivable à droite en tout point de Lebesgue de* f *et si* $f \in \mathrm{L}^p(0, \mathrm{T};\ \mathrm{H})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *alors* $\frac{du}{dt} \in \mathrm{L}^p(0, \mathrm{T};\ \mathrm{H})$.

Démonstration du corollaire 1.3. — Soit f_n une suite de fonctions absolument continues sur $[0, \mathrm{T}]$ telles que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1(0, \mathrm{T}; \mathrm{H})$ et soit u_n une suite de solutions fortes de l'équation

$$\frac{du_n}{dt} + \mathrm{A}u_n \ni f_n \qquad \text{telles que} \qquad u_n \to u \quad \text{dans} \quad \mathrm{C}([0, \mathrm{T}];\ \mathrm{H}).$$

L'ensemble $\{u_n(t);\, n \geqslant 0,\, t \in [0, \mathrm{T})\}$ est relativement compact dans $\mathrm{D(A)}$.

Donc $|A^o u_n(t)| \leqslant M$ et par suite

$$\left|\frac{du_n}{dt}(t)\right| = |(f_n(t) - Au_n(t)^o| \leqslant |f_n(t)| + M \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad]0, T[.$$

Donc

$$|u_n(t) - u_n(x)| \leqslant \int_s^t |f_n(\tau)|\, d\tau + M(t-s)$$

et à la limite

$$|u(t) - u(s)| \leqslant \int_s^t |f(\tau)|\, dt + M(t-s).$$

Il en résulte que u est absolument continu et d'après le corollaire 1.1, u est solution forte de l'équation $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$. De plus on a

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leqslant |f(t)| + M \quad \text{p.p. sur }]0, T[.$$

Remarque 1.5. — L'hypothèse « $D(A)$ fermé et A^o borné sur les compacts de $D(A)$ » est en particulier vérifiée si $D(A) = H$ ou bien si $A = \partial\psi_c$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un convexe fermé C.

2. Cas où Int(conv D(A)) $\neq \emptyset$.

Dans toute cette section A désigne un opérateur appartenant à $\mathcal{A}(\omega)$ tel que $\operatorname{Int}(\operatorname{conv} D(A)) \neq \emptyset$. Rappelons (Cf. [10] ou bien [4] pour une démonstration simplifiée) qu'alors $\operatorname{Int} D(A) = \operatorname{Int} \overline{D(A)}$ et que A est borné au voisinage de tout point intérieur à $D(A)$.

Théorème 2. — *Sous les hypothèses précédentes, soient $f \in L^1(0, T; H)$ et u une solution faible de l'équation*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f.$$

Alors

a) u est à variation bornée sur $[0, T]$.

b) pour tout $t \in]0, T[$ point de Lebesgue de f, $u(t) \in D(A)$, u est dérivable à droite en t et $\dfrac{d^+u}{dt}(t) = (f(t+0) - Au(t))^o$.

Démonstration de a). — On peut toujours supposer A maximal monotone et $0 \in \operatorname{Int} D(A)$. Soit $\rho > 0$ et M tels que $|\xi| = \rho \Rightarrow \xi \in D(A)$ et $|A^0\xi| \leqslant M$. On a alors pour tout $[x, y] \in A$, $(y - A^0\xi, x - \xi) \geqslant 0$ pour tout ξ tel que $|\xi| = \rho$ d'où

$$|y| = \frac{1}{\rho} \sup_{|\xi|=\rho} (y, \xi) \leqslant \frac{1}{\rho}(y, x) + M\left(1 + \frac{|x|}{\rho}\right). \tag{2.1}$$

Soient alors $f_n \in L^1(0, T; H)$, u_n solution forte de

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$$

tels que $f_n \to f$ dans $L^1(0, T; H)$ et $u_n \to u$ uniformément.

