ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Prolongement analytique en dimension infinie

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 2 (1972), p. 255-292

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_255_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 255-292.

PROLONGEMENT ANALYTIQUE EN DIMENSION INFINIE

par André HIRSCHOWITZ

---

0. Introduction.

Ce travail développe les idées annoncées dans [10].

Dans le paragraphe 1, on construit l'enveloppe d'holomorphie d'un ouvert étalé au-dessus d'un espace de Banach. On donne ensuite des théorèmes du type Cartan-Thullen, mais on n'obtient pas tous les résultats attendus dans la mesure où on est contraint d'envisager les domaines infinis. L'enveloppe obtenue a cependant des propriétés propres à la variété sous-jacente : on montre au paragraphe 2 qu'elle ne dépend pas de l'étalement choisi pour le domaine initial et au paragraphe 5 qu'elle est pseudoconvexe en un certain sens.

Dans le paragraphe 2, on cherche à prolonger des applications analytiques à valeurs vectorielles. On démontre que si on peut prolonger de Ω_1 à Ω_2 les applications analytiques à valeurs scalaires, on peut aussi prolonger les applications analytiques à valeurs banachiques. Mais, lorsqu'on veut généraliser au cas des applications analytiques à valeurs dans un espace localement convexe complet, on doit supposer Ω_2 séparable.

Dans le paragraphe 3, on étudie le prolongement des applications hypoanalytiques, c'est-à-dire G-analytiques et bornées sur les compacts. L'introduction des applications hypoanalytiques répond au besoin de représenter une fonction analytique sur un produit par une application de l'un des facteurs dans un espace de fonctions sur l'autre. On obtient dans ce cadre un théorème de prolongement des applications hypo-analytiques à valeurs dans les espaces localement convexes complets. On en déduit un théorème de prolongement des applications analytiques à valeurs dans les « bons » domaines d'holomorphie, parmi lesquels les domaines d'existence.

Dans le paragraphe 4, on étudie plus en détail le prolongement des applications analytiques à valeurs dans les espaces normés. On montre que cette question est liée au problème, soulevé dans [8], du prolongement d'une fonction analytique définie sur un sous-espace vectoriel dense d'un espace de Banach. Ces deux problèmes apparaissent comme des cas particuliers du problème de la caractérisation géométrique des domaines d'holomorphie.

Enfin, dans le paragraphe 5, on aborde diverses questions comme l'étude de la pseudoconvexité et la construction d'une topologie naturelle sur l'espace des fonctions analytiques sur une variété banachique. On montre, en particulier, que cette topologie est adaptée aux problèmes de prolongement et on apporte une illustration à ce résultat.

A aucun moment, on n'a voulu cacher la pauvreté de la théorie en regard des espoirs qu'on peut placer en elle. Le lecteur ne s'étonnera donc pas de constater qu'à certains endroits les questions sont plus nombreuses que les réponses.

Je tiens à remercier vivement le Professeur L. Nachbin, sans les encouragements duquel je n'aurais pas entrepris ce travail.

Tous les espaces vectoriels envisagés sont localement convexes et complexes. Pour les mots non définis, on renvoie à [12] en ce qui concerne l'analyse complexe, à [16] en ce qui concerne les fonctions analytiques en dimension infinie et à [19] en ce qui concerne la théorie des espaces vectoriels topologiques.

1. Enveloppe d'holomorphie.

La recherche d'une enveloppe d'holomorphie pour un domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach a déjà été entreprise, notamment par Alexander [1] et par Cœuré [2]. On peut raisonnablement attribuer leurs difficultés à leur volonté de présenter l'enveloppe d'holomorphie comme une partie du spectre de l'algèbre des fonctions analytiques sur le domaine envisagé, munie d'une topologie naturelle. Nous reviendrons au § 5 sur ce genre de problèmes. Ici, nous renonçons au point de vue spectral pour constater que l'enveloppe d'holomorphie peut être construite sans difficulté par le procédé que décrit Malgrange [15]. Avant d'énoncer et de démontrer le théorème d'existence, donnons les définitions suivantes :

DÉFINITION 1.1. — *Soit* E *un espace normé,* F *un espace localement convexe,* Ω *un domaine étalé au-dessus de* E, *et* f *une application de* Ω *dans* F. *Nous dirons que* f *est G-analytique si sa restriction aux droites est analytique. Nous dirons que* f *est hypoanalytique si elle est* G-*analytique et bornée sur les compacts. Nous dirons que* f *est analytique si elle est hypoanalytique et localement bornée.*

Il est facile de voir que si F est normé, toute application hypoanalytique de Ω dans F est analytique.

Soit maintenant Ω un espace étalé sur E, et u un morphisme d'espaces étalés de source Ω. Nous dirons que u est une extension analytique de Ω si toute fonction analytique sur Ω se factorise de façon unique à travers u. L'extension sera dite triviale si u est un isomorphisme.

DÉFINITION 1.2. — *On dit que* Ω *est un domaine d'holomorphie si toute extension analytique de* Ω *est triviale.*

DÉFINITION 1.3. — *On appelle enveloppe d'holomorphie de* Ω *tout couple* $(\tilde{\Omega}, u)$ *où* u *est une extension analytique de* Ω *de but* $\tilde{\Omega}$, *maximale en ce sens qu'elle se factorise analytiquement à travers toute extension analytique de* Ω.

THÉORÈME 1.4. — *Tout ouvert étalé au-dessus d'un espace de Banach admet une enveloppe d'holomorphie.*

Démonstration. — Soit Ω le domaine étalé au-dessus du Banach A.

Notons I l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω et $\mathcal{F}$ le faisceau d'ensembles sur A des applications hypoanalytiques à valeurs dans $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$. Remarquons qu'une application hypoanalytique à valeurs dans $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$ est une collection $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ quelconque de fonctions analytiques. Le faisceau d'ensembles $\mathscr{F}$ s'identifie au faisceau des sections d'un espace F étalé au-dessus de A de la façon habituelle : rappelons que F est l'espace des germes de sections de $\mathscr{F}$. Nous allons définir une application u' de Ω dans F.

Soit ω un point de Ω, soit U un voisinage de ω tel que la restriction de π à U soit un isomorphisme, et soit σ l'isomorphisme inverse défini sur $\pi(\mathrm{U})$. Soit $s = (s_i)_{i \in \mathrm{I}}$ l'application hypoanalytique de $\pi(\mathrm{U})$ dans $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$ définie par $s_i = 1 \circ \sigma$. Par définition $u'(\omega)$ est le germe de s en $\pi(\omega)$. Il est évident que le germe de s ne dépend pas de J et que les germes de s en tous les points de $\pi(\mathrm{U})$ se recollent, ce qui permet d'affirmer que u' est continue de Ω dans F. La définition de u' permet aussi de constater que u' est un morphisme d'espaces étalés. Comme Ω est connexe, $u'(\Omega)$ est connexe. Notons $\tilde{\Omega}$ la composante connexe de $u'(\Omega)$ dans F et u le morphisme de Ω dans $\tilde{\Omega}$ défini par u'. Nous allons voir que $(\tilde{\Omega}, u)$ est une enveloppe d'holomorphie de Ω.

Soit x dans $\tilde{\Omega}$ et i dans I. Comme x est le germe en $\pi(x)$ d'une application hypoanalytique à valeurs dans $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$, on peut noter $\tilde{\imath}(x)$ la valeur en $\pi(x)$ de la composante d'indice i de ce germe. Il est clair que $\tilde{\imath}$ est une fonction analytique sur $\tilde{\Omega}$ et il résulte de la construction de u que $i = \tilde{\imath} \circ u$. Soit alors f analytique sur $\tilde{\Omega}$ vérifiant $i = f \circ u$. Sur $u(\Omega)$, f et $\tilde{\imath}$ coïncident, et comme $u(\Omega)$ est ouvert et $\tilde{\Omega}$ est connexe f et $\tilde{\imath}$ sont égales en vertu du théorème du prolongement analytique. Il nous reste à voir que u est maximale. Soit φ une extension analytique de Ω de but $\hat{\Omega}$. Si $\hat{\mathrm{I}}$ désigne l'ensemble des fonctions analytiques sur $\hat{\Omega}$, $\hat{\mathrm{I}}$ est canoniquement isomorphe à I ; désignons par $\hat{\imath}$ l'élément correspondant à un élément i de I par cet isomorphisme. Nous allons définir une application $\hat{u}'$ de $\hat{\Omega}$ dans F de la même manière que précédemment : si ω est un point de $\hat{\Omega}$ et U un voisinage de ω tel que $\pi_{|\mathrm{U}}$ soit un isomorphisme sur $\pi(\mathrm{U})$ et si σ désigne l'isomorphisme inverse défini sur $\pi(\mathrm{U})$, définissons une section $s = (s_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de F au-dessus de $\pi(U)$ par $s_i = \hat{i} \circ \sigma$. Le germe de s en $\pi(\omega)$ définit un point de F qui ne dépend pas de U et on le note $\hat{u}'(\omega)$. Comme précédemment, on vérifie que $\hat{u}'$ est continu et que c'est un morphisme d'espaces étalés. On vérifie aussi sur les définitions que $u' = \hat{u}' \circ \nu$. Comme $\hat{\Omega}$ est connexe, $\hat{u}'(\hat{\Omega})$ est connexe et l'égalité précédente implique alors que $\hat{u}'(\hat{\Omega}) \subset \tilde{\Omega}$. Si on note $\hat{u}$ le morphisme de $\hat{\Omega}$ dans $\tilde{\Omega}$ défini par $\hat{u}'$ on obtient $u = \hat{u} \circ \nu$, ce qui prouve que u est maximal et que $(\tilde{\Omega}, u)$ est une enveloppe d'holomorphie de Ω. C.Q.F.D.

Nous verrons plus loin (théorème 2.15.) que l'enveloppe d'holomorphie ainsi construite ne dépend pas de l'étalement choisi. Pour le moment nous nous contentons de donner deux propriétés attendues des domaines d'holomorphie.

Proposition 1.5. — *Si Ω est un domaine d'holomorphie, les fonctions analytiques séparent les points de Ω.*

Démonstration. — Il résulte des définitions que Ω est égal à son enveloppe d'holomorphie telle qu'elle est construite dans la démonstration précédente. Soient alors x_1 et x_2 deux points de Ω. Si leurs projections diffèrent, il est facile de trouver une fonction les séparant.

Supposons maintenant que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ et que pour toute fonction f sur Ω, on ait $f(x_1) = f(x_2)$. Comme les dérivations opèrent globalement sur Ω, on obtient, en écrivant la formule de Taylor, que les germes de f en x_1 et en x_2 définissent le même germe en $\pi(x_1)$. Il en résulte, au vu de la construction même de l'enveloppe d'holomorphie, que $x_1 = x_2$.
C.Q.F.D.

