Journées mathématiques X-UPS

Année 2019

Périodes et transcendance

Tanguy Rivoal

Les E-fonctions et G-fonctions de Siegel

Journées mathématiques X-UPS (2019), p. 197-298.
https://doi.org/10.5802/xups.2019-03

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2019, p. 197–298 doi: 10.5802/xups.2019-03

LES E-FONCTIONS ET G-FONCTIONS DE SIEGEL

par

Tanguy Rivoal

Résumé. Siegel a introduit en 1929 les E- et G-fonctions, deux classes de séries entières à coefficients algébriques qui sont solutions d'équations différentielles à coefficients polynomiaux dans le but de généraliser les théorèmes classiques d'Hermite, Lindemann et Weierstrass concernant la nature arithmétique des valeurs des fonctions exponentielle et logarithme aux points algébriques, que ces deux classes généralisent respectivement.

Une première partie introduit la théorie des approximants de Padé « explicites » et la combine avec des méthodes « inexplicites » pour aboutir au célèbre résultat (1956) de Siegel et Shidlovskii sur la nature arithmétique des valeurs de E-fonctions. On indique ensuite comment Chudnovsky a complété en 1984 le programme de Siegel sur la nature diophantienne des G-fonctions. Une deuxième partie aborde la nature des équations différentielles satisfaites par les G-fonctions (travaux d'André, Chudnovsky et Katz) puis, par ricochet, par les E-fonctions. On conclut par de nouvelles applications arithmétiques que l'on en déduit et qui complètent le théorème de Siegel-Shidlovskii (travaux d'André, Beukers, Adamczewski-Rivoal).

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 2019. Périodes et transcendance. Éditions de l'École polytechnique, 2019.

1. Introduction

Ce survol est principalement consacré aux E-fonctions et G-fonctions, deux classes de séries entières à coefficients algébriques et solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux, que Siegel a introduites en 1929. Son but était de généraliser les théorèmes classiques d'Hermite, Lindemann et Weierstrass concernant la transcendance des valeurs des fonctions exponentielle et logarithme aux points algébriques, que ces deux classes généralisent respectivement. Les E-fonctions contiennent l'exponentielle, les fonctions sinus, cosinus et de Bessel par exemple, tandis que les G-fonctions contiennent les fonctions algébriques, les polylogarithmes et sont fortement liées aux périodes de familles de variétés algébriques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Dans un premier temps, on montre comment obtenir les théorèmes d'Hermite, Lindemann et Weierstrass mais aussi des résultats importants sur l'indépendance linéaire des valeurs de polylogarithmes. Les méthodes sont basées sur le calcul d'approximants de Padé explicites. Par explicite, on peut entendre que les diverses formules « compactes » données par des intégrales ou des séries permettent d'obtenir des estimations asymptotiques et arithmétiques très précises dont découlent résultats d'irrationalité et d'indépendance linéaire. On explique ensuite comment Siegel et Shidlovskii ont obtenu leur célèbre résultat (1929-1959) sur la nature arithmétique des valeurs de E-fonctions au moyen de méthodes basées sur les calculs d'approximants de Padé « inexplicites », construits à l'aide du lemme de Siegel. On montre aussi comment Chudnovsky a complété en 1984 le programme de Siegel sur la nature diophantienne des G-fonctions. Puis, on explique comment les travaux d'André, Chudnovsky et Katz ont permis d'élucider complètement la nature des équations différentielles satisfaites par les G-fonctions, travaux sur lesquels André s'est appuyé en 2000 pour déterminer la nature de celles satisfaites par les E-fonctions. Enfin, on conclut par les nouvelles applications arithmétiques pour les valeurs des E-fonctions et G-fonctions qui ont récemment été déduites de ces propriétés différentielles, et par quelques problèmes ouverts. Ce texte a été écrit à l'occasion des Journées X-UPS *Périodes et transcendance* les 15 et 16 avril 2019 à l'École polytechnique. Il privilégie les énoncés précis aux détails de démonstrations, qui sont d'ailleurs souvent fort compliquées et techniques dans ce domaine de l'approximation diophantienne. On trouvera donc peu de démonstrations mais plutôt des indications sur les méthodes employées et des références bibliographiques adéquates.

Je remercie très chaleureusement Yves André, Alin Bostan, Sara Checcoli, Clément Dupont, Stéphane Fischler, Javier Fresán, Claude Sabbah et Bruno Salvy pour leurs nombreuses remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer ce texte.

2. Généralités

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des *nombres algébriques* sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire l'ensemble des racines complexes des polynômes non nuls de $\mathbb{Q}[X]$. On note $\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ l'anneau des *entiers algébriques*, c'est-à-dire l'ensemble des racines complexes des polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X]$ dont le coefficient dominant vaut 1. Un *nombre transcendant* est par définition un nombre complexe qui n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$. Étant donné un polynôme $P(X) = \sum_{j=0}^{d} p_j X^j \in \mathbb{C}[X]$, sa *hauteur* est $H(P) := \max_j |p_j|$. La *hauteur* $H(\alpha)$ d'un nombre algébrique α est par définition égale à $H(Q)$ où $Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$ est le polynôme minimal de α normalisé de telle sorte que les coefficients de Q soient premiers entre eux, avec un coefficient dominant > 0. Les autres racines de Q sont les *conjugués* (galoisiens) de α.

Une *extension algébrique* $\mathbb{L}$ de $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ et il contient automatiquement $\mathbb{Q}$ comme sous-corps. On voit facilement que toute extension algébrique a la structure d'un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, dont la dimension est appelée le *degré de l'extension* et est notée $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$. On dit que $\mathbb{L}$ est un *corps de nombres* quand $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$ est fini. Tout corps de nombres $\mathbb{K}$ est de la forme $\mathbb{Q}(\beta)$ où β est un nombre algébrique de degré d sur $\mathbb{Q}$, dit *élément primitif* de $\mathbb{K}$: tout élément de $\mathbb{K}$ s'écrit de manière unique $\sum_{j=0}^{d-1} u_j \beta^j$ avec des $u_j \in \mathbb{Q}$.

Étant donnée une extension algébrique $\mathbb{L}$ de $\mathbb{Q}$, on peut considérer l'ensemble des morphismes de corps (ou immersions) de $\mathbb{L}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$ qui fixent tous les éléments de $\mathbb{Q}$. Quand cet ensemble est constitué seulement d'automorphismes de $\mathbb{L}$, il a évidemment la structure de groupe (pour la composition) et on l'appelle le *groupe de Galois de l'extension*, noté $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$; dans ce cas on dit que l'extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{Q}$ est galoisienne. Soit α un élément d'une extension algébrique $\mathbb{L}$ de $\mathbb{Q}$. Lorsque σ parcourt l'ensemble des immersions de $\mathbb{L}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$ fixant $\mathbb{Q}$, les nombres $\sigma(\alpha)$ décrivent l'ensemble des racines du polynôme minimal de α. On en déduit qu'une extension $\mathbb{L}$ est galoisienne si et seulement si pour chaque élément α dans $\mathbb{L}$, toutes les racines de son polynôme minimal sont aussi dans $\mathbb{L}$. Tout corps de nombres $\mathbb{K}$ est contenu dans un corps de nombres galoisien $\mathbb{K}^{\mathrm{Gal}}$ (la clôture galoisienne de $\mathbb{K}$) et on a $\mathrm{card}(\mathrm{Gal}(\mathbb{K}^{\mathrm{Gal}}/\mathbb{Q})) \geqslant [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ avec égalité si $\mathbb{K}$ est lui-même galoisien.

Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, typiquement un corps de nombres ou $\overline{\mathbb{Q}}$. Des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{C}$ sont dits (homogènement) algébriquement indépendants sur $\mathbb{L}$ lorsqu'il n'existe aucun polynôme (homogène) $P \in \mathbb{L}[X_1, \ldots, X_s]$ non identiquement nul tel que l'on ait $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = 0$. Sinon, les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont dits (homogènement) algébriquement dépendants sur $\mathbb{L}$. Le degré de transcendance (homogène) du corps $\mathbb{L}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ est le plus grand entier t tel que, quitte à les réordonner, les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ sont (homogènement) algébriquement indépendants sur $\mathbb{L}$ mais pour chaque $j \in \{t+1, \ldots, s\}$, les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_t, \alpha_j$ sont (homogènement) algébriquement dépendants sur $\mathbb{L}$. On note $\deg\operatorname{tr}_{\mathbb{L}} \mathbb{L}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ le degré de transcendance et $\deg\operatorname{tr}\operatorname{hom}_{\mathbb{L}} \mathbb{L}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ le degré de transcendance homogène.

Ces définitions sur l'(in)dépendance algébrique se transposent *mutatis mutandis* aux fonctions. Il suffit de considérer cette fois-ci $\mathbb{L}$ comme un sous-corps de $\mathbb{C}(z)$ (typiquement $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ ou $\mathbb{C}(z)$) et de remplacer $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ par des fonctions $f_1(z), \ldots, f_s(z)$. On s'intéressera aussi aux solutions d'équations différentielles linéaires de la forme $\sum_{j=0}^{n} p_j(z) y^{(j)}(z) = 0$, où $p_j(z) \in \mathbb{L}$ et $p_n \neq 0$. L'entier $n \geqslant 1$ est l'*ordre de l'équation*. Étant donnée une fonction f définie sur un domaine de $\mathbb{C}$ et solution d'une telle équation, on dira que l'équation est minimale pour f s'il n'existe aucune équation différentielle linéaire homogène d'ordre $< n$ dont f soit la solution. On dira également que n est l'ordre différentiel de f.

3. Fonctions hypergéométriques

Beaucoup d'exemples dans la suite s'expriment avec les séries (ou fonctions) hypergéométriques qui sont étudiées en détail dans [1, 161]. Elles sont définies de la manière suivante. Étant donnés des entiers p, q et des paramètres $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$, $b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$, on pose

$$ {}_pF_q\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{bmatrix}; z\Bigg] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(1)_n (b_1)_n \cdots (b_q)_n} z^n \tag{3.1} $$

où $(a)_0 := 1$ et $(a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1)$ si $n \geqslant 1$ (de sorte que $(1)_n = n!$). Elle satisfait à l'équation différentielle hypergéométrique

$$ L_{p,q} y(z) = 0 $$

où

$$ L_{p,q} := \theta \prod_{j=1}^{q} (\theta + b_j - 1) - z \prod_{j=1}^{p} (\theta + a_j) \in \mathbb{C}[z][d/dz], \qquad \theta := z\frac{d}{dz}. $$

Dans le produit de deux opérateurs différentiels, il faut faire attention aux règles de non-commutation

$$\frac{d}{dz} \cdot P = P \cdot \frac{d}{dz} + P' \quad \text{et} \quad \theta \cdot P = P \cdot \theta + zP'$$

pour $P \in \mathbb{C}(z)$.

Si $p \leqslant q$, la série ${}_pF_q$ représente une fonction entière sur $\mathbb{C}$. Si $p = q + 1$, la série converge dans le disque $|z| < 1$ et, grâce à l'équation différentielle, elle peut être prolongée analytiquement dans $\mathbb{C} \smallsetminus D$, où D est une coupure de 1 vers ∞. Si $p \geqslant q + 2$, la série diverge pour tout $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, mais comme c'est une série asymptotique au sens de Poincaré, elle peut être « sommée » (dans chaque secteur angulaire ouvert pointé en 0 ne contenant pas $[0, +\infty[$) en une fonction analytique satisfaisant à l'équation différentielle $Ly(z) = 0$.

Voici quelques exemples classiques. La fonction

$${}_1F_1\left[\begin{matrix}1\\1\end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

est entière sur $\mathbb{C}$ et satisfait à l'équation hypergéométrique

$$\theta(\theta - z)y(z) = 0.$$

Cette équation d'ordre 2 n'est bien sûr pas minimale pour exp qui satisfait déjà à $(\theta - z)y(z) = 0$, c'est-à-dire $zy'(z) = zy(z)$.

La fonction

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = -\frac{1}{z}\log(1 - z)$$

satisfait à l'équation hypergéométrique $(\theta(\theta+1) - z(\theta+1)^2)y(z) = 0$, soit

$$z(z-1)y''(z) + (2 - 3z)y'(z) + y(z) = 0$$

qui est minimale pour $-\log(1-z)/z$. *A priori*, la série ${}_2F_1$ converge pour $|z| < 1$ mais l'expression $-\log(1-z)/z$ la prolonge en une fonction analytique multiforme sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$.

Enfin, on a

$${}_2F_0\left[\begin{matrix}1,1\\ \cdot\end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n \mathrel{\widehat{=}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 - zx}\,dx.$$

L'intégrale à droite est analytique sur $\mathbb{C} \smallsetminus [0, +\infty[$, et en dérivant sous le signe intégral, on voit qu'elle satisfait à l'équation hypergéométrique $(\theta - z(\theta+1)^2)y(z) = 0$ sur ce domaine, soit

$$z^3 y''(z) + z(3z^2 - 1)y'(z) + zy(z) = 0.$$

Le symbole $\widehat{=}$ signifie que l'intégrale admet un développement asymptotique en $z = 0$ donné par la série ${}_2F_0$ de gauche, qui satisfait formellement à la même équation différentielle.

Dans ce survol sur les E- et G-fonctions, les séries hypergéométriques qui apparaîtront seront de la forme ${}_pF_q$ avec $p \leqslant q + 1$. Les séries avec $p \geqslant q + 2$ ont également un rôle dans l'étude de ces fonctions, mais il n'en sera essentiellement pas fait mention ici.

4. Valeurs de l'exponentielle et du logarithme

Lorsque l'on rencontre un nombre réel comme somme d'une série, valeur d'une intégrale ou limite d'une suite par exemple, il est naturel de se demander s'il s'agit d'un nombre rationnel ou irrationnel, algébrique ou transcendant. C'est en tout cas la première question que se pose l'auteur quand il parcourt [53] ou [100] par exemple. La réponse est souvent difficile à obtenir car il n'y a pas de méthode universelle. On expliquera dans les pages suivantes comment prouver l'irrationalité de constantes mathématiques célèbres telles que $\sqrt{2}$, $\ln(2)$, e, π et $\zeta(3)$ mais il y a beaucoup d'autres nombres « intéressants » dont on ne connaît pas la nature arithmétique. Parmi les nombres les plus connus dont on ne sait rien ou peu, citons par exemple

$$\zeta(5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \qquad \Gamma(1/5) = \int_0^{+\infty} x^{-4/5} e^{-x}\, dx,$$
$$\ln(\sqrt{2\pi}) = 1 + \int_0^{+\infty} \frac{\{x\} - 1/2}{x}\, dx$$

et les constantes d'Euler γ, de Catalan G et de Gompertz δ définies par

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \Big) = -\int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x}\, dx,$$
$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n+1)^2}, \qquad \delta = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x}\, dx.$$

On ne sait pas montrer non plus que les nombres $e + \pi$ et $e\pi$ sont irrationnels, bien que l'on sache qu'au moins l'un des deux est transcendant car e et π le sont. On sait que $2^{\sqrt{2}}$ et e^{π} sont transcendants (Kuzmin [96] et Gel'fond [74] respectivement) mais on ne sait rien de π^e, π^π ou e^e.

4.1. Un critère d'irrationalité

Tout le monde connaît les démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et $\ln(2)/\ln(3)$ basées sur la décomposition unique des entiers comme produits de nombres premiers(1). Elles ont l'avantage de la simplicité mais le défaut d'être complètement *ad hoc*. En général, on cherche à s'appuyer sur la

Proposition 4.1 **(Critère d'irrationalité).** *Étant donné un nombre réel* α, *supposons qu'il existe deux suites d'entiers* $(p_n)_n$ *et* $(q_n)_n$ *telles que* $0 < |q_n\alpha - p_n| \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *Alors* $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

La preuve est immédiate : si au contraire on avait $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, alors $0 < |q(q_n\alpha - p_n)| = |q_n p - q p_n|$ serait un entier < 1 si n est assez grand (relativement à p et q), contradiction. Par exemple, comme on montre facilement par récurrence sur $n \geqslant 0$ qu'il existe deux suites d'entiers $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ telles que $(\sqrt{2} - 1)^n = q_n\sqrt{2} - p_n$,(2) l'irrationalité de $\sqrt{2}$ découle de ce critère puisque $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$. On peut également l'utiliser pour démontrer(3) que le nombre $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k! \notin \mathbb{Q}$: il suffit de définir les entiers $q_n = n!$ et $p_n = n! \sum_{k=0}^{n} 1/k!$, et de remarquer que $0 < q_n e - p_n = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k! < e/(n+1)$.

(1)Si $\sqrt{2} = p/q \in \mathbb{Q}$ avec p, q premiers entre eux, alors on a $p^2 = 2q^2$, qui est impossible comme on le voit en considérant les valuations 2-adiques de p et q. De façon similaire, si $\ln(2)/\ln(3) = p/q \in \mathbb{Q}$ avec p, q premiers entre eux, alors on a $2^q = 3^p$, ce qui est impossible. Notons que $\ln(2)/\ln(3)$ est en fait transcendant mais que c'est bien plus difficile à prouver ; c'est une conséquence du théorème de Gel'fond-Schneider (voir la partie 8).

(2)Incidemment, la suite $(p_n/q_n)_n$ est la suite des réduites de la fraction continue de $\sqrt{2}$.

(3)Cette preuve est due à Fourier vers 1815, voir [162]. La première démonstration de l'irrationalité de e est due à Euler en 1737, qui a utilisé pour cela le développement en fraction continue de e. Voir la partie 4.4 à ce sujet.

Plus généralement, si l'on veut démontrer l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de s réels $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, on cherche à construire $s+1$ suites d'entiers $(p_{j,n})_n$ telles que

$$0 \neq r_n := p_{0,n} + \sum_{j=1}^{s} p_{j,n}\alpha_j \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

Sans autre hypothèse sur les $p_{j,n}$ et r_n, on ne peut rien déduire de mieux de (4.2) que l'irrationalité d'au moins l'un des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Pour obtenir un résultat d'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$, on doit aussi contrôler la croissance des suites $p_{j,n}$ relativement à la décroissance de r_n : plus r_n tend rapidement vers 0 et les $p_{j,n}$ tendent lentement vers l'infini, plus on obtient de nombres linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Donnons un énoncé qui illustre précisément ce fait.

Proposition 4.3 **(Critère de Nesterenko** [116]**).** *Soient $\xi_1, \dots, \xi_s$ des réels. On suppose qu'il existe des suites d'entiers $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ et $(p_{j,n})_{n\geqslant 0}$ $(j = 1, \dots, s)$, et $u_1, u_2, v > 0$ tels que*

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} |p_{j,n}|^{1/\lambda_n} \leqslant v, \quad j = 1, \dots, s$$

et

$$0 < u_1^{\lambda_n(1+o(1))} \leqslant \left| \sum_{j=1}^{s} p_{j,n}\xi_j \right| \leqslant u_2^{\lambda_n(1+o(1))}.$$

Alors le rang sur $\mathbb{Q}$ de la famille $(\xi_1, \dots, \xi_s)$ est au moins

$$\frac{\ln(v) - \ln(u_1)}{\ln(v) - \ln(u_1) + \ln(u_2)}.$$

Une méthode alternative pour démontrer l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de s réels $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, consiste à construire $s+1$ suites d'entiers $(p_{j,n})_n$ et $(q_n)_n$ telles que, pour chaque $j \in \{1, \dots, s\}$,

$$0 \neq r_{j,n} := q_n\alpha_j - p_{j,n} \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire que l'on approche les α_j par des suites de rationnels ayant le même dénominateur. Là aussi, on peut énoncer un critère [55] permettant de montrer l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Dans les deux cas, on parle de suites d'approximations rationnelles simultanées de $\alpha_1, \dots, \alpha_s$.

La question est maintenant de savoir produire ces suites d'entiers pour montrer l'irrationalité d'un réel α donné. Une méthode classique repose sur l'existence d'une fonction[4] $f(z)$ telle que $f(1) = \alpha$. Le point important est alors de parvenir à construire des suites de fractions rationnelles $P_n(z)/Q_n(z) \in \mathbb{Q}(z)$ qui approchent de mieux en mieux $f(z)$ en un certain sens. En spécialisant en $z = 1$, on espère alors que les nombres $P_n(1)/Q_n(1) \in \mathbb{Q}$ sont de bonnes approximations rationnelles de α. Noter que la limite $\lim_n P_n(1)/Q_n(1) = \alpha$ n'implique pas forcément que $\alpha \notin \mathbb{Q}$, et qu'il faut vérifier davantage de choses pour appliquer le critère d'irrationalité. En pratique, la fonction $f(z)$ est souvent une série formelle dans $\mathbb{Q}[\![z]\!]$ et $P_n(z)/Q_n(z)$ est une fraction rationnelle dont le développement de Taylor coïncide « longuement » avec celui de $f(z)$. Cela conduit à la notion d'approximants de Padé qui est l'objet de la partie suivante.

4.2. Approximants de Padé

Les approximants de Padé sont une généralisation aux séries formelles de la notion de fractions continues pour les nombres réels. On se donne une série formelle $F(z) \in \mathbb{L}[\![z]\!]$, où $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, typiquement un corps de nombres, $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\mathbb{C}$. Voir [34] pour une référence sur l'approximation de Padé.