Appliquons l'estimation (2.1) à

$$\left[u_n(t), f_n(t) - \frac{du_n}{dt}(t)\right] \in A \quad \text{p.p. } t \in]0, T[;$$

On obtient

$$\left|f_n(t) - \frac{du_n}{dt}(t)\right| \leqslant \frac{1}{\rho}(f_n(t), u_n(t)) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2 + M\left(1 + \frac{|u_n(t)|}{\rho}\right).$$

D'où pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$,

$$\begin{aligned}|u_n(t) - u_n(s)| \leqslant &\int_s^t |f_n(\tau)|\, d\tau \\ &+ \frac{1}{\rho}\int_s^t (f_n(\tau), u_n(\tau))\, d\tau + M\left(t - s + \frac{1}{\rho}\int_s^t |u_n(\tau)|\, d\tau\right) \\ &+ \frac{1}{2\rho}(|u_n(s)|^2 - |u_n(t)|^2).\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(\tau) = |f(\tau)|\left\{1 + \frac{1}{\rho}\sup_{[0,T]}|u(\tau)|\right\} + M\left(1 + \frac{|u(\tau)|}{\rho}\right).$$

A la limite on a

$$|u(t) - u(s)| \leqslant \int_s^t \varphi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\rho}(|u(s)|^2 - |u(t)|^2). \tag{2.2}$$

Cette estimation montre que u est à variation bornée de variation totale inférieure ou égale à

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\rho}\{|u(0)|^2 - |u(T)|^2\}.$$

Démonstration de b). — Utilisons le lemme géométrique suivant :

LEMME 2.1. — *Soient* C *un convexe ouvert et* $x \in \partial C$. *Il existe* $\xi \in C$ *tel que*

$$|z - \xi|^2 - |x - \xi|^2 \leqslant |z - x|^2 \quad \forall z \in \overline{C}.$$

Soit alors $t \in]0, T[$ point de Lebesgue de f. Si $u(t) \in D(A)$, d'après le théorème 1, u est dérivable à droite en t et $\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t+0) - Au(t))^0$. Supposons $u(t) \notin D(A)$, alors $u(t) \in \partial\overline{D(A)}$, D'après le lemme 2.1, il existe $\xi \in \operatorname{Int} D(A)$ tel que $|z - \xi|^2 - |u(t) - \xi|^2 \leqslant |z - u(t)|^2$ $\forall z \in \overline{D(A)}$. Après translation, on peut supposer $\xi = 0$. On a donc pour tout $h \in [0, t]$, $|u(t-h)|^2 - |u(t)|^2 \leqslant |u(t-h) - u(t)|^2$. D'où en reprenant l'estimation (2.2)

$$|u(t) - u(t-h)| \leqslant \int_{t-h}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\rho}|u(t) - u(t-h)|^2.$$

La fonction u étant continue en t, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| < \delta$, $|u(t) - u(t-h)| \leqslant \rho$. D'où pour tout $h \in [0, \delta]$, $|u(t) - u(t-h)| \leqslant 2\int_{t-h}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau$. Par construction de φ, t est un point de Lebesgue de φ et donc

$$\overline{\lim_{\substack{h \to 0\\ h>0}}} \left|\frac{u(t) - u(t-h)}{h}\right| < +\infty.$$

Ce qui est contradictoire avec $u(t) \notin D(A)$, d'après le théorème 1.

Démonstration du lemme 2.1. — On peut toujours supposer $x = 0$ et C cône convexe ouvert de sommet O. Soient $C^\perp = \{x \in H;\ (x, z) \leqslant 0\ \ \forall z \in C\}$ cône polaire de C et $K = \{x \in C^\perp;\ (\omega, x) = -1\}$ où ω est un élément *fixé* de C.

K est un convexe fermé ne contenant pas 0. Soit $x \in C^{\perp}$ tel que $(\omega, x) = 0$. Il existe $\mathcal{U}$ voisinage de 0 tel que $\omega + \mathcal{U} \subset C$ et donc $(u, x) \leqslant 0$ pour tout $u \in \mathcal{U}$, ce qui implique $x = 0$. Donc $C^{\perp} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda K$.

Soit alors ξ la projection de 0 sur K. Montrons que $-\xi \in C$. Sinon d'après Hahn-Banach, il existerait $\zeta \neq 0$ tel que $(\zeta, -\xi) = k > (\zeta, z)$ pour tout $z \in C$. Puisque C est un cône, $(\zeta, z) \leqslant 0$ pour tout $z \in C$ et donc $\zeta \in C^{\perp}$ et $k \geqslant 0$. Donc il existerait $\zeta_1 \in K$ tel que $(\zeta_1, \xi) \leqslant 0$ ce qui est impossible car ξ est la projection de 0 sur K.

