ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL HERVÉ
ROSE-MARIE HERVÉ

Les fonctions surharmoniques dans l'axiomatique de M. Brelot associées à un opérateur elliptique dégénéré

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 2 (1972), p. 131-145
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_131_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 131-145.

LES FONCTIONS SURHARMONIQUES DANS L'AXIOMATIQUE DE M. BRELOT ASSOCIÉES A UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉ

par Rose-Marie et Michel HERVÉ

Cet article fait suite aux travaux de J. M. Bony sur les opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel [3] et s'intéresse essentiellement à l'axiomatique de M. Brelot associée à un opérateur elliptique dégénéré $Lu = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 u + Yu + au$, où $X_1, \ldots, X_r$ et Y sont des champs de vecteurs de classe C^∞ définis sur un ouvert connexe $\subset R^n$, $a \in C^\infty$ et l'algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_r$ est de rang n.

Les principaux résultats démontrés ici sont :

1) Les fonctions surharmoniques u d'une telle axiomatique sont localement intégrables (théorème 3) et sont caractérisées par $Lu \leqslant 0$ (théorème 5);

2) Les potentiels à support ponctuel donné sont proportionnels (théorème 4).

Le premier résultat se démontre par étapes : on commence par étendre aux fonctions surharmoniques localement intégrables la propriété $Lu \leqslant 0$, vraie pour les fonctions surharmoniques de classe C^2; la propriété d'intégrabilité locale des fonctions surharmoniques résulte d'une inégalité du type $u(x) \geqslant C^{ste} \int_K u(y)\, dy$, démontrée par J. M. Bony pour les fonctions harmoniques $\geqslant 0$ et qu'on étend aux fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ localement intégrables. Enfin la surharmonicité des solutions de $Lu \leqslant 0$ et l'unicité des potentiels à support ponctuel se démontrent en utilisant notamment la fonction de Green construite par J. M. Bony dans certains ouverts assez réguliers formant une base.

Partant maintenant d'une axiomatique de M. Brelot contenant « suffisamment » de fonctions harmoniques de classe C^∞, on peut lui associer un opérateur du type précédent défini sur un ouvert dense [3]. Du résultat 2 on peut alors déduire, pour de telles axiomatiques, l'unicité des potentiels de support y, pour y appartenant à un ouvert dense.

Notations. — Sur un ouvert $\Omega_0 \subset R^n$, on se donne un opérateur elliptique (1) dégénéré de la forme

$$Lu = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 u + Yu + au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u'_{x_i} + au,$$

où $X_k(x) = (\alpha_1^k(x), \ldots, \alpha_n^k(x))$, $k = 1, \ldots, r$, et Y sont des champs de vecteurs de classe $C^\infty(\Omega_0)$ et a une fonction $\in C^\infty(\Omega_0)$.

Soit $L^* u = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 u + Y' u + a' u$ l'adjoint de L(2); $Y + Y'$ est une combinaison linéaire des X_k, $k = 1, \ldots, r$, à coefficients $\in C^\infty(\Omega_0)$, si bien que l'algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_r$ et Y, soit $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$, coïncide avec $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y')$.

On suppose que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ est de rang n en tout point $\in \Omega_0$. Par suite l'opérateur L est non totalement dégénéré, c'est-à-dire qu'en chaque point $x \in \Omega_0$, la matrice $(a_{ij}(x))$ est $\neq 0$ ou encore que l'un au moins des vecteurs $X_k(x)$, $k = 1, \ldots, r$, est $\neq 0$. On en déduit un changement local de fonction inconnue (cf. proposition 5.1, [2]), permettant de se ramener au cas où $a < 0$ et $a' < 0$ pour traiter certaines questions locales telles que : vérifier les axiomes 2 et 3 de M. Brelot; montrer que toute fonction surharmonique u est localement intégrable et définit une distribution $Lu \leqslant 0$.

(1) L'ellipticité résulte de $a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_i^k \alpha_j^k$, d'où $\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{k=1}^{r} (X_k \cdot \xi)^2$, $\forall \xi \in R^n$.

(2) Tel que $\langle LS, \varphi\rangle = \langle S, L^*\varphi\rangle$ $\forall S \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$.

Rappel des résultats utilisés.

1. COROLLAIRE 3.1, [2]. — *Si* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ *est de rang* n *en tout point* $\in \Omega_0$ *et* $a \leqslant 0$, *une fonction* $u \in C^2(\Omega_0)$ *et vérifiant* $Lu \geqslant 0$ *dans* Ω_0 *ne peut atteindre son maximum positif en un point sans être constante sur la composante connexe de* Ω_0 *contenant ce point.*

2. THÉORÈME de Hörmander [5]. — *Si* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ *est de rang* n *en tout point,* L *est hypoelliptique, ce qui signifie que toute distribution* u *telle que* Lu *soit de classe* C^∞ *est elle-même de classe* C^∞.