La norme sur A permet de définir sur Ω une distance frontière d_Ω. On a alors le

Théorème 1.6. — *Soit Ω un domaine d'holomorphie étalé au-dessus de* A. *Si pour tout compact* K *de Ω on pose :*

$$\hat{K} = \{z \in \Omega \,|\, \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) |f(z)| \leqslant \|f\|_K\}$$

on a l'égalité

$$d_\Omega(K) = d_\Omega(\hat{K}).$$

Démonstration. — Soient e_1 et e_2 deux vecteurs indépendants de A. Notons

$$P(e_1, e_2) = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \,|\, |\lambda_1| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_2| \leqslant 1\}.$$

La boule ouverte B de centre O et de rayon $d_\Omega(K)$ est évidemment la réunion des ensembles de la forme

$$P'(e_1', e_2') = \{\lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' \,|\, |\lambda_1| < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_2| < 1\},$$

qui sont tels que B contienne $P(e_1', e_2')$. Convenons d'appeler bidisque fermé tout ensemble de la forme $P(e_1, e_2)$ et bidisque ouvert tout ensemble de la forme $P'(e_1', e_2')$. Soit donc P un bidisque fermé contenu dans B. Pour x dans K et y dans P, on peut définir, vu la définition de d_Ω un point $x + y$ dans Ω dont il est facile de vérifier qu'il dépend continûment du couple (x, y) dans $K \times P$. L'image de l'application ainsi définie est donc un compact L de Ω. Pour toute fonction f dans $\mathcal{O}(\Omega)$, et pour tout point z de Ω, posons $f_{P,z}(\lambda_1, \lambda_2) = f(z + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$. On définit ainsi un germe de fonction analytique de deux variables.

Définissons alors $\partial_P^{\alpha_1, \alpha_2} f(z) = \left(\dfrac{\partial}{\partial \lambda_1}\right)^{\alpha_1} \left(\dfrac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)^{\alpha_2} f_{P,z}(0, 0)$. La fonction $\partial_P^{\alpha_1, \alpha_2} f$ est analytique dans Ω. Posons alors $M = \|f\|_L$. Les inégalités de Cauchy donnent pour z dans L les inégalités $|\partial_P^{\alpha_1, \alpha_2} f(z)| \leqslant \alpha_1 ! \alpha_2 ! M$. Par définition de $\hat{K}$, ces inégalités sont encore vraies pour z dans $\hat{K}$. Cette remarque permet de définir pour tout z dans $\hat{K}$ une fonction analytique dans $z + P'$. Il est clair que les fonctions ainsi construites se recollent pour définir une fonction $\tilde{f}$ dans $z + B$.

La fonction $\tilde{f}$ a, en z, la même série de Taylor que f et elle est analytique sur les droites puisque les droites sont localement contenues dans un bidisque. La fonction $\tilde{f}$ prolonge donc f à $z + B$ analytiquement d'après un théorème de Zorn (cf. [18]). Il résulte maintenant du fait que Ω est un domaine d'holomorphie, que $z + B$ est contenu dans Ω et par conséquent que

$$d_\Omega(z) \geqslant d_\Omega(K).$$

C.Q.F.D.

On trouvera dans [4] des résultats voisins du précédent.

COROLLAIRE 1.7. — *Soit* (Ω, π) *un domaine d'holomorphie au-dessus de* A *tel que les fibres de* π *soient finies. Alors* Ω *est holomorphiquement convexe.*

Démonstration. — Soit K un compact de Ω et $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur $\hat{K}$. Il est facile de voir que l'enveloppe convexe de $\pi(K)$ contient $\pi(\hat{K})$ si bien que $\pi(\mathfrak{U})$ converge vers un point a de A. Il nous reste à voir que $\mathfrak{U}$ ne « concerne » qu'un nombre fini de feuillets. Posons $r = \frac{1}{2} d_\Omega(K)$ et notons B la boule de centre a et de rayon r. Soit x un point de $\hat{K}$ au-dessus de B. Il résulte du théorème précédent qu'on peut trouver une section σ de Ω au-dessus de B telle que $\sigma \circ \pi(x) = x$.

Considérons alors l'ensemble des sections de Ω au-dessus de B. Cet ensemble est évidemment fini. Il en résulte que A converge. C.Q.F.D.

Nous verrons au dernier paragraphe les propriétés de pseudo-convexité des domaines d'holomorphie.

Remarque 1.8. — Comme dans [15], nous aurions pu construire l'enveloppe d'un domaine Ω par rapport à une famille de fonctions sur Ω qui ne soit pas la famille $\mathcal{O}(\Omega)$. En particulier, il est tentant de faire les deux constructions qui suivent.

Soit Ω un domaine étalé au-dessus de A et ω un point de Ω. Notons δ_ω la fonction qui à tout point de Ω associe sa distance géodésique à ω. Nous dirons qu'une partie B de Ω est Ω-bornée si :

$$\inf_{x \in B} d_\Omega(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in B} \delta_\omega(x) < +\infty.$$

Appelons fonction de type borné (resp. faiblement borné) sur Ω toute fonction analytique bornée sur les parties (resp. les boules) Ω-bornées de Ω. Si on construit l'enveloppe de Ω par rapport à la famille des fonctions de type borné (resp. faiblement borné), on obtient un domaine $\tilde{\Omega}^B$ (resp. $\tilde{\Omega}^b$). Il est facile de voir que l'extension $\tilde{f}$ d'une fonction de type faiblement borné sur Ω n'est pas en général une fonction de type faiblement borné sur $\tilde{\Omega}^b$. Par contre, nous ne savons pas répondre à la question suivante :

L'extension d'une fonction de type borné sur Ω est-elle une fonction de type borné sur $\tilde{\Omega}^{B}$?

Nous considérerons plus loin la question soulevée ici sous un angle voisin : celui des types d'holomorphie.

2. Applications à valeurs vectorielles.

Nous allons maintenant nous préoccuper de prolonger non plus des fonctions analytiques mais des applications analytiques quelconques. Nous nous placerons toute de suite dans un contexte légèrement plus général :

DÉFINITION 2.1. — *Nous appellerons couple de prolongement tout triplet (Ω_1, p, Ω_2) où Ω_1 et Ω_2 sont deux variétés analytiques banachiques connexes, p une application analytique ouverte de Ω_1 dans Ω_2 telle que toute fonction analytique sur Ω_1 se factorise analytiquement à travers p.*

Exemple 2.2. — A tout domaine Ω étalé au-dessus de A est associé canoniquement le couple de prolongement $(\Omega, u, \tilde{\Omega})$ décrit dans le Th. 1.4.

Le théorème qui suit a d'abord été démontré par Alexander pour les couples de prolongement « normal » (cf. [1]) puis dans le cas séparable par Cœuré (cf. [2]).

THÉORÈME 2.3. — *Soit (Ω_1, p, Ω_2) un couple de prolongement et E un espace de Banach. Alors toute application f analytique sur Ω_1 à valeurs dans E se factorise à travers p.*

Démonstration. — L'idée essentielle de la démonstration est contenue dans le théorème 2 de [11]. Soit $\hat{E}$ le produit de droites obtenu en complétant E pour sa topologie faible. Soient i l'injection de E dans $\hat{E}$ et $\hat{f} = i \circ f$. Comme (Ω_1, p, Ω_2) est un couple de prolongement, on peut écrire $\hat{f} = \tilde{\hat{f}} \circ p$, $\tilde{\hat{f}}$ désignant une application hypoanalytique de Ω_2 dans $\hat{E}$. Désignons par Ω l'intérieur de l'ensemble des points de Ω_2 dont l'image par $\tilde{\hat{f}}$ appartient à $i(E)$. Remarquons d'abord que Ω contient $p(\Omega_1)$: en effet, soit x dans

Ω_1 : on a alors $\tilde{f}(p(x)) = i(f(x))$. Comme i est injective, on peut écrire $\tilde{f}_{|\Omega} = i \circ \check{f}$ où $\check{f}$ est une application de Ω dans E. Nous allons voir que $\check{f}$ est analytique. Dire que $i \circ \check{f}$ est hypoanalytique, c'est exactement dire que pour toute forme linéaire continue l sur E, $l \circ \check{f}$ est analytique. Ceci prouve que $\check{f}$ est G-analytique. Maintenant, comme $\check{f} \circ p$ est analytique, $\check{f} \circ p$ est localement bornée, et comme p est ouverte, il s'ensuit que $\check{f}$ est localement bornée dans $p(\Omega_1)$. L'application $\check{f}$ est donc G-analytique dans Ω et localement bornée dans l'ouvert $p(\Omega_1)$. Elle est alors analytique dans Ω d'après un théorème de Zorn (cf. [18]).

Nous allons maintenant voir que Ω est fermé dans Ω_2 ce qui prouvera le théorème : soit donc u un point de $\overline{\Omega}$. Choisissons une carte locale au voisinage de u. Soit U le voisinage de u concerné et choisissons une suite u_n de points de U tendant vers u. On peut parler grâce à la carte du rayon de convergence de $\check{f}$ en u_n.

Nous allons montrer qu'on peut trouver une forme linéaire continue l sur E telle que pour tout n, $l \circ \check{f}$ ait en u_n le même rayon de convergence que $\check{f}$. La construction de l résultera du lemme qui suit. Supposons pour l'instant l construit. Le fait que $l \circ \check{f}$ se prolonge au voisinage de u implique que le rayon de convergence de $l \circ \check{f}$ en u_n ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Inversement, le rayon de convergence de $\check{f}$ en u_n ne tendant pas vers zéro lorsque n tend vers l'infini, il en résulte que $\check{f}$ se prolonge au voisinage de u. Il nous reste donc à prouver le

LEMME 2.4. — *Soient* V *un ouvert d'un banach* B, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de* V *et* f *une application analytique de* V *dans l'espace de Banach* C. *L'ensemble des formes linéaires continues* l *sur* C *telles que* $l \circ f$ *ait un rayon de convergence strictement supérieur à celui de* f *en l'un des points* v_n *est maigre dans* C'.

Démonstration. — Comme une réunion dénombrable d'ensembles maigres est maigre, nous pouvons supposer que

V contient zéro et que φ_n est identique à zéro. Soit donc R le rayon de convergence de f en zéro. Soit R′ strictement supérieur à R et soit A l'ensemble des éléments l de C′ tels que $l \circ f$ ait un rayon de convergence plus grand que R′ en zéro. Nous allons montrer que A est maigre.

Écrivons $f = \sum_n f_n$ où les f_n sont des applications polynomiales homogènes de degré n et soit l dans A.

On a donc

$$\overline{\lim}\ \|l \circ f_n\|^{1/n} \leqslant \frac{1}{R'} < \frac{1}{R} = \overline{\lim}\ \|f_n\|^{1/n}.$$

Soit f_{n_k} une sous-suite de f_n vérifiant $\|f_{n_k}\|^{1/n_k} > \dfrac{2}{R + R'}$, on voit facilement qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang,

$$\|l \circ f_{n_k}\| \leqslant (1 - \varepsilon)^{4n_k}\|f_{n_k}\|.$$

Si on pose $F_p = \{l \in C' | k > p \Longrightarrow \|l \circ f_{n_k}\| \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^{4n_k}\|f_{n_k}\|\}$ on peut écrire $A \subset \bigcup\limits_p F_p$. Il nous suffit donc de montrer que F_p est rare. F_p est évidemment fermé, montrons qu'il est d'intérieur vide. Soit $l \in F_p$ et $l_1 \in C'$ vérifiant

$$\|l_1 \circ f_{n_k}\| \geqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2n_k}\|f_{n_k}\|$$

pour une infinité de valeurs de k. Soit λ dans $C - \{O\}$.

$$\|(l + \lambda l_1) \circ f_{n_k}\| \geqslant |\lambda|\|l_1 \circ f_{n_k}\| - \|l \circ f_{n_k}\|$$

d'où pour une infinité de valeurs de k,

$$\|(l + \lambda l_1) \circ f_{n_k}\| \geqslant \left(|\lambda|\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2n_k} - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{4n_k}\right)\|f_{n_k}\| \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{4n_k}\|f_{n_k}\|.$$

Il ne nous reste qu'à prouver l'existence de l_1. Choisissons x_{n_k} dans B vérifiant $\|x_{n_k}\| = 1$, $\|f_{n_k}(x_{n_k})\| \geqslant \dfrac{1}{2}\|f_{n_k}\|$ et posons $y_{n_k} = f_{n_k}(x_{n_k})$. Raisonnons maintenant par l'absurde et supposons que pour toute forme linéaire continue l sur $\mathbf{C}$, on ait

$$\|l \circ f_{n_k}\| < \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2n_k} \|f_{n_k}\| \quad \text{pour } k \text{ suffisamment grand.}$$

Il en découle que

$$|l(y_{n_k})| < 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2n_k} \|y_{n_k}\| \quad \text{pour } k \text{ suffisamment grand.}$$

On pose

$$z_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n_k} \|y_{n_k}\|}$$

On obtient alors $|l(z_{n_k})| < 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n_k}$ à partir d'un certain rang. Donc z_{n_k} converge faiblement vers zéro, donc reste borné, ce qui est absurbe puisque

$$\|z_{n_k}\| = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n_k}} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On est en droit d'espérer que les applications analytiques à valeurs dans les espaces, disons complets, se prolongent aussi. Pour le moment, dans ce qui suit, nous devons supposer l'espace de départ séparable.