Définition-Proposition 4.4. *Soient p et q deux entiers positifs.*

(i) *Il existe deux polynômes $P(z) \in \mathbb{L}[z]$ et $Q(z) \in \mathbb{L}[z] \smallsetminus \{0\}$, de degrés respectifs* au plus *p et q et tels que*

$$R(z) := Q(z)F(z) - P(z) \in \mathbb{L}[\![z]\!]$$

ait une valuation (ou ordre d'annulation) au moins *$p+q+1$ en $z = 0$.*

(ii) *La fraction rationnelle P/Q (sous forme réduite) est unique et, par définition, il s'agit de l'approximant de Padé de F noté $[p/q]_F$.*

Dans la suite, on écrira $f(z) = \mathscr{O}((z-\rho)^n)$ pour signifier que la valuation en $z = \rho$ d'une série formelle $f(z) \in \mathbb{C}[\![z-\rho]\!]$ est au moins n.

---

[4]On pourrait évidemment se contenter de prendre $f(z) = \alpha z$ mais cette fonction ne permet probablement pas de développer cette approche autrement qu'en connaissant des approximations rationnelles $(r_n)_n$ de α. Or le but est justement de construire une telle suite $(r_n)_n$.

Le point (i) découle de l'algèbre linéaire. En effet, cela revient à résoudre un système linéaire dont les $q+1$ inconnues sont les coefficients de Taylor de Q, et les q équations linéaires sont données par l'annulation des q coefficients de Taylor de R dont les indices sont dans $\{p+1,\dots,p+q\}$. Il existe donc au moins un polynôme $Q \neq 0$, et on a alors nécessairement $P = [QF]_{\leqslant p}$, la troncature de QF au p-ième coefficient de Taylor.

Concernant l'unicité en (ii), soient P/Q et A/B deux approximants de Padé $[p/q]_F$. Alors $R := QF - P$ et $S := BF - A$ ont chacun un ordre $\geqslant p+q+1$ en $z=0$, et cette propriété est encore vraie pour $QS - BR$. Mais $QS - BR = BP - QA$ est un polynôme de degré $\leqslant p+q$; il est donc identiquement nul.

On dispose la suite double $([p/q]_F)_{p,q\geqslant 0}$ dans un tableau doublement infini « vers la droite et vers le bas », que l'on appelle la *table de Padé de F*. Pour cette raison, on dit que $[n/n]_F$ est un approximant de Padé diagonal de F. Dans ce cas, on voit que les séries de Taylor de $F(z)$ et $P(z)/Q(z)$ (avec P et Q de degré au plus n) coïncident jusqu'à l'ordre $2n$ lorsque $Q(0) \neq 0$[5]). Ceci est à rapprocher de la propriété « numérique » suivante [92, p. 9, Th. 9] : soit $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des réduites successives de la fraction continue régulière d'un nombre irrationnel α ; alors $|\alpha - p_n/q_n| < 1/q_n^2$.

La notion d'approximant de Padé se généralise de diverses façons. On peut demander par exemple un ordre d'annulation $< p+q+1$, auquel cas l'existence de P et $Q \neq 0$ est toujours assurée, mais pas l'unicité de la fraction rationnelle P/Q ; on parle alors d'approximant de type Padé. Deux autres généralisations usuelles concernent l'approximation simultanée de plusieurs séries. On se donne $F_1(z),\dots,F_r(z) \in \mathbb{L}[\![z]\!]$.

Approximants de Padé (simultanés) de type I. Étant donnés des entiers $p \geqslant 0$ et $r \geqslant 2$ il existe des polynômes $P_1(z),\dots,P_r(z) \in \mathbb{L}[z]$, non tous nuls, tels que $\deg(P_j) \leqslant p$ et

$$\sum_{j=1}^{r} P_j(z)F_j(z) \in \mathbb{L}[\![z]\!]$$

[5]ce que l'on peut supposer sans perte de généralité puisque si $Q(0)=0$ alors $P(0)=0$ également

ait un ordre d'annulation au moins $r(n+1)-1$ en $z=0$. On parle aussi d'approximants d'Hermite-Padé.

Approximants de Padé (simultanés) de type II. Étant donnés des entiers positifs p et q tels que $p \geqslant (r-1)q$, il existe des polynômes $P_1(z), \dots, P_r(z), Q(z) \in \mathbb{L}[z]$, $Q \neq 0$, tels que $\deg(P_j) \leqslant p$, $\deg(Q) \leqslant r \cdot q$ et chaque série

$$Q(z)F_j(z) - P_j(z) \in \mathbb{L}[\![z]\!], \quad 1 \leqslant j \leqslant r.$$

ait un ordre au moins $p+q+1$ en $z=0$. Les fractions rationnelles P_j/Q sont les approximants de Padé de type II de $(F_j(z))_{j=1,\dots,r}$ de paramètres (p,q).

On notera l'analogie évidente avec les deux types d'approximations simultanées des nombres réels mis en avant à la fin de la partie 4.1. On peut bien sûr aussi définir des approximants de type Padé de type I (ou II), et ils apparaîtront d'ailleurs dans la suite.

Des cas particuliers d'approximants de Padé avaient été considérés par Euler, Lambert et Gauss entre autres, dans un formalisme différent basé sur les développements en fraction continues des fonctions exponentielle et hypergéométrique. La preuve de Lambert de l'irrationalité de π utilise aussi de manière cachée des approximants de Padé de la fonction exponentielle, voir la partie 4.4. Hermite a utilisé les approximants de type II de l'exponentielle pour démontrer la transcendance du nombre e en 1873. La notion a ensuite été formalisée et étudiée en détails dans la thèse de Padé [124, 125], qui était un étudiant d'Hermite.

4.3. Valeurs de l'exponentielle

On sait calculer explicitement toute la table de Padé de la fonction exponentielle. Indiquons ici seulement comment obtenir la diagonale. Notons

$$P_n(x) := \frac{1}{n!}(x^n(1-x)^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} x^k \in \mathbb{Z}[x] \tag{4.5}$$

le n-ième polynôme de Legendre sur $[0,1]$. Par récurrence sur $k \geqslant 0$, on vérifie que

$$\int_0^1 x^k e^{zx}\, dx = \frac{q_k(z)e^z + (-1)^{k+1}k!}{z^{k+1}}, \tag{4.6}$$

où $q_k(z) \in \mathbb{Z}[z]$ est un polynôme (explicitable) de degré k.

Proposition 4.7. *Pour tout entier $n \geqslant 0$, posons*

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} z^{n-k},$$
$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} q_k(z) z^{n-k}.$$

(i) *On a $[n/n]_{\exp} = A_n/B_n$ et*

$$R_n(z) := B_n(z)e^z - A_n(z) = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!} \int_0^1 x^n(1-x)^n e^{zx}\, dx. \tag{4.8}$$

(ii) *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$|R_n(z)| \leqslant \max(1, e^{\mathrm{Re}(z)}) \frac{|z|^{2n+1}}{4^n n!} \tag{4.9}$$

et si de plus $z \in \mathbb{R}^*$, alors $R_n(z) \neq 0$.

On vérifie ce résultat en calculant de deux manières différentes l'intégrale $I_n(z) := z^{n+1} \int_0^1 P_n(x) e^{zx} dx$. En intégrant n fois par parties, on voit que $I_n(z)$ est égale au membre de droite de (4.8). En utilisant la forme « développée » de $P_n(x)$ dans (4.5) et en utilisant ensuite (4.6), on voit cette fois-ci que $I_n(z)$ est égale au membre de gauche de (4.8), ce qui prouve (i). La majoration (4.9) de $R_n(z)$ résulte de ce que $|x^n(1-x)^n| \leqslant 4^{-n}$ pour $x \in [0,1]$, et la non-nullité lorsque $z \in \mathbb{R}^*$ résulte de la stricte positivité de l'intégrande sur $]0,1[$.

Nous allons maintenant déduire de la proposition 4.7 le

Théorème 4.10.

(i) *Pour tout nombre rationnel $r \neq 0$, on a $\exp(r) \notin \mathbb{Q}$ (Lambert 1761).*

(ii) *Pour tout nombre rationnel $r > 0$, avec $r \neq 1$, on a $\ln(r) \notin \mathbb{Q}$.*

(iii) *On a $\pi \notin \mathbb{Q}$ (Lambert 1761) et $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$ (Legendre 1795).*

Pour (i), on note $r = p/q \in \mathbb{Q}^*$, de sorte que $b_n := q^n B_n(r)$ et $a_n := q^n A_n(r)$ sont des entiers. On peut donc appliquer le critère d'irrationalité puisque, quand $n \to +\infty$,

$$0 < |b_n e^r - a_n| = |q^n R_n(r)| \leqslant \max(1, e^r)\, \frac{|q|^n |r|^{2n+1}}{4^n n!} \longrightarrow 0.$$

Pour (ii), on utilise $e^{\ln(r)} = r$ et on applique (i). Pour (iii), on remarque que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} R_n(i\pi) + R_n(-i\pi) &= 2\,\frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^n\sin(\pi x)\,dx \neq 0 \\ &= -\big(B_n(i\pi) + B_n(-i\pi) + A_n(i\pi) + A_n(-i\pi)\big) \end{aligned}$$

et c'est donc un polynôme $C_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $\leqslant n/2$, que l'on évalue en π^2. Si l'on suppose que $\pi^2 = p/q \in \mathbb{Q}$, on déduit que $(q^{2n}C_n(\pi^2))_n$ est une suite d'entiers non nuls qui tend vers 0, contradiction. L'irrationalité de π^2, et donc celle de π, en découle. Cette démonstration est essentiellement celle de Niven [121].

Padé a basé sa thèse sur une étude détaillée de la table (de Padé) de la fonction exponentielle entre autres, mais les formules précédentes étaient connues d'Hermite dans une plus grande généralité encore [85]. Il avait en effet calculé les approximants de type I et de type II des fonctions $\exp(\alpha_1 z), \ldots, \exp(\alpha_s z)$ pour toute famille de nombres complexes non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ deux à deux distincts. En introduisant le polynôme $\big(x^n\prod_{k=1}^s(x-\alpha_k)^n\big)^{(n)}$ (qui généralise le polynôme de Legendre $P_n(x)$) on détermine explicitement $s+1$ polynômes $A(z)$ et $B_j(z)$ ($j = 1, \ldots, s$) de $\mathbb{C}[z]$, de degré au plus sn, tels que

$$\begin{aligned} (4.11)\quad R_j(z) &:= A(z)e^{\alpha_j z} - B_j(z) \\ &= z^{(s+1)n+1}e^{\alpha_j z}\int_0^{\alpha_j} x^n\prod_{k=1}^s(x-\alpha_k)^n e^{-zx}\,dx = \mathscr{O}(z^{(s+1)n+1}). \end{aligned}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$ et tout $z \in \mathbb{C}$. Ces polynômes sont donc des approximants de Padé de type II de la famille $\exp(\alpha_1 z), \ldots, \exp(\alpha_s z)$. Il existe également des formules pour des approximants de Padé de type I : on peut donner des expressions explicites de polynômes $Q_1(z), \ldots, Q_s(z) \in \mathbb{C}[z]$ de degré au plus n tels que

$$\begin{aligned} (4.12)\quad \mathscr{R}(z) &:= \sum_{j=1}^s Q_j(z)e^{\alpha_j z} \\ &= z^{s(n+1)-1}\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\ldots,x_{s-1}\geqslant 0\\ x_1+\cdots+x_s=1}} \prod_{k=1}^s\big(x_k^n\, e^{\alpha_k x_k z}\big)\,dx_1\cdots dx_{s-1} = \mathscr{O}(z^{s(n+1)-1}). \end{aligned}$$

En exploitant les formules (4.11) avec $\alpha_j = j - 1$, Hermite a ainsi pu obtenir en 1873 son célèbre théorème. On peut également le démontrer avec les formules (4.12).

***Théorème 4.13* (Hermite [85]).** *$e \notin \overline{\mathbb{Q}}$.*

Nous ne rentrons pas dans les détails de la preuve. Le point délicat par rapport au théorème 4.10 est de parvenir à montrer la non-nullité de quantités de la forme $\sum_{j=1}^{s} c_j R_j(1)$, où les $c_j \in \mathbb{Z}$. Cette importante difficulté levée, on obtient par une approche similaire les théorèmes suivants.

***Théorème 4.14* (Hermite-Lindemann).** *Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $e^\alpha \notin \overline{\mathbb{Q}}$.*

Étant donnée n'importe quelle détermination du logarithme, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \smallsetminus \{0,1\}$, $\log(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$. En particulier, $\pi \notin \overline{\mathbb{Q}}$ (Lindemann 1882 [105]).

***Théorème 4.15* (Lindemann-Weierstrass).**

(i) *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \overline{\mathbb{Q}}$ supposés linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_k}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

De manière équivalente :

(ii) *Soient $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \overline{\mathbb{Q}}$ supposés deux à deux distincts. Alors $e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_\ell}$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

En particulier, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, les nombres $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont transcendants. L'équivalence des deux énoncés est basée sur l'équation fonctionnelle $e^{x+y} = e^x e^y$. On démontre d'ailleurs (ii) en premier avec les approximants de Padé de type I de la famille $\exp(\beta_1 z), \dots, \exp(\beta_\ell z)$.

Pour les démonstrations de ces théorèmes, voir [159, p. 17, §10] et [159, p. 20, §12] respectivement. Lorsque α est algébrique réel dans le théorème 4.14, les approximants de Padé de type I avec $\alpha_j = (j-1)\alpha$ sont plus appropriés que ceux de type II car $\mathscr{R}(1) > 0$ par positivité de l'intégrande et on conclut plus rapidement que dans le cas général (voir [157, pp. 63–68]).

4.4. Fractions continues liées à l'exponentielle

On rappelle que tout nombre irrationnel α admet une unique représentation sous forme de fraction continue infinie (dite *régulière*)

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} := [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

où $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \geqslant 1$. On définit les réduites de α comme étant les rationnels ($n \geqslant 1$)

$$\frac{p_n}{q_n} := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}],$$

de sorte que $\alpha = \lim_n p_n/q_n$. Les entiers p_n et q_n satisfont aux récurrences $p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$, avec $(p_{-1}, q_{-1}) = (0,1)$ et $(p_0, q_0) = (1,0)$ par convention. Voir [47, 92]. On sait calculer n'importe quel quotient partiel a_n pourvu que l'on connaisse, par exemple, suffisamment de chiffres dans le développement décimal de α. Mais en général, on ne connaît pas explicitement *a priori* la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ d'un nombre réel donné (autre qu'un nombre quadratique irrationnel). Ainsi, on ne la connaît pas pour les nombres $\sqrt[3]{2}$, π, γ, G, $\ln(2)$ par exemple. Toutefois, on la connaît pour quelques nombres liés à l'exponentielle. Ainsi

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots, \underbrace{1, 2n, 1}, \dots], \tag{4.16}$$

et, pour $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$,

$$e^{1/k} = [1; k-1, 1, 1, 3k-1, 1, 1, \dots, \underbrace{(2n+1)k - 1, 1, 1}, \dots],$$

$$\begin{aligned} \tan(1/k) \\ &= [0; k-1, 1, 3k-2, 1, 5k-2, \dots, \underbrace{1, (2n+1)k-2}, \dots]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

La fraction continue régulière de e. Euler a donné la première démonstration de (4.16) en utilisant l'équation différentielle de Ricatti [152]. Il est remarquable que ce développement en fraction continue du nombre e soit intimement lié aux approximants de Padé de l'exponentielle. Suivant [40], introduisons les intégrales suivantes, qui sont des variations de $R_n(1)$ dans la proposition 4.7 : pour tout $n \geqslant 0$, posons

$$\begin{aligned} A_n &:= \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(t-1)^n e^t dt, \\ B_n &:= \frac{1}{n!}\int_0^1 t^{n+1}(t-1)^n e^t dt, \\ C_n &:= \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(t-1)^{n+1} e^t dt. \end{aligned}$$

(Noter que $A_n = R_n(1)$.) On a $A_0 = e-1$, $B_0 = 1$, $C_0 = 2-e$ et pour tout $n \geqslant 0$

$$C_n = B_n - A_n, \quad A_{n+1} = -B_n - C_n, \quad B_{n+1} = -2(n+1)A_{n+1} + C_n.$$

On en déduit l'existence de deux suites d'entiers $(P_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ telles que

$$A_n = Q_{3n}e - P_{3n}, \quad B_n = P_{3n+1} - Q_{3n+1}e, \quad C_n = P_{3n+2} - Q_{3n+2}e,$$

pour lesquelles on vérifie par récurrence que pour tout entier $m \geqslant 0$, on a

$$\frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} = [e_0; e_1, \ldots, e_m],$$

où $(e_m)_{m\geqslant 0}$ est définie par $e_0 = 2$ et pour $n \geqslant 1$, $e_{3n-2} = 1$, $e_{3n-1} = 2n$, $e_{3n} = 1$. Comme $\lim_n P_n/Q_n = e$, cela prouve que $e = [e_0; e_1, \ldots, e_m, \ldots]$ et on trouve (4.16).

Une fraction continue irrégulière de $\tan(x)$. Lambert [98] a donné en 1761 la première démonstration de l'irrationalité de π au moyen d'une fraction continue irrégulière pour la fonction tangente, différente de (4.17) :

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}}, \tag{4.18}$$

qui converge pour tout $x \in \mathbb{C} \smallsetminus (\mathbb{Z} + \pi/2)$. Contrairement à une fraction continue régulière, il n'est pas toujours vrai qu'une fraction continue infinie irrégulière

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}} = a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \cdots,$$

avec des a_j et b_j entiers, représente un nombre irrationnel. Par exemple, $\frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|1} + \cdots = 1$, où le motif $2/1$ se répète indéfiniment. Lambert a néanmoins démontré le critère suivant.

Proposition 4.19 **(Critère d'irrationalité de Lambert)**

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites d'entiers tels que $1 \leqslant |b_n| < |a_n|$ pour tout $n \geqslant 1$. On suppose que la fraction continue irrégulière

$$\lambda := \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \cdots$$

est convergente et que pour tout n assez grand, la fraction continue (convergente)

$$\lambda_n := \frac{b_n|}{|a_n} + \frac{b_{n+1}|}{|a_{n+1}} + \frac{b_{n+2}|}{|a_{n+2}} + \cdots$$

satisfait à $0 < |\lambda_n| < 1$. Alors $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

En supposant $\pi = p/q \in \mathbb{Q}$, Lambert a montré (après quelques manipulations) que l'on peut appliquer son critère à la fraction continue (4.18) évaluée en $x = \pi/4$, et cette fraction est donc un nombre irrationnel. Or comme elle vaut en fait $\tan(\pi/4) = 1$, cette contradiction montre que $\pi \notin \mathbb{Q}$. Legendre [101] a remarqué que l'on obtient une contradiction similaire en supposant $\pi^2 \in \mathbb{Q}$. En effet, comme $\tan(\pi) = 0$, on déduit de (4.18) évaluée en $x = \pi$ que

$$\frac{\pi^2|}{|5} - \frac{\pi^2|}{|7} - \frac{\pi^2|}{|9} - \cdots = 3.$$

Il s'avère que les numérateurs et dénominateurs des réduites de la fraction continue (4.18) sont des approximants de Padé (quasi) diagonaux de la fonction tangente. Ils peuvent d'ailleurs être explicitement décrits avec des variantes des polynômes de Padé pour l'exponentielle donnés à la proposition 4.10. Notons qu'en posant $x = ir \in i\mathbb{Q}$, $r \neq 0$, dans (4.18), Lambert a également déduit de son critère l'irrationalité de $\tanh(r)$ dont découle celle de $\exp(r)$.

4.5. Valeurs du logarithme

On utilise de nouveau les polynômes de Legendre $P_n(z)$ définis en (4.5). Posons $B_n(z) := z^n P_n(1/z) \in \mathbb{Z}[z]$ et

$$A_n(z) := z^n \int_0^1 \frac{P_n(1/z) - P_n(t)}{1/z - t} dt \in \mathbb{Q}[z].$$

Un dénominateur commun des coefficients de $A_n(z)$ est $d_n :=$ ppcm$\{1, 2, \ldots, n\}$, quantité qui vaut asymptotiquement $e^{n+o(n)}$ (par le théorème des nombres premiers) et est bornée par 3^n pour tout $n \geqslant 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z \int_0^1 \frac{dx}{1 - zx} = -\log(1 - z)$$

et l'intégrale fournit le prolongement analytique de la série entière à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. Notons que ce prolongement coïncide avec la branche de $-\log(1 - z)$ pour laquelle $-\pi < \arg(1 - z) < \pi$.

Proposition 4.20. *Pour tout $n \geqslant 0$, la fraction rationnelle $A_n(z)/B_n(z)$ est l'approximant de Padé $[n/n]$ de $-\log(1 - z)$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$, on a*

(4.21)
$$R_n(z) := B_n(z) \log(1 - z) - A_n(z) = z^{2n+1} \int_0^1 \frac{x^n(1 - x)^n}{(1 - zx)^{n+1}}\, dx.$$

On vérifie que $R_n(z) = z^n \int_0^1 P_n(x)/(1 - zx)dx$ et en intégrant n fois par parties cette intégrale on obtient (4.21), dont la proposition découle.