3. THÉORÈME 5.2, [2]. — *On suppose* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ *de rang* n *en tout point et* $a(x) \leqslant a_0 < 0$. *Soit* ω *un ouvert borné tel que* $\overline{\omega} \subset \Omega_0$ *et qu'en tout point* $x \in \partial\omega$, *il existe une normale* ν *à* $\overline{\omega}$ *avec* $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\nu_i\nu_j > 0$ (*un tel ouvert sera dit très régulier*). *Alors, pour toute fonction* f *continue sur* $\overline{\omega}$ *et toute fonction* φ *continue sur* $\partial\omega$, *il existe une fonction unique* $u \in C(\overline{\omega})$ *telle que* $\begin{cases} Lu = -f & \text{au sens des distributions dans } \omega, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$
et si f *et* φ *sont* $\geqslant 0$, u *l'est aussi.*

On en déduit l'existence d'une base d'ouverts réguliers (axiome 2) pour le faisceau $\mathcal{H}_0$ des solutions continues de $Lu = 0$ (Corollaire 5.2, [2]).

4. On reprend les hypothèses et les notations du théorème 5.2; on fait en outre les mêmes hypothèses pour l'opérateur adjoint L^*. On appelle opérateur de Green dans ω, et on note G, l'opérateur positif de $C(\overline{\omega})$ dans $C(\overline{\omega})$ qui à f fait correspondre la solution $u = Gf$ de $Lu = -f$ dans ω, $u = 0$ sur $\partial\omega$.

THÉORÈME 6.1, [2]. — L *admet dans* ω *une fonction de Green* $g(x, y) \geqslant 0$, *intégrable dans* $\omega \times \omega$, *définie et continue hors de la diagonale, telle que* $\forall f \in C(\overline{\omega})$, $Gf(x) = \int_\omega g(x, y)f(y)\, dy$. *De plus* $g(x, y) = g^*(y, x)$ *en désignant par* g^* *la fonction de Green de* L^*.

5. Proposition 7.1, [2]. — *Sous les hypothèses du théorème* 5.2, *soit* u *une fonction positive* $\in C^2(\overline{\omega})$, *vérifiant* $Lu \leqslant 0$ *dans* ω(³). *Pour* $\beta > 0$, *soit* g_β *la fonction de Green dans* ω *relative à l'opérateur* $L - \beta$. *On a alors*

$$u(x) \geqslant \beta \int_\omega g_\beta(x, y)u(y)\, dy.$$

6. Théorème 8.2, [2]. — *Si* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ *est de rang* n *en tout point* $\in \Omega_0$, $\mathcal{H}_0$ *vérifie l'axiome de convergence* 3 *de M. Brelot.*

On peut donc appliquer la théorie axiomatique de M. Brelot, avec les axiomes 1, 2, 3, dans tout ouvert connexe $\Omega \subset \Omega_0$ où il existe un potentiel > 0. Si a est négatif, sans être $\equiv 0$, dans Ω, cette existence est assurée, car alors les constantes > 0 sont surharmoniques sans être harmoniques dans Ω.

On déduit facilement du principe du maximum (rappel 1), pour toute fonction u de classe C^2 sur un ouvert $\omega \subset \Omega_0$: u surharmonique sur ω équivaut à $Lu \leqslant 0$ sur ω (cf. par exemple le th. 4.2, [1]).

1. Signe de Lu pour u surharmonique localement intégrable.

Définition. — *Étant donné un ouvert* $\omega \subset \Omega_0$, *soit* $A(\omega)$ *l'adhérence de l'ensemble des fonctions surharmoniques* $\in C^2(\omega)$ *dans* $\mathcal{L}^1_{loc}(\omega)$ *muni des semi-normes* $u \longmapsto \int_K |u|\, dx$, K *compact* $\subset \omega$.

Lemme 1. — *Si* $u \in A(\omega)$, *alors* $Lu \leqslant 0$ *dans* ω *au sens des distributions.*

En effet, $Lu \leqslant 0$ équivaut à $\int_\omega uL^*\varphi\, dx \leqslant 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^+(\omega)$, et $u_n \to u$ dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\omega)$ entraîne $\int_\omega uL^*\varphi\, dx = \lim \int_\omega u_nL^*\varphi\, dx$.

Les trois lemmes suivants ont pour but de montrer que, si des fonctions surharmoniques en nombre fini appartiennent à $C^2(\omega)$, leur enveloppe inférieure appartient à $A(\omega)$. On suppose $a \leqslant 0$ dans les lemmes 2 à 5.

(³) L'énoncé de la proposition 7.1 suppose $Lu = 0$, mais la démonstration est en fait valable pour $Lu \leqslant 0$.