Proposition 2.5. — *Soit* (Ω_1, p, Ω_2) *un couple de prolongement séparable. Les applications analytiques de* Ω_1 *dans un produit de droites se factorisent analytiquement à travers* p.

Démonstration. — Il nous suffit de montrer que si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions sur Ω_1 dont, en tout point de Ω_1, les rayons de convergence sont minorés par un nombre strictement positif, alors la famille $(\tilde{f}_i)_{i\in I}$ définie par $\tilde{f}_i \circ p = f_i$, a la même propriété sur Ω_2. Il est clair alors qu'on peut supposer que $I = \mathbf{N}$ et remplacer f_i par $\lambda_i f_i$ où λ_i désigne une constante non nulle. Nous allons précisément remplacer la suite (f_i) par une suite $(\lambda_i f_i)$ de façon que $(\lambda_i f_i)$ définisse une application analytique de Ω_1 dans l^∞, après quoi nous appliquerons le théorème 2.3. Soit (x_n) une suite partout dense dans Ω_1, ρ_n un rayon de convergence commun aux f_i en x_n et B_n la boule de centre x_n et de rayon $\frac{1}{2}\rho_n$. Soit M_n^i le sup de f_i sur B_n. Il est classique qu'on peut choisir la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{N}}$ de façon que chacune des suites $(M_n^i\lambda_i)_{i\in\mathrm{N}}$ soit bornée, sans qu'aucun des λ_i ne soit nul. La suite $(\lambda_i f_i)_{i\in\mathrm{N}}$ définit alors une application analytique de Ω_1 dans l^∞ puisque, les B_n recouvrant Ω_1, elle est localement bornée (cf. [9]).

D'après le théorème 2.3, l'application λ_f de Ω_1 dans l^∞ ainsi définie se factorise à travers p. Soit $\tilde{\lambda}_f$ tel que $\lambda_f = \tilde{\lambda}_f \circ p$. On a évidemment $\tilde{\lambda}_f = (\lambda_i \tilde{f}_i)_{i\in\mathrm{N}}$ et le fait que $\tilde{\lambda}_f$ soit analytique implique entre autres que les $\tilde{f}_i$ ont, en tout point de Ω_2, leur rayon de convergence minoré par un nombre strictement positif. C.Q.F.D.

La proposition précédente se généralise aisément :

Théorème 2.6. — *Soit* (Ω_1, p, Ω_2) *un couple de prolongement séparable et* E *un espace localement convexe semi-complet. Alors les applications analytiques de* Ω_1 *dans* E *se factorisent à travers* p.

Démonstration. — Le lemme 2.4. permet de passer du cas du produit de droites au cas du produit d'espaces de Banach. Maintenant tout espace localement convexe E est sous-espace topologique d'un produit d'espaces de Banach $\tilde{E}$ (cf. [19]). Donc si f est une application analytique de Ω_1 dans E et si i désigne l'injection de E dans $\tilde{E}$, il existe $\tilde{f}$ de Ω_2 dans $\tilde{E}$ vérifiant $i \circ f = \tilde{f} \circ p$. Il nous reste à voir que $\tilde{f}$ prend en fait ses valeurs dans E si E est semi-complet. Soit Ω l'intérieur de l'ensemble des points x de Ω_2 dont l'image par $\tilde{f}$ appartienne à E. Il est clair que Ω contient $p(\Omega_1)$. Soit u un point adhérent à Ω, et prenons une carte locale, c'est-à-dire identifions un voisinage U de u à un ouvert de A. Soit x dans $U \cap \Omega$. Les polynômes dérivés successifs de $\tilde{f}$ en x se calculent à l'aide de la formule de Cauchy. Comme l'intégrale sur un cercle peut s'approcher par une suite de sommes de Riemann, le fait que E est semi-complet nous assure que les polynômes en question prennent leurs valeurs dans E. Le fait que E est semi-complet nous permet alors d'affirmer que $\tilde{f}$ prend ses valeurs dans E en tout point où la série de Taylor en x converge. Soit donc $B_{2\rho}$ une boule de centre u et de rayon 2ρ contenue dans U et soit x un point de Ω contenu dans la boule de centre u et de rayon ρ. Alors la boule de centre x et de rayon ρ est contenue dans U et contient u. Il s'ensuit que la série de Taylor de $\tilde{f}$ en x converge dans cette boule et par suite que Ω contient cette boule. Comme Ω_2 est connexe et Ω non vide, on conclut $\Omega = \Omega_2$. C.Q.F.D.

Pour certains espaces, je pense en particulier à des espaces de fonctions et de fonctionnelles, on peut supprimer l'hypothèse de séparabilité. Mais dans le cas général, il faut pour l'instant s'accommoder d'un énoncé de prolongement hypoanalytique (voir ci-dessous th. 3.10.). Toutefois cet énoncé sera suffisant dans beaucoup d'applications.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur ce qu'il advient lorsque E n'est pas semi-complet. Pour pouvoir énoncer un certain nombre de résultats, nous serons amenés à faire des hypothèses supplémentaires sur les couples de prolongement.

Nous appellerons marmite vide l'ensemble M_0 de C^2 défini par

$$M_0 = \{(z_1, z_2) | z_2 = 0 \quad \text{et} \quad |z_1| \leqslant 1\} \cup \{(z_1, z_2) | |z_1| = 1 \quad \text{et} \quad z_2 \in [0, 1]\}.$$

Nous appellerons marmite pleine l'ensemble M_1 de $\mathbf{C}^2$ défini par

$$M_1 = \{(z_1, z_2) | |z_1| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad z_2 \in [0, 1]\}.$$

Définition 2.7. — *Soit Ω une variété analytique banachique, Ω' une partie de Ω. Nous dirons que Ω' est pseudoconvexe dans Ω si pour toute application analytique f d'un voisinage de M_1 dans Ω telle que Ω' contienne $f(M_0)$, Ω' contient $f(M_1)$.*

Définition 2.8. — *Nous dirons qu'un couple de prolongement (Ω_1, p, Ω_2) est pseudoconvexe s'il existe un couple de prolonge-*

ment (Ω_2, q, Ω_3) *tel que si* Ω *est une partie pseudoconvexe dans* Ω_3 *contenant* $q \circ p(\Omega_1)$, *alors* $\Omega = \Omega_3$.

Exemple 2.9. — Si (Ω_1, p, Ω_2) est un couple de prolongement de dimension finie et tel que Ω_2 soit un ouvert d'une variété de Stein, (Ω_1, p, Ω_2) est pseudoconvexe (cf. [6]).

On peut conjecturer que tout couple de prolongement est pseudoconvexe.

En ce qui concerne les couples de prolongement pseudoconvexes, nous allons exploiter l'étude faite en [9]. Adaptons une définition donnée là.

DÉFINITION 2.10. — *Soit* E *un espace localement convexe,* $\hat{E}$ *son complété. Nous dirons que* E *est intègre si pour toute application* f *analytique d'un voisinage du disque fermé* D *de* $\mathbf{C}$ *dans* E *telle que* $\hat{E}$ *contienne* $f(\partial D)$, E *contient* $f(D)$.

Exemple 2.11. — $l^p_+ = \bigcap_{p'>p} l^{p'}$ muni de la norme uniforme est intègre. Par contre l^p muni de la norme uniforme ne l'est pas (cf. [9]).

On a alors le

THÉORÈME 2.12. — *Soit* (Ω_1, p, Ω_2) *un couple de prolongement pseudoconvexe et séparable. Soit* E *un espace intègre. Alors toute application analytique* f *de* Ω_1 *dans* E *se factorise analytiquement à travers* p.

Démonstration. — Soit i l'injection de E dans $\hat{E}$ et soit (Ω_2, q, Ω_3) comme dans la définition 2.8. Alors d'après le théorème 2.6., il existe $\tilde{f}$ analytique de Ω_3 dans $\hat{E}$ telle que $\tilde{f} \circ q \circ p = i \circ f$.

Soit alors Ω l'image réciproque de E par $\tilde{f}$. Il résulte des hypothèses que Ω contient $q \circ p(\Omega_1)$. Nous allons maintenant voir que Ω est pseudoconvexe dans Ω_3. Soit g une application analytique d'un voisinage de M_1 dans Ω_3 telle que Ω contienne $g(M_0)$. Soit (z_1, z_2) un point de M_1; l'application g_{z_2} d'un voisinage du disque fermé de $\mathbf{C}$ dans $\hat{E}$ définie par $g_{z_2}(z) = g(z, z_2)$ est telle que E contient $g_{z_2}(\partial D)$. Comme E est intègre, E contient $g_{z_2}(D)$ et en particulier $g_{z_2}(z_1) = g(z_1, z_2)$.

Il s'ensuit que $\Omega = \Omega_3$ et que $\tilde{f}$ prend ses valeurs dans E. On peut donc considérer $\tilde{f} \circ q$ comme une application analytique de Ω_2 dans E qui vérifie

$$(\tilde{f} \circ q) \circ p = f. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque 2.13. — L'hypothèse de séparabilité peut être remplacée par une hypothèse d'étalement de Ω_2 au-dessus d'un espace de Banach : en effet, on peut alors montrer que les applications analytiques de Ω_1 dans un espace complet se factorisent analytiquement à travers p. Nous n'insistons pas sur ce genre de choses dans la mesure où c'est seulement en dimension finie qu'on dispose de théorèmes permettant d'affirmer qu'un couple de prolongement est pseudoconvexe.

Les techniques qui nous ont permis dans [9] de montrer que l^1 muni de la norme uniforme n'est pas intègre nous permettraient de montrer que, si (Ω_1, p, Ω_2) est un couple de prolongement, les applications analytiques de Ω_1 dans l^1 muni de la norme uniforme ne se factorisent pas nécessairement à travers p. Nous donnerons ici un autre exemple bien plus simple, dû à Douady :

Exemple 2.14. — Soit V un espace vectoriel complexe de dimension deux, soit t le point courant de V; soit V′ le dual de V et z le point courant de V′. Soit K un compact d'intérieur non vide de V et E l'espace des fonctions sur V de la forme $t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\langle z_i, t\rangle}$ où $z_1, \ldots, z_n$ sont des éléments non nuls de V′ et munissons E de la topologie de la convergence uniforme sur K. Considérons maintenant le couple de prolongement $(V' - \{0\}, i, V')$, où i désigne l'injection canonique. Soit f l'application analytique de $V' - \{0\}$ dans E qui à z associe la fonction : $t \longmapsto e^{\langle z, t\rangle}$. Les propriétés d'indépendance des exponentielles permettent d'affirmer que E ne contient pas les fonctions constantes, ce qui empêche f de se factoriser à travers i.