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$, posons $V(x) := (1 - \sqrt{1 - x})^2/|x|$. On déduit alors de la proposition 4.20 un résultat d'Alladi et Robinson [3] :

Théorème 4.22. *Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $0 < |a/b| < 1$ et $V(a/b)|a|e < 1$. Alors $\log(1 - a/b) \notin \mathbb{Q}$.*

En effet, les nombres $q_n := d_n b^n B_n(a/b)$ et $p_n := d_n b^n A_n(a/b)$ sont des entiers et l'intégrale à droite de (4.21) montre que

$$\lim_{n\to+\infty} |b^n d_n R_n(a/b)|^{1/n} = V(a/b)|a|e.$$

Le critère d'irrationalité appliqué à

$$d_n b^n R_n(a/b) = q_n \log(1-a/b) - p_n \neq 0$$

permet donc de conclure. Ce résultat est plus faible que le point (ii) de la proposition 4.7 (qui vaut pour tout logarithme de nombre rationnel) mais on peut surtout déduire des approximants de Padé de $\log(1-z)$ une mesure d'irrationalité beaucoup plus fine que celle que l'on pourrait éventuellement déduire des approximants de Padé de l'exponentielle. Voir la partie 4.7.

Pour tout entier $s \geqslant 1$, on connaît également les approximants de Padé « diagonaux » de type I et II pour la famille de fonctions $(\log(1-z)^k)_{1\leqslant k\leqslant s}$ mais il semble que l'on ne sache en déduire la transcendance de $\log(\alpha)$ pour aucun nombre algébrique α.

Nous concluons cette partie avec la remarque suivante : les preuves de l'irrationalité de π présentées dans les parties 4.3 et 4.4 sont indirectes et, en particulier, on n'utilise pas le critère d'irrationalité pour y parvenir. Ce n'est que relativement récemment qu'Hata [84] a réussi à construire explicitement des suites d'entiers $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ telles que $0 < |q_n\pi - p_n| \to 0$, en utilisant des approximants de Padé simultanés de $\log(1-\alpha z)$ et $\log(1-\beta z)$ pour des bons choix de α et β. Voir également Beukers [22] pour une construction différente.

4.6. Valeurs des polylogarithmes

La série entière de $-\log(1-z)$ s'inscrit (pour $s=1$) dans la famille des polylogarithmes

$$\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} = \frac{1}{(s-1)!}\int_0^1 \frac{\log(1/x)^{s-1}}{1-zx}dx \tag{4.23}$$

où $s \geqslant 1$ est entier. La série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$, sauf si $s=1$ où il faut aussi exclure $z=1$. L'intégrale permet de prolonger analytiquement la série à $\mathbb{C} \smallsetminus [1,+\infty[$.

On ne connaît explicitement la suite des approximants de Padé diagonaux d'aucune des séries $\mathrm{Li}_s(z)$ avec $s \geqslant 2$. En revanche, on sait calculer des approximants de Padé de type I et de type II de la famille $(\mathrm{Li}_k(z))_{1\leqslant k\leqslant s}$ pour chaque $s \geqslant 1$ donné [57]. Par exemple, pour $s = 2$, des approximants de type I et type II sont donnés par la

Proposition 4.24. *Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-2n-1)_{2n+1}}{(k)_{n+1}^2} z^{k+n} = A_n(z)\mathrm{Li}_2(z) + B_n(z)\mathrm{Li}_1(z) + C_n(z) = \mathscr{O}(z^{3n+2}), \tag{4.25}$$

où les polynômes $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Q}[z]$ sont de degré $\leqslant n$, tandis que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n^2}{(k)_{2n+1}} z^{k+2n} = Q_{2n}(z)\mathrm{Li}_1(z) - P_{1,2n}(z) = \mathscr{O}(z^{3n+1}) \\ \displaystyle -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k}\Big(\frac{(k-n)_n^2}{(k)_{2n+1}}\Big) z^{k+2n} = Q_{2n}(z)\mathrm{Li}_2(z) - P_{2,2n}(z) \\ \qquad\qquad = \mathscr{O}(z^{3n+1}) \end{cases} \tag{4.26}$$

où les polynômes $Q_{2n}, P_{1,2n}, P_{2,2n} \in \mathbb{Q}[z]$ sont de degré $\leqslant 2n$.

Une fois que l'on a deviné les identités (4.25) et (4.26), elles sont faciles à démontrer. Par exemple, notons $S(z)$ la série à gauche de (4.25). On voit que le numérateur de la fraction rationnelle (de la variable k)

$$r_n(k) := \frac{(k-2n-1)_{2n+1}}{(k)_{n+1}^2} = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-2n-1)}{k^2(k+1)^2\cdots(k+n)^2}$$

s'annule pour $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, ce qui prouve que $S(z) = \mathscr{O}(z^{3n+2})$. Par ailleurs, en utilisant la décomposition en éléments simples (sans partie polynomiale)

$$r_n(k) = \sum_{s=1}^{2}\sum_{j=0}^{n} \frac{c_{s,j,n}}{(k+j)^s}, \quad c_{s,j,n} \in \mathbb{Q},$$

on obtient $S(z) = A_n(z)\mathrm{Li}_2(z) + B_n(z)\mathrm{Li}_1(z) + C_n(z)$ avec des polynômes

$$A_n(z) := \sum_{j=0}^{n} c_{2,j,n} z^{n-j}, \qquad B_n(z) := \sum_{j=0}^{n} c_{1,j,n} z^{n-j},$$
$$C_n(z) := -\sum_{s=1}^{2}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j} \frac{c_{s,j,n}}{k^s}\, z^{n+k-j},$$

grâce à l'identité triviale

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+j)^s} = z^{-j}\mathrm{Li}_s(z) - z^{-j}\sum_{k=1}^{j}\frac{z^k}{k^s}.$$

Des formules similaires à celles de la proposition 4.24 donnent des approximants de Padé de type I et de type II de la famille $(\mathrm{Li}_k(z))_{1\leqslant k\leqslant s}$. Elles permettent de prouver le résultat suivant

Théorème 4.27. *Pour tout entier $s \geqslant 1$ et tout entier $q \in \mathbb{Z}$ satisfaisant à $|q| > e^{s^2}$, les nombres $1, \mathrm{Li}_1(1/q), \ldots, \mathrm{Li}_s(1/q)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Voir [83, 120] pour des énoncés plus précis et plus généraux, où $1/q$ est remplacé par des rationnels $a/b \neq 0$ avec b (beaucoup) plus grand que a. Les fonctions polylogarithmes sont très importantes dans l'étude des valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ puisque pour $s \geqslant 2$

$$\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s), \qquad \mathrm{Li}_s(-1) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s).$$

On sait que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$ qui est donc transcendant sur $\mathbb{Q}$. En revanche, on connaît peu de choses sur la nature arithmétique des nombres $\zeta(2n+1)$, dont on pense qu'ils sont tous transcendants sur $\mathbb{Q}$, et même algébriquement indépendants entre eux et de π. Le théorème 4.27 ne permet pas d'atteindre ces valeurs car on ne peut pas prendre $a/b = \pm 1$. Il ne permet d'ailleurs même pas d'atteindre $a/b = 1/2$: on ne connaît toujours pas la nature arithmétique des nombres[6]

$$\mathrm{Li}_2(1/2)=\frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{2}\ln(2)^2,\quad \mathrm{Li}_3(1/2)=\frac{1}{6}\ln(2)^3-\frac{1}{12}\pi^2\ln(2)+\frac{7}{8}\zeta(3).$$

Voir [104] pour la démonstration de ces identités.

Néanmoins, les célèbres démonstrations par Apéry [11, 12] de l'irrationalité de $\zeta(2)=\pi^2/6$ et $\zeta(3)$ s'inscrivent dans le cadre de l'approximation de Padé des polylogarithmes, en généralisant la notion à l'approximation « multipoints ». Voir [54] pour un survol des nombreuses démonstrations du

Théorème 4.28 **(Apéry).** *$\zeta(2)\notin\mathbb{Q}$ et $\zeta(3)\notin\mathbb{Q}$.*

Bien sûr, l'irrationalité de $\zeta(2)$ n'est rien d'autre que celle de π^2 qui était bien connue ; l'intérêt de la méthode d'Apéry est de ne pas nécessiter de savoir que $\zeta(2)=\pi^2/6$. Considérons les deux problèmes suivants (posés par Beukers dans [20]) : déterminer des polynômes P_n, Q_n, T_n de $\mathbb{Q}[z]$ de degré au plus n tels que

$$\begin{cases} R_n(z):=P_n(z)\mathrm{Li}_2(z)+Q_n(z)\mathrm{Li}_1(z)+T_n(z)=\mathscr{O}(z^{2n+1})\\ P_n(z)\log(z)+Q_n(z)=\mathscr{O}((1-z)^{n+1})\end{cases}$$

et des polynômes A_n, B_n, C_n, D_n de $\mathbb{Q}[z]$ de degré au plus n tels que

$$\begin{cases} A_n(z)\mathrm{Li}_2(z)+B_n(z)\mathrm{Li}_1(z)+C_n(z)=\mathscr{O}(z^{2n+1})\\ S_n(z):=2A_n(z)\mathrm{Li}_3(z)+B_n(z)\mathrm{Li}_2(z)+D_n(z)=\mathscr{O}(z^{2n+1})\\ A_n(z)\log(z)+B_n(z)=\mathscr{O}(1-z).\end{cases}$$

On montre que chacun de ces problèmes admet une unique solution (à une constante multiplicative près) et plus précisément que l'on a

$$R_n(z)=n!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}^2}\,z^{k+n},\quad P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}z^{n-k}$$

et

$$S_n(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial k}\Big(\frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^2}\Big)z^{k+n},\quad A_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^k\binom{n+k}{k}^2z^{n-k}.$$

[6] On sait que 1, π et $\ln(2)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (Baker [13], Hata [84]) mais on ne sait pas si c'est vrai de 1, π^2 et $\ln(2)^2$.

Les deux conditions en $z=1$ nous assurent que $R_n(1) = P_n(1)\zeta(2) + T_n(1)$ et $S_n(1) = 2A_n(1)\zeta(3) + D_n(1)$. On démontre que $R_n(1) = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{5n+o(n)}$, $S_n(1) = (\sqrt{2}-1)^{4n+o(n)}$, $P_n(1) \in \mathbb{Z}$, $d_n^2 T_n(1) \in \mathbb{Z}$, $A_n(1) \in \mathbb{Z}$ et $d_n^3 D_n(1) \in \mathbb{Z}$. L'irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$ découle alors du critère d'irrationalité.(7)

Sur le modèle précédent, on peut construire des problèmes d'approximations de Padé « multipoints » de polylogarithmes plus généraux qui génèrent par spécialisation des suites d'approximations simultanées de $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(2s+1)$ ($s \geqslant 1$ entier fixé). On n'écrit pas ces problèmes dont les séries solutions « expliquent » les suites d'approximations qui apparaissent dans la démonstration originelle du point (i) ci-dessous (voir [57]). Ces séries ont été généralisées dans diverses directions pour démontrer les points (ii) et (iii) ci-dessous mais leur interprétation en termes d'approximants de Padé n'est pas connue.

Théorème 4.29.

(i) *Le rang sur* $\mathbb{Q}$ *de la famille* $(1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(2s+1))$ *est* $\geqslant \frac{1+o(1)}{\log(2e)} \log(s)$ *lorsque* $s \to +\infty$ [14, 134].

(ii) *Il existe au moins un irrationnel parmi* $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ *(Zudilin* [169]*).*

(iii) *Il y a au moins* $2^{\frac{\ln(s)}{\ln\ln(s)}(1+o(1))}$ *nombres irrationnels dans* $\{\zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(2s+1)\}$ *lorsque* $s \to +\infty$ *(Fischler, Sprang et Zudilin* [67, 68]*).*

Notons que le point (i) utilise le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [116], qui est énoncé à la proposition 4.3 dans la partie 4.1.

---

(7) L'estimation asymptotique pour $R_n(1)$ est assez facile à obtenir mais celle pour $S_n(1)$ ne l'est pas [118]. On commence par établir une expression de $S_n(1)$ comme intégrale complexe à laquelle on applique ensuite *la méthode du col*. Cette méthode, inventée par Riemann, permet de donner un équivalent asymptotique lorsque $n \to +\infty$ d'une suite d'intégrales de la forme $\int_L g(z) f(z)^n dz$ où f et g sont des fonctions complexes convenables et L un chemin dans $\mathbb{C}$.

4.7. Mesures d'irrationalité

Une fois connue l'irrationalité d'un nombre réel α, on s'intéresse à quantifier cette irrationalité. On sait que pour $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $q \neq 0$, on a $|\alpha - p/q| \neq 0$. On appelle mesure d'irrationalité de α toute fonction explicite $f(\alpha, q)$ telle que

$$|\alpha - p/q| > f(\alpha, q)$$

pour tout q suffisamment grand et tout $p \in \mathbb{Z}$.

Étant donné un nombre irrationnel α, un théorème de Dirichlet [157, p. 13] assure l'existence d'une infinité de fractions rationnelles p/q telles que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{4.30}$$

La preuve de ce résultat est très simple mais n'est pas constructive car basée sur le *Schubfachprinzip* de Dirichlet (le principe des tiroirs ou encore *pigeonhole principle*) : une application d'un ensemble fini de cardinal n sur un ensemble fini de cardinal $< n$ ne peut pas être injective. La théorie des fractions continues montre toutefois que les réduites de α conviennent [92, p. 9, Th. 9]. Par ailleurs un argument simple de théorie de la mesure assure que pour Lebesgue-presque tout réel α, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q(\alpha, \varepsilon) > 0$ tel que pour tout entier $q \geqslant Q(\alpha, \varepsilon)$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on ait

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}. \tag{4.31}$$

On ne peut donc génériquement pas remplacer l'exposant 2 dans (4.30) par une valeur plus grande. De plus, Liouville a montré que pour tout nombre réel α algébrique de degré $d \geqslant 2$ sur $\mathbb{Q}$, il existe une constante explicite $c(\alpha) > 0$ telle que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $q \geqslant 1$, on ait

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^d}. \tag{4.32}$$

La démonstration de (4.32) est basée sur l'inégalité des accroissement finis appliquée au polynôme minimal $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de α, qui est de degré d : cette inégalité permet en effet de minorer $|\alpha - p/q|$ à l'aide de $|P(\alpha) - P(p/q)| = |P(p/q)| = u/q^d \geqslant 1/q^d$, l'entier u étant non nul puisqu'aucun rationnel n'est racine de P ; voir [47, p. 15] pour les détails. Le théorème de Roth [148] améliore l'exposant dans la mesure (4.32) de manière optimale et indépendante du degré de α : pour tout réel algébrique irrationnel α, la mesure (4.31) a lieu, avec le défaut que la constante $Q(\alpha,\varepsilon)$ n'est pas connue, sauf pour les nombres quadratiques par (4.32). La démonstration du théorème de Roth est particulièrement compliquée.

Ces résultats expliquent pourquoi l'on cherche des mesures d'irrationalité de la forme $f(\alpha,q) = c(\alpha)/q^{s(\alpha)}$ où $c(\alpha) > 0$ et $s(\alpha) \geqslant 2$ dépendent uniquement de α ; on dit que $s(\alpha)$ est un exposant d'irrationalité de α. Il peut être difficile, voire impossible, d'obtenir une telle mesure et on doit parfois se contenter de mesures de la forme e^{-q}, $q^{-\log(q)}$ ou autre. Par exemple, Koksma et Popken [93] ont montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q(\varepsilon) > 0$ tel que pour tous entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geqslant Q(\varepsilon)$, on ait

$$\left|e^{\pi} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{(4+\varepsilon)\ln(q)/\ln\ln(q)}}. \tag{4.33}$$

La meilleure mesure maintenant connue de e^{π} est de la forme $q^{-c\ln\ln(q)}$, voir [164]. Il existe par ailleurs des nombres irrationnels α pour lesquels il est effectivement impossible de trouver $s \geqslant 2$ tel que $|\alpha - p/q| > 1/q^s$ pour tous entiers $p \in \mathbb{Z}$ et q assez grand ; ces nombres sont dits de Liouville et sont nécessairement transcendants (comme le montre la mesure de Liouville (4.32) d'un nombre algébrique). Ils forment un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. L'exemple le plus connu d'un nombre de Liouville est $\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$ qui satisfait à

$$0 < \left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{2}{q_n^{n+1}}$$

avec $q_n := 10^{n!}$ et $p_n := \sum_{k=0}^{n} 10^{n!-k!}$. La mesure (4.33) ne permet pas d'exclure la possibilité que e^{π} soit un nombre de Liouville.

En général, on obtient une mesure d'irrationalité d'un irrationnel α lorsque l'on sait construire deux suites d'entiers $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ telles que $0 \neq r_n := q_n\alpha - p_n \to 0$ et lorsque l'on contrôle finement la croissance de q_n et la décroissance de r_n. Il existe de nombreux énoncés liant « qualité » de ces approximations et mesure d'irrationalité. Voici un tel énoncé, qui ne couvre pas toutes les situations possibles.

Proposition 4.34. *Soit $\xi \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. On suppose qu'il existe deux suites d'entiers $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ et des réels $\rho, \delta > 0$ tels que*

- *soit*

$$\limsup_{n\to+\infty} |q_n|^{1/n} \leqslant \rho, \quad \limsup_{n\to+\infty} |q_n\xi - p_n|^{1/n} \leqslant \delta, \quad \frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \tag{4.35}$$

- *soit*

$$\limsup_{n\to+\infty} |q_n|^{1/n} \leqslant \rho, \quad \lim_{n\to+\infty} |q_n\xi - p_n|^{1/n} = \delta. \tag{4.36}$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout entier $q \geqslant Q(\varepsilon)$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on ait

$$\Big|\xi - \frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}$$

où $\mu := 1 - \ln(\rho)/\ln(\delta)$.

Voir [3] pour une preuve de la version avec (4.35) ; celle sous l'hypothèse (4.36) en est une simple adaptation. La démonstration de ce type d'énoncés suit essentiellement le schéma suivant. Si $a/b \in \mathbb{Q}$ est distinct de tous les p_n/q_n, grâce à l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\Big|\alpha - \frac{a}{b}\Big| \geqslant \Big|\frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b}\Big| - \frac{|r_n|}{|q_n|} \geqslant \frac{1}{|bq_n|} - \frac{|r_n|}{|q_n|} \geqslant \frac{1}{2|bq_n|},$$

où la dernière inégalité a lieu pour tout n tel que $|2br_n| \leqslant 1$. Il existe une infinité de tels n puisque $r_n \to 0$ et on choisit par exemple le plus petit $n = n(b)$ satisfaisant à cette condition. On obtient donc

$$\Big|\alpha - \frac{a}{b}\Big| \geqslant \frac{1}{2|bq_{n(b)}|}. \tag{4.37}$$

Si par ailleurs $a/b = p_m/q_m$ pour un certain m, on a simplement

$$\Big|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\Big| = \frac{|r_m|}{|q_m|} \geqslant \frac{1}{|q_m|g(q_m)} > 0, \tag{4.38}$$

où g est une fonction telle que $g(q_m) > 0$ et $|r_m| \geqslant 1/g(q_m)$ pour tout m. La conjonction de (4.37) et (4.38) fournit alors une mesure d'irrationalité de α. À titre d'exercice, on pourra mettre directement en oeuvre cette méthode pour déterminer une mesure d'irrationalité du nombre $\alpha_0 := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3^k}$ avec $q_n := 2^{3^n}$ et $p_n := \sum_{k=0}^{n} 2^{3^n-3^k}$, ainsi que du nombre de Liouville λ défini plus haut.[(8)]

Bien souvent, les approximations rationnelles construites avec des approximants de Padé explicites tels que ceux mentionnés auparavant permettent d'obtenir de bonnes mesures. Ainsi, on peut déduire des propositions 4.20 et 4.34 des mesures d'irrationalité de certaines valeurs du logarithme. Posons $U(x) := (1+\sqrt{1-x})^2/|x|$ et $V(x) := (1-\sqrt{1-x})^2/|x|$. Alladi et Robinson [3] ont ainsi montré que, pour tout rationnel a/b tel que $0 < |a/b| < 1$ et $V(a/b)|a|e < 1$, on a la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier (explicitable) $Q(a,b,\varepsilon) > 0$ tel que pour tout entier $q \geqslant Q(a,b,\varepsilon)$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on ait

$$\Big|\ln\big(1-a/b\big) - \frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{q^{\mu(a,b)+\varepsilon}}, \tag{4.39}$$

où
$$\mu(a,b) := 1 + \frac{\ln\big(U(a/b)|a|\big)+1}{\ln\big(U(a/b)/|a|\big)-1}.$$

Noter que pour a fixé, $\mu(a,b) \to 2$ quand $b \to \pm\infty$. Par exemple, $\mu(1,2) \approx 4,6221$ est un exposant pour $\ln(2)$. Il n'a été significativement amélioré que deux fois, par Rukhadze [149] en 1985 puis Marcovecchio [112] en 2009. Ce dernier a montré que pour tout entier q assez grand et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\Big|\ln(2) - \frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{q^{3,5746}}.$$

Par ailleurs, 2 est le seul entier $k \geqslant 2$ pour lequel la mesure (4.39) s'applique à $\ln(k)$. De l'étude des approximants de Padé simultanés de plusieurs exponentielles, Mahler [108] a déduit en 1953 sa célèbre mesure : pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, on a

$$\Big|\pi - \frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{q^{42}}.$$

[(8)]On trouve qu'il existe des constantes explicitables $c, d > 0$ telles que pour tous entiers $p \in \mathbb{Z}$ et q assez grand, on ait $|\alpha_0 - p/q| > c/q^3$ et $|\lambda - p/q| > 1/q^{d\cdot\Lambda(\ln(q))}$, où $\Lambda(x) \sim \ln(x)/\ln\ln(x)$ quand $x \to +\infty$ est la fonction réciproque de la fonction $\Gamma(x)$ pour $x \geqslant 2$. Ces mesures ne découlent pas de la proposition 4.34 dont les hypothèses ne sont pas satisfaites par ces diverses suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$.