Lemme 2. — *Soient* u *et* v *surharmoniques* $\in C^2(\omega)$. *Si* φ *appartient à* $C^2(R)$, *est concave*, $|\varphi'| \leqslant 1$ *et* $\varphi(0) = 0$, *on a aussi* $w = u + v + \varphi \circ (u - v)$ *surharmonique* $\in C^2(\omega)$.

Il suffit de vérifier $Lw \leqslant 0$ sur ω. On trouve

$$\begin{aligned} Lw = \varphi'' \circ (u - v) \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial(u - v)}{\partial x_i} \frac{\partial(u - v)}{\partial x_j} \\ + [1 + \varphi' \circ (u - v)]Lu + [1 - \varphi' \circ (u - v)]Lv \\ + a[\varphi \circ (u - v) - (u - v)\varphi' \circ (u - v)]. \end{aligned}$$

Le premier terme est $\leqslant 0$ car φ'' est $\leqslant 0$, les deux termes suivants aussi car $|\varphi'| \leqslant 1$; enfin le dernier terme est $\leqslant 0$ car $\varphi(t) - t\varphi'(t)$ est l'ordonnée à l'origine d'une tangente au graphe de φ donc $\geqslant 0$ grâce à $\varphi(0) = 0$.

Lemme 3. — *Soient* u *et* $v \in A(\omega)$. Si φ *satisfait aux hypothèses du lemme* 2, $u + v + \varphi \circ (u - v) \in A(\omega)$.

La topologie de $\mathcal{L}^1_{loc}(\omega)$ étant métrisable, il suffit de raisonner sur des suites : soient u_n et v_n surharmoniques $\in C^2(\omega)$ et tendant respectivement vers u et v dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\omega)$. $|\varphi \circ (u - v) - \varphi \circ (u_n - v_n)| \leqslant |u - u_n| + |v - v_n|$, donc $u_n + v_n + \varphi \circ (u_n - v_n)$ tend vers $u + v + \varphi \circ (u - v)$ dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\omega)$.

Lemme 4. — *Soient* u *et* $v \in A(\omega)$; *alors* $\inf(u, v) \in A(\omega)$.

$2 \inf(u, v) = u + v - |u - v|$. On considère une suite de fonctions φ_n concaves, $|\varphi_n'| \leqslant 1$, $\varphi_n(0) = 0$, telles que $\varphi_n(t) \to -|t|$ uniformément sur R : on peut prendre $\varphi_n(t) = \frac{1}{n} - \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}\cdot$ Alors $\varphi_n \circ (u - v) \to -|u - v|$ dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\omega)$ et $u + v - |u - v|$ est limite dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\omega)$ de $u + v + \varphi_n \circ (u - v) \in A(\omega)$.

Corollaire. — *Si* u *est localement sur* ω *l'enveloppe inférieure d'un nombre fini de fonctions surharmoniques de classe* C^2, Lu *est* $\leqslant 0$ *dans* ω *au sens des distributions.*

On utilise maintenant des propriétés des fonctions surharmoniques. Pour u surharmonique sur ω et δ ouvert régulier, $\bar\delta \subset \omega$, la fonction u_δ définie par

$$u_\delta(x) = \begin{cases} u(x) \text{ pour } x \in \omega - \delta \\ \int u \, d\rho_x^\delta \text{ pour } x \in \delta \end{cases},$$ est surharmonique $\leqslant u$

sur ω, et même $< u$ sur δ si u est strictement surharmonique sur ω, c'est-à-dire n'est harmonique sur aucun ouvert partiel. En outre $u_\delta(x) \to u(x)$ pour x donné quand le diamètre de δ tend vers 0.

LEMME 5. — *Étant donné* u *strictement surharmonique sur* ω *et* p *ouverts réguliers* $\delta_1, \ldots, \delta_p$ *d'adhérences contenues dans* ω, *la fonction surharmonique* $v = \inf(u_{\delta_1}, \ldots, u_{\delta_p})$ *est localement intégrable (et même continue) sur l'ouvert* $\Delta = \delta_1 \cup \cdots \cup \delta_p$, *et l'on a* $\mathrm{L}v \leqslant 0$ *dans* Δ *au sens des distributions.*

Si $a \in \delta_1 \cap \cdots \cap \delta_q \cap \complement\delta_{q+1} \cap \cdots \cap \complement\delta_p$, on a

$$u_{\delta_1}(a), \ldots, u_{\delta_q}(a) < u(a) = u_{\delta_{q+1}}(a) = \cdots = u_{\delta_p}(a);$$

comme $u_{\delta_1}, \ldots, u_{\delta_q}$ sont continues au point a et $u_{\delta_{q+1}}, \ldots, u_{\delta_p}$ s.c.i., il existe un voisinage de a où $u_{\delta_i} < u_{\delta_j}$, $\forall i = 1, \ldots, q$ et $j = q+1, \ldots, p$, donc

$$\inf(u_{\delta_1}, \ldots, u_{\delta_p}) = \inf(u_{\delta_1}, \ldots, u_{\delta_q}).$$

Par suite v est localement sur Δ enveloppe inférieure d'un nombre fini de fonctions harmoniques, d'où $\mathrm{L}v \leqslant 0$ dans Δ.