En guise d'application, nous pouvons maintenant montrer le

THÉORÈME 2.15. — *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines étalés au-dessus d'un espace de Banach et j un isomorphisme de variétés analytiques entre Ω_1 et Ω_2. Si $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$ désignent* *les enveloppes d'holomorphies de* Ω_1 *et* Ω_2, *il existe un isomorphisme* $\tilde{j}$ *de variétés analytiques entre* $\tilde{\Omega}_1$ *et* $\tilde{\Omega}_2$ *rendant le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[dd, "j"'] & & \tilde{\Omega}_1 \arrow[dl, "\tilde{\pi}_1"] \arrow[dd, "\tilde{j}"] \\
& A & \\
\Omega_2 \arrow[rr, "p_2"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & \tilde{\Omega}_2 \arrow[dl, "\tilde{\pi}_2"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

commutatif.

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\pi_2 \circ j$ se factorise analytiquement à travers p_1 d'après le théorème 2.3; soit donc π_2' de $\tilde{\Omega}_1$ dans A vérifiant $\pi_2' \circ p_1 = \pi_2 \circ j$. Nous allons montrer que π_2' est un étalement. Le fibré tangent à $\tilde{\Omega}_1$ peut être identifié, au moyen de $\tilde{\pi}_1$ au produit $\tilde{\Omega}_1 \times A$. Cette identification permet de considérer l'application linéaire tangente à π_2' comme une application analytique ρ de $\tilde{\Omega}_1$ dans l'espace de Banach L(A, A) des applications linéaires continues de A dans A. Mais comme $\pi_2 \circ j$ est un étalement, $\rho \circ p_1(x)$ est une application linéaire inversible pour tout x. Son inverse définit une application $(\rho \circ p_1)^{-1}$ analytique de Ω_1 dans L(A, A) qui se factorise à travers p d'après le théorème 2.3. Soit donc $\widetilde{(\rho \circ p_1)}^{-1}$ vérifiant $\widetilde{(\rho \circ p_1)}^{-1} \circ p_1 = (\rho \circ p_1)^{-1}$. Maintenant, il suffit de remarquer que la composition est une application bilinéaire continue donc analytique de $L(A, A) \times L(A, A)$ dans L(A, A): Il en résulte puisque

$$[\widetilde{(\rho \circ p_1)}^{-1}(p_1(x))] \circ [\rho(p_1(x))] = id_A$$

et

$$[\rho(p_1(x))] \circ [\widetilde{(\rho \circ p_1)}^{-1}(p_1(x))] = id_A$$

et par prolongement analytique, que $\rho(y)$ est inversible dans L(A, A) pour tout y et que, d'après le théorème des fonctions implicites (cf. [7]), π_2' est un étalement.

Maintenant, $p_1 \circ j^{-1}$ est une extension analytique de Ω_2 au-dessus de A. La propriété universelle de $\tilde{\Omega}_2$ nous assure qu'il existe $\tilde{j}$ de $\tilde{\Omega}_1$ dans $\tilde{\Omega}_2$ vérifiant $\tilde{j} \circ p_1 \circ j^{-1} = p_2$. Notons que $\tilde{j}$ est unique en vertu du principe du prolongement analytique, et du fait que p_1 est ouverte et que $\tilde{\Omega}_1$ est connexe. En faisant la même construction à partir de $j' = j^{-1}$, on obtient une application $\tilde{j}'$ de $\tilde{\Omega}_2$ dans $\tilde{\Omega}_1$. Il nous reste à montrer que $\tilde{j}'$ et $\tilde{j}$ sont inverses l'un de l'autre. Cela résulte, par prolongement analytique, des égalités suivantes :

$$(\tilde{j}' \circ \tilde{j})(p_1(x)) = p_1(x), \qquad (\tilde{j} \circ \tilde{j}')(p_2(x)) = p_2(x).$$

C.Q.F.D.

3. Applications hypoanalytiques.

Avant d'étudier le prolongement des applications hypoanalytiques, il nous faut rappeler quelques résultats énoncés dans [9] et [8]. Tout d'abord on a la

Proposition 3.1. — *Soit Ω une variété analytique banachique,* E *un espace vectoriel et τ_1 et τ_2 deux topologies localement convexes sur* E, *définissant la même famille de parties bornées. Pour qu'une application de Ω dans* E *soit analytique pour la topologie τ_1, il faut et il suffit qu'elle le soit pour la topologie τ_2.*

Soit maintenant X un espace topologique et F un sous-espace de $\mathcal{C}(X)$. On note

$$F^X = \{f \in C^X \mid \forall g \in F, \sum_{x \in X} |f(x)g(x)| < +\infty\}.$$

Les espaces F et F^X sont mis en dualité par la formule $\langle f, g\rangle = \sum_{x \in X} f(x)g(x)$. On appelle bornologie de la croissance sur F la bornologie définie par cette dualité. On dit qu'un sous-espace de $\mathcal{C}(X)$, muni d'une topologie est un espace de croissance si sa bornologie est la bornologie de la croissance. On a alors les :

Proposition 3.2. — *Soit* Ω *une variété analytique banachique. L'espace* $H(\Omega)$ *des fonctions analytiques sur* Ω, *muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est un espace de croissance.*

Proposition 3.3. — *Soit* Ω *une variété analytique banachique et soit* E *un espace de croissance. Pour qu'une application de* Ω *dans* E *soit analytique, il faut et il suffit qu'elle soit simplement analytique et localement bornée.*

Dans [8], en introduisant des espaces de germes de fonctions analytiques nous contournions la difficulté résultant du fait qu'une fonction analytique de deux variables banachiques ne correspond pas nécessairement à une application de l'un des espaces dans l'espace des fonctions analytiques sur l'autre.

En fait, dans certains cas, nous aurions pu éviter le recours aux espaces de germes en utilisant la notion d'application hypoanalytique. En effet, si on note $H^{-}(\Omega, E)$ l'espace des applications hypoanalytiques de Ω dans E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, on a la

Proposition 3.4. — *Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux variétés analytiques banachiques. La correspondance naturelle entre*

$$H^{-}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbf{C}) \quad \textit{et} \quad H^{-}(\Omega_1, H^{-}(\Omega_2, \mathbf{C}))$$

est bijective.

Démonstration. — Soit $f : x \longmapsto f_x$, un élément de $H^{-}(\Omega_1, H^{-}(\Omega_2, \mathbf{C}))$. Alors si $\tilde{f}$ est définie par $\tilde{f}(x, y) = f_x(y)$, il est facile de voir que $\tilde{f}$ est analytique en x et analytique en y. Elle est alors analytique (cf. [18]).

Réciproquement, soit g fonction analytique du couple (x, y) et posons $\tilde{g}(x) = g(x, .)$. Il nous faut montrer que $\tilde{g}$ est hypoanalytique. D'après les propositions 3.2 et 3.3, $\tilde{g}$ est G-analytique, Après quoi il est clair que $\tilde{g}$ est bornée sur les compacts. C.Q.F.D.

En écho aux propositions 3.1 et 3.3, nous avons maintenant

PROPOSITION 3.5. — *Soit* Ω *une variété analytique banachique, soient* E *un espace vectoriel et* τ_1 *et* τ_2 *deux topologies localement convexes sur* E, *définissant la même famille de parties bornées. Pour qu'une application* de Ω *dans* E *soit hypoanalytique pour la topologie* τ_1, *il faut et il suffit qu'elle le soit pour la topologie* τ_2.

Démonstration. — Il résulte de la proposition 3.1 que les applications G-analytiques sont les mêmes pour τ_1 et pour τ_2. Il est clair, d'autre part, que les applications bornées sur les compacts sont les mêmes pour τ_1 et τ_2. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.6. — *Soit* Ω *une variété analytique banachique et soit* E *un espace de croissance. Pour qu'une application de* Ω *dans* E *soit hypoanalytique, il faut et il suffit qu'elle soit simplement analytique et bornée sur les compacts.*

Démonstration. — Soit f une application de Ω dans E simplement analytique et bornée sur les compacts. Il résulte de la proposition 3.3. que f est G-analytique. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.7. — *Si* E *admet une suite fondamentale de bornés, toute application hypoanalytique de* Ω *dans* E *st analytique.*

Démonstration. — Soit x dans Ω et choisissons un domaine de carte U contenant x. En identifiant U à un ouvert d'un espace de Banach, on peut définir des boules B_n de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$. Notons D_n une suite fondamentale de bornés de E et soit f une application de Ω dans E. Supposons f non bornée au voisinage de x. Alors pour tout n, il existe un point x_n dans B_n dont l'image n'appartient pas à D_n. La suite x_n converge vers x, ce qui définit un compact sur lequel f n'est pas bornée. Par conséquent, pour que f soit localement bornée, il faut et il suffit que f soit bornée sur les compacts. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.8. — *Soit* f *une application hypoanalytique de* Ω *dans* E. *Alors* f *est continue.*

Démonstration. — Si p est une semi-norme sur E, notons E_p le séparé complété de E muni de la seule semi-norme p, et notons i l'application canonique de E dans E_p. L'application $i \circ f$ est hypoanalytique, donc analytique d'après la proposition 3.7 et continue. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.9. — *Soit* (Ω_1, p, Ω_2) *un couple de prolongement. Toute application hypoanalytique de* Ω_1 *dans un produit de droites se factorise hypoanalytiquement à travers* p.

Démonstration. — Elle est évidente dès qu'on remarque que toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions analytiques définit une application hypoanalytique à valeurs dans $\mathbf{C}^I$.

THÉORÈME 3.10. — *Soit* (Ω_1, p, Ω_2) *un couple de prolongement. Toute application hypoanalytique de* Ω_1 *dans un espace semi-complet* E *se factorise hypoanalytiquement à travers* p.

Démonstration. — Si E est complet, on utilise la même méthode que pour le théorème 2.6 à partir de la proposition 3.9. Pour en déduire le cas où E est semi-complet, il faut très légèrement raffiner; montrons d'abord le

LEMME 3.11. — *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbf{C}$, E *un espace semi-complet,* $\hat{E}$ *son complété. Soit* f *une application analytique de* Ω *dans* $\hat{E}$. *Si* $f^{-1}(E)$ *contient un ouvert,* $f^{-1}(E) = \Omega$.

Démonstration du lemme. — Soit Ω' l'intérieur de $f^{-1}(E)$. Nous montrerons que Ω' contient avec tout point x le plus grand disque centré en ce point et contenu dans Ω. En effet, on peut écrire $f(x+h) = \sum_{n\geq 0} f_n(x).h^n$. Les coefficients $f_n(x)$ se calculent à l'aide d'une intégrale de Cauchy sur un cercle qu'on peut choisir suffisamment petit pour qu'il soit contenu dans Ω'. En approchant l'intégrale par des sommes de Riemann, et du fait que E est semi-complet, on voit que $f_n(x)$ est dans E pour tout n. Mais dans le disque de convergence, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)h^n$ converge vers $f(x+h)$. A nouveau, parce que E est semi-complet, on conclut que $f(x+h)$ est dans E. C.Q.F.D.