Cette mesure a été améliorée (pour q assez grand) par de nombreux auteurs et la meilleure valeur connue d'un exposant d'irrationalité de π est due à Salikhov [151] avec 7,6063. Il a aussi obtenu [150] le meilleur exposant 5,125 connu de $\ln(3)$. Les meilleurs exposants d'irrationalité connus de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ sont 5,0955 et 5,5139, par Zudilin [170] et Rhin-Viola [133] respectivement. On conjecture que ces nombres ont tous 2 comme meilleur exposant d'irrationalité. Toutes ces mesures ont été obtenues en analysant très finement des approximants explicites de type Padé des polylogarithmes ou de fonctions proches.

On peut également déduire de la proposition 4.7 et d'une estimation fine de $B_n(1)$ (mais on est hors du cadre de la proposition 4.34) qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour tous entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, q assez grand, on ait

$$\left|e - \frac{p}{q}\right| > c_0 \frac{\log\log(q)}{q^2 \log(q)}. \tag{4.40}$$

Cette mesure, due à Davis [43], découle aussi de l'étude fine des réduites de la fraction continue de e donnée par (4.16). Elle est optimale en un sens très fort. En effet, on peut prendre n'importe quelle constante $c_0 < 1/2$ tandis que si l'on choisit $c_0 > 1/2$, alors l'inégalité (4.40) est fausse pour une infinité d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ et une infinité d'entiers $q \in \mathbb{N}^*$. On connaît des mesures de qualité similaire pour les nombres de la forme e^a avec $a = \pm 2/t$, $t \in \mathbb{N}$, quoique légèrement moins précises sur le seuil de basculement des constantes analogues à c_0.

Quand des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, on peut également « mesurer » ce fait. Par exemple, Hata [84] a montré que pour tous entiers p, q, r suffisamment grands, on a

$$|p + q\pi + r\ln(2)| > H^{-7,0161}, \quad H := \max(|p|, |q|, |r|).$$

Lorsque $\alpha_s = \xi^s$ pour un nombre ξ que l'on sait transcendant, on parle alors de mesure de transcendance. Les formules d'Hermite pour les approximants de Padé simultanés d'exponentielles permettent de donner une mesure de transcendance des nombres $\exp(\alpha)$ et $\log(\alpha)$ ($\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$) lorsque ces nombres sont transcendants. Voir [107, 132, 157] par exemple.

On présentera d'autres mesures d'irrationalité dans la partie 7.3, qui généralisent à certaines valeurs de E- et G-fonctions les mesures (4.40) et (4.39) respectivement. La suite de ce survol est consacrée à l'étude de ces fonctions.

5. E- et G-fonctions, résultats diophantiens classiques

Si l'on veut généraliser les résultats de transcendance d'Hermite, Lindemann et Weierstrass à d'autres fonctions que l'exponentielle ou le logarithme, on se heurte rapidement à deux obstacles :

(1) L'absence de formules explicites pour les approximants de Padé, sauf cas assez particuliers souvent obtenus comme spécialisations de fonctions hypergéométriques. De telles formules permettent en général d'obtenir au moins des résultats d'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de valeurs de ces fonctions.

(2) L'absence d'une équation fonctionnelle telle que $e^{x+y} = e^x e^y$, qui est cruciale pour passer de résultats d'irrationalité/indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ ou $\overline{\mathbb{Q}}$ à des résultats d'indépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Siegel [158] a introduit en 1929 deux classes de séries entières, les E-fonctions et les G-fonctions, qui permettent de lever ces deux obstacles dans une certaine mesure et que nous allons maintenant étudier. L'article [158] a été commenté et traduit de l'allemand vers l'anglais dans [160]. Parmi les nombres mentionnés au début de la partie 4, disons d'ores et déjà que l'on pense que la constante d'Euler γ, $\Gamma(1/5)$, $\ln(\pi)$, δ, $e+\pi$, $e\pi$, e^e et π^e ne sont des valeurs en un point algébrique ni d'une E-fonction ni d'une G-fonction. Il est donc malheureusement probable qu'aucun des théorèmes diophantiens cités ici sur ces fonctions ne s'applique à ces nombres individuellement. En revanche, ils permettent déjà de donner un énoncé conditionnel non trivial concernant γ et δ et, suffisamment raffinés, ils pourraient potentiellement s'appliquer un jour à $\zeta(5), G$ et $\Gamma(1/5)^5$, qui sont des valeurs en un point algébrique de G-fonctions.

5.1. Définition et propriétés des E-fonctions

La classe des E-fonctions a été définie par Siegel dans [158, Chap. I, §2].

***Définition 5.1* (Siegel).** Une E-fonction est une série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n/n!)z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ telle que

(i) $F(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$ et pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on ait $|\sigma(a_n)| \leqslant n!^{\varepsilon}$.

(iii) Il existe une suite d'entiers $(D_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $D_n a_m \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ pour tout $0 \leqslant m \leqslant n$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$, $1 \leqslant |D_n| \leqslant n!^{\varepsilon}$.

Juste après la définition, Siegel écrit « *Eine Funktion y, deren Potenzreihe diese drei Eigenschaften hat, möge kurz eine E-Funktion genannt werden. Offenbar ist die Exponentialfunktion eine E-Funktion* », c'est-à-dire « Une fonction y dont le développement en série entière a ces trois propriétés sera appelée une E-fonction. La fonction exponentielle est évidemment une E-fonction »[9].

Au fil du temps, l'étude des E-fonctions s'est concentrée sur une classe plus restreinte.

Définition 5.2. Une E-fonction *au sens strict* est une série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n/n!)z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ telle que

(i) $F(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et tout $n \geqslant 0$, on ait $|\sigma(a_n)| \leqslant C^{n+1}$.

(iii) Il existe une suite d'entiers $(D_n)_{n\geqslant 0}$ et une constante $D > 0$ telles que pour tous entiers $m, n \geqslant 0$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$, on ait $D_n a_m \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ et $1 \leqslant |D_n| \leqslant D^{n+1}$.

Tous les exemples connus de E-fonctions sont des E-fonctions au sens strict. Il est en fait conjecturé que toute E-fonction au sens originel de Siegel est *de facto* une E-fonction au sens strict, et la distinction est donc probablement illusoire. Voir [6, p. 715] et [157, p. 407] pour quelques réflexions à ce sujet.

---

(9) La signification de la lettre E est donc claire.

Dans toute la suite, une « E-fonction » ou une « E-fonction au sens large » désigneront toute série satisfaisant à la définition 5.1. *Une « E-fonction au sens strict » ou « E-fonction stricte » désigneront une série satisfaisant à la définition* 5.2. *On prendra garde que « E-fonction » tend à signifier « E-fonction stricte » dans la littérature récente tandis que Shidlovskii* [157, p. 407] *appelle « E^*-fonction » une E-fonction stricte.*

Faisons maintenant quelques commentaires sur ces définitions qui sont compliquées de prime abord. La condition (i) équivaut à dire que la suite $(a_n/n!)_{n\geqslant 0}$ (et donc aussi $(a_n)_{n\geqslant 0}$) satisfait à une récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[n]$. Il en découle que les a_n vivent dans un certain corps de nombres galoisien $\mathbb{K}$, et donc qu'il suffit au point (ii) de considérer les automorphismes de $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, qui sont en nombre fini.

De plus, pour chaque $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, la série

$$F_\sigma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(a_n) z^n/n!$$

est une E-fonction. En effet, les points (ii) et (iii) sont trivialement satisfaites. Pour (i), notons $\sum_{j=0}^{n} P_j(z)(d/dz)^j \in \mathbb{K}[z][d/dz]$ un opérateur dont F est solution ; alors $F_\sigma(z)$ est solution de l'opérateur $\sum_{j=0}^{n} \sigma(P_j)(z)(d/dz)^j \in \mathbb{K}[z][d/dz]$, où l'on fait agir σ sur les coefficients des P_j.

Donnons quelques exemples de E-fonctions : les polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, la fonction de Bessel

$$J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n}}{n!^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin(z), \quad \cos(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\bigg(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{n}\bigg) z^n = e^{3z} J_0\big(2i\sqrt{2}\, z\big),$$

$$\int_0^z \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)^2},$$

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big) z^n.$$

Pour la fonction $h(z)$, le dénominateur des $n+1$ premières sommes harmoniques est $d_n := \mathrm{ppcm}\{1, 2, \dots n\} \leqslant 3^n$ et elle satisfait à

$$zh'''(z) + 2(1-z)h''(z) + (z-3)h'(z) + h(z) = 0. \tag{5.3}$$

En revanche, les fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ non polynomiales, $\log(1-z)$, $\tan(z)$, $J_0(\sqrt{z})$ et $(1-z)^s$ ($s \in \overline{\mathbb{Q}} \smallsetminus \mathbb{N}$) ne sont pas des E-fonctions.

Comme on le voit, tous les exemples non polynomiaux sont dans $\mathbb{Q}[\![z]\!]$ et une E-fonction quelconque ne diffère pas fondamentalement de ce cas. En effet, pour toute E-fonction $F(z) \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ avec $\mathbb{K}$ un corps de nombres galoisien de degré d sur $\mathbb{Q}$, il existe $\beta \in \mathbb{K}$ et des E-fonctions $F_0(z), \dots, F_{d-1}(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \sum_{j=0}^{d-1} \beta^j F_j(z). \tag{5.4}$$

En effet, soient β un élément primitif de $\mathbb{K}$ et $\mathscr{G} := \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, qui est d'ordre d. Il existe d suites de rationnels $(u_{j,n})_n$ telles que

$$\forall n \geqslant 0,\ \forall \sigma \in \mathscr{G}, \quad \sigma(a_n) = \sum_{j=0}^{d-1} \sigma(\beta)^j u_{j,n}. \tag{5.5}$$

On a donc (5.4) avec $F_j(z) := \sum_{n=0}^{\infty} u_{j,n} z^n/n!$ et il nous faut encore vérifier que les F_j sont des E-fonctions. On remarque que l'on peut inverser (5.5) et exprimer les $u_{j,n}$ en fonction des $\sigma(a_n)$. En effet, le déterminant du système est le Vandermonde $\det\big((\sigma(\beta)^j)_{0 \leqslant j \leqslant d-1, \sigma \in \mathscr{G}}\big)$ qui est non nul car les $\sigma(\beta)$ sont deux à deux distincts. Il existe donc d éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls v_σ ($\sigma \in \mathscr{G}$) tels que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait $u_{j,n} = \sum_{\sigma \in \mathscr{G}} v_\sigma\, \sigma(a_n)$. Pour conclure, on utilise alors les deux faits suivants : $\sum_{n=0}^{\infty} v_\sigma\, \sigma(a_n) z^n/n!$ est une E-fonction et une somme finie de E-fonctions est une E-fonction. (Si l'on veut, on peut partout supposer que les E-fonctions sont strictes dans ce qui précède.)

Revenons maintenant au cas où $F(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$: elle satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$, (ii) dans la définition 5.1 se réduit uniquement à « $|a_n| \leqslant n!^{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geqslant N(\varepsilon)$ » et (iii) signifie en particulier que $D_n a_m \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leqslant m \leqslant n$.

La classe des E-fonctions (au sens strict ou large) possède de nombreuses propriétés structurelles. Tout d'abord, ce sont des fonctions entières puisque $|a_n/n!| \leqslant 1/\sqrt{n!}$ si n est assez grand. De plus, elles forment un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ pour les opérations usuelles d'addition et multiplication des séries formelles. Cet anneau est stable par d/dz et $\int_0^z$. Vérifions-le pour

$$\int_0^z F(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!}\, z^{n+1}.$$

Les propriétés (ii) et (iii) sont clairement satisfaites puisque la suite $(a_n)_n$ est simplement remplacée par la suite $(a_{n-1})_n$. De plus, si $F(z)$ satisfait à l'équation différentielle $Ly(z) = 0$ pour un certain $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$, on voit que $\int_0^z F(x)dx$ satisfait à $(L \circ d/dz)y(z) = 0$, et (i) est satisfaite.

Enfin, les unités (strictes ou larges) de cet anneau sont de la forme $\alpha e^{\beta z}$, où $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ (André [6]). En effet, si $F(z)$ est une unité, $1/F(z)$ est une E-fonction (stricte ou large). Puisque $1/F(z)$ est entière, cela implique que $F(z)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. La condition de croissance de la suite $(a_n)_n$ nous permet d'appliquer à $F(z)$ le théorème de factorisation d'Hadamard [42, p. 287] des fonctions entières d'ordre de croissance fini, et le résultat en découle.

5.2. Fonctions hypergéométriques ${}_pF_q$

Siegel a montré que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la fonction hypergéométrique généralisée (dite confluente)

$${}_pF_p\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_p \end{matrix}; z\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_p)_n} \frac{z^n}{n!},$$

est une E-fonction lorsque les paramètres a_j et b_j sont tous dans $\mathbb{Q}$. C'est plus généralement le cas de

$$(5.6) \qquad {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1, \ldots a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}; z^r\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n (rn)!}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} \frac{z^{rn}}{(rn)!}$$

lorsque $1 \leqslant p \leqslant q$, avec $r := q + 1 - p$.

La difficulté est de montrer que le plus petit dénominateur commun de quantités de la forme $(a)_m/(b)_m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ a une croissance au plus géométrique en n lorsque a et b sont rationnels. La fonction exponentielle et la fonction de Bessel $J_0(z)$ sont des cas particuliers de (5.6). Il s'avère que la rationalité des a_j et b_j n'est pas nécessaire dans (5.6), comme le montre l'exemple suivant : pour tout $a \in \overline{\mathbb{Q}} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$,

$$ {}_1F_1\left[\begin{matrix} a+1 \\ a \end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n}{n!(a)_n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a+n}{n!a} z^n = \Big(1+\frac{1}{a}\Big)e^z. $$

Galochkin [72, 73] a caractérisé les E-fonctions hypergéométriques de la forme (5.6).

***Théorème 5.7* (Galochkin).** *Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant p \leqslant q$. Soient $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{C}$ et $(b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ tels que $a_j \neq b_k$ pour tout j, k. La série ${}_pF_q[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z^{q-p+1}]$ est une E-fonction (au sens large) si et seulement si les deux conditions suivantes ont lieu :*

(i) Les a_j et b_j sont tous dans $\overline{\mathbb{Q}}$;

(ii) Les a_j et b_j qui ne sont pas rationnels (s'il y en a) peuvent être groupés en $k \leqslant p$ paires $(a_{j_1}, b_{j_1}), \ldots, (a_{j_k}, b_{j_k})$ telles que $a_{j_\ell} - b_{j_\ell} \in \mathbb{N}$ pour $\ell = 1, \ldots, k$.

On peut montrer que les E-fonctions ne sont pas toutes hypergéométriques de la forme de Galochkin mais Siegel a formulé le problème suivant [159, p. 58].

***Problème* (Siegel).** *Est-ce que toute E-fonction est un polynôme à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ en des fonctions hypergéométriques de la forme ${}_pF_q[a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; \lambda z^{q-p+1}]$, $q \geqslant p \geqslant 1$, avec des paramètres $a_j, b_j, \lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$?*

Il doit être entendu que $\lambda, p, q, q-p$ peuvent prendre différentes valeurs dans le polynôme. Une réponse positive impliquerait en particulier que toute E-fonction est une E-fonction au sens strict. La réponse à ce problème est positive pour les E-fonctions au sens strict qui vérifient une équation différentielle d'ordre $\leqslant 2$. En effet Gorelov [77, 78] a montré que pour une telle E-fonction stricte $F(z)$, on peut trouver $a(z), b(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ et $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{Q}}$ tels que

$$ F(z) = a(z)e^{\mu z}{}_1F_1[\alpha; \beta; \lambda z] + b(z)e^{\mu z}{}_1F_1'[\alpha; \beta; \lambda z]. \tag{5.8} $$

La fonction de Bessel

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n}}{n!^2} = {}_1F_2\left[\begin{matrix}1\\1,1\end{matrix};(iz/2)^2\right]$$

est d'ordre différentiel 2 et elle bien de la forme (5.8), comme le montre une identité de Kummer [1, p. 509, 13.6.1] :

$$J_0(z) = e^{-iz}{}_1F_1\left[\begin{matrix}1/2\\1\end{matrix};2iz\right].$$

Voir également [145] pour une démonstration de (5.8) différente de celle de Gorelov mais valable uniquement pour les E-fonctions strictes. André a remarqué que la E-fonction

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big) z^n,$$

dont l'équation minimale donnée en (5.3) est d'ordre 3, vaut

$$ze^z{}_2F_2[1,1;2,2,-z]$$

et est donc de la forme demandée par Siegel. Au delà de ce cas particulier intéressant, le problème de Siegel est toujours ouvert pour les E-fonctions d'ordre différentiel $\geqslant 3$. Voir [65] pour un résultat suggérant une réponse négative au problème de Siegel en général.

5.3. Le théorème de Siegel-Shidlovskii

En définissant les E-fonctions, Siegel avait pour but d'étendre les théorèmes d'Hermite, Lindemann et Weierstrass sur l'exponentielle à une classe plus générale de fonctions, qui contienne en particulier les fonctions[(10)]

$$\begin{aligned}K_\lambda(z) := \Gamma(\lambda+1)(z/2)^{-\lambda}J_\lambda(z) :&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n!(\lambda+1)_n}\\ &= {}_1F_2\left[\begin{matrix}1\\1,1+\lambda\end{matrix};(iz/2)^2\right].\end{aligned}$$

(10) On utilise les propres notations de Siegel pour les fonctions K_λ et J_λ. Sa notation K_λ n'est pas standard et il ne faut pas la confondre avec les autres fonctions de Bessel elles aussi notées K_λ dans [1, pp. 374-376].

Pour $\lambda \in \mathbb{Q} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant -1}$, la fonction $K_\lambda(z)$ est une E-fonction, et c'est aussi le cas de la fonction de Bessel $J_\lambda(z)$ si $\lambda \geqslant 0$ est un entier. La fonction $J_\lambda(z)$ est une solution de l'équation de Bessel

$$y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) + \Big(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\Big) y(z) = 0$$

et, lorsque 2λ n'est pas un entier impair, la fonction $J_{-\lambda}(z)$ en est une autre, $\mathbb{C}$-indépendante de $J_\lambda(z)$. Il est important de noter que 0 est la seule singularité finie (i.e., pôle d'un coefficient) de cette équation différentielle.

***Théorème 5.9* (Siegel [158]).** *Soit $\lambda \in \mathbb{Q} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant -1}$ tel que 2λ n'est pas un entier impair. Alors pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, les nombres $K_\lambda(\alpha)$ et $K'_\lambda(\alpha)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Il suit que les zéros non nuls de la fonction de Bessel J_λ sont transcendants. Si 2λ est un entier impair $\geqslant 1$, il est connu que $K_\lambda(z)$ est de la forme $a_\lambda(z) e^{iz} + b_\lambda(z) e^{-iz}$ avec $a_\lambda(z), b_\lambda(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ non tous les deux identiquement nuls et avec au plus 0 comme pôle. Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, la transcendance de $K_\lambda(\alpha)$ découle donc du théorème de Lindemann-Weierstrass, mais $K_\lambda(\alpha)$ et $K'_\lambda(\alpha)$ sont algébriquement dépendants sur $\mathbb{Q}$.

Siegel a indiqué une intéressante conséquence de son théorème. Il est en effet connu que

$$i\,\frac{J_{\lambda-1}(2ix)}{J_\lambda(2ix)} = \frac{\lambda}{x} + \frac{1\,|}{|(\lambda+1)/x} + \frac{1\,|}{|(\lambda+2)/x} + \frac{1\,|}{|(\lambda+3)/x} + \cdots$$

et que

$$J'_\lambda(z) = \frac{\lambda}{z}\, J_\lambda(z) + J_{\lambda+1}(z).$$

En appliquant le théorème de Siegel avec $\lambda = 0$ et $z = 2i$, la transcendance du quotient $iJ_0(2i)/J'_0(2i) = iJ_0(2i)/J_1(2i)$ assure celle de la fraction continue régulière $[1; 2, 3, 4, 5, \dots]$.

La méthode utilisée par Siegel en 1929 était très novatrice et nous n'en donnerons qu'un aperçu. Il l'a développée davantage encore dans son livre [159] en 1949 et elle a culminé avec l'apport fondamental de Shidlovskii [155] en 1959, qui a levé un important problème technique (i.e., la condition de *normalité de Siegel*) lui permettant de compléter le programme de Siegel pour les E-fonctions.