THÉORÈME 1. — *Si* u *est surharmonique sur un ouvert* ω *et* $\in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\omega)$ (4), *la distribution* $\mathrm{L}u$ *est* $\leqslant 0$ *sur* ω.

Il suffit de montrer que la distribution $\mathrm{L}u$ est $\leqslant 0$ localement; par suite on peut supposer $a < 0$, de sorte que les constantes > 0 sont strictement surharmoniques.

Soit d'abord u strictement surharmonique $\in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}^+(\omega)$ et ω' un ouvert borné contenant $\mathrm{Supp}\,\varphi$, $\overline{\omega'} \subset \omega$. On peut couvrir $\mathrm{Supp}\,\varphi$ d'un nombre fini d'ouverts réguliers $\subset \omega'$ et de diamètre $\leqslant \dfrac{1}{n}$; le lemme 5 leur fait correspondre v_n surharmonique sur ω, $v_n \leqslant u$ et $\int v_n \mathrm{L}^*\varphi\, dx \leqslant 0$. La suite v_n converge simplement vers u, et $v_n \leqslant u$ qui est intégrable sur $\mathrm{Supp}\,\varphi$. D'autre part, choisissons une constante $m \leqslant 0$ et $\leqslant \inf_{\overline{\omega'}} u$; m est sousharmonique et $m \leqslant u$ sur $\overline{\omega'}$ entraîne $m \leqslant m_\delta \leqslant u_\delta \leqslant u$ sur ω' pour tout

(4) On montrera qu'en fait toute fonction surharmonique $\in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$ (th. 3).

ouvert régulier $\delta \subset \omega'$. D'où $m \leqslant v_n$ sur Supp φ et $\int u\mathrm{L}^*\varphi\, dx \leqslant 0$.

Dans le cas général, pour tout $\varepsilon > 0$, $u + \varepsilon$ est strictement surharmonique, donc $\int (u + \varepsilon)\mathrm{L}^*\varphi\, dx \leqslant 0 \quad \forall\varepsilon > 0$, et $\int u\, \mathrm{L}^*\varphi\, dx \leqslant 0$.

2. Les G-potentiels dans un ouvert très régulier.

Dans toute la suite, ω désigne un ouvert très régulier assez petit pour qu'on puisse supposer $a(x) \leqslant a_0 < 0$ et $a'(x) \leqslant a'_0 < 0$ et appliquer le rappel 4. Soient $g(x, y)$ la fonction de Green dans ω déterminée par le théorème 6.1, [2] (cf. rappel 4) et $g_y(x) = g(x, y)$: on sait que $g_y \in \mathscr{L}^1(\omega)$ et que la distribution $\mathrm{L}g_y$ est $-\varepsilon_y$.

Lemme 6. — *En posant* $g_y(y) = \liminf\limits_{\substack{x \to y \\ x \neq y}} g_y(x)$ *pour chaque* $y \in \omega$, g_y *est un potentiel dans* ω *de support* y *et* $(x, y) \longmapsto g(x, y)$ *est s.c.i. sur* $\omega \times \omega$.

Pour $f \in \mathrm{C}(\overline{\omega}) \cap \mathrm{C}^\infty(\omega)$ et $\geqslant 0$, la formule

$$\mathrm{G}f(x) = \int_\omega g(x, y) f(y)\, dy$$

définit une fonction $\mathrm{G}f \in \mathrm{C}(\overline{\omega}) \cap \mathrm{C}^\infty(\omega)$, surharmonique et $\geqslant 0$ sur ω ; comme $\mathrm{G}f$ s'annule en tout point de $\partial\omega$, c'est un potentiel dans ω.

Étant donné g_{y_0}, on considère une suite régularisante f_n de ε_{y_0} ($f_n \in \mathscr{D}^+(\omega)$, $\int f_n(y)\, dy = 1$ et Supp f_n contenu dans la boule de centre y_0 et de rayon $\left.\dfrac{1}{n}\right)$:

$$g_{y_0}(x) - \mathrm{G}f_n(x) = \int_\omega [g(x, y_0) - g(x, y)] f_n(y)\, dy \to 0$$

uniformément sur tout compact $\mathrm{K} \subset \omega - \{y_0\}$, grâce à la continuité uniforme de $g(x, y)$ pour $x \in \mathrm{K}$, $y \in \mathrm{Y}$ voisinage compact de y_0 disjoint à K. On en déduit l'inégalité $g_{y_0} \geqslant \mathrm{H}^\delta_{g_{y_0}}$ sur tout ouvert régulier δ de frontière $\subset \omega - \{y_0\}$, puis le fait que g_{y_0} est un potentiel, comme limite des potentiels Gf_n dont les supports sont contenus dans un même compact Y et qui convergent uniformément sur tout compact $\subset \omega - Y$ (lemme 3.2, [4]).