Étant donné $z \in C$, on a alors

$$|z + \xi|^2 - |\xi|^2 = |z|^2 + 2(z, \xi) \leqslant |z|^2.$$

Remarque 2.1. — On peut en fait, compte tenu de la remarque 1.1, améliorer la conclusion *b*) du théorème 2. On a en effet : si $t \in]0, T]$ vérifie $\varliminf_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} |f(\tau)| \, d\tau < +\infty$, alors $u(t) \in D(A)$; si de plus $t \in]0, T[$ et t est point de Lebesgue à droite de f, alors u est dérivable à droite et

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t + 0) - Au(t))^0.$$

Corollaire 2.1. — *Soient* $A \in \mathcal{A}(\omega)$ *tel que* Int $(\overline{\text{conv } D(A)}) \neq \emptyset$, f *continu sur* $[0, T]$ *et* $x \in \overline{D(A)}$. *Alors il existe une solution forte unique de l'équation d'évolution*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \qquad u(0) = x.$$

De plus cette solution u *vérifie :*

$$u(t) \in D(A) \quad \textit{pour tout} \quad t \in]0, T]$$

u *est dérivable à droite et* $\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t) - Au(t))^0$ *pour tout* $t \in]0, T[$ *avec* $\frac{du}{dt} \in L^1(0, T; H)$.

Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 2 et du lemme 1.3.

Remarque 2.2. — On peut facilement remplacer dans le corollaire 2.1, f continue par f réglée. Il est vraisemblable que sous les hypothèses du théorème 2, u est absolument continue. En dehors du corollaire 2.1, nous savons le démontrer seulement dans des cas particuliers (cf [3]). Citons par exemple :

a) Si $A \in \mathcal{A}(\omega)$ est tel que Int (conv D(A)) $\neq \emptyset$ et $\partial \overline{D(A)}$ est *différentiable*, alors pour tout $f \in L^1(0, T; H)$ et tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe une solution forte unique de l'équation d'évolution $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f, u(0) = x$.

b) Si $A \in \mathcal{A}(\omega)$ est tel que $D(A)$ soit *ouvert*, alors pour tout $f \in L^\infty(0, T; H)$ et tout $x \in \overline{D(A)}$, il existe une solution forte unique de l'équation d'évolution $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f, u(0) = x$.

Remarque 2.3. — Lorsque $\dim H < +\infty$, tous les résultats de cette section s'appliquent à un opérateur $A \in \mathcal{A}(\omega)$ quelconque. En effet, si A est maximal monotone dans H et si $0 \in D(A)$ (on peut toujours se ramener à ce cas), considérons H_0 le sous-espace engendré par $D(A)$ et H_1 le sous-espace orthogonal à H_0. On vérifie facilement que $A_0 = A \cap (H_0 \times H_0)$ est un opérateur maximal monotone de H_0 et que pour tout $x \in D(A) = D(A_0)$, $Ax = A_0x + H_1$. L'équation $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ s'écrit alors par projection sur H_0 et H_1 :

$$\frac{du}{dt} + A_0 u \ni \mathrm{Proj}_{H_0} f$$
$$0 + H_1 \ni \mathrm{Proj}_{H_1} f.$$

La seconde équation étant toujours vérifiée et l'intérieur relatif à H_0 de conv $D(A_0)$ étant non vide, tous les résultats de la section sont valables.

« Depuis le dépôt du manuscrit, nous avons démontré que lorsque $\dim H < +\infty$, pour $A \in \mathcal{A}(\omega)$ et $f \in L^1(0, T; H)$ quelconques, toute solution faible de $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ est absolument continue sur $[0, T]$ (cf. [3]). »

3. Solutions périodiques.

Étant donné $A \in \mathcal{A}(\omega)$ avec $\omega < 0$ et f absolument continue telle que $f(0) = f(T)$, il existe u solution forte unique de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)$; de plus $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; H)$. (Cf [3]).

Le théorème suivant généralise ce résultat :

THÉORÈME 3. — *Soient* A *maximal monotone et* $f \in L^1(0, T; H)$. *On suppose* A *coercif au sens suivant:*

$$\lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ [x, y] \in A}} \frac{(y, x)}{|x|} = +\infty.$$

Alors il existe une solution faible sur $[0, T]$ *de l'équation*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \quad u(0) = u(T). \tag{3.1}$$

Etant donné u *solution faible de* (3.1), *il existe* $f_n \in L^1(0, T; H)$, u_n *absolument continue sur* $[0, T]$ *solution de* $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n(0) = u_n(T)$, *tels que* $f_n \to f$ *dans* $L^1(0, T; H)$, *et* $u_n \to u$ *uniformément sur* $[0, T]$.