Le contexte est le suivant. On se donne un vecteur colonne $Y(z) = {}^t(F_1(z),\dots,F_n(z))$ de E-fonctions solution d'un système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ où $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Ici, $Y'(z) = {}^t(F_1'(z),\dots,F_n'(z))$. En particulier, si l'on se donne une E-fonction $F(z)$ solution d'une équation différentielle $Ly(z) = 0$ d'ordre $\mu \geqslant 1$ où $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$, le vecteur $Y(z) = {}^t(F(z), F'(z),\dots,F^{(\mu-1)}(z))$ est solution du système différentiel $Y'(z) = \mathscr{L}(z)Y(z)$ où $\mathscr{L}(z) \in M_{\mu\times\mu}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ est la matrice compagnon de L.

Théorème 5.10 **(Siegel-Shidlovskii).** *Soit $Y(z) = {}^t(F_1(z),\dots,F_n(z))$ un vecteur de E-fonctions de $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ solution d'un système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ avec $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Soit $T(z)$ un dénominateur commun des coefficients de $A(z)$, de degré minimal.*

Alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$,

$$\deg\operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)\big(F_1(z),\dots,F_n(z)\big) = \deg\operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}\big(F_1(\alpha),\dots,F_n(\alpha)\big).$$

Ce théorème est bien une généralisation de celui de Lindemann-Weierstrass. En effet, donnons-nous des nombres algébriques α_1, $\dots,\alpha_n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On sait alors que

$$\deg\operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)(e^{\alpha_1 z},\dots,e^{\alpha_n z}) = n.$$

De plus,

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 z}\\ e^{\alpha_2 z}\\ \vdots\\ e^{\alpha_n z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 z}\\ e^{\alpha_2 z}\\ \vdots\\ e^{\alpha_n z}\end{pmatrix}, \qquad T(z) = 1.$$

En prenant $\alpha = 1$ dans le théorème 5.10, on a donc

$$\deg\operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}(e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2},\dots,e^{\alpha_n}) = n.$$

Cet exemple montre au passage que le degré de transcendance peut être maximal. Ce n'est pas le seul exemple car le théorème 5.10 contient également le théorème 5.9, obtenu avec le vecteur $Y(z) =$

${}^t(K_\lambda(z), K'_\lambda(z))$ et le système différentiel

$$\begin{pmatrix} K'_\lambda(z) \\ K''_\lambda(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda^2/z^2) - 1 & -1/z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_\lambda(z) \\ K'_\lambda(z) \end{pmatrix},$$

avec $T(z) = z$ si $\lambda = 0$ et $T(z) = z^2$ sinon. En effet, Siegel a montré [158] que ces fonctions sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ lorsque λ satisfait aux hypothèses du théorème 5.9.

Le degré de transcendance peut ne pas être maximal dans le théorème 5.10 comme on le voit immédiatement avec le vecteur de E-fonctions ${}^t(\cos(z), \sin(z))$ puisque $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$. Voici un autre exemple beaucoup moins évident. Considérons la série hypergéométrique

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^2(6n)!} z^n = {}_1F_4\left[\begin{matrix} 1/2 \\ 1/6, 1/3, 2/3, 5/6 \end{matrix}; z\right],$$

qui est solution de l'opérateur différentiel hypergéométrique

$$L := 5832z^4\Big(\frac{d}{dz}\Big)^5 + 46656z^3\Big(\frac{d}{dz}\Big)^4 + 83754z^2\Big(\frac{d}{dz}\Big)^3 + 27540z\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 + (180 - 2z)\frac{d}{dz} - 1.$$

La série $f(z)$ n'est pas une E-fonction mais $F(z) := f(z^4)$ en est une car elle est de la forme (5.6). Le vecteur ${}^t(F, F', F'', F''', F'''')$ est donc solution d'un système différentiel à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ que l'on déduit de L. Par des arguments de théorie de Galois différentielle, Beukers a explicité dans [24, pp. 16-17] une forme quadratique $Q(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \neq 0$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ telle que $Q(F, F', F'', F''', F'''') = 0$ identiquement. Ces considérations procurent un exemple non trivial pour lequel le degré de transcendance n'est pas maximal dans le théorème 5.10. Voir également [66] pour un exemple similaire lié à la E-fonction

$${}_1F_2\left[\begin{matrix} 1/2 \\ 1/3, 2/3 \end{matrix}; z^2\right].$$

Citons une intéressante conséquence du théorème de Siegel-Shidlovskii, qui est implicite dans les cinq dernières lignes de l'article de

Mahler [109] et qui a été généralisée par l'auteur dans [137]. Rappelons que γ est la constante d'Euler et

$$\delta := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x}\, dx$$

la constante de Gompertz.

Théorème 5.11. *Au moins l'un des deux nombres γ ou δ est transcendant sur $\mathbb{Q}$.*

La démonstration est basée sur les faits suivants. Considérons les fonctions

$$\mathscr{E}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!n} \quad \text{et} \quad \mathscr{G}(z) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+z}\, dx,$$

définies sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \smallsetminus]-\infty, 0]$ respectivement. On définit $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ avec $-\pi < \arg(z) < \pi$. On vérifie alors que, pour tout $z \in \mathbb{C} \smallsetminus]-\infty, 0]$, on a $\mathscr{E}(z) = -\gamma - \log(z) - e^{-z}\mathscr{G}(z)$ (voir [137, Prop. 1]). En particulier, en $z = 1$, on a

$$\mathscr{E}(1) = -\gamma - \frac{\delta}{e}. \tag{5.12}$$

Or les E-fonctions $\mathscr{E}(z)$ et $\exp(-z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-z} \\ \mathscr{E}(z) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/z & 1/z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-z} \\ \mathscr{E}(z) \end{pmatrix}.$$

Le théorème 5.10 implique donc que, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, on a

$$\begin{aligned} 2 = \deg \mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)\big(1, e^{-z}, \mathscr{E}(z)\big) &= \deg \mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}\big(1, e^{-\alpha}, \mathscr{E}(\alpha)\big) \\ &= \deg \mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}\big(e^{-\alpha}, \mathscr{E}(\alpha)\big). \end{aligned}$$

En particulier, les nombres e^{-1} et $\mathscr{E}(1)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. L'équation (5.12) force donc au moins l'un des nombres γ ou δ a être transcendant. En effet, dans le cas contraire, (5.12) serait une relation polynomiale sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre e^{-1} et $\mathscr{E}(1)$.

On sait aussi montrer le fait (plus faible) qu'au moins un des deux nombres γ et δ est irrationnel en utilisant des approximants de Padé *explicites* de type I des fonctions $1, \mathscr{E}(z)$ et e^{-z}, voir [137]. Ces approximants sont construits à l'aide de généralisation des polynômes de Legendre et leurs bonnes propriétés permettent d'obtenir la mesure suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q(\varepsilon) > 0$ (explicitable) tel que pour tous entiers $p, r \in \mathbb{Z}$ et $q \geqslant Q(\varepsilon)$, on ait

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| + \left|\delta - \frac{r}{q}\right| > \frac{1}{q^{3+\varepsilon}}.$$

Si par exemple $\delta = a/b$ était un rationnel, en posant $p = p'b$, $q = q'b$ et $r = q'a$ avec p', q' des entiers « quelconques », on obtiendrait une mesure d'irrationalité du type $|\gamma - p'/q'| > 1/q'^{3+\varepsilon}$, et une mesure similaire pour δ si γ était un rationnel.

Nous indiquons maintenant les étapes de la démonstration du théorème 5.10 de Siegel-Shidlovskii lorsque chaque $F_j(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$. On suit la trame proposée par Baker [13, Chap. 11]. Contrairement au cas de plusieurs exponentielles, on ne connaît pas explicitement les approximants de Padé de type I ou de type II pour la famille $(F_k(z))_{k=1,\ldots,n}$, pas même pour les fonctions de Bessel. Siegel et Shidlovskii ont utilisé à la place des approximants de type Padé (de type I) inexplicites obtenus à l'aide du

***Lemme 5.13* (Lemme de Siegel).** *Soient N et M deux entiers tels que $1 \leqslant M < N$. Soit $B := (b_{j,k})_{1\leqslant j\leqslant M, 1\leqslant k\leqslant N} \neq 0$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors le système linéaire homogène $BX = 0$, où $X \in \mathbb{Z}^N$, admet une solution non nulle ${}^t(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{Z}^N$ telle que*

$$\max_{j=1,\ldots,N} |x_j| \leqslant \big(N\mathscr{B}\big)^{M/(N-M)},$$

où $\mathscr{B} = \max_{j,k} |b_{j,k}|$.

La preuve du lemme est astucieuse et s'obtient en appliquant le principe des tiroirs de Dirichlet. La solution ${}^t(x_1, \ldots, x_N)$ n'est pas explicitement connue.

On se donne maintenant un vecteur $Y(z) = {}^t(F_1(z), \ldots, F_n(z))$ de E-fonctions solution d'un système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ où $A(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}(z))$. On suppose de plus que les $F_j(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$. Fixons également $\varepsilon \in]0, 1[$.

Proposition 5.14 **(Approximants de type Padé de type I de E-fonctions)**
Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout entier $r \geqslant c_1$, il existe des $P_{j,r}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $j = 1, \ldots, n$, non tous nuls, de degré au plus r tels que

$$R(z) := \sum_{j=1}^{n} P_{j,r}(z)F_j(z) = \sum_{m=M}^{\infty} \rho_{m,r} z^m = \mathscr{O}(z^M),$$

avec $M := n(r+1) - 1 - [\varepsilon r]$, $|\rho_{m,r}| \leqslant r!/m!^{1-\varepsilon}$ et $H(P_{j,r}) \leqslant r!^{1+\varepsilon}$ pour chaque j.

La constante c_1 dépend des F_j et de ε.

La démonstration de cette proposition se ramène à la résolution d'un système linéaire homogène avec strictement plus d'inconnues que d'équations à l'aide du lemme de Siegel. Le système différentiel n'est pas utilisé à ce stade. Une difficulté primordiale se présente : on ne sait pas montrer que $R(\alpha) \neq 0$ en tout point algébrique α tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Tout le travail va être de construire une fonction très similaire à $R(z)$ et qui ne s'annule pas en un tel α.

L'entier r est dorénavant implicitement supposé $\geqslant c_1$. L'étape suivante consiste alors à construire d'autres approximants de type Padé

$$R_k(z) := \sum_{j=1}^{n} P_{k,j,r}(z)F_j(z) = \sum_{m=M_k}^{\infty} \rho_{k,m,r} z^m = \mathscr{O}(z^{M_k})$$

qui conservent des propriétés très proches de celles de $R(z)$ et des $P_{j,r}(z)$ données à la proposition 5.14 : $M_k \geqslant M-k+1$ et $\deg(P_{k,j,r}) \leqslant r + (k-1)u$, où $u = \max(\deg(T), \deg(TA))$.

On pose $R_1(z) = T(z)R'(z)$: le système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ permet alors de remplacer les dérivées des fonctions $F_j(z)$ par des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{j=1}^{n} Q_{j,r}(z)F_j(z)$ avec des $Q_{j,r}(z) \in T(z)^{-1}\mathbb{Q}[z]$ et donc $R_1(z) = \sum_{j=1}^{n} P_{1,j,r}(z)F_j(z)$ avec $P_{1,j,r}(z) \in \mathbb{Q}[z]$. On définit $R_{k+1}(z)$ comme $T(z)R_k'(z)$ et on construit les polynômes $P_{k+1,j,r}(z)$ par le même procédé.

Aparté. On distingue ici l'intérêt d'introduire les matrices $A_k(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}(z))$ telles que $Y^{(k)}(z) = A_k(z)Y(z)$, qui permettent également de construire les $R_k(z)$. Elles satisfont à la relation de récurrence $A_{k+1}(z) = A_k'(z) + A_k(z)A(z)$, $A_1(z) = A(z)$, où la dérivée matricielle se fait coefficient par coefficient. Il est facile de voir par récurrence que $T^k(z)A_k(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}[z])$. Ces matrices apparaîtront surtout dans l'étude des G-fonctions.

L'apport crucial de Shidlovskii à la théorie des E-fonctions est le résultat suivant, dont la démonstration est peu évidente.

***Lemme 5.15* (Lemme de Shidlovskii).** *Le déterminant de la matrice $(P_{k,j,r}(z))_{1\leqslant k,j\leqslant n}$ n'est pas identiquement nul.*

On démontre ensuite un lemme similaire où l'on substitue un nombre algébrique à z. On continue pour cela à utiliser les fonctions $R_k(z)$ mais pour des valeurs de k éventuellement $> n$.

Lemme 5.16. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Il existe une constante $c_2 \geqslant 0$ et n entiers distincts $1 \leqslant k_1, \ldots, k_n \leqslant \varepsilon r + c_2$ tels que le déterminant de la matrice $(P_{k_m,j,r}(z))_{1\leqslant m,j\leqslant n}$ ne s'annule pas en $z=\alpha$.*

La constante c_2 dépend des F_j, ε, α mais pas de r.

À partir de ce lemme, on peut alors démontrer la proposition suivante.

Proposition 5.17. *Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que pour tout entier $r \geqslant c_3$, il existe des entiers $q_{k,j,r}$ $(1 \leqslant k, j \leqslant n)$ tels que* $\det\big((q_{k,j,r})_{1\leqslant k,j\leqslant n}\big) \neq 0$ *et*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} q_{k,j,r} F_j(\alpha)\Big| \leqslant \frac{1}{r!^{n-1-16\varepsilon n}}, \quad |q_{k,j,r}| \leqslant r!^{1+16\varepsilon} \tag{5.18}$$

pour tout $k = 1, \ldots, n$. La constante c_3 dépend des F_j, ε, α.

Remarquons maintenant qu'au moins un des nombres $F_j(\alpha)$ n'est pas nul car α n'est pas une singularité du système $Y'(z) = A(z)Y(z)$. Il découle ainsi de la proposition précédente qu'il existe au moins un entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sum_{j=1}^{n} q_{k,j,r}F_j(\alpha) \neq 0$. Grâce aux majorations (5.18) et en choisissant ε suffisamment petit, on obtient alors le

Théorème 5.19. *Soit*

$$Y(z) = {}^t(F_1(z), \ldots, F_n(z))$$

un vecteur de E-fonctions de $\mathbb{Q}[\![z]\!]$ solution d'un système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ avec $A(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}(z))$. Supposons que les fonctions $F_1(z), \ldots, F_n(z)$ soient linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$.

Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$, les nombres

$$F_1(\alpha), \dots, F_n(\alpha)$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Pour donner une idée du passage de la proposition 5.17 au théorème 5.19, indiquons que la proposition 4.3 dans la partie 4.1 s'appliquerait avec $\lambda(r) = \ln(r!)$ si l'on avait un minorant de la forme $1/r!^{n-1-c\varepsilon n}$ à gauche de (5.18). Tout le travail consiste à obtenir la même conclusion que celle de la proposition 4.3 en l'absence d'une telle minoration.

Dans le cas général où les $F_j(z)$ sont dans $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, l'analogue exact du théorème 5.19 ne découle pas de la construction de Siegel-Shidlovskii, qui donne seulement l'énoncé suivant[(11)] une fois démontré l'analogue sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de la proposition 5.17.

Théorème 5.20. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\beta)$ un corps de nombres. Soit $Y(z) = {}^t(F_1(z), \dots, F_n(z))$ un vecteur de E-fonctions de $\mathbb{K}[\![z]\!]$ solution d'un système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ avec $A(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{K}(z))$. Supposons que les fonctions $F_1(z), \dots, F_n(z)$ soient linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}(z)$.*

Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$, le rang sur $\mathbb{K}$ de la famille $(F_1(\alpha), \dots, F_n(\alpha))$ est $\geqslant n/[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Si de plus $\beta \notin \mathbb{R}$, alors ce rang est $\geqslant 2n/[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

Voir [157, p. 115, Lem. 17]. Ce dernier énoncé suffit toutefois pour démontrer ce que l'on veut grâce à *l'astuce de Siegel* qui permet de contourner l'absence d'une équation fonctionnelle telle que $e^{x+y} = e^x e^y$: comme les E-fonctions forment un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$, une relation polynomiale sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre des E-fonctions $F_1(z), \dots, F_n(z)$ n'est rien d'autre qu'une relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les diverses E-fonctions que l'on obtient en faisant des produits des $F_j(z)$. Après

(11) L'énoncé optimal (i.e., où le rang vaut n exactement) a été obtenu en 2006 par Beukers [23] pour les E-fonctions au sens strict, et par André [10] en 2014 pour les E-fonctions au sens large. L'analogue de la proposition 5.17 correspond au cas où $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $q_{k,j,r} \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ et $|q_{k,j}|$ est remplacé par $\max|\sigma(q_{k,j,r})|$ où le maximum porte sur tous les $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

un travail assez technique, on ramène alors la démonstration du théorème 5.10 à une application du théorème 5.20. De plus, cette astuce permet de prendre en compte les relations homogènes entres valeurs de E-fonctions. On obtient donc finalement le

Théorème 5.21 **(Siegel-Shidlovskii, version homogène)**
Soit $Y(z) = {}^t(F_1(z), \dots, F_n(z))$ *un vecteur de* E*-fonctions de* $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ *solution d'un système différentiel* $Y'(z) = A(z)Y(z)$ *avec* $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. *Soit* $T(z)$ *un dénominateur commun des coefficients de* $A(z)$*, de degré minimal.*

Alors pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que* $\alpha T(\alpha) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{deg\,tr\,hom}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)\bigl(F_1(z), \dots, F_n(z)\bigr) \\ = \operatorname{deg\,tr\,hom}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}\bigl(F_1(\alpha), \dots, F_n(\alpha)\bigr).\end{aligned}$$

Notons que le théorème 5.10 en découle puisque l'on peut choisir la E-fonction $F_1(z) = 1$. L'ensemble des polynômes homogènes à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ en $F_1(z), F_2(z), \dots, F_n(z)$ coïncide alors avec l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ en $F_2(z), \dots, F_n(z)$, et cela vaut aussi en remplaçant z par un nombre algébrique α.

À la suite des travaux de Shidlovskii, de nombreux auteurs (de l'école russe principalement) ont cherché à déterminer des classes spéciales de E-fonctions algébriquement indépendantes, principalement hypergéométriques. Par exemple, Shidlovskii [13, 156] a montré le résultat suivant. Soient un entier $k \geqslant 1$, la E-fonction $\Phi_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{kn}/n!^k$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha \neq 0$; alors pour tout entier $r \geqslant 1$, les $r(r+1)/2$ nombres $\Phi_k^{(\ell)}(\alpha)$, $1 \leqslant \ell \leqslant k$, $1 \leqslant k \leqslant r$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

On reviendra dans la partie 7.1 sur les travaux récents qui ont permis d'améliorer les résultats présentés dans cette partie.

5.4. Définition et propriétés des G-fonctions

Nous nous tournons maintenant vers la deuxième classe de séries entières que Siegel a introduite en 1929 dans [158, Chap. VII] et qui imitent les propriétés de $\log(1-z)$.

***Définition 5.22* (Siegel).** Une G-fonction est une série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ telle que

(i) $F(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et tout $n \geqslant 0$, on ait $|\sigma(a_n)| \leqslant C^{n+1}$.

(iii) Il existe une suite d'entiers $(D_n)_{n\geqslant 0}$ et une constante $D > 0$ telles que pour tous entiers $m, n \geqslant 0$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$, on ait $D_n a_m \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ et $1 \leqslant |D_n| \leqslant D^{n+1}$.

Siegel écrit « *Solche Funktionen mögen G-Funktionen genannt werden ; zu ihnen gehört trivialerweise die geometrische Reihe* », c'est-à-dire « De telles fonctions seront appelées G-fonctions ; la série géométrique en est un exemple trivial. »[(12)]

Notons que Siegel commence par introduire les séries de la forme $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ satisfaisant à une équation différentielle sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n/n! \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ est une E-fonction au sens large. Mais il précise immédiatement qu'il ne considérera en fait que des séries satisfaisant à la définition 5.22 plus stricte et qu'il les appellera des G-fonctions. De ce fait, la littérature consacrée aux G-fonctions ne concerne essentiellement que les séries satisfaisant à la définition 5.22.[(13)]

Dans toute la suite, une « G-fonction » ou une « G-fonction stricte » désigneront toute série satisfaisant à la définition 5.22. *Une « G-fonction au sens large » désignera une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n/n!$ est une E-fonction au sens large.*

[(12)] Cette phrase explique la lettre G.

[(13)] On ne sait pas pourquoi Siegel n'a pas considéré les G-fonctions au sens large. Notons par ailleurs qu'étant donnée une série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, la condition « $|u_n| \leqslant n!^{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geqslant N(\varepsilon)$ » n'implique pas que $f(z)$ soit holomorphe en $z = 0$ (prendre $u_n = n!^{1/\sqrt{\ln(n)}}$ pour $n \geqslant 2$ par exemple). Toutefois, si $f(z)$ satisfait en plus à une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{C}(z)$, elle est alors *de facto* holomorphe en 0 par un théorème de Perron [127], et on a donc même une borne de la forme $|u_n| \leqslant C^{n+1}$. La distinction éventuelle entre strict et large ne concerne donc que la condition (iii) sur les dénominateurs, aussi bien pour les G- que pour les E-fonctions. Voir la discussion dans [6, p. 715].

Commençons par des remarques similaires à celles faites pour les E-fonctions. La condition (i) signifie que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait à une récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[n]$. Il en découle que les a_n vivent dans un certain corps de nombres galoisien $\mathbb{K}$, et donc qu'il suffit au point (ii) de considérer les éléments de $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, qui sont en nombre fini. De plus, pour chaque $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, la série $F_\sigma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(a_n) z^n$ est une G-fonction, pour les mêmes raisons que la propriété correspondante sur les E-fonctions.