Un théorème général (proposition 18.1, [4]) montre alors que $(x, y) \longmapsto g(x, y)$ est s.c.i. sur $\omega \times \omega$.

Théorème 2. — *Soit* ω *un ouvert très régulier tel que* a *et* a' *aient des bornes supérieures* < 0 *sur* ω. *Si* μ *est une mesure* $\geqslant 0$ *sur* ω *et de masse finie,* $G\mu(x) = \int g_y(x)\, d\mu(y)$ *est un potentiel intégrable sur* ω, *de même support que* μ, *et les solutions de* $Lu = -\mu$ *au sens des distributions sont égales p.p. dans* ω *à* $G\mu$ + *une fonction harmonique sur* ω.

Pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur ω, $G\mu(x) = \int g_y(x)\, d\mu(y)$ est hyperharmonique sur ω (théorème 18.3, [4]). Si en outre μ est de masse finie,

$$\int_\omega G\mu(x)\, dx = \int \left[\int_\omega g_y(x)\, dx\right] d\mu(y) < +\infty,$$

car $y \longmapsto \int_\omega g_y(x)\, dx$ est continue sur $\bar{\omega}$; donc $G\mu$ est surharmonique et le théorème 18,3, [4] montre alors que c'est un potentiel dans ω, de même support que μ (d'après la formule (1) du théorème 18.3).

$G\mu$ est solution de $Lu = -\mu$ dans ω, car si $\varphi \in \mathfrak{D}(\omega)$:

$$\langle LG\mu, \varphi\rangle = \langle G\mu, L^*\varphi\rangle = \iint g_y(x) L^*\varphi(x)\, d\mu(y)\, dx = -\int \varphi\, d\mu.$$

Par suite, toute solution u de $Lu = -\mu$ dans ω diffère de $G\mu$ d'une fonction égale *p.p.* à une fonction harmonique sur ω.

Corollaire ([5]). — *Tout potentiel dans* ω, *localement intégrable et de support* y, *est proportionnel à* g_y.

Si u est un tel potentiel, Lu est $\leqslant 0$ (théorème 1), donc $Lu = -k\varepsilon_y$, $k > 0$, et $u = kg_y +$ (une fonction h harmonique sur ω) p.p. sur ω, donc en tout point $\neq y$ par continuité, et enfin au point y car pour tout ouvert régulier $\delta \ni y$, u_δ $(kg_y)_\delta + h$.

([5]) Ce corollaire donnera la proportionnalité des potentiels à support ponctuel donné quand on saura que toute fonction surharmonique est localement intégrable.

3. Intégrabilité locale des fonctions surharmoniques.

ω désigne toujours un ouvert très régulier où a et a' ont des bornes supérieures < 0.

Lemme 7. — *Tout potentiel $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\omega)$ et à support compact dans ω admet une représentation intégrale de la forme $\int g_y(x)\, d\mu(y)$, où μ est une mesure $\geqslant 0$ de même support que u.*

On peut supposer ω connexe. La démonstration s'appuie sur les propriétés de la représentation intégrale des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans ω ($\in S^+(\omega)$). On sait que toute fonction $u \in S^+(\omega)$ admet une représentation intégrale unique $u(x) = \int p(x) d\nu(p)$, où ν est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur une base compacte A du cône $S^+(\omega)$, portée par l'ensemble $\mathcal{E}$ des éléments extrémaux de A (théorème 22.1, [4]), et que $\mathcal{E}$ est contenu dans l'ensemble $E^+(\omega)$ des potentiels à support ponctuel et des fonctions harmoniques > 0 sur ω (théorème 16.2, [4]). En outre, u étant un potentiel dans ω, harmonique hors d'un compact $K_0 \subset \omega$, ν est portée par le compact $A \cap \varphi^{-1}(K_0)$ (lemme 22.1, [4], formule 2), où φ est l'application continue (proposition 19.1, [4]) qui à tout potentiel $p \in E^+(\omega)$ fait correspondre son support. Enfin l'application $(p, x) \longmapsto p(x)$ est s.c.i. > 0 sur $E^+(\omega) \times \omega$ (proposition 19.1, [4]), et continue pour $x \neq \varphi(p)$.