Si $\tilde{f}$ est l'application de Ω_2 dans $\hat{E}$ telle que, si i désigne l'injection canonique de E dans Ê, on ait $i \circ f = \tilde{f} \circ p$, notons U l'intérieur de $\tilde{f}^{-1}(E)$. Il nous faut montrer que $U = \Omega_2$; or, nous savons que U est non vide puisqu'il contient $p(\Omega_1)$. Montrons donc que U est fermé. Soit x dans $\overline{U}$ et choisissons un voisinage V de x qu'on puisse identifier à une boule d'un espace de Banach. Soit y un point de $U \cap V$, et soit W une boule de l'espace de Banach telle que $y + W$ soit contenu dans $U \cap V$. Pour h dans W, notons Δ_h la droite joignant $y + h$ à $x + h$.

En appliquant le lemme 3.11. à $\tilde{f}|_{\Delta_h \cap V}$ on obtient que $\tilde{f}(x + h)$ appartient à E pour tout h dans W ce qui prouve que x appartient à U. C.Q.F.D.

Corollaire 3.12. — *Soit* (Ω_1, p, Ω_2) *un couple de prolongement et* E *un espace semi-complet admettant une suite fondamentale de parties bornées. Alors toute application analytique de* Ω_1 *dans* E *se factorise analytiquement à travers* p.

Démonstration. — Elle résulte trivialement de la proposition 3.7. et du théorème précédent. C.Q.F.D.

Exemples 3.13. — Le corollaire précédent concerne d'une part les duals forts d'espaces de Fréchet et d'autre part les espaces H(K, F) des germes d'applications analytiques au voisinage d'un compact K d'un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach F (cf. [17]).

Remarque 3.14. — Soit (Ω_1, p, Ω_2) un couple de prolongement, et E un espace localement convexe tel que toute application analytique de Ω_1 dans le complété Ê de E se factorise analytiquement à travers p. Si toutes les applications hypoanalytiques de Ω_1 dans E se factorisent hypoanalytiquement à travers p, alors toute application analytique de Ω_1 dans E se factorise analytiquement à travers p. On peut se demander si la réciproque est vraie :

Conjecture. — Si toutes les applications analytiques de Ω_1 dans E se factorisent analytiquement à travers p, alors toutes les applications hypoanalytiques de Ω_1 dans E se factorisent hypoanalytiquement à travers p.

Nous allons utiliser ce qui précède pour obtenir un résultat concernant le prolongement des applications à valeurs dans les variétés analytiques banachiques.

Nous ne sommes pas en mesure de démontrer, même dans le cas séparable, la

Conjecture. — Soit (Ω_1, p, Ω_2) un couple de prolongement et Ω un domaine d'holomorphie au-dessus d'un espace de Banach. Toute application analytique de Ω_1 dans Ω se factorise analytiquement à travers p.

Cela nous prive du plaisir de dire que l'enveloppe d'holomorphie définit un foncteur sur la catégorie dont les objets sont les domaines étalés au-dessus d'un espace de Banach et les flèches les applications analytiques; et du plaisir de dire que l'enveloppe d'holomorphie $\tilde{\Omega}$ de Ω représente le foncteur sur la catégorie dont les objets sont les domaines d'holomorphie étalés au-dessus d'un espace de Banach et les flèches les applications analytiques, foncteur qui à un domaine d'holomorphie S associe l'ensemble des applications analytiques de Ω dans S.

A titre de consolation, le lecteur friand de belles phrases aura, au paragraphe 4, deux foncteurs représentables à se mettre sous la dent.

Nous sommes, pour l'instant, réduits à considérer la

DÉFINITION 3.15. — *Soit Ω une variété analytique banachique. Nous dirons que Ω est un bon domaine d'holomorphie s'il existe un étalement π de Ω sur A pour lequel Ω soit un domaine d'holomorphie et tel que si d_π désigne la distance frontière associée à π sur Ω, pour toute suite x_n de points de Ω telle que $d_\pi(x_n)$ tende vers zéro et que $\pi(x_n)$ converge, il existe une fonction analytique f sur Ω non bornée sur la suite $\{x_n\}$.*

Remarques 3.16. — On peut conjecturer que tout domaine d'holomorphie est un bon domaine d'holomorphie.

— La définition ci-dessus est d'autant plus antipathique qu'on ne sait pas si on peut y remplacer « il existe un étalement π » par « pour tout étalement π ».

Toutefois on a la

PROPOSITION 3.17. — *Soit f un germe en zéro de fonction analytique sur A. Le domaine d'existence Ω de f, c'est-à-dire* *la composante connexe du point f dans le faisceau des fonctions analytiques sur* A, *est un bon domaine d'holomorphie.*

Démonstration. — Notons $\tilde{f}$ l'application de Ω dans l'espace H_0 des germes de fonctions analytiques à l'origine de A qui, à tout point x de Ω, associe le germe obtenu en transportant en $\pi(x)$ le germe de f en x par l'isomorphisme, puis en transplantant en zéro le germe obtenu. On peut démontrer (cf. [8], Prop. 5) que $\tilde{f}$ est analytique. Maintenant, si la suite (x_n) est telle que $d(x_n)$ tende vers zéro, le rayon de convergence de f en x_n, c'est-à-dire de $\tilde{f}(x_n)$, tend vers zéro. Il en résulte (cf. [8], Prop. 4) que $\tilde{f}(x_n)$ est non borné dans H_0. On peut alors trouver une forme linéaire continue l sur H_0 de façon que la fonction analytique $l \circ \tilde{f}$ soit non bornée sur la suite (x_n). C.Q.F.D.

THÉORÈME 3.18. — *Soit* (Ω_1, p, Ω_2) *un couple de prolongement et* Ω *un bon domaine d'holomorphie. Toute application analytique* f *de* Ω_1 *dans* Ω *se factorise analytiquement à travers* p.

Démonstration. — Soit π la projection de Ω sur A ayant les propriétés de la définition 3.15. Nous allons utiliser le fait que l'enveloppe $\tilde{\Omega}$ de Ω, qui est égale à Ω peut être considérée comme une composante connexe du faisceau introduit dans la démonstration du théorème 1.4. Nous allons définir une application $\tilde{f}$ de Ω_2 dans $\tilde{\Omega}$ de la façon suivante : l'application $\pi \circ f$ se factorise à travers p d'après le théorème 2.3. Soit $\widetilde{\pi \circ f}$ tel que $\widetilde{\pi \circ f} \circ p = \pi \circ f$. A x dans Ω_2, associons d'abord $\widetilde{\pi \circ f}(x)$. Si i est un élément de $I = \mathcal{O}(\Omega)$, considérons l'application $\tilde{\imath}$ de Ω dans H_0 introduite dans la démonstration précédente. D'après l'exemple 3.13., l'application $\tilde{\imath} \circ f$ se factorise à travers p. Soit s_i de Ω_2 dans H_0 et vérifiant $s_i \circ p = \tilde{\imath} \circ f$. Nous allons maintenant exprimer l'idée intuitive que si on transporte $s_i(x)$ en $\widetilde{\pi \circ f}(x)$, on obtient des germes qui se recollent.

Soient U un ouvert d'un espace de Banach E et F un autre espace de Banach. Soit H_0 l'espace des germes de fonctions analytiques à l'origine de F et donnons-nous deux applications analytiques f et s respectivement de U dans F et H_0. Notons K l'espace des germes d'applications analytiques définies au voisinage du zéro de E à valeurs dans H_0. Au couple (f, s) nous allons associer deux applications analytiques de U dans K. La première est celle qui à x associe le germe de s en x. La seconde est celle qui à x associe le germe de l'application qui à y suffisamment voisin de x associe le germe en $f(y) - f(x)$ d'un représentant de $s(x)$. Ces deux applications sont analytiques et nous disons que f et s sont compatibles en tous les points où elles prennent la même valeur. Cette définition ne dépendant manifestement pas de la façon dont U est réalisé comme ouvert de E, on peut la généraliser au cas où U est une variété. On voit alors que l'ensemble des points où f et s sont compatibles est analytique dans tout domaine de carte. Si nous appliquons cela à s_i et $\widetilde{\pi \circ f}$, on voit que l'ensemble des points où elles sont compatibles contient $p(\Omega_1)$, donc est égal à Ω_2. Considérons alors l'ensemble V des points x de Ω_2 tels qu'il existe ε de façon que chaque $s_i(x)$ admette un représentant défini dans la boule de rayon ε. Il résulte de la compatibilité de $\widetilde{\pi \circ f}$ avec les s_i que V est ouvert. Si V′ désigne la composante connexe de V contenant $p(\Omega_1)$, $\pi \circ f$ et la famille $(s_i)_{i \in I}$ définissent une application $\tilde{f}$ de V′ dans Ω qui est continue (et donc analytique) du fait de la compatibilité.

Il nous reste à montrer que V′ est fermé. Remarquons d'abord que pour x dans V′, $s_i(x)$ est le germe de i en $\tilde{f}(x)$: cela résulte par prolongement analytique du fait analogue dans le cas où x appartient à $p(\Omega_1)$. Soit x adhérent à V′ dans Ω_2 et soit x_n une suite de points de V′ tendant vers x. Si on pose $\tilde{f}(x_n) = y_n$, il résulte de l'hypothèse sur Ω que $d(y_n)$ reste minoré par un nombre strictement positif 2ε. On peut alors choisir un voisinage V de x dans Ω_2 dans lequel l'oscillation de $\widetilde{\pi \circ f}$ soit inférieure à ε. Soit x_p dans U. Les inégalités obtenues nous assurent qu'on peut choisir y dans le même feuillet que y_p et tel que $\pi(y) = \widetilde{\pi \circ f}(x)$. Par prolongement analytique $s_i(x)$ est le germe de i en y ce qui prouve que x est dans V′. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.19. — *Si Ω est le domaine d'existence d'une fonction analytique sur un Banach* A *et si* (Ω_1, p, Ω_2) *est un couple de prolongement, toute application analytique de* Ω_1 *dans* Ω *se factorise analytiquement à travers* p.

Démonstration. — Elle résulte du fait que tout domaine d'existence est un bon domaine d'holomorphie. C.Q.F.D.

4. Espaces normés.

Nous étudierons ici plus en détail le prolongement des applications analytiques à valeurs dans les espaces normés en liaison avec le problème suivant soulevé dans [8] : si E est un espace de Banach et F un sous-espace dense du précédent, est-ce que les fonctions analytiques au voisinage de F se prolongent à E tout entier? Avant d'établir le rapport entre ces deux questions, nous donnerons un exemple :

THÉORÈME 4.1. — *Notons* l^{∞}_{-} *la réunion des sous-espaces* l^p *de* l^{∞} *munie de la norme uniforme. Soit* (Ω_1, p, Ω_2) *un couple de prolongement. Alors toute application analytique* f *de* Ω_1 *dans* l^{∞}_{-} *se factorise analytiquement à travers* p.