Parmi les exemples les plus simples de G-fonctions, citons les polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ et plus généralement les fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et holomorphes en $z = 0$,[14] dont par exemple

$$\frac{1}{(1-\xi z)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s)_n}{n!}(\xi z)^n \qquad (s \in \mathbb{Q}, \xi \in \overline{\mathbb{Q}}) \ \ (*),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} z^k = \frac{2}{1+\sqrt{1-4z}} \ \ (*),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{2n} z^n = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-16z}}}{\sqrt{2-32z}} \ \ (*),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} \right) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-6z+z^2}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{2n} z^n = \frac{2\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin(\frac{3}{2}\sqrt{3z})\right)}{\sqrt{4-27z}} \ \ (*),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(30n)!n!}{(15n)!(10n)!(6n)!} z^n \ \ (*)$$

qui est de degré 483840 sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ (voir [147]). Les G-fonctions ne sont évidemment pas toutes algébriques. Parmi les G-fonctions transcendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, on trouve

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \ \ (*), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^2 \binom{2n}{n}} = 2\arcsin(z/2)^2 \ \ (*)$$

---

(14) Cela découle du théorème d'Eisenstein [52] qui, étant donnée une fonction algébrique $y(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et holomorphe en 0, assure l'existence d'un entier $c \neq 0$ tel que $cy(cz) \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[\![z]\!]$. L'existence d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par $y(z)$ est quant à elle un résultat du folklore, voir par exemple [41].

$$\log(1-z)^s, \qquad \mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} \ (*), \qquad \sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}\cdots n_k^{s_k}}$$

où $s, s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{n!^6}\left(\frac{z\sqrt{1-2z}}{\sqrt{3-\sqrt{4-5z}}}\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{n}^2\right)z^n.$$

(Le symbole $(*)$ après une série signifie qu'elle est de nature hypergéométrique, voir plus bas). La dernière série est la série génératrice des nombres d'Apéry $u_n := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{n}^2$ pour $\zeta(3)$. Montrons que c'est une G-fonction. On remarque tout d'abord que, pour tout $n \geqslant 0$, $1 \leqslant u_n \leqslant (n+1)64^n$ (puisque $\binom{a}{b} \leqslant 2^a$ pour des entiers $0 \leqslant b \leqslant a$), ce qui assure que (ii) est satisfaite. (iii) l'est aussi trivialement puisque les u_n sont des entiers. Moins trivial est le fait que la série est solution de

$$\begin{aligned} z^2(z^2-34z+1)y'''(z) + z(6z^2-153z+3)y''(z) \\ + (7z^2-112z+1-112)y'(z) + (z-5)y(z) = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que (i) est satisfaite. Cette équation différentielle est la traduction du fait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait à la récurrence linéaire

$$n^3u_n - (34n^3-51n^2+27n-5)u_{n-1} + (n-1)^3u_{n-2} = 0, \ \ u_0 = 1, \ u_1 = 5,$$

dont l'histoire de la découverte est racontée dans [130]. L'algorithme de Zeilberger [128, p. 101] permet maintenant de déterminer automatiquement la récurrence linéaire satisfaite par une telle somme binomiale, et donc l'équation différentielle linéaire satisfaite par sa série génératrice.

Quasiment tous ces exemples sont des G-fonctions dans $\mathbb{Q}[\![z]\!]$. De nouveau, une G-fonction quelconque ne diffère pas fondamentalement de ce cas. En effet, pour toute G-fonction $F(z) \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ avec $\mathbb{K}$ un corps de nombres galoisien de degré d sur $\mathbb{Q}$, il existe $\beta \in \mathbb{K}$, $r > 0$, et des G-fonctions $F_0(z), \ldots, F_{d-1}(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$, on ait

$$F(z) = \sum_{j=0}^{d-1} \beta^j F_j(z).$$

Les mêmes causes produisant les mêmes effets, la démonstration est la même que pour les E-fonctions (au sens large) avec ici $F_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{j,n} z^n$ et β un élément primitif de $\mathbb{K}$; le seul point auquel il faut faire attention est que r est le plus petit des rayons de convergence de F et des F_j, et qu'il peut être strictement inférieur à celui de F.

Revenons maintenant au cas de $F(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$: elle satisfait alors à une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$, (ii) dans la définition 5.22 se réduit uniquement à $|a_n| \leqslant C^{n+1}$ et (iii) signifie en particulier que $D_n a_m \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leqslant m \leqslant n$. Une série $F(z)$ dans $\mathbb{Z}[\![z]\!]$ est donc une G-fonction dès lors qu'elle satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$ et qu'elle est holomorphe en $z = 0$. En effet, (iii) est automatiquement satisfaite et (ii) découle de $\limsup_n |a_n|^{1/n} = 1/R$ où $R > 0$ est le rayon de convergence de F, qui est nécessairement fini sauf si F est un polynôme (qui est aussi une G-fonction). Ce type de séries se rencontre fréquemment dans des problèmes combinatoires, par exemple pour l'énumération de chemins à pas bornés prescrits et confinés dans des parties de $\mathbb{Z}^2$; voir [29] et [30], où sont utilisées des heuristiques basées sur des conjectures classiques sur les G-fonctions.

Parmi les nombres obtenus comme valeurs de G-fonctions (en un point algébrique), on a donc les nombres algébriques, les puissances entières de logarithmes de nombres algébriques, les $\zeta(s)$ pour tout entier $s \geqslant 2$ et plus généralement les valeurs zêta multiples $\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ pour des entiers $s_1 \geqslant 2, s_2, \ldots, s_k \geqslant 1$. Il y a également des nombres que l'on obtient à l'aide des fonctions Gamma $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ (pour $\mathrm{Re}(s) > 0$) et Bêta $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ (pour $\mathrm{Re}(x), \mathrm{Re}(y) > 0$), qui peuvent être prolongées à des domaines plus grands grâce à l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. On sait que $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ et que si x, y sont des rationnels de $]0,1[$, $B(x,y)$ est une valeur de G-fonction, comme le montre l'identité hypergéométrique (voir [58])

$$B(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-n)_n}{n!(n+x)} \tag{5.23}$$

que l'on déduit trivialement de la définition intégrale de Bêta ci-dessus. En utilisant l'équation fonctionnelle de Gamma dans (5.23), on montre alors que $B(x,y)$ est une valeur de G-fonction pour tous rationnels x et y en lesquels elle est définie. Il est conjecturé que si $s \in \mathbb{Q}$, $\Gamma(s)$ n'est une valeur de G-fonction que si $s \in \mathbb{N}$, $s \neq 0$. En revanche, on sait que si $s = a/b \in \mathbb{Q}$ avec $a, b \geqslant 1$, alors $\Gamma(a/b)^b$ est une valeur de G-fonction. En particulier, $\pi = B(1/2, 1/2) = \Gamma(1/2)^2$ est une valeur de G-fonction, mais on peut aussi le déduire de $\pi/4 = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(2n+1)$ ou du fait que c'est un logarithme d'un nombre algébrique. Notons que $1/\pi$ est aussi une valeur de G-fonction, comme le montre l'identité de Ramanujan (8.2) dans la partie 8.

La classe des G-fonctions possède de nombreuses propriétés structurelles. Ces séries ont un rayon de convergence non nul, fini sauf si elles sont polynomiales ; l'équation différentielle permet de les prolonger analytiquement au plan complexe muni d'un nombre fini de coupures adéquates. Si $F(z)$ est une G-fonction et $\alpha(z)$ est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, holomorphe en 0 et nulle en $z = 0$, alors $F(\alpha(z))$ est une G-fonction. L'intersection des E-fonctions et des G-fonctions est réduite à $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, ce qui au passage donne beaucoup d'exemples de séries qui ne sont pas des G-fonctions. Une conséquence du théorème 6.8 énoncé dans la partie 6.2 est que les fonctions $(1-z)^s$ avec $s \in \overline{\mathbb{Q}} \smallsetminus \mathbb{Q}$ ne sont pas des G-fonctions.

Les G-fonctions forment un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ pour les opérations usuelles d'addition et multiplication des séries formelles. Cet anneau est stable par d/dz et $\int_0^z$. Vérifions-le pour $\int_0^z F(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n/(n+1))z^{n+1}$. Le point (i) est satisfait de la même façon que pour les E-fonctions. De plus, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on a $\sigma(a_n/(n+1)) = \sigma(a_n)/(n+1)$ et (ii) en découle. Enfin, pour (iii), en notant $D_n \geqslant 1$ le plus petit dénominateur commun des a_m, $0 \leqslant m \leqslant n$, et $d_n = \mathrm{ppcm}\{1, 2, \ldots, n\}$, on voit que $D_n d_{n+1}$ est un dénominateur commun des $a_m/(m+1)$, $0 \leqslant m \leqslant n$, et $0 < D_n d_{n+1} \leqslant D^{n+1}3^{n+1}$.

Les unités de cet anneau sont les fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, holomorphes en $z = 0$ et qui ne s'annulent pas en $z = 0$. Ce résultat, aussi dû à André [4, p. 123, Scholie], est beaucoup plus compliqué à démontrer que son pendant pour les E-fonctions. Il utilise en particulier un intéressant résultat de Harris-Sibuya [82] : si $y(z)$ et $1/y(z)$ satisfont à des équations différentielles linéaires non nulles à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, alors $y'(z)/y(z)$ est une fonction algébrique sur $\mathbb{C}(z)$, où $\mathbb{C}$ peut en fait être remplacé par n'importe quel corps de caractéristique 0.

Enfin, notons que les G-fonctions sont stables par produit de Hadamard, c'est-à-dire que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sont des G-fonctions, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ en est une aussi.(15)

5.5. Fonctions hypergéométriques ${}_{p+1}F_p$

Plusieurs des exemples donnés plus haut s'obtiennent par spécialisation de la fonction hypergéométrique généralisée

$$ {}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix}; z\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_{p+1})_n}{n!(b_1)_n \cdots (b_p)_n} z^n, \tag{5.24} $$

qui est une G-fonction lorsque les paramètres a_j et b_j sont tous dans $\mathbb{Q}$. Comme dans le cas des E-fonctions, il s'avère que la rationalité des a_j et b_j n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple suivant : pour tout $a \in \overline{\mathbb{Q}} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$,

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a+1, 1 \\ a \end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n}{(a)_n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a+n}{a} z^n = \frac{a(1-z)+z}{a(1-z)^2}. $$

La démonstration de Galochkin se transpose immédiatement et on a la caractérisation suivante des G-fonctions hypergéométriques. Considérons $(a_1, \dots, a_{p+1}) \in \mathbb{C}$ et $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ tels que $a_j \neq b_k$ pour tout j, k. La série hypergéométrique (5.24) de paramètres $(a_1, \dots, a_{p+1})$ et $(b_1, \dots, b_p)$ est une G-fonction (au sens large) si et seulement si les deux conditions suivantes ont lieu :

(i) Les a_j et b_j sont tous dans $\overline{\mathbb{Q}}$;

(15)Pour les E-fonctions, cette propriété est fausse. On la corrige ainsi : si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n/n!$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n/n!$ sont des E-fonctions, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^{2n}/n!^2$ en est une aussi.

(ii) Les a_j et b_j qui ne sont pas rationnels (s'il y en a) peuvent être groupés en $k \leqslant p$ paires $(a_{j_1}, b_{j_1}), \dots, (a_{j_k}, b_{j_k})$ telles que $a_{j_\ell} - b_{j_\ell} \in \mathbb{N}$ pour $\ell = 1, \dots, k$.

En particulier, la série hypergéométrique

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\sqrt{2}, 1\\ \sqrt{2}+1\end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}}\, z^n $$

n'est pas une G-fonction (voir aussi [102, p. 18]). Une démonstration de cette caractérisation, différente de celle de Galochkin, a été donnée dans [142]. Elle est basée sur le théorème 6.8 énoncé dans la partie 6.2, mais elle ne vaut que pour les G-fonctions au sens strict.

Beukers et Heckman [26] ont donné un critère pour décider si une fonction hypergéométrique ${}_{p+1}F_p$ à paramètres rationnels est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Notons $(a_1, \dots, a_{p+1}) \in \mathbb{Q}$ and $(b_1, \dots, b_p, b_{p+1}) \in \mathbb{Q} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ ses paramètres, où $b_{p+1} := 1$. On suppose que $a_i - b_j \notin \mathbb{Z}$ pour tous $i, j = 1, \dots, p+1$. On dit que les deux suites $(a_j)_{j=1,\dots,p+1}$ et $(b_j)_{j=1,\dots,p+1}$ sont entrelacées mod 1 si les points des ensembles $\{e^{2i\pi a_j}, j = 1, \dots, p+1\}$ et $\{e^{2i\pi b_j}, j = 1, \dots, p+1\}$ apparaissent en alternance sur le cercle unité.

***Théorème 5.25* (Beukers-Heckman).** *Soit $N \in \mathbb{N}$ le dénominateur commun des a_j et b_j. La série hypergéométrique*

$$ {}_{p+1}F_p[a_1, \dots, a_{p+1}; b_1, \dots, b_p; z] $$

est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ si et seulement si pour tout entier $n \in \{1, \dots, N-1\}$ premier à N, les suites $(na_j)_{j=1,\dots,p+1}$ et $(nb_j)_{j=1,\dots,p+1}$ sont entrelacées mod 1.

Par exemple, l'une des G-fonctions citées plus haut

$$ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(30n)!\,n!}{(15n)!(10n)!(6n)!}\, z^n \\ = {}_8F_7\left[\begin{matrix}\frac{1}{30}, \frac{7}{30}, \frac{11}{30}, \frac{13}{30}, \frac{17}{30}, \frac{19}{30}, \frac{23}{30}, \frac{29}{30},\\ \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\end{matrix}; 2^{14}3^9 5^5 z\right] \end{aligned} \tag{5.26} $$

satisfait à ce critère et est donc bien algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Faisons une petite digression ici, en lien avec la forme spéciale des coefficients de Taylor de (5.26). Soient $\boldsymbol{e} = (e_j)_{j=1,\dots,k}$ et $\boldsymbol{f} = (f_j)_{j=1,\dots,\ell}$

(avec $k, \ell \geqslant 1$) deux suites finies d'entiers > 0 telles que $\sum_{j=1}^{k} e_j = \sum_{j=1}^{\ell} f_j$. Alors il existe $C \in \mathbb{Q}^*$ tel que

$$F_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{g},C}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{k}(e_j n)!}{\prod_{j=1}^{\ell}(f_j n)!}\,(Cz)^n \tag{5.27}$$

est une fonction hypergéométrique de la forme (5.24) à paramètres rationnels (donc, en particulier, est une G-fonction). La réciproque est fausse : on ne peut par exemple pas écrire

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}1/2, 1\\ 1/3\end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{(1/3)_n}\, z^n$$

sous la forme (5.27). Voir [45, §7, Prop. 2] pour l'énoncé d'une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres rationnels de la série hypergéométrique (5.24) pour qu'elle puisse se mettre sous la forme (5.27). Rappelons ici le classique

Théorème 5.28 **(Landau** [99]**).** *Soient* $\boldsymbol{e} = (e_j)_{j=1,\dots,k}$ *et* $\boldsymbol{f} = (f_j)_{j=1,\dots,\ell}$ *(avec* $k, \ell \geqslant 1$*) deux suites finies d'entiers* > 0 *telles que* $\sum_{j=1}^{k} e_j = \sum_{j=1}^{\ell} f_j$. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout entier* $n \geqslant 0$,

$$\frac{\prod_{j=1}^{k}(e_j n)!}{\prod_{j=1}^{\ell}(f_j n)!} \in \mathbb{N}.$$

(ii) *La fonction* 1*-périodique* $\Lambda_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(x) := \sum_{j=1}^{k}[e_j x] - \sum_{j=1}^{\ell}[f_j x]$ *est* $\geqslant 0$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$.

Chaque fonction $\Lambda_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}$ est constante par morceaux et on sait déterminer un ensemble fini de points où elle peut *a priori* « sauter ». Il suffit alors de l'évaluer en un nombre fini de points bien choisis pour savoir si (ii) est satisfaite ou pas. Le théorème de Landau donne donc un moyen algorithmique pour déterminer si (i) est satisfaite ou pas. Par exemple, il permet de montrer que la série (5.26) est à coefficients de Taylor entiers.

Dans le cas plus général d'une série hypergéométrique ${}_{p+1}F_p(z)$ à paramètres rationnels de la forme (5.24), Christol [36] a donné un critère analogue à celui de Landau permettant de décider s'il existe une constante $C \in \mathbb{Q}^*$ telle que ${}_{p+1}F_p(Cz) \in \mathbb{Z}[\![z]\!]$. Ce critère est plus compliqué à écrire car, sur chaque exemple, il fait intervenir des conditions de positivité de plusieurs fonctions constantes par morceaux (similaires à $\Lambda_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}$), construites à l'aide des paramètres de la série. Voir également [46, Th. 4] pour l'expression de la plus petite constante $C > 0$ lorsqu'elle existe.

Concluons par les remarques suivantes. On peut montrer que les G-fonctions ne sont pas toutes hypergéométriques de la forme de Galochkin. Il n'existe pas de conjecture équivalente au problème de Siegel qui indiquerait comment les G-fonctions peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions hypergéométriques ${}_{p+1}F_p$. On peut montrer que les G-fonctions d'ordre différentiel 1 sont exactement les fonctions algébriques de la forme $c\prod_{j=1}^{s}(\alpha_j - z)^{e_j}$ où $c \in \overline{\mathbb{Q}}$, et où chaque $\alpha_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $e_j \in \mathbb{Q}$; ce n'est pas un résultat évident, voir la partie 6.2. Par ailleurs, Dwork [50, p. 784] avait conjecturé que les G-fonctions d'ordre différentiel 2 étaient soit des fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ soit exprimables (en un sens algébrique précis) à l'aide des fonctions hypergéométriques ${}_2F_1$ de Gauss ; cette conjecture a été infirmée par Krammer [95].(16)

5.6. Les théorèmes de Siegel, Galochkin et Chudnovsky

Comme pour les E-fonctions, Siegel a introduit les G-fonctions dans un but diophantien. Il n'a donné aucune démonstration mais seulement indiqué qu'en suivant la méthode qu'il avait employée pour les fonctions de Bessel, il avait obtenu le

***Théorème 5.29* (Siegel).** *Soit $y(z)$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et holomorphe en $z = 0$. Considérons la G-fonction $F(z) = \int_0^z y(x)dx$. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ de degré d et de hauteur H.*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_{F,d,\varepsilon} > 0$ telle que si

$$0 < |\alpha| < C_{F,d,\varepsilon} \exp\big(-\ln(H)^{1/2+\varepsilon}\big), \tag{5.30}$$

alors le nombre $F(\alpha)$ n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré $\leqslant d$.

(16) Plus précisément, la conjecture de Dwork portait sur les solutions des équations différentielles d'ordre 2 sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ dites *globalement nilpotentes*, notion que l'on ne définira pas ici (voir [51, p. 98]). Or une autre conjecture affirme que les opérateurs de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$ globalement nilpotents sont exactement les G-*opérateurs*, qui sont des opérateurs différentiels liés aux G-fonctions. Voir la partie 6.2.

Siegel n'a pas explicité la constante $C_{F,d,\varepsilon}$. Cet énoncé peut être un peu difficile à comprendre. Lorsque $\alpha = 1/q \in \mathbb{Q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$, on a $H = q$ et (5.30) devient $e^{\ln(q)-\ln(q)^{1/2+\varepsilon}} > 1/C_{F,1,\varepsilon}$. Cette condition revient essentiellement à dire que si $q > C(F)$ pour une certaine constante $C(F) > 0$, alors $F(1/q) \notin \mathbb{Q}$. Le théorème 5.29 s'applique par exemple à $y(z) = 1/(1-z)$ et donne l'irrationalité de $\log(1-1/q)$ pour tout entier q tel que $|q|$ soit assez grand. Ce résultat est qualitativement comparable au théorème 4.22 mais il est moins précis puisque $C(F)$ n'est pas connue.