On suppose $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\omega)$, donc pour chaque compact $K \subset \omega$, p est intégrable sur K pour ν-presque tout p (théorème de Fubini), et en considérant une suite croissante de compacts K_n, de réunion ω et tels que tout compact K soit contenu dans K_n pour n assez grand, on en déduit que ν ne charge que les potentiels localement intégrables.

On choisit alors $x_0 \in \omega\text{-}K_0$: pour $p \in \varphi^{-1}(K_0)$, $p(x_0)$ et $g_{\varphi(p)}(x_0)$ sont fonctions continues > 0 de p, donc $p(x_0) = \lambda(p) g_{\varphi(p)}(x_0)$, où λ est continue > 0. Pour $p \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\omega)$, donc pour ν-presque tout p, on a $p = C^{\text{ste}} g_{\varphi(p)}$, et cette constante est $\lambda(p)$.

Pour c continue sur K_0 : $p \longmapsto \lambda(p) . c \circ \varphi(p)$ est continue sur $\varphi^{-1}(K_0)$, donc l'application linéaire

$$c \longmapsto \int \lambda(p).c \circ \varphi(p)\, d\nu(p)$$

a un sens et c'est une mesure $\mu \geqslant 0$ sur K_0. La relation $\int c(y)\, d\mu(y) = \int \lambda(p).c \circ \varphi(p)\; d\nu(p)$ subsiste pour c s.c.i.; en particulier, pour $c(y) = g_y(x)$, x donné $\in \omega$, elle donne $\int g_y(x)\; d\mu(y) = \int \lambda(p)\,.\,g_{\varphi(p)}(x)\; d\nu(p) = \int p(x)\; d\nu(p)$.

Lemme 8. — *Soient* ω *et* ω_0 *deux ouverts très réguliers,* $\overline{\omega_0} \subset \omega$, ω_0 *connexe,* $x_0 \in \omega_0$ *et* K *un compact* $\subset \omega_0$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$u(x_0) \geqslant C \int_K u(x)\, dx \tag{1}$$

pour toute u *surharmonique* $\geqslant 0$ *et localement intégrable sur* ω.

1) Soit $u = Gf$ où G est l'opérateur de Green dans ω et $f \in C^+(\overline{\omega}) \cap C^\infty(\omega)$. $u \in C^2(\overline{\omega_0})$, donc d'après la proposition 7.1, [2] (rappel 5) appliquée à ω_0, pour $\beta > 0$:

$$u(x_0) \geqslant \beta \int_{\omega_0} g_\beta(x_0, y) u(y)\, dy \geqslant \beta \int_K g_\beta(x_0, y) u(y)\, dy,$$

d'où l'inégalité (1) pour de telles u, avec $C = \beta \inf\limits_{y \in K} g_\beta(x_0, y)$.

2) Soit u un potentiel localement intégrable dans ω et à support compact $\subset \omega - \{x_0\}$, ou, ce qui revient au même d'après le théorème 2 et le lemme 7, $u = G\mu$, μ mesure $\geqslant 0$ sur ω à support compact $\subset \omega - \{x_0\}$.

Soit $\rho \in \mathcal{D}^+(R^n)$, $\int \rho\, dx = 1$, Supp ρ voisinage de 0 assez petit pour que Supp μ + Supp $\rho \subset \omega - \{x_0\}$: puisque $y \longmapsto g(x_0, y)$ est continue sur $\omega - \{x_0\}$,

$$\int g(x_0, y)\; d(\mu * \rho)(y) \to \int g(x_0, y)\; d\mu(y),$$

c'est-à-dire $G(\mu * \rho)(x_0) \to G\mu(x_0)$, quand le diamètre de Supp ρ tend vers 0.

Or $\mu * \rho$ est défini relativement à la mesure de Lebesgue par la fonction $\sigma \in \mathcal{D}^+(\omega)$: $\sigma(y) = \int \rho(y - z)\; d\mu(z)$; on sait donc que $G(\mu * \rho)(x_0) \geqslant C \int_K G(\mu * \rho)\, dx$ et il suffit d'étudier les intégrales sur K. $h(y) = \int_K g(x, y)\, dx$ est, d'une part s.c.i. comme potentiel* de la restriction à K de la mesure de Lebesgue, d'autre part s.c.s. comme limite de la suite décroissante $G^* f_n$, où la suite $(f_n) \subset \mathcal{K}^+(\omega)$ décroît vers χ_K : ainsi h est continue sur ω.

$$\int_K G\mu\, dx = \iint_{K\times\omega} g(x, y)\, dx\, d\mu(y) = \int h\, d\mu,$$

de même

$$\int_K G(\mu * \rho)\, dx = \iint_{K\times\omega} g(x, y)\, dx\, d(\mu * \rho)(y)$$
$$= \int h\, d(\mu * \rho) \to \int h\, d\mu$$

quand Diam Supp $\rho \to 0$.

3) Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\omega)$, potentiel dans ω à support compact : si δ est un ouvert régulier $\ni x_0$, $\bar{\delta} \subset \omega$, u_δ est un potentiel $\leqslant u$, donc $\in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\omega)$, tendant vers u quand Diam $\delta \to 0$, et Supp u_δ est contenu dans Supp $u \cup \partial\delta$, mais disjoint à δ : on a donc l'inégalité pour u_δ.

Le cas général se ramène au 3 par balayage sur ω_0.

Théorème 3. — *Toute fonction u surharmonique sur un ouvert $\Omega \subset \Omega_0$ y est localement intégrable.*

Soit ω très régulier où a et a' ont des bornes supérieures < 0, $\bar{\omega} \subset \Omega$. u admet des minorantes sousharmoniques sur ω, à savoir des constantes $\leqslant 0$, donc aussi une p.g.m.h. (plus grande minorante harmonique), et on peut supposer $u \in S^+(\omega)$.

On reprend les notations du lemme 8 : il suffit de montrer que u est intégrable sur K. On choisit $x_0 \in \omega_0 - K$ tel que $u(x_0) < +\infty$, et d'autre part une fonction surharmonique v continue > 0 sur ω, par exemple la constante 1. u est limite de la suite croissante $u_n = \inf(u, nv)$; comme $u_n \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\omega)$, on sait que

$$\int_K u_n\, dx \leqslant \frac{1}{C}\, u_n(x_0) \leqslant \frac{1}{C}\, u(x_0) < +\infty,$$

donc u est intégrable sur K.

4. Diverses conséquences des théorèmes 1,2,3.

A) Théorème 4. — *Dans tout ouvert* $\Omega \subset \Omega_0$ *où il existe un potentiel* > 0, *les potentiels de support ponctuel donné sont proportionnels.*

Dans un ouvert ω très régulier où a et a' ont des bornes supérieures < 0, cette proportionnalité résulte du théorème 3 et du corollaire du théorème 2; le théorème 16.4 de [4] l'étend aux potentiels dans Ω.

Conséquence. — D'après le théorème 18.1 de [4], pour chaque $y \in \Omega$ on peut choisir un potentiel p_y de support y tel que l'application $y \longmapsto p_y(x)$ soit continue sur $\Omega - \{x\}$, $\forall x \in \Omega$. Alors (théorème 16.4, [4]), si ω est un ouvert très régulier où a et a' ont des bornes supérieures < 0, pour $y \in \omega$ on a $p_y = \lambda(y)\ g_y +$ une fonction harmonique dans ω, avec λ continue > 0 sur ω, d'où, au sens des distributions, $\mathrm{L}p_y = -\lambda(y)\varepsilon_y$, d'abord dans ω, puis dans Ω avec λ continue > 0 sur Ω. On peut donc choisir p_y de manière que $\mathrm{L}p_y = -\varepsilon_y$.

Cela étant, par le théorème 18.2 de [4], tout potentiel P dans Ω admet une représentation intégrale unique $\mathrm{P}(x) = \int p_y(x)\, d\mu(y)$, μ mesure $\geqslant 0$ sur Ω, et la relation $\mathrm{LP} = -\mu$ s'établit comme dans le théorème 2.

B) Proposition 1. — *Si deux fonctions* u_1 *et* u_2, *surharmoniques sur un ouvert, sont égales p p., elles le sont partout.*

Dans un ouvert connexe Ω où chaque u_i, $i = 1, 2$, a une p.g.m.h. h_i, si $u_i \neq h_i$, il existe un potentiel > 0, donc $u_i = \int p_y\, d\mu_i(y) + h_i$ (cf. A); $\mu_1 = -\mathrm{L}u_1 = -\mathrm{L}u_2 = \mu_2$, d'où $h_1 = h_2$ p. p. donc partout.

C) Caractérisation des fonctions $u \in \mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}$ telles que $\mathrm{L}u \leqslant 0$.

Théorème 5. — *Dans tout ouvert* $\Omega \subset \Omega_0$: *u.p.p. égale à une fonction surharmonique équivaut à* $u \in \mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}$ *et* $\mathrm{L}u \leqslant 0$.