Démonstration. — Soit i l'injection canonique de l^{∞}_{-} dans C_0. D'après le théorème 2.3., il existe une application analytique $\tilde{f}$ de Ω_2 dans C_0 telle que $i \circ f = \tilde{f} \circ p$. Il nous faut voir que $\tilde{f}$ prend ses valeurs dans l^{∞}_{-}. C'est le cas pour les points de $p(\Omega_1)$. Soit donc Ω l'intérieur de l'ensemble des points de Ω_2 où $\tilde{f}$ prend ses valeurs dans l^{∞}_{-}. Nous allons montrer que Ω est fermé. Nous aurons pour cela besoin des lemmes qui suivent.

LEMME 4.2. — *Soit* Γ *le tore de dimension* 1, *muni de la mesure de Haar* μ *de masse totale* 1. *Soient* f *continue réelle sur* Γ *et* ρ *appartenant à* $]0, 1[$. *Alors il existe une partie* A *de* Γ, *mesurable, telle que :*

$$\mu(A) = \rho \qquad et \qquad \inf_{x \in A} f(x) = \sup_{x \notin A} f(x).$$

Démonstration. — Notons r le plus petit des nombres s tels que $\mu(f^{-1}(]s, +\infty[))$ soit inférieur ou égal à ρ. Posons

$A' = f^{-1}(]r, +\infty[)$ et $A'' = f^{-1}(r)$. Vu la propriété de définition de r, on a $\mu(A') + \mu(A'') \geqslant \rho$ et $\mu(A') \leqslant \rho$. Posons pour θ dans $[0, 2\pi]$, $A''_\theta = A'' \cap [0, \theta]$ et $g(\theta) = \mu(A' \cup A''_\theta)$. On a $g(0) \leqslant \rho$ et $g(2\pi) \geqslant \rho$. Comme g est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2\pi}$, elle est continue, et on peut trouver θ_0 tel que $g(\theta_0) = \rho$. On peut alors poser $A = A' \cup A''_{\theta_0}$. C.Q.F.D.

LEMME 4.3. — *Soient* E *une partie mesurable de* Γ, *et* A_n *une suite de parties mesurables de* Γ *telles qu'il existe* ε *strictement positif tel que pour tout* n, $\mu(E) + \mu(A_n)$ *soit supérieur à* $1 + \varepsilon$. *Soit* u_n *une suite de nombres réels positifs telle que la série* $\Sigma\, u_n\chi_{A_n}$, *où* χ_{A_n} *est la fonction caractéristique de* A_n, *converge en tout point de* E. *Alors la série* $\Sigma\, u_n$ *converge.*

Démonstration. — Posons $E_p = \{x \in E \mid \Sigma\, u_n\chi_{A_n}(x) \leqslant \mu\}$. On peut choisir q de façon que pour tout n on ait $\mu(A_n) + \mu(E_q) > 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Maintenant posons

$$h(x) = \Sigma\, u_n\chi_{A_n}(x)\chi_{E_q}(x) = \Sigma\, u_n\chi_{A_n \cap E_q}(x),$$

et

$$h_n(x) = \sum_{m \leqslant n} u_m\chi_{A_m \cap E_q}(x).$$

La fonction h est intégrable et comme h_n tend vers h en croissant, on peut appliquer le théorème de la convergence croissante pour trouver que $\int h = \Sigma\, u_n\mu(A_n \cap E_q)$. Mais on peut écrire

$$\mu(A_n \cap E_q) = \mu(A_n) + \mu(E_q) - \mu(A_n \cup E_q) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte que $\Sigma \frac{\varepsilon}{2} u_n$ converge, donc que $\Sigma\, u_n$ converge.

C.Q.F.D.

LEMME 4.4. — *Soit* D *le disque unité de* $\mathbf{C}$, *et* f_n *une suite bornée de fonctions analytiques au voisinage de* $\overline{D}$. *Soit* E *l'ensemble des points* x *de* $\Gamma = \partial D$ *tels que la suite* $(f_n(x))$ *appartienne à* l^∞_-. *Si* E *n'est pas négligeable, la suite* $(f_n(0))$ *appartient à* l^∞_-.

Démonstration. — Nous supposons pour simplifier que: $\|f_n\|_D \leqslant 1$. Posons $E_p = \{x \in E | (f_n)x)) \in l^p\}$. Il est clair que E_p est mesurable et que, si E n'est pas négligeable, on peut choisir q et ε de façon que l'on ait $\mu(E_q) > 2\varepsilon$. Posons alors $\rho = 1 - \varepsilon$ et choisissons, à l'aide du lemme 4.2., des ensembles A_n de façon que: $\mu(A_n) = \rho$ et

$$\inf_{x \in A_n} |f_n^q| = \sup_{x \notin A_n} |f_n^q| = u_n.$$

On a les inégalités: $u_n \chi_{A_n} \leqslant |f_n^q| \leqslant \chi_{A_n} + u_n \chi_{\rho_{A_n}}$. Comme la série $\Sigma\ |f_n^q|$ converge sur E_q, la série $\Sigma\ u_n \chi_{A_n}$ converge aussi sur E_q. Il en résulte d'après le lemme 3.3. que la série $\Sigma\ u_n$ converge. Maintenant f_n^q est analytique et on peut lui appliquer la formule de Jensen:

$$\log |f_n^q(0)| \leqslant \int_\Gamma \log |f_n^q(x)| \leqslant \int_\Gamma \log (\chi_{A_n} + u_n \chi_{\rho_{A_n}}) = \varepsilon \log u_n.$$

On en déduit $|f_n^{q/\varepsilon}(0)| \leqslant u_n$ ce qui prouve que $(f_n(0))$ appartient à l^∞_-. C.Q.F.D.

Fin de la démonstration du théorème 4.1. — Soit x dans $\overline{\Omega}$. Soit U un voisinage de x dans Ω_2 qui soit isomorphe à une boule B d'un espace de Banach A de centre $x = 0$ et de rayon 3. Soit B′ la boule unité de A. Soit y dans $\Omega \cap B'$ et z dans la boule de centre y et de rayon 1. Nous allons voir que $\tilde{f}(z)$ est dans l^∞_-, ce qui prouvera que x est dans Ω. Posons $g_n(\lambda) = \tilde{f}_n(z + \lambda(y - z))$, λ décrivant un voisinage de $\overline{D}$ dans **C**. Nous sommes dans les conditions d'application du lemme 4.4. d'après lequel $(g_n(0)) = (\tilde{f}_n(z))$ est dans l^∞_-. C.Q.F.D.

Avant de donner des définitions, montrons la

Proposition 4.5. — *Soit* E *un espace normé et soit* f *une fonction analytique sur* E. *Soit* $\hat{E}$ *le complété de* E. *Alors* f *se prolonge analytiquement à un voisinage ouvert de* E *dans* $\hat{E}$ *et le domaine d'existence de ce prolongement est univalent.*

Démonstration. — Soit z un point de E et supposons que $f(z + h) = \sum_n f_n(h)$, où f_n est un polynôme homogène de degré n sur E. Il résulte du fait que f est bornée au voisinage de z et des formules de Cauchy qu'on a des inégalités de la forme $|f_n(h)| \leqslant \frac{M}{r^n} \|h\|^n$. Mais f_n se prolonge par continuité à $\hat{E}$ en un polynôme homogène de degré n, soit $\tilde{f}_n$. Par passage à la limite, on obtient pour h dans $\hat{E}$: $|\tilde{f}_n(h)| \leqslant \frac{M}{r^n} \|h\|^n$. Il en résulte que $\tilde{f}(z+h) = \Sigma\ \tilde{f}_n(h)$ converge dans la boule de rayon r. Notons $R(z)$ le rayon de la plus grande boule $\tilde{f}_n$ de centre z dans laquelle $\tilde{f}$ se prolonge analytiquement. Notons Ω la réunion pour z dans E des boules de centre z et de rayon $R(z)$. Les diverses définitions de $\tilde{f}$ se recollent puisqu'elles sont continues et qu'elles coïncident sur E qui est partout dense dans Ω. Nous allons montrer que Ω est le domaine d'existence de $\tilde{f}$. Soit $\tilde{\Omega}$ un espace étalé connexe au-dessus de $\hat{E}$ contenant Ω et dans lequel $\tilde{f}$ se prolonge. Soit x un point adhérent à Ω dans $\tilde{\Omega}$. Soit B une boule de centre x et de rayon 2ρ contenue dans $\tilde{\Omega}$. La boule de centre x et de rayon ρ rencontre un ouvert de Ω et contient donc un point y de E. La fonction $\tilde{f}$ se prolonge alors analytiquement dans la boule de centre y et de rayon ρ. Par conséquent, $R(y)$ est supérieur à ρ et x appartient à Ω. Comme $\tilde{\Omega}$ est connexe, Ω qui est ouvert, fermé et non vide, est égal à $\tilde{\Omega}$. C.Q.F.D.

Définition 4.6. — *Nous dirons que* E *est $\mathcal{O}$-complet si* E *est, dans* $\hat{E}$, *l'intersection des domaines d'existence des fonctions analytiques sur* E.

Définition 4.7. — *Nous dirons que* E *est paracomplet si pour tout couple de prolongement* (Ω_1, p, Ω_2), *toute application analytique de* Ω_1 *dans* E *se factorise analytiquement à travers* p.

Exemples 4.8. — Les espaces normés complets sont $\mathcal{O}$-complets et paracomplets. Nous ne connaissons pas d'autre exemple d'espace $\mathcal{O}$-complet. Par contre, d'après le théorème 4.1, l^∞_- est paracomplet.

Proposition 4.9. — *Toute intersection de sous-espaces paracomplets d'un espace de Banach est un espace paracomplet.*

Toute intersection de sous-espaces $\mathcal{O}$-complets d'un espace de Banach est un espace $\mathcal{O}$-complet.

Démonstration. — Elle résulte sans difficulté des définitions.

DÉFINITION 4.10. — *Nous appellerons enveloppe paracomplète* $\tilde{E}$ *de* E *l'intersection des sous-espaces paracomplets de* $\hat{E}$ *contenant* E *et enveloppe $\mathcal{O}$-complète* $\check{E}$ *de* E *l'intersection des sous-espaces $\mathcal{O}$-complets de* $\hat{E}$ *contenant* E.

Remarquons que cette définition est consistante puisque $\hat{E}$ est paracomplet et $\mathcal{O}$-complet.

THÉORÈME 4.11. — *Tout espace $\mathcal{O}$-complet est paracomplet. L'enveloppe $\mathcal{O}$-complète d'un espace normé contient son enveloppe paracomplète.*

Démonstration. — Soit E un espace $\mathcal{O}$-complet, $\hat{E}$ son complété et (Ω_1, p, Ω_2) un couple de prolongement. Soit f une application analytique de Ω_1 dans E. Soient U un domaine d'existence univalent contenant E dans $\hat{E}$, et i l'injection de E dans U. D'après le corollaire 3.19., il existe $\tilde{f}$ de Ω_2 dans U analytique telle que $p \circ \tilde{f} = f \circ i$. Il résulte de la définition 4.6. que $\tilde{f}$ prend en fait ses valeurs dans E et par conséquent, que E est paracomplet. C.Q.F.D.

Remarque 4.12. — Nous savons donc que tout espace complet est $\mathcal{O}$-complet et que tout espace $\mathcal{O}$-complet est paracomplet mais que tout espace paracomplet n'est pas complet. On est donc amené à envisager deux conjectures contradictoires :

Conjecture 1. — Tout espace paracomplet est $\mathcal{O}$-complet.

Conjecture 2. — Tout espace $\mathcal{O}$-complet est complet.