Le théorème 5.29 est aussi un pas vers un énoncé diophantien sur les *périodes géométriques* définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Ces nombres complexes, représentés par des intégrales multiples, sont une vaste généralisation en géométrie algébrique de l'expression intégrale du nombre π donnée par $2i\pi = \int_{\mathscr{C}} dz/z$, où $\mathscr{C}$ est un cercle de centre 0, de rayon > 0 arbitraire et orienté dans le sens direct. On peut réaliser π comme valeur de G-fonction de nombreuses façons comme on l'a vu plus haut. Le théorème de Siegel s'appliquerait donc en principe à π si l'on parvenait à trouver une G-fonction F et un nombre α satisfaisant aux hypothèses et tels que $F(\alpha) = \pi$. Il est aussi potentiellement applicable aux périodes de fonctions elliptiques. Soient g_2 et $g_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$ non tous les deux nuls, et considérons la G-fonction

$$F(z) := \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{4 - g_2x^4 - g_3x^6}}$$

pour $z \in \mathbb{C}$ de module suffisamment petit. (On définit la fonction $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ de telle sorte que $\sqrt{t} > 0$ est la racine carrée usuelle pour $t > 0$.) Le changement de variable $x \to 1/x^2$ montre que l'on a $F(z) = -2f(1/z^2)$, où

$$f(z) := \int_\infty^z \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

est une intégrale elliptique, définie pour $z \in \mathbb{C}$ de module suffisamment grand. Introduisons la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass(17)

(17)La nature diophantienne des valeurs des fonctions elliptiques, modulaires et associées est maintenant très bien connue avec les travaux de Schneider [154] d'invariants g_2 et g_3, donnée par

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{(0,0)\}}\left(\frac{1}{(z+m\omega_1+n\omega_2)^2}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right)$$

où $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$ sont tels que $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$. On voit que $\wp$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles en tous les points de $\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$, et qu'elle est doublement périodique de périodes ω_1 et ω_2. Comme $\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-g_2\wp(z)-g_3$, on a $f(\wp(x))=x$ et $\wp(f(y))=y$ (pour x et y complexes dans des domaines convenables). Notons

$$e_1:=\wp\big(\omega_1/2\big),\quad e_2:=\wp\big((\omega_1+\omega_2)/2\big),\quad e_3:=\wp\big(\omega_2/2\big).$$

Alors e_1,e_2 et e_3 sont les racines de $4x^3-g_2x-g_3$ et l'on a [113, p. 88] :

$$\omega_1=2f(e_1),\quad \omega_2=2f(e_2)-2f(e_1).$$

Le théorème 5.29 pourrait donc s'appliquer en principe à ω_1.

Nous revenons maintenant aux G-fonctions. Siegel n'ayant pas publié la preuve du théorème 5.29, il a été considéré qu'il s'agissait davantage d'un programme à compléter. Celui-ci l'a été relativement tardivement par rapport aux E-fonctions. Les deux premiers résultats généraux sont dus à Bombieri [28] et Galochkin [71]. Chacun a été établi sous une hypothèse technique supplémentaire. André a démontré plus tard que les conditions techniques de Galochkin et Bombieri sont en fait équivalentes.

La condition de Bombieri concerne les rayons de convergence génériques $R_v(Y)$ des systèmes différentiels v-adiques $Y'(z)=A(z)Y(z)$ avec $A(z)\in M_{n\times n}(\mathbb{K}(z))$ où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres et v est une place non archimédienne de $\mathbb{K}$. Comme le sujet nécessite une longue introduction aux équations différentielles v-adiques, on ne dira rien de plus que le fait que la condition de Bombieri s'écrit $\sum_v \ln\left(\max(1,1/R_v(Y))\right)<+\infty$. Voir [51, p. 226].

La condition de Galochkin est quant à elle plus simple à énoncer [51, p. 227]. Considérons un système différentiel $Y'(z)=A(z)Y(z)$

---

et Nesterenko [117] par exemple. Leurs méthodes n'utilisent toutefois pas directement les G-fonctions, qui donnent des résultats bien plus faibles tels que le théorème 5.29.

avec $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. On a déjà rencontré la suite de matrices $A_k(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ telles que $Y^{(k)}(z) = A_k(z)Y(z)$ que l'on définit récursivement par

$$A_{k+1}(z) = A_k(z)A(z) + A_k'(z), \qquad A_1(z) = A(z).$$

Soit $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ non nul et de degré minimal tel que $T(z)A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}[z])$. On vérifie par récurrence que $T(z)^k A_k(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}[z])$ pour tout $k \geqslant 1$. Notons $Q_k \geqslant 1$ le plus petit entier dénominateur commun des coefficients des matrices

$$\frac{1}{1!}T(z)^1A_1(z),\ \ \frac{1}{2!}T(z)^2A_2(z), \dots,\ \ \frac{1}{k!}T(z)^kA_k(z)$$

c'est-à-dire tel que $(Q_k/m!)T(z)^m A_m(z) \in M_{n\times n}(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$ pour tout $1 \leqslant m \leqslant k$.

Condition de Galochkin. *Il existe $C > 0$ telle que $Q_k \leqslant C^k$ pour tout $k \geqslant 1$.*

Donnons quelques exemples et contre-exemples. La fonction

$$(1-z)^{-s} \quad (s \in \mathbb{Q})$$

satisfait à l'équation différentielle $y'(z) = A(z)y(z)$ avec

$$A(z) := \frac{s}{1-z},$$

d'où

$$A_k(z) = \frac{(s)_k}{(1-z)^k}$$

pour tout entier $k \geqslant 1$. La condition de Galochkin est donc satisfaite avec $T(z) := 1 - z$ et $Q_k \geqslant 1$ le plus petit dénominateur commun de $(s)_1/1!, (s)_2/2!, \dots, (s)_k/k!$, dont Siegel a montré qu'il croît au plus géométriquement en k.

La fonction $-\log(1-z)$ est solution de l'équation différentielle (minimale) $(1-z)y''(z) - y'(z) = 0$, dont le système différentiel compagnon est ${}^t(0, 1/(1-z)) = A(z) \cdot {}^t(1, -\log(1-z))$ avec

$$A(z) := \begin{pmatrix} 0 & 1/(1-z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par récurrence sur $k \geqslant 1$ que

$$\frac{1}{k!}(1-z)^k A_k(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc que la condition de Galochkin est également satisfaite ici avec $T(z) := 1 - z$ et $Q_k := \mathrm{ppcm}\{1, 2, \ldots, k\}$ pour tout $k \geqslant 1$.

La fonction $\frac{1}{2}\log(1-z)^2$ satisfait à l'équation $(1-z)^2 y'''(z) + 3(1-z)y''(z) + y'(z) = 0$. Lepetit a informé l'auteur que l'on peut calculer explicitement les matrices associées $A_k(z)$ à l'aide des suites $m! \sum_{\ell=1}^{m} 1/\ell$ et $m! \sum_{\ell=1}^{m} (m-\ell+1)/\ell$, à partir desquelles on peut voir que la condition de Galochkin est satisfaite.

En revanche, $y'(z) = y(z)$ ne la satisfait pas car $A_k(z) = 1$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Un autre contre-exemple moins évident est fournit par le vecteur $Y(z) = {}^t(J_0(z), J_0'(z))$. Il est solution du système $Y'(z) = A(z)Y'(z)$ avec

$$A(z) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1/z \end{pmatrix}, \qquad T(z) := z.$$

On vérifie par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A_{2n-1}(z) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} \\ (-1)^n & 0 \end{pmatrix} + \mathscr{O}(1/z),$$
$$A_{2n}(z) = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \mathscr{O}(1/z),$$

où dans les deux cas, $\mathscr{O}(1/z)$ désigne des matrices de $M_{2\times 2}(\mathbb{Q}(z))$ dont les coefficients fractions rationnelles tendent vers 0 quand $z \to \infty$. Il suit qu'un dénominateur commun positif des coefficients polynomiaux de la matrice $(1/k!)z^k A_k(z) \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q}[z])$ est au moins un multiple de $k!$ et donc que la condition de Galochkin n'est pas satisfaite.

La condition de Galochkin est *a priori* très forte puisque l'on s'attend davantage à ce que Q_k se comporte comme $k!C^k$, comme dans le cas de l'exponentielle et de la fonction de Bessel J_0.

Théorème 5.31 **(Galochkin** [71]**).** *Soit* $Y(z) = {}^t(F_1(z), \ldots, F_n(z))$ *un vecteur de G-fonctions de* $\mathbb{Q}[\![z]\!]$ *solution d'un système différentiel* $Y'(z) = A(z)Y(z)$ *avec* $A(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}(z))$*. On suppose que*

$F_1(z), \dots, F_n(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$ et que ce système satisfait à la condition de Galochkin.

Alors il existe une constante $c_0 > 0$ explicitable, qui dépend de Y, telle que, pour tout entier q satisfaisant à $|q| > c_0$, les nombres

$$F_1(1/q), F_2(1/q), \dots, F_n(1/q)$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

On a en fait la même conclusion en remplaçant $1/q$ par $a/b \in \mathbb{Q}^*$ satisfaisant à $|b| \geqslant |c_1 a|^{c_2}$ pour des constantes c_1, c_2 explicitables. Dans les meilleures versions maintenant connues de ce résultat (et en particulier, sans la condition de Galochkin), la constante c_2 est de l'ordre de grandeur de n^2 ; voir [37, p. 15, Th. I] et [114, p. 314, Th. 0.2]. Cet ordre de grandeur est le même que celui indiqué dans le théorème 4.27 lorsque $F_1(z) := 1$ et $F_j(z) = \mathrm{Li}_j(z)$ pour $j = 2, \dots, n$. Toutefois, les résultats de Hata [83] et Nikishin [120] sont plus précis que cela, en particulier sur la constante c_1. Cela illustre un fait général : on sait rarement calculer des approximants de Padé explicites d'une famille de fonctions données mais lorsqu'on y parvient, on obtient souvent des résultats plus fins que ceux obtenus avec des approximants de type Padé inexplicites.

En 1984, Chudnovsky [39, 37] a réussi à lever la condition de Galochkin (voir la partie 6.2) et a obtenu un résultat que l'on considère comme réalisant le programme de Siegel sur les G-fonctions.

***Théorème 5.32* (Chudnovsky).** *Soit $Y(z) = {}^t(F_1(z), \dots, F_n(z))$ un vecteur de G-fonctions de $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ solution d'un système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ avec $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Supposons que les fonctions $F_1(z)$, …, $F_n(z)$ soient algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$.*

Alors pour tout entier $d \geqslant 1$, il existe $C_{Y,d} > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ de degré $\leqslant d$ et de hauteur H satisfaisant à

$$0 < |\alpha| < \exp\big(-C_{Y,d} \log{(H)}^{4n/(4n+1)}\big),$$

il n'existe aucune relation polynomiale non triviale sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ de degré $\leqslant d$ entre les nombres $F_1(\alpha), \dots, F_n(\alpha)$.

La constante $C_{Y,d}$ est calculable en suivant la démonstration de Chudnovsky et en utilisant des améliorations plus récentes. Voir André [4, Chap. VI] pour une démonstration qui corrige une imprécision dans celle de Chudnovsky. Voir également [115] pour des énoncés diophantiens portant sur les points en lesquels une G-fonction prend des valeurs dans un corps de nombres. Insistons sur le fait que ces résultats ne sont pas assez forts pour montrer la transcendance d'au moins l'un des nombres $F_1(\alpha), \dots, F_n(\alpha)$. On reviendra sur ce point à la fin de la partie 7.2 quand on discutera d'un autre théorème d'André.

La démonstration du théorème de Galochkin utilise des approximants inexplicites de type Padé de type I et elle suit essentiellement celle de Shidlovskii pour les E-fonctions. Il doit introduire sa condition car les estimations ne sont pas aussi bonnes que celles obtenues à la proposition 5.17. Sa méthode donne des estimations de la forme suivante.

Proposition 5.33. *Dans les conditions du théorème* 5.31 *et en particulier sous la condition de Galochkin, il existe des constantes* $c_3, c_4, c_5 > 0$ *telles que pour tout entier* $r \geqslant c_3$*, il existe des entiers* $p_{j,r}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *tels que*

$$0 < \left| \sum_{j=1}^{n} p_{j,r} F_j(1/q) \right| \leqslant c_4^{r+1}, \quad |p_{j,r}| \leqslant c_5^{r+1}. \tag{5.34}$$

Les constantes c_3, c_4 *et* c_5 *dépendent de* q *et de* Y*.*

Lorsque q satisfait à $|q| > c_0$, les valeurs correspondantes des constantes $c_4 < 1$ et $c_5 > 1$ impliquent alors le théorème 5.31. De nouveau, remarquons que la proposition 4.3 dans la partie 4.1 s'appliquerait directement avec $\lambda(r) = r$ si l'on avait un minorant de la forme c_6^{r+1} avec $c_6 > 0$ à gauche de (5.34) plutôt que 0. La difficulté est donc d'obtenir la même conclusion que celle de cette proposition en l'absence d'une telle minoration.

La démonstration du théorème de Chudnovsky utilise quant à elle des approximants inexplicites de type Padé de type II. Elle les utilise même à deux reprises : une fois pour montrer que la condition de

Galochkin a lieu *a priori* et une autre fois de manière classique pour démontrer le théorème 5.32 à proprement parler. On ne rentre pas dans les détails ici.

6. Propriétés différentielles des G- et E-fonctions

6.1. Équations différentielles fuchsiennes

Dans cette partie, on donne quelques définitions et propriétés relatives aux équations différentielles sur $\mathbb{C}(z)$. *Mutatis mutandis*, on peut remplacer $\mathbb{C}(z)$ par $\mathbb{L}(z)$ où $\mathbb{L}$ est n'importe quel sous-corps de $\mathbb{C}$. Des références classiques sont [87, 89, 129].

Donnons-nous un opérateur différentiel normalisé

$$L := \sum_{j=0}^{\mu} Q_j(z)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^j \in \mathbb{C}(z)[d/dz], \quad Q_\mu(z) = 1,$$

auquel on associe l'équation différentielle $Ly(z) = 0$. Par raccourci de langage, on parlera d'une solution de L pour signifier une solution de $Ly(z) = 0$.

Notons $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un dénominateur commun de plus petit degré des $Q_j(z)$, et R l'ensemble des racines de P. On appelle singularités finies de L les éléments de R. On appelle points ordinaires de L, ou encore points réguliers de L, les éléments de $\mathbb{C} \smallsetminus R$. On doit également tenir compte du point à l'infini ∞ : il est dit singulier pour L si 0 est une singularité au sens précédent de l'opérateur $\widetilde{L}$ normalisé que l'on déduit de L en changeant formellement z en $1/z$ et d/dz en $-z^2d/dz$. Sinon, ∞ est ordinaire.

En un point ordinaire α (fini ou non), L admet une base locale (sur $\mathbb{C}$) de solutions holomorphes en α, c'est-à-dire développables en séries entières de la variable $z - \alpha$ ou $1/z$ avec un rayon de convergence > 0. On dit qu'une singularité ρ de L est apparente lorsque L admet une base locale de solutions dans $\mathbb{C}[\![z - \rho]\!]$ (pas supposées holomorphes, bien qu'elles le soient en fait automatiquement). Cette situation n'est pas la plus courante et la description des bases est plus compliquée aux points singuliers non apparents. Il est impossible de faire la théorie générale ici et l'on va se contenter de le faire pour une classe restreinte mais fondamentale de singularités.

Un point singulier α fini de L est dit singulier régulier si, en écrivant

$$L = \sum_{j=0}^{\mu} \frac{A_j(z)}{P(z)} \Big(\frac{d}{dz}\Big)^j, \qquad A_\mu = P,$$

on a

$$\text{valuation}_{z=\alpha}(A_j) \geqslant \text{valuation}_{z=\alpha}(P) + j - \mu \tag{6.1}$$

pour tout j, où la valuation est l'ordre d'annulation au point considéré. Si le point ∞ est singulier, il est dit singulier régulier si 0 est une singularité régulière de l'opérateur $\widetilde{L}$ évoqué ci-dessus : ceci est en fait équivalent à demander que

$$\deg(A_j) \leqslant \deg(P) + j - \mu$$

pour tout j. Lorsqu'une singularité n'est pas régulière, on parle de singularité irrégulière ; on n'étudiera pas ce cas dans la suite, bien qu'il intervienne dans l'étude des E-opérateurs à l'infini.

Nous allons maintenant décrire une $\mathbb{C}$-base en $z = 0$ d'un opérateur $L \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$ lorsque 0 est une singularité régulière de L. On cherche pour commencer des solutions formelles sous la forme $y_\rho(z) = z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \in z^\rho \mathbb{C}[\![z]\!]$, avec $u_0 \neq 0$ et $\rho \in \mathbb{C}$. Écrivons $A_j(z) = \sum_{k=v_j}^{d_j} a_{k,j} z^k$ avec $a_{v_j,j} \neq 0$, et posons

$$\nu = \min_{j=0,\dots,\mu} (v_j + \mu - j).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\big(P(z)L\big)y_\rho(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{j=0}^{\mu} A_j(z)(z^{\rho+n})^{(j)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{k=v_j}^{d_j} (\rho+n-j+1)_j a_{k,j} z^{\rho+k+n-j} \\ &= z^{\rho+\nu-\mu} u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m(\rho) z^m,\end{aligned}$$

où

$$\Pi_0(\rho) := \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,\mu\} \\ \text{tel que } v_j+\mu-j=\nu}} a_{v_j,j}(\rho-j+1)_j \in \mathbb{C}[\rho].$$

Le polynôme $\Pi_0(\rho)$ est par définition le polynôme indiciel de L en 0 et ses racines sont les exposants (locaux) de L en 0.[18] Une condition nécessaire pour que $Ly_\rho(z) = 0$ est donc que ρ soit un exposant de L en 0. Comme 0 est une singularité régulière, la condition (6.1) montre que $v_\mu = \nu$ et donc le degré de $\Pi_0(\rho)$ est μ.

Frobenius [70] a montré comment construire une base locale de solutions de L en 0 à partir de la connaissance des exposants en 0, que l'on note $\rho_1, \dots, \rho_\mu$. Si ces exposants sont tous deux à deux distincts modulo $\mathbb{Z}$, il existe une base de solutions $z^{\rho_j} F_j(z)$ $(j = 1, \dots, \mu)$ où chaque $F_j(z)$ est holomorphe en $z = 0$ (et pas seulement des séries formelles de $\mathbb{C}[\![z]\!]$). Dès que deux exposants sont égaux modulo $\mathbb{Z}$, la situation devient beaucoup plus compliquée et la base prend la forme plus générale

$$(F_1(z), \dots, F_\mu(z)) \cdot z^\Delta \tag{6.2}$$

où $\Delta \in M_{\mu\times\mu}(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure, sa diagonale se déduit[19] des exposants ρ_j et chaque $F_j(z)$ est holomorphe en $z = 0$. Notons $r_1, \dots, r_\mu$ les valeurs propres de Δ.

Expliquons le sens à donner à (6.2) : on écrit $\Delta = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente d'indice de nilpotence κ,[20]) de sorte que

$$\begin{aligned} z^\Delta &:= e^{\log(z)D} e^{\log(z)N} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} D^n \frac{\log(z)^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\kappa-1} N^n \frac{\log(z)^n}{n!} = A \cdot B, \end{aligned}$$

où A est une matrice diagonale de diagonale constituée des z^{r_j} et B est une matrice dont les coefficients sont dans $\mathbb{C}[\log(z)]$, de degré au plus $\kappa - 1$. Les coefficients de la matrice z^Δ sont dans $z^{r_1}\mathbb{C}[\log(z)] + \cdots + z^{r_\mu}\mathbb{C}[\log(z)]$ et le produit matriciel (6.2) fournit

[18] On détermine plus facilement le polynôme indiciel de L lorsque L est donné comme un élément de $\mathbb{C}(z)[zd/dz]$. Voir [24, p. 9].

[19] Précisément, effectuons une partition de $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu\}$ avec des ensembles $E_1, E_2, \dots E_\ell$ tels que les éléments de chaque E_j sont égaux modulo $\mathbb{Z}$ mais, pour tous $j \neq k$, si $x \in E_j$ et $y \in E_k$ alors $x \not\equiv y$ modulo $\mathbb{Z}$. Notons e_j le plus petit élément de E_j et $k_j = \mathrm{card}(E_j)$. Alors e_j est valeur propre de Δ avec multiplicité k_j pour tout $j = 1, \dots, \ell$.

[20] c'est-à-dire que κ est le plus petit des entiers $k \geqslant 1$ tels que $N^k = 0$.

donc un vecteur dont les composantes forment la base voulue de μ solutions de la forme

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big(z^{r_1} P_{j,1}(\log(z)) + \cdots + z^{r_\mu} P_{j,\mu}(\log(z)\big) F_j(z), \tag{6.3}$$

et $\deg(P_{j,\ell}) \leqslant \kappa - 1$ pour tous $j, \ell \in \{1, \dots, \mu\}$. On adapte les calculs précédents en un point α singulier régulier en remplaçant z par $z-\alpha$ si α est fini ou par $1/z$ si $\alpha = \infty$, et en définissant des exposants en ces points également. Notons que l'on peut d'ailleurs calculer de la même façon le polynôme indiciel en un point ordinaire : on trouve qu'il vaut $\prod_{j=0}^{\mu-1}(\rho - j)$ et donc les exposants en ce point valent $0, 1, \dots, \mu-1$. On traduit souvent (6.3) (et ses analogues en d'autres points) en disant que les solutions locales en une singularité régulière sont à croissance modérée. En effet, les solutions locales en une singularité irrégulière présentent en général des croissances exponentielles.

Définition-Proposition 6.4. *Un opérateur différentiel $L \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$ est dit* fuchsien *lorsque tous les points de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sont soit réguliers soit singuliers réguliers pour L.*

Dans ce cas, les exposants de L satisfont à la relation de Fuchs *:*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \left(\sum_{j=1}^{\mu} \rho_j(\alpha) - \frac{\mu(\mu-1)}{2} \right) = -\mu(\mu - 1),$$

où l'on note $\rho_1(\alpha), \dots, \rho_\mu(\alpha)$ les exposants de L au point α.

La somme à gauche a un nombre fini de termes non nuls puisqu'en un point ordinaire α, on a $\sum_{j=1}^{\mu} \rho_j(\alpha) = \mu(\mu-1)/2$. L'équation différentielle associée $Ly(z) = 0$ est bien sûr dite fuchsienne.