D'autre part, l'ensemble des solutions faibles de (3.1) *est un convexe fermé borné pour la norme uniforme.*

Démonstration du théorème 3. — Désignons par $\mathcal{X}$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H muni de la norme uniforme et $\mathcal{Y} = L^1(0, T; H)$. Les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont mis en dualité par $[u, f] \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longmapsto \int_0^T (f(t), u(t))\, dt$.

Considérons $\mathcal{B} = \{[y, f] \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}; u$ absolument continue sur $[0, T]$ et solution de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)\}$. Il est immédiat que $\mathcal{B}$ est monotone. D'autre part, d'après le résultat classique rappelé au début de cette section, étant donné f

absolument continu sur $[0, T]$ avec $f(0) = f(T)$, il existe $u \in \mathcal{X}$ unique tel que $[u, f - u] \in \mathcal{B}$.

Enfin d'après le lemme 1.1, si $[u, f]$ et $[v, g] \in \mathcal{B}$, pour tout $t \geqslant s$,

$$|u(t) - v(t)| \leqslant e^{-(t-s)}|u(s) - v(s)| \\ + \int_s^t e^{-(t-\tau)} |(f(\tau) + u(\tau)) - (g(\tau) + v(\tau)) \, d\tau$$

et donc

$$|u(T) - v(T)| \leqslant e^{-T}|u(0) - v(0)| \\ + \int_0^T e^{\tau-T} |(f(\tau) + u(\tau)) - (g(\tau) + v(\tau))| \, d\tau$$

d'où l'on tire $|u(0) - v(0)| \leqslant \dfrac{1}{1 - e^{-T}} \|(f + u) - (g + v)\|_{\mathcal{Y}}$

et donc

$$\|u - v\|_{\mathcal{X}} \leqslant C\|(f + u) - (g + v)\|_{\mathcal{Y}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{1 - e^{-T}} + 1$$

Ces deux propriétés permettent d'affirmer que $\overline{\mathcal{B}}$, fermeture de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est maximal monotone.

Considérons alors $\tilde{\mathcal{B}} = \{[u, f] \in \mathcal{X} = \mathcal{Y};\ u$ solution faible de $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f,\ u(0) = u(T)\}$. $\tilde{\mathcal{B}}$ est monotone : en reprenant le lemme 1.1 ou 1.2, on a en effet si u, v sont solutions faibles des équations $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ et $\dfrac{dv}{dt} + Av \ni g$ respectivement

$$\frac{1}{2} |u(t) - v(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2} |u(s) - v(s)|^2 \\ + \int_s^t (f(\tau) - g(\tau),\ u(\tau) - v(\tau) \, d\tau$$

pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$; d'où si de plus

$$u(0) = u(T) \ \text{ et } \ v(0) = v(T), \int_0^T (f(t) - g(t), u(t) - v(t) \, dt \geqslant 0.$$

Puisque évidemment $\overline{\mathcal{B}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$, on a $\overline{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}$.

Ceci démontre que si u est solution faible de (3.1), il existe $[u_n, f_n] \in \mathcal{B}$ tel que $f_n \to f$ dans L^1 et $u_n \to u$ uniformément. Ceci démontre aussi que l'ensemble des solutions faibles de (3.1) est un convexe fermé pour la topologie $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Démontrons que cet ensemble est non vide et borné. Utilisons pour cela le

LEMME 3.1. — *Soient* A *maximal monotone coercif,* $f_n \in L^1(0, T; H)$, u_n *solution faible de* $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$. *On suppose* (f_n) *borné dans* L^1 *et* $|u_n(0)| - |u_n(T)| \leqslant C$. *Alors* (u_n) *est uniformément borné.*

Achevons la démonstration du théorème 3 en montrant qu'il existe une solution de (3.1). Pour cela considérons l'application S qui à $x \in \overline{D(A)}$ fait correspondre $S(x)$ la valeur en T de la solution faible de l'équation d'évolution

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f, \quad u(0) = x.$$

D'après le lemme 1.1, S est une contraction du convexe fermé $\overline{D(A)}$ dans lui-même. D'autre part pour $x \in \overline{D(A)}$ fixé, désignant par u_n la solution faible de l'équation d'évolution $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f$, $u_n(0) = S^n(x)$, on a $u_n(T) = S^{n+1}(x)$ et donc $|u_n(T)| - |u_n(0)| \leqslant |S^{n+1}(x) - S^n(x)| \leqslant |S(x) - x|$; donc d'après le lemme 3.1, $(S^n(x))$ est borné.