Nous allons voir maintenant quelques-uns des théorèmes de prolongement que l'on peut donner pour les couples $(E, \check{E})$ et $(E, \tilde{E})$.

THÉORÈME 4.13. — *Soient* A *un espace de Banach,* E *un espace normé et* i *l'injection de* E *dans son enveloppe $\mathcal{O}$-complète. Toute application analytique* f *de* E *dans* A *se factorise analytiquement à travers* i.

Démonstration. — En raisonnant exactement comme pour la Proposition 4.5. on peut montrer que le domaine d'existence Ω de f est univalent. Soit x hors de Ω dans $\hat{E}$ et soit x_n dans E tendant vers x. En utilisant le lemme 2.4., on montre qu'il existe une forme linéaire l sur A telle que $l \circ f$ ait le même rayon de convergence que f en x_n. Il en résulte que le domaine d'existence de $l \circ f$ ne contient pas x. Par suite, Ω contient $\check{E}$. C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.14. — *Soient* E *et* F *deux espaces normés, et* u *une application analytique de* E *dans* F. *Si* F *est* $\mathcal{O}$*-complet,* u *se factorise analytiquement à travers* $\check{E}$.

Démonstration. — Soit j l'injection de F dans son complété $\hat{F}$. L'application analytique $j \circ u$ se prolonge à $\check{E}$ d'après le théorème 4.13. Soit $\tilde{u}$ le prolongement et soit Ω un domaine d'existence contenant E. Il nous suffit de montrer que $\tilde{u}$ prend ses valeurs dans Ω. Posons $U = \tilde{u}^{-1}(\Omega)$. C'est un ouvert non vide de $\check{E}$. Pour montrer que U est fermé, choisissons un point x adhérent à U et une suite x_n de points de E tendant vers x. La suite $u(x_n)$ converge dans $\hat{F}$ vers $\tilde{u}(x)$. De plus si g est analytique sur Ω, $g(u(x_n))$ est bornée puisque $g \circ u$ se prolonge en x. Il s'ensuit que $\tilde{u}(x)$ n'est pas un point frontière de Ω, et par conséquent, que x est dans U. C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.15. — *Soient* E *et* F *deux espaces normés, et* u *une application analytique de* E *dans* F. *Si* F *est paracomplet,* u *se factorise analytiquement à travers* $\tilde{E}$.

Démonstration. — Soit G un espace compris entre E et $\tilde{E}$ et notons G^1 l'espace (vectoriel) des points y de $\tilde{E}$ tels qu'il existe un couple de prolongement (Ω_1, p, Ω_2), une application f de Ω_2 dans $\tilde{E}$, et un point x de Ω de façon que G contienne $f \circ p(\Omega_1)$ et que $f(x) = y$.

Notons i l'injection de E dans $\tilde{E}$ et j l'injection de F dans son complété $\hat{F}$. D'après les théorèmes 4.13. et 4.11., il existe une application $\tilde{u}$ de $\tilde{E}$ dans $\hat{F}$ vérifiant $\tilde{u} \circ i = j \circ u$. Il nous faut montrer que $\tilde{u}$ prend ses valeurs dans F. Soit G le plus grand sous-espace vectoriel de $\tilde{E}$ contenu dans $\tilde{u}^{-1}(F)$. Soit y dans G^1. Avec les notations ci-dessus, $\tilde{u} \circ f \circ p(\Omega_1)$ est contenu dans F. Il en résulte que $\tilde{u} \circ f(x) = \tilde{u}(y)$ est dans F^1. Mais F étant paracomplet, F est égal à F^1. Par conséquent, pour tout y dans G^1, $\tilde{u}(y)$ est dans F. G^1 est donc égal à G qui est donc paracomplet et par suite égal à $\tilde{E}$. C.Q.F.D.

Les deux théorèmes précédents se traduisent en langage savant de la façon suivante :

Notons C la catégorie des espaces normés et des applications analytiques, $\check{C}$ la sous-catégorie pleine des espaces $\mathcal{O}$-complets, $\tilde{C}$ la sous-catégorie pleine des espaces paracomplets, $\check{I}$ et $\tilde{I}$ les foncteurs d'inclusion correspondants. Si E est un objet de C, posons

$$E_{\vee} = \mathrm{Hom}_C(E, .) \circ \check{I} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{E} = \mathrm{Hom}_C(E, .) \circ \tilde{I}.$$

On a alors les

Corollaire 4.16. — *Le passage à l'enveloppe $\mathcal{O}$-complète définit un foncteur de* C *dans* $\check{C}$, *adjoint du foncteur* $\check{I}$. *Si* E *est un objet de* C, $\check{E}$ *représente le foncteur* $E_{\vee}$.

Corollaire 4.17. — *Le passage à l'enveloppe paracomplète définit un foncteur de* C *dans* $\tilde{C}$, *adjoint du foncteur* $\tilde{I}$. *Si* E *est un objet de* C, $\tilde{E}$ *représente le foncteur* $\underset{\sim}{E}$.

5. Questions diverses.

Pour commencer, disons quelques mots de la pseudoconvexité. L'étude de la pseudoconvexité pour les domaines étalés a déjà été abordée, par exemple, par Cœuré. Mais la définition introduite dans [2] dépendait, en apparence, de l'étalement. Nous allons voir que la notion en question correspond, en fait, à une propriété intrinsèque de la variété analytique banachique concernée. Donnons pour cela les définitions : soit Ω une variété banachique :

Définition 5.1. — *Nous dirons que* Ω *est fonctionnellement pseudoconvexe si l'enveloppe par les fonctions plurisousharmo-*

niques continues (cf. [13] *et* [14]) *d'un compact de* Ω *est un compact de* Ω.

DÉFINITION 5.2. — *Nous dirons que* Ω *est géométriquement pseudoconvexe si toute application analytique d'un voisinage de la marmite vide* (cf. Définition 2.7.) *dans* Ω *se prolonge analytiquement à la marmite pleine.*

DÉFINITION 5.3. ([2]). — *Nous dirons qu'un domaine étalé* Ω *est pseudoconvexe s'il possède l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

(i) $-\log d_\Omega$ *est plurisousharmonique dans* Ω.

(ii) *Pour tout compact* K *dans* Ω, *si on pose*

$$\hat{K}^p = \{x \in \Omega \mid \forall u \in \mathcal{C}(\Omega),\ u \text{ plurisousharmonique} \Longrightarrow u(x) \leqslant \operatorname{Sup}_K u\}$$

alors $d(\hat{K}^p)$ est non nul.

Nous pouvons maintenant démontrer le

THÉORÈME 5.4. — *Pour qu'un domaine étalé soit pseudoconvexe, il faut et il suffit qu'il soit géométriquement pseudoconvexe et il suffit qu'il soit fonctionnellement pseudoconvexe.*

Démonstration. — Il est clair que si Ω est fonctionnellement pseudoconvexe, il vérifie la condition (ii) de la définition 5.3.

Montrons maintenant que si Ω est géométriquement pseudoconvexe, il est pseudoconvexe.

Mais si Ω est géométriquement pseudoconvexe, sa restriction Ω_E au-dessus de chaque espace vectoriel de dimension finie E est pseudoconvexe et si d_E désigne la distance frontière dans la direction de E, la fonction $-\log d_E$ est plurisousharmonique dans Ω. Il ne reste qu'à constater que $-\log d_\Omega$ est le sup de la famille des $-\log d_E$ pour conclure. Il nous reste à montrer que si Ω est pseudoconvexe et si f est une application analytique d'un voisinage de M_0 dans Ω, f se prolonge à M_1 tout entier. Remarquons d'abord que $f(M_0)$ est un compact de Ω et qu'on peut donc choisir ε vérifiant $0 < \varepsilon < d(f(M_0))$. Remarquons ensuite que $\pi \circ f$ se prolonge à M_1 d'après le théorème 2.3. Soit $\widetilde{\pi \circ f}$ le prolongement en question. L'application $\widetilde{\pi \circ f}$ est uniformément continue sur le compact M_1. On peut donc choisir $\eta > 0$ de façon que

$$|x - y| < 2\eta \Longrightarrow \|\widetilde{\pi \circ f}(x) - \widetilde{\pi \circ f}(y)\| < \varepsilon.$$

Maintenant notons M_t la marmite remplie jusqu'au niveau t inclus, et supposons que f se prolonge à valeurs dans Ω au voisinage de M_t et soit f_t le prolongement en question. La fonction $-\log d_\Omega \circ f_t$ étant plurisousharmonique, on a l'inégalité $0 < \varepsilon < d(f_t(M_t))$. Si x est dans M_t, il résulte de ce qui précède et de la définition de η que f_t se prolonge analytiquement dans la boule de centre x et de rayon η et que ces prolongements se recollent. Si bien que f_t se prolonge analytiquement à $M_{t+\eta}$. C.Q.F.D.

Corollaire 5.5. — *Tout domaine d'holomorphie est géométriquement pseudoconvexe.*

Démonstration. — Elle résulte du théorème précédent par comparaison du théorème 1.6. et de la condition (ii) de la définition 5.3. C.Q.F.D.

Remarque 5.6. — Lorsque la norme est suffisamment régulière, en particulier dans le cas hilbertien, on peut montrer, par la méthode classique en dimension finie, que tout domaine étalé pseudoconvexe est fonctionnellement pseudoconvexe. Nous ne démontrons pas ce résultat puisque le Corollaire 5.5. nous assure une propriété intrinsèque des domaines d'holomorphie.

* * *

Soit Ω une variété analytique banachique. Le problème posé par Cœuré dans [2] est le suivant : trouver une topologie naturelle sur l'espace $\mathcal{O}(\Omega)$ des fonctions analytiques sur Ω, de façon que si (Ω_1, p, Ω_2) est un couple de prolongement, p^* soit un isomorphisme topologique de $\mathcal{O}(\Omega_2)$ sur $\mathcal{O}(\Omega_1)$. On peut préciser ce qu'on entend par topologie naturelle en employant le langage des foncteurs : on peut considérer $\mathcal{O} : \Omega \longmapsto \mathcal{O}(\Omega)$, comme un foncteur de la catégorie V des variétés analytiques banachiques dans la catégorie des espaces vectoriels E. Si on note E_{top} la catégorie des espaces vectoriels topologiques et applications linéaires, et i le foncteur d'oubli de E_{top} dans E, on cherche un foncteur $\mathcal{O}_{top}$ de V dans E_{top} vérifiant $\mathcal{O} = i \circ \mathcal{O}_{top}$ et transformant toute flèche de prolongement en un isomorphisme. Dans la suite, nous noterons $\mathcal{O}_b(\Omega)$ l'espace localement convexe obtenu de la façon suivante : si on note $\mathcal{O}_c(\Omega)$ l'espace obtenu en munissant $\mathcal{O}(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, $\mathcal{O}_b(\Omega)$ s'obtient en munissant $\mathcal{O}(\Omega)$ de la topologie localement convexe la plus fine admettant les mêmes bornés que $\mathcal{O}_c(\Omega)$. Cette topologie, signalée par Dineen [3], a fait l'objet d'une surveillance discrète dans [8]. Nous allons voir que $\mathcal{O}_b$ fournit une solution au problème posé :

PROPOSITION 5.7. — *$\mathcal{O}_b$ définit un foncteur de* V *dans* E_{top}.

Démonstration. — Soit $u : \Omega_1 \to \Omega_2$ un morphisme dans V. Il nous faut montrer que $u^* : \mathcal{O}_b(\Omega_2) \to \mathcal{O}_b(\Omega_1)$ est continu. Comme $\mathcal{O}_b(\Omega_2)$ est bornologique, il nous suffit de montrer que u^* est borné.