Compte tenu des théorèmes 1 et 3, il reste à montrer que si $u \in \mathfrak{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $\mathrm{L}u = -\mu$, μ mesure $\geqslant 0$ dans Ω, $u =$ p. p.

une fonction surharmonique sur Ω. Soit $\underline{g}^\omega$ la fonction de Green dans un ouvert très régulier $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, où a et a' ont des bornes supérieures < 0 : $Lu|_\omega = -\mu_\omega$, où μ_ω est la restriction de μ à ω, donc (théorème 2)

$u|_\omega = \int g_y^\omega \, d\mu_\omega(y) +$ (une fonction harmonique h_ω) p. p. dans ω, et les fonctions $\int g_y^\omega \, d\mu_\omega(y) + h_\omega$ définissent bien une fonction surharmonique dans Ω car si ω' très régulier rencontre ω : $\int g_y^{\omega'} \, d\mu_{\omega'}(y) + h_{\omega'}$, égale p. p. dans $\omega \cap \omega'$ à

$$\int g_x^\omega \, d\mu_\omega(y) + h_\omega,$$

coïncide avec elle (proposition 1).

D) Généralisation du lemme 8.

Lemme 9. — *Si* K *et* K′ *sont deux compacts de mesures* > 0 *contenus dans un ouvert connexe* Ω, *il existe deux constantes* k_1 et $k_2 > 0$ *telles que, pour toute fonction* u *surharmonique* > 0 *sur* Ω

$$k_1 \leqslant \frac{\int_K u \, dx}{\int_{K'} u \, dx} \leqslant k_2.$$

On suppose qu'il existe une suite u_n de fonctions surharmoniques > 0 sur Ω telles que

$$(1) \quad \int_K u_n \, dx = 1 \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \int_{K'} u_n \, dx \geqslant \frac{1}{n^2}.$$

Alors $v = \sum_{n \geqslant 1} u_n \in S^+(\Omega)$ grâce à (2), alors que (1) entraîne $\int v \, dx = +\infty$, ce qui est contraire au théorème 3.

Proposition 2. — *Soient* $\Omega \subset \Omega_0$ *un ouvert connexe*, K *un compact* $\subset \Omega$ *et* $x \in \Omega$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour toute* $u \in S^+(\Omega)$

$$u(x) \geqslant C \int_K u(y) \, dy.$$

Cela résulte des lemmes 8 et 9.

5. Application à l'axiomatique de M. Brelot.

On considère maintenant un faisceau $\mathcal{H}_1$ de fonctions harmoniques définies sur un ouvert Ω_1 connexe $\subset R^n$, satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3 de M. Brelot, tel que les constantes soient harmoniques et contenant « suffisamment » de fonctions harmoniques de classe C^∞, ce qui signifie que, pour tout compact K et toute fonction harmonique u au voisinage de K, il existe une suite de fonctions u_n harmoniques et de classe C^∞ au voisinage de K telles que $u_n \to u$ uniformément sur K ([3], définition 1. 2).

Alors il existe un ouvert Ω_0 dense dans Ω_1, une fonction a et des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_r$ et Y, définis et de classe C^∞ dans Ω_0, avec les deux propriétés :

a) pour toute fonction u harmonique dans un ouvert $\subset \Omega_0$ on a $Lu = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 u + Yu + au = 0$ au sens des distributions ([3], théorème 3.1);

b) l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ est de rang n en tout point $\in \Omega_0$ ([3], théorème 3.2).

D'après le théorème de Hörmander, les solutions de $Lu = 0$ sont de classe C^∞, et par suite, pour u continue :

u harmonique dans un ouvert partiel équivaut à $Lu = 0$ dans cet ouvert ([3], théorème 2.2).

Il en résulte que le faisceau $\mathcal{H}_0$ des solutions continues de $Lu = 0$ est la restriction du faisceau $\mathcal{H}_1$ à Ω_0.

Théorème 6. — *Étant donnée une axiomatique de M. Brelot définie sur Ω_1 et contenant « suffisamment » de fonctions harmoniques de classe C^∞, les potentiels de support ponctuel y sont proportionnels, pour y appartenant à un ouvert dense dans Ω_1.*

En divisant les fonctions harmoniques par une même fonction $\in C^\infty$ et harmonique > 0 sur un ouvert $\subset \Omega_1$, on se ramène au cas d'un faisceau $\mathcal{H}_1$ satisfaisant aux mêmes hypothèses et contenant les constantes. Le théorème résulte alors du théorème 4 et du caractère local de l'unicité, à un facteur près, des potentiels à support ponctuel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. BONY, Détermination des axiomatiques de Théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont différentiables, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 17/1, 1967, 353-382.
[2] J. M. BONY, Principe du maximum et inégalité de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Séminaire de la théorie du potentiel. IHP, 12e année (1967-68), nº 10.
[3] J. M. BONY, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la Théorie du potentiel, Cours du C.I.M.E. Stresa, Juillet 1969.
[4] R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 12, 1962, 415-571.
[5] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math., Uppsala*, 119, 1967, 147-171.

Manuscrit reçu le 20 octobre 1971.
accepté par M. Brelot

Rose-Marie et Michel HERVÉ,
Université de Paris VI,
Mathématiques,
Quai St-Bernard, Paris 5e.