Appliquant alors un résultat de Browder et Petryshyn [4], S admet au moins un point fixe dans $\overline{D(A)}$. Donc (3.1) admet au moins une solution faible.

Démonstration du lemme 3.1. — On peut toujours supposer u_n solution forte de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$.

D'autre part on peut supposer $[0, 0] \in A$.

Raisonnant par l'absurbe, supposons (u_n) non uniformément borné. D'après le lemme 1.1, on a

$$|u_n(t)| \leqslant |u_n(0)| + \|f_n\|_{L^1}.$$

soit $\|u_n\|_{L^\infty} \leqslant |u_n(0)| + \|f_n\|_{L^1}$ et par suite $|u_n(0)| \to +\infty$. Donc aussi $|u_n(T)| \to +\infty$. Comme $|u_n(T)| \leqslant |u_n(t)| + \|f_n\|_L$ on a $\operatorname*{Inf}_{t \in [0, T]} |u_n(t)| \to +\infty$. Appliquant la coercivité de A,

$$\varphi_n(t) = \frac{\left(f_n(t) - \frac{du}{dt}n(t),\ u_n(t)\right)}{|u_n(t)|} \to +\infty \quad \text{pour p.p.} \quad t \in]0, T[.$$

D'où $\int_0^T \varphi_n(t)\, dt \to +\infty$. Or ceci est impossible puisque $\int_0^T \varphi_n(t)\, dt \leqslant \|f_n\|_{L^1} + |u_n(0)| - |u_n(T)|$.

Corollaire 3.1. — *Soient φ fonction convexe s.c.i. propre sur H et $f \in L^2(0, T; H)$. On suppose $A = \partial\varphi$ coercif. Alors il existe u solution forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)$. De plus $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$.*

Cela résulte du théorème 3 et du résultat de H. Brézis [2] qui, avec nos définitions peut s'exprimer : toute solution faible de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ avec $f \in L^2(0, T; H)$ est solution forte et $\frac{du}{dt} \in L^2_{loc}(0, T; H)$.

Remarque 3.2. — Dans le cas où $A = \partial\varphi$, l'hypothèse de coercivité est *équivalente* à A surjectif et $(A^{-1})^0$ borné sur les bornés (cf. [3]). Dans le cas général, cette hypothèse n'est pas suffisante pour avoir l'existence de solutions périodiques faibles pour tout $f \in L^1(0, T; H)$: il suffit de considérer pour A la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan et $T = 2\pi$.

Remarque 3.3. — Le lecteur pourra obtenir de nombreux autres corollaires sur l'existence de solutions fortes de l'équation $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)$, en utilisant les résultats de la section II. Nous renvoyons à [3] pour l'énoncé de résultats complémentaires.

Remarque 3.4. — Si A est strictement monotone (i.e. $[x, y] \in A$, $[x', y'] \in A$, $x \neq x' \Longrightarrow (y - y', x - x') > 0$) il existe au plus une solution forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u(T)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BREZIS, On a problem of T. Kato, *Comm. Pure App. Math.*, **24** (1971).
[2] H. BREZIS, Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires, *Israel J. of Math.*
[3] H. BREZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi groupes non linéaires, Cours 3e cycle rédigé par P. Benilan, Paris, (1970).
[4] F. BROWDER and W. V. PETRYSHYN, The solution by iteration of non linear functional equations in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 571-575.
[5] M. CRANDALL and T. LIGGETT, Generation of semi groups of non linear transformations on general Banach spaces, (à paraître).
[6] M. CRANDALL and A. PAZY, Semigroups of non linear contractions and dissipative sets. *J. Funct. Anal.*, **3** (1969), 376-418.
[7] N. DUNFORD et J. SCHWARTZ, Linear operators, interscience.
[8] T. KATO, Accretive operators and non linear evolution equations in Banach spaces, Non linear Functional Analysis, *Proc. Symp. Pure Math.*, **18**, 138-161 A.M.S. (1970).
[9] Y. KOMURA, Non linear semigroups in Hilbert spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 493-507.
[10] R. T. ROCKAFELLAR, Local boundedness of non linear monotone operators, *Michigan Math. J.*, **16** (1969), 397-407.

Manuscrit reçu le 28 juin 1971,
accepté par G. Choquet.

P. BENILAN,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.

H. BREZIS,
Institut de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
9, Quai St-Bernard,
Paris 5e.