Soit donc $(f_i)_{i \in I}$ une famille bornée de fonctions sur Ω_2. Cela signifie que pour tout compact K dans Ω_2, il existe une constante M(K) telle que pour tout i, on ait $\|f_i\|_K \leqslant M(K)$. Si maintenant L est un compact de Ω_1, posons $N(L) = M(u(L))$. On a alors $\|u^*(f_i)\|_L \leqslant N(L)$ ce qui prouve que la famille $(u^*(f_i))_{i \in I}$ est bornée dans $\mathcal{O}_b(\Omega_1)$.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 5.8. — *Si (Ω_1, p, Ω_2) est un couple de prolongement, l'application p^* de $\mathcal{O}_b(\Omega_2)$ dans $\mathcal{O}_b(\Omega_1)$ est un isomorphisme topologique.*

Démonstration. — Il nous suffit, d'après ce qui précède, de montrer que l'image réciproque par p^* d'un borné de $\mathcal{O}_b(\Omega_1)$ est un borné de $\mathcal{O}_b(\Omega_2)$, ou encore que l'image réciproque par p^* d'une suite bornée de $\mathcal{O}_b(\Omega_1)$ est une suite bornée de $\mathcal{O}_b(\Omega_2)$. Soit donc $(f_n)_{n \in N}$ une suite bornée dans $\mathcal{O}_b(\Omega_1)$. En posant $f = (f_n)_{n \in N}$, on définit une application analytique de Ω_1 dans l^∞ puisque l^∞ est un espace de croissance (cf. [9]).

D'après le théorème 2.3., f se factorise à travers p et si

$\tilde{f}$ est le prolongement vérifiant $\tilde{f} \circ p = f$, on a, bien entendu, $\tilde{f} = (\tilde{f}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où $\tilde{f}_n$ vérifie $\tilde{f}_n \circ p = f$. L'application $\tilde{f}$ est analytique, donc bornée sur les compacts, ce qui prouve que la suite $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathcal{O}_b(\Omega_2)$. C.Q.F.D.

Nous allons utiliser ce résultat pour montrer le

THÉORÈME 5.9. — *Soient* (Ω_1, p, Ω_2) *et* $(\Omega'_1, p', \Omega'_2)$ *deux couples de prolongement. Alors* $(\Omega_1 \times \Omega'_1, (p, p'), \Omega_2 \times \Omega'_2)$ *est un couple de prolongement.*

Démonstration. — Soit f une fonction analytique sur $\Omega_1 \times \Omega'_1$. D'après la proposition 3.4., f s'identifie à une application hypoanalytique de Ω_1 dans $\mathcal{O}(\Omega'_1)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, ou, ce qui revient au même d'après la proposition 3.5., dans $\mathcal{O}_b(\Omega'_1)$. La fonction f s'identifie donc d'après le théorème 5.8. à une application hypoanalytique de Ω_1 dans $\mathcal{O}_b(\Omega'_2)$. Mais d'après le théorème 3.10., cette application se factorise hypoanalytiquement à travers p. On obtient ainsi une application hypoanalytique de Ω'_1 dans $\mathcal{O}_b(\Omega'_2)$ qui définit d'après la proposition 3.4. une fonction analytique $\tilde{f}$ sur $\Omega_2 \times \Omega'_2$ et on vérifie sans difficulté que $\tilde{f} \circ (p, p') = f$. C.Q.F.D.

L'union faisant la force, cette topologie rendrait des services bien plus grands si elle coïncidait avec la topologie de Nachbin (cf. [16]); en particulier, il serait alors facile de reconstruire l'enveloppe d'holomorphie comme spectre de $\mathcal{O}_b(\Omega)$ et de résoudre plusieurs des problèmes que nous laissons ici ouverts. Pour l'instant, on dispose seulement des résultats partiels de Dineen (cf. [5]) qui sont d'ailleurs tantôt positifs tantôt négatifs.

Pour terminer, nous allons dire quelques mots de l'enveloppe d'holomorphie envisagée sous l'angle des types d'holomorphie (cf. [16] et [3]).

Soient E et F deux espaces de Banach et τ un type d'holomorphie d'applications de E dans F. Si Ω est un espace étalé au-dessus de E, on peut construire le domaine $\tilde{\Omega}^\tau$ d'existence simultané des applications analytiques de Ω dans F qui sont du type τ. La question qui se pose alors est la suivante : les applications ainsi obtenues par prolongement analytique à partir d'applications de type τ dans Ω sont-elles de type τ dans $\tilde{\Omega}^\tau$? Une réponse est donnée dans [20] dans un cas très particulier. Nous nous contenterons ici de démontrer le

THÉORÈME 5.10. — *Soit* Ω *un domaine étalé au-dessus d'un espace de Banach* E, *soit* $(\tilde{\Omega}, p)$ *son enveloppe d'holomorphie et soit* F *un autre espace de Banach. Soit* τ *un type d'holomorphie de* E *dans* F *et soit* f *une application analytique de* $\tilde{\Omega}$ *dans* F. *Pour que* f *soit de type* τ *il faut et il suffit que* $f \circ p$ *le soit.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{L}^m_\tau$ l'espace des applications polynomiales homogènes de degré m de type τ de E dans F. Le $m^{\text{ème}}$ coefficient de la série de Taylor de $f \circ p$ en x est un élément de $\mathfrak{L}^m_\tau$ qui dépend analytiquement de x (cf. [16]). Notons δ^m cette application analytique de Ω dans $\mathfrak{L}^m_\tau$. D'après le théorème 2.3., elle se factorise à travers p. Soit donc $\tilde{\delta}^m$ tel que $\delta^m = \tilde{\delta}^m \circ p$. Il est clair que $\tilde{\delta}^m$ associe à tout x dans $\tilde{\Omega}$ le $m^{\text{ème}}$ coefficient de la série de Taylor de f en x. Il nous reste à prouver que pour tout x dans $\tilde{\Omega}$, la suite $\|\tilde{\delta}^m(x)\|_\tau$ est dans l'espace h des germes de fonctions holomorphes à l'origine de C. Introduisons alors le sous-espace $\mathfrak{L}^*_\tau(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ de $\prod_0^\infty \mathfrak{L}^m_\tau(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ des suites λ_n vérifiant $(\|\lambda_n\|_\tau)_{n\in\mathbf{N}} \in h'$ et munissons $\mathfrak{L}^*_\tau(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ de la topologie localement convexe la moins fine rendant continue l'application $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} \longmapsto (\|\lambda_n\|_\tau)_{n\in\mathbf{N}} = \||\lambda|\|$. On a les

LEMME 5.11. — $\mathfrak{L}^*_\tau(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est semi-complet et admet une suite fondamentale de parties bornées.*

Démonstration. — Soit u^n une suite dans $\mathfrak{L}^*_\tau(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, de Cauchy. Alors u^n converge dans $\prod_0^\infty \mathfrak{L}^m_\tau(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ vers un élément u. Mais la suite $\||u^n|\|$ est de Cauchy dans h d'où il résulte que u est dans $\mathfrak{L}^*_\tau(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et que u^n converge vers u. D'autre part, $\mathfrak{L}^*_\tau(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ admet une suite fondamentale de bornés, obtenue en prenant l'image réciproque par l'application $\||\ |\|$ d'une suite fondamentale de bornés de h. C.Q.F.D.

Remarquons qu'on aurait pu montrer que $\mathfrak{L}_\tau^*(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est complet, mais nous n'en avons pas besoin.

LEMME 5.12. — *L'application de* Ω *dans* $\mathfrak{L}_\tau^*(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *qui à* x *associe* $\delta f(x) = (\delta^m f(x))_{m\in\mathbf{N}}$, *est analytique.*

Démonstration. — D'après Nachbin ([16], § 9 Lemme 1), l'application δf est localement bornée. Toujours d'après Nachbin ([16], § 10 Prop. 2), chaque composante de δf est analytique.

Remarquons maintenant que si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dans h et si $u^p = (u_n^p)_{n\in\mathbf{N}}$ est défini par $u_n^p = u_n$ pour $n \leqslant p$ et $u_n^p = 0$ pour $n > p$, alors u^p converge vers u dans h. Il résulte de cette remarque et du théorème de Hahn-Banach que le dual de $\mathfrak{L}_\tau^*(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est le sous-espace de $\prod_0^\infty (\mathfrak{L}_\tau^m(\mathrm{E}, \mathrm{F}))'$ formé des suites $w = (w_m)_{m\in\mathbf{N}}$ telles que la suite $(\|w_m\|)_{m\in\mathbf{N}}$ soit dans h'. Cette caractérisation du dual permet de montrer sans difficulté que δf est analytique. C.Q.F.D.

Fin de la démonstration du théorème 5.10. — D'après le corollaire 3.12. l'application δf se factorise analytiquement à travers p. Il en résulte que la suite $\|\tilde{\delta}^m(x)\|_\tau$ est dans h pour tout point x de $\tilde{\Omega}$. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. ALEXANDER, Thèse (Multigraphie), Berkeley, (1968).

[2] G. COEURE, Thèse, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 20, 1, (1969), 361-432.

[3] S. DINEEN, Holomorphy types on a Banach space (à paraître aux St. Math.).

[4] S. DINEEN, The Cartan-Thullen Theorem for Banach Spaces (Paru en 1970 aux Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa).

[5] S. DINEEN, *Comptes Rendus*, 271, série A, (1970), 643-644.

[6] F. DOCQUIER et H. GRAUERT, *Math. Ann.*, 140 (1960), 94-123.

[7] A. DOUADY, Thèse, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 16, fasc. 1, (1966), 1-95.

[8] A. HIRSCHOWITZ, Bornologie des espaces de fonctions analytiques en dimension infinie, Séminaire P. Lelong (1969/1970), Springer-Verlag.

[9] A. HIRSCHOWITZ, Sur les suites de fonctions analytiques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 20, fasc. 2, (1971).

[10] A. HIRSCHOWITZ, *Comptes Rendus*, 270, série A, (1970), 1736-1737.

[11] A. Hirschowitz, Diverses notions d'ouverts d'analyticité en dimension infinie, Séminaire P. Lelong (1969/1970), Springer-Verlag.
[12] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, Princeton, N. J., (1966).
[13] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques, Séminaire P. Lelong (1967/1968), Springer-Verlag.
[14] P. Lelong, *Comptes Rendus*, 267, série A, (1968), 916-918.
[15] B. Malgrange, Lectures on the Theory of Functions of Several Complex Variables, Bombay, Tata Institute of Fundamental Research, (1958).
[16] L. Nachbin, Topology on Spaces of Holomorphic Mappings, Berlin, Springer-Verlag, (1969).
[17] L. Nachbin, Concerning Spaces of Holomorphic Mappings (Notes multigraphiées), Rutgers University, (1970).
[18] Ph. Noverraz, Thèse, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 19, 2, (1969), 419-493.
[19] H. H. Schaefer, Topological Vector Spaces, The Macmillan Co., New York, (1966).
[20] Séminaire Baryton : Fonctions A-analytiques, Prépublication, Secrétariat mathématique, Nice, (1970).

Manuscrit reçu le 19 avril 1971.
accepté par J. Dieudonné

André Hirschowitz,
Service de Mathématiques,
Université de Nice,
Parc Valrose,
06-Nice.