Soit $L \in \mathbb{C}[z][d/dz]$ avec des coefficients polynomiaux premiers entre eux. Supposons L fuchsien de singularités finies $s_1, \dots, s_k$ et considérons le système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ compagnon de L, avec $A(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{C}(z))$. Alors il existe des matrices constantes $A_j \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ telles que

$$A(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{z - s_j}, \qquad \sum_{j=1}^{k} A_j = 0.$$

Considérons pour finir l'opérateur différentiel hypergéométrique

$$L_{p,q} := \theta \prod_{j=1}^{q} (\theta + b_j - 1) - z \prod_{j=1}^{p} (\theta + a_j) \in \mathbb{C}[z][d/dz], \qquad \theta := z \frac{d}{dz}.$$

Si $p = q+1$, $L_{q+1,q}$ est fuchsien avec des singularités régulières en 0, 1 et ∞ : les exposants en 0 sont $(1-b_1, \dots, 1-b_q, 0)$, ceux en 1 sont $(0, 1, \dots, q-2, \sum_{j=1}^{q}(b_j - a_j) - 1)$ et ceux à ∞ sont $(a_1, \dots, a_p)$, et de plus en $z = 1$, l'équation admet $q-1$ solutions locales holomorphes en $z = 1$. En revanche, si $p = q$, $L_{q,q}$ n'est pas fuchsien, avec des singularités en 0 (régulier, d'exposants $1-b_1, \dots, 1-b_q, 0$) et ∞ (irrégulier).

6.2. Structure des G-opérateurs

Comme indiqué à la fin de la partie 5.6, Chudnovsky a montré dans [37, 39] que la condition de Galochkin a lieu *a priori*. Précisons son énoncé.

Théorème 6.5 **(Chudnovsky).** *Soit $Y(z) = {}^t(F_1(z), \dots, F_n(z))$ un vecteur de G-fonctions de $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ solution d'un système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ avec $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Supposons que les fonctions $F_1(z)$, …, $F_n(z)$ soient linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors la condition de Galochkin est satisfaite par ce système différentiel.*

André [4, p. 76], suivant Dèbes [44], a appelé G-*opérateur* tout système différentiel $Y'(z) = A(z)Y(z)$ avec $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ qui satisfait à la condition de Galochkin. Par extension, on dit qu'un opérateur $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$ est un G-opérateur lorsque son système différentiel compagnon est un G-opérateur.

On utilise souvent la version suivante du théorème 6.5.

Théorème 6.6 **(Chudnovsky, version alternative)**

Soit $F(z)$ une G-fonction. Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz] \smallsetminus \{0\}$ tel que $LF(z) = 0$ et d'ordre minimal pour F.

Alors L est un G-opérateur.

Ce théorème découle du théorème 6.5. En effet, notons n l'ordre de l'opérateur L : le système compagnon $Y'(z) = \mathscr{L}(z)Y(z)$ avec $\mathscr{L}(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ a pour solution le vecteur ${}^t(F(z), F'(z), \dots, F^{(n-1)}(z))$ qui est composé de G-fonctions linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$

par minimalité de L. La preuve du théorème 6.5 est trop complexe pour être même seulement esquissée ici ; voir également [24, 102]. Disons simplement qu'elle utilise les approximants inexplicites de type Padé de type II des fonctions $F_1(z), \ldots, F_n(z)$ dans un contexte où l'on ne s'attend pas du tout à les utiliser. On montre ensuite les faits suivants :

(i) Un G-opérateur est fuchsien.

(ii) L'opérateur minimal L (non nul) d'une G-fonction donnée est donc fuchsien. De plus, en tout point algébrique α ordinaire pour L, celui-ci admet une $\mathbb{C}$-base de solutions composée de G-fonctions de la variable $z - \alpha$.

Cet opérateur minimal L possède davantage de propriétés, que nous allons maintenant expliquer. Rappelons que Bombieri [28] a utilisé une autre condition sur les G-fonctions, portant sur leurs rayons de convergence v-adiques génériques.

***Théorème 6.7* (André [4, 51]).** *Les conditions de Galochkin et de Bombieri sont équivalentes.*

Il s'avère que la condition de Bombieri implique les hypothèses d'un théorème de Katz [91] (voir aussi [4, p. 77]) concernant la rationalité des exposants d'un opérateur différentiel de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$. André a également utilisé ce théorème de Katz pour compléter le point (ii) ci-dessus sur la nature des solutions en un point singulier cette fois [4, pp. 109-110]. On synthétise ces résultats dans le

***Théorème 6.8* (André, Chudnovsky, Katz).** *Soient $F(z)$ une G-fonction et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz] \smallsetminus \{0\}$ tel que $LF(z) = 0$ et d'ordre μ minimal pour F.*

Alors L est un G-opérateur. Il est fuchsien, ses exposants locaux sont dans $\mathbb{Q}$ et en tout point $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$, L admet une $\mathbb{C}$-base de solutions de la forme

$$\big(F_1(z-\alpha), \ldots, F_n(z-\alpha)\big) \cdot (z-\alpha)^{\Delta} \tag{6.9}$$

où $\Delta \in M_{\mu\times\mu}(\overline{\mathbb{Q}})$ est triangulaire supérieure avec valeurs propres rationnelles, et $\Delta = 0$ si α est ordinaire. Chaque $F_j(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ est une G-fonction. Si $\alpha = \infty$, on remplace $z - \alpha$ par $1/z$ dans (6.9).

Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$ est un point ordinaire de L, les $F_j(z-\alpha)$ ou $F_j(1/z)$ sont des solutions de L. En revanche, si α est un point singulier de L, ces fonctions ne sont en général pas des solutions de L mais chacune est solution d'un opérateur différentiel de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$ d'ordre $\leqslant \mu^2$, voir [4, p. 110]. Une preuve complète du théorème 6.8 est également donnée dans [102].

On a indiqué à la fin de la partie 5.4 que les G-fonctions satisfaisant à une équation différentielle d'ordre 1 sont exactement les fonctions algébriques de la forme $c\prod_{j=1}^{s}(\alpha_j - z)^{e_j}$ où $c \in \overline{\mathbb{Q}}$, et où chaque $\alpha_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $e_j \in \mathbb{Q}$. Il est clair qu'une telle G-fonction est d'ordre différentiel 1 puisqu'elle est solution de

$$\frac{d}{dz} + \sum_{j=1}^{s} \frac{e_j}{\alpha_j - z} \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz].$$

La réciproque n'est en revanche pas évidente et utilise pleinement le théorème 6.8. En effet, des arguments généraux (voir [58, Lem. 9] et [87, p. 148]) assurent que les solutions d'équations fuchsiennes d'ordre 1 sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ sont de la forme $c\prod_{j=1}^{s}(\alpha_j - z)^{e_j}$ avec des $e_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $c \in \mathbb{C}$. Or les e_j sont des exposants de l'équation différentielle, donc des rationnels ici, et c est alors nécessairement dans $\overline{\mathbb{Q}}$. En particulier la fonction $(1-z)^{-\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}((\sqrt{2})_n/n!)z^n$ n'est pas une G-fonction.

6.3. G-fonctions et périodes géométriques

Cette partie explique sommairement le lien entre G-fonctions et périodes géométriques. On trouvera bien plus de détails dans [4, Chap. IX]. Il est connu depuis Griffiths [79] que les périodes de familles de variétés algébriques sur $\mathbb{C}$ dépendant d'un paramètre complexe z satisfont à une équation différentielle fuchsienne à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, dite équation de Picard-Fuchs (ou connexion de Gauss-Manin selon les auteurs) ; voir [79, p. 238, Th. 4.3]. On peut arithmétiser la situation en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{Q}}$. La fuchsianité perdure évidemment mais surtout le théorème de Katz s'applique aussi, de sorte que l'on sait en plus que les exposants sont dans $\mathbb{Q}$. Par ailleurs, tous les exemples explicites de périodes que l'on sait développer en série entière en $z = 0$ sont des G-fonctions, à un facteur multiplicatif près. Notons que les travaux récents de Lairez [97] permettent de calculer efficacement l'équation de Picard-Fuchs satisfaite par une période.

Ces ressemblances avec les G-opérateurs ne sont pas une coïncidence puisqu'on a le

***Théorème 6.10* (André).** *Tout produit de facteurs d'opérateurs différentiels de Picard-Fuchs est un G-opérateur.*

Voir [4, p. 111]. Réciproquement, on sait en principe écrire n'importe quelle G-fonction explicite (raisonnablement simple) comme période géométrique d'une famille adéquate de variétés sur $\overline{\mathbb{Q}}$ mais c'est un travail difficile en général.(21) Par exemple, on a

$$\begin{aligned}(6.11)\quad a(t) &:= \sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{n}^2\bigg)t^n \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^3}\int_D \frac{dxdydz}{1-(1-xy)z-txyz(1-x)(1-y)(1-z)},\end{aligned}$$

où D est un domaine fermé de $\mathbb{C}^3$. À partir de cette expression, Beukers et Peters [27] ont montré que $a(t)$ est bien une période géométrique $\int_\gamma \omega_t$ où ω_t est l'unique (à constante multiplicative près) 2-forme différentielle holomorphe sur une surface $K3$ birationnellement équivalente à la surface algébrique projective S_t d'équation affine $1-(1-XY)Z-tXYZ(1-X)(1-Y)(1-Z)=0$, et où γ est un 2-cycle de $H_2(S_t,\mathbb{Z})$.

Ces remarques motivent la célèbre conjecture suivante, toujours ouverte, qui est la réciproque du théorème 6.10. La version ci-dessous

(21)Il est souvent plus facile d'écrire une (valeur de) G-fonction comme une période de Kontsevich-Zagier [94]. Il s'agit de nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont des intégrales multiples convergentes de la forme $\int_D R(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n$ avec $R \in \overline{\mathbb{Q}}(x_1,\ldots,x_n)$ et D un domaine semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ défini par des inégalités polynomiales de la forme $a \leqslant P(x) \leqslant b$, où $P \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1,\ldots,x_n]$ et $a,b \in (\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R})\cup\{-\infty,+\infty\}$. Par exemple $\ln(2) = \int_1^2 dx/x$, $\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx/(1+x^2)$ et la représentation intégrale des polylogarithmes (4.23) (évaluée en un point algébrique) sont de telles périodes. L'égalité des anneaux numériques de ces périodes et des périodes géométriques est démontrée dans [88, §12.2].

est celle formulée par André [4, p. 111]. La version originelle de Dwork se trouve dans [49, p. 2].

Conjecture 6.12 **(Bombieri-Dwork).** *Tout G-opérateur de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$ est un produit de facteurs d'opérateurs différentiels de Picard-Fuchs.*

De manière plus imagée, la conjecture de Bombieri-Dwork est souvent énoncée ainsi : *Les G-fonctions proviennent de la géométrie.* Elle donne *a posteriori* un sens encore plus fort au choix de la lettre G par Siegel. On montre par exemple que les séries hypergéométriques ${}_2F_1$ à paramètres a, b, c, rationnels proviennent de la géométrie grâce à la représentation intégrale

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] = \frac{\Gamma(c)e^{i\pi(1-c)}}{4\Gamma(c)\Gamma(b-c)\sin(\pi b)\sin(\pi(c-b))} \times \int_{\mathscr{P}} x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}dx
$$

où $\mathscr{P}$ est le « cycle de Pochhammer » [161, pp. 22-23] ; voir [25] pour d'autres exemples de nature hypergéométrique. Toujours dans le sens de la conjecture 6.12, Bostan, Lairez et Salvy [31] ont donné un algorithme pour écrire explicitement certaines G-fonctions comme périodes géométriques : sans rentrer dans les détails, les coefficients de Taylor $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de ces G-fonctions doivent être entiers et s'écrire à l'aide de sommes multiples hypergéométriques, ce qui ne couvre pas le cas général. Leur travail automatise celui fait par Beukers et Peters pour $a(t)$ dans (6.11) ci-dessus, qui rentre dans ce cadre. Par exemple, on peut prendre a_n égal à

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 \binom{n+k}{n}^3, \quad \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j}^2 \binom{n}{i}^2 \binom{n+j}{n} \binom{n+j-i}{n} \binom{2n-i}{n}
$$

mais pas à $1/(n+1)$ ou $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2/k$ (pour les séries génératrices desquelles il faut travailler autrement pour montrer qu'elles sont des périodes géométriques). Ils obtiennent ainsi l'égalité suivante entre une G-fonction et une période géométrique :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{n}{k}^3\bigg)z^n = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\mathscr{C}\times\mathscr{C}}\frac{xydxdy}{(xy)^2-z(1+x)^2(1+y)^2(1-xy)^2}$$

où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1/2.

La conjecture suivante est également ouverte.

Conjecture 6.13 **(Bombieri).** *Soit $L \in \mathbb{K}(z)[d/dz]$ un G-opérateur, où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres.*

Alors les rayons de convergence génériques v-adiques $R_v(L)$ valent 1 en toutes les places non archimédiennes v de $\mathbb{K}$, sauf éventuellement un nombre fini d'entre elles.

Comme conséquence d'un théorème de Katz, cette conjecture est satisfaite lorsque L est d'origine géométrique [4, p. 110], c'est-à-dire lorsque L est un produit de facteurs d'opérateurs différentiels de Picard-Fuchs. La conjecture 6.13 est donc une conséquence de la conjecture 6.12. Voir la discussion à ce sujet dans [60].

La conjecture 6.13 a une intéressante conséquence sur la nature des dénominateurs des coefficients de Taylor des G-fonctions. Rappelons que $d_n := \mathrm{ppcm}\{1, 2, \ldots, n\} \leqslant 3^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Théorème 6.14 **(Fischler-R.** [60]**).** *Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ une G-fonction solution d'un G-opérateur $L \neq 0$ d'ordre μ, minimal pour F, satisfaisant à la conjecture* 6.13.

Alors il existe des entiers $b \geqslant 1, b_0 \geqslant 0, c \geqslant 1$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$d_{bn+b_0}^{\mu-1}c^{n+1}a_n \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}. \tag{6.15}$$

On peut prendre b comme le plus petit commun multiple des dénominateurs des exposants de L en 0.

Grâce aux remarques ci-dessus, cet énoncé est inconditionnel si l'opérateur L provient de la géométrie. L'équation (6.15) est ce qu'on l'on observe sur tous les exemples, même ceux pour lesquels il est compliqué de prouver rigoureusement qu'ils proviennent bien de la géométrie. L'exposant $\mu - 1$ est optimal au sens où l'on ne peut pas à la fois l'abaisser et garder un énoncé valable pour toute G-fonction. Il est atteint pour le polylogarithme $\mathrm{Li}_{\mu-1}$ par exemple. En revanche, cet exposant est parfois beaucoup trop grand, puisque par exemple on a $c^{n+1}a_n \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ si $F(z)$ est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, indépendamment de l'ordre μ du G-opérateur.

Pour conclure cette partie, mentionnons le fait qu'il existe une théorie géométrique des G-fonctions et des G-opérateurs de plusieurs variables, et que l'analogue du théorème d'André, Chudnovsky, Katz a été démontré dans ce cadre par Di Vizio [48].

6.4. Structure des E-opérateurs

Récemment, André [6, 7, 8, 16] a vu comment exploiter la structure des G-opérateurs pour comprendre la nature des équations différentielles linéaires sur $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ satisfaites par les E-fonctions au sens strict. Son point de départ est le suivant. Donnons-nous une E-fonction stricte $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n/n!)z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$, avec $|a_n| \leqslant C^{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$, et considérons la transformée de Laplace de $E(z)$:

$$G(z) := \int_0^{+\infty} E(x)e^{-xz}dx.$$

Cette intégrale converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z)>C$ et sous cette condition on peut échanger les signes somme et intégral. On obtient

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-zx}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}},$$

c'est-à-dire que $G(z)$ est une G-fonction de la variable $1/z$.

Il s'avère que l'on peut déterminer une équation différentielle linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ pour $G(z)$ à partir de celle de $E(z)$, et réciproquement, au moyen d'une transformation des opérateurs différentiels ainsi définie : à tout $M \in \overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$, on associe son transformé de Fourier-Laplace $\mathscr{F}(M) \in \overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ en changeant formellement z en $-d/dz$ et d/dz en z dans M. Cet automorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ n'est pas involutif à cause du signe moins mais il est d'ordre 4. On a la propriété suivante : supposons que $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ soit d'ordre μ et tel que $LE(z)=0$, alors

$$\Big(\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{\mu}\circ \mathscr{F}(L)\Big)G(z)=0.$$

Ces considérations ont conduit André à la

Définition-Proposition 6.16 **(André** [6]**).** *Un opérateur $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ est dit être un E-opérateur si son transformé de Fourier-Laplace $\mathscr{F}(L) \in \overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ est un G-opérateur.*

Toute E-fonction stricte est annulée par un E-opérateur, qui est minimal pour elle en le degré en z.

La minimalité d'un E-opérateur en z résulte de la minimalité des G-opérateurs en la variable d/dz et du fait que la transformée de Fourier-Laplace échange essentiellement z et d/dz. André a également montré que si $M \in \overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ est un G-opérateur alors $L := \mathscr{F}(M)$ est un E-opérateur. Notons qu'il est en général faux que $\mathscr{F}^2(M)=M$ (au niveau des G-opérateurs) ou que $\mathscr{F}^2(L) = L$ (au niveau des E-opérateurs).

Par exemple, posons-nous la question de savoir si

$$L = z\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 - (6z-1)\frac{d}{dz} + (z-3)$$

est un E-opérateur. En utilisant la règle de commutation $(d/dz)z = z(d/dz)+1$, on vérifie que

$$\begin{aligned} N := \mathscr{F}(L) &= -\frac{d}{dz}\,z^2 - \Big(-6\frac{d}{dz}-1\Big)z + \Big(-\frac{d}{dz}-3\Big) \\ &= (-z^2+6z-1)\frac{d}{dz} - (z-3). \end{aligned}$$

Or la G-fonction $g(z) := 1/\sqrt{1-6z+z^2}$ est une solution locale en 0 de $Ny(z)=0$. De plus, N d'ordre 1 est évidemment minimal pour g. Donc N est un G-opérateur et, par définition, L est bien un E-opérateur. Une solution de $Ly(z)=0$ est la E-fonction (stricte)

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{n}\Big)z^n$$

et l'on a

$$\int_0^{+\infty} E(x)e^{-zx}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{n}\Big)\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{z}\,g(1/z).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^2(L) = \mathscr{F}(N) &= \Big(-(\frac{d}{dz})^2 - 6\frac{d}{dz} - 1\Big)z - \Big(-\frac{d}{dz} - 3\Big)\\ &= -z\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 - (6z+1)\frac{d}{dz} - (z+3)\end{aligned}$$

est un E-opérateur distinct de L et, de même,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^3(L) = \mathscr{F}^2(N) &= \frac{d}{dz}\,z^2 - \Big(-6\frac{d}{dz} + 1\Big)z - \Big(-\frac{d}{dz} + 3\Big)\\ &= (z^2+6z+1)\frac{d}{dz} + (z+3)\end{aligned}$$

est un G-opérateur distinct de N.

***Théorème 6.17* (André [6]).** *Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ un E-opérateur d'ordre μ.*

(i) *L a au plus 0 et ∞ comme singularités. 0 est toujours au plus une singularité régulière avec des exposants dans $\mathbb{Q}$, tandis que ∞ est irrégulière en général.*

(ii) *Étant donnée une E-fonction stricte, les singularités finies non nulles d'un opérateur de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$ minimal (pour l'ordre) pour cette fonction sont apparentes.*

(iii) *En $z = 0$, L admet une $\mathbb{C}$-base de solutions de la forme*

$$\big(E_1(z), \ldots, E_\mu(z)\big)\cdot z^{\Delta} \tag{6.18}$$

où $\Delta \in M_{\mu\times\mu}(\overline{\mathbb{Q}})$ est triangulaire supérieure avec valeurs propres rationnelles et où chaque $E_j(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ est une E-fonction stricte.

Une propriété générale de la transformée de Fourier-Laplace des opérateurs *fuchsiens* est qu'elle « envoie » leurs singularités finies à l'infini, et leur éventuelle singularité à l'infini en 0. Cela explique une partie du point (i) ci-dessus en considérant le G-opérateur M tel que $\mathscr{F}(M) = L$. Que 0 soit la seule singularité finie signifie « visuellement » que le polynôme en z devant $(d/dz)^{\mu}$ est une puissance entière de z.

Un opérateur différentiel non nul d'ordre minimal d'une E-fonction est forcément un facteur à droite d'un E-opérateur. Comme ce dernier n'admet que 0 comme singularité finie, (ii) en découle.[22]

Le point (iii) est beaucoup plus compliqué à démontrer. L'idée est d'employer la transformée de Laplace inverse pour envoyer des solutions à l'infini d'un G-opérateur M sur des solutions en 0 du E-opérateur $L = \mathscr{F}(M)$: cela revient à envoyer des G-fonctions sur des E-fonctions, éventuellement « tordues » par des fonctions puissances et des puissances entières de logarithmes, comme dans (6.9) et (6.18). Comme les ordres de M et L ne sont en général pas égaux (puisque z et d/dz sont « échangés »), il n'y a pas forcément assez de G-fonctions pour construire une base de solutions de L. On doit alors utiliser les *microsolutions* de M pour construire d'autres solutions locales de L en 0. On ne développera pas davantage ce point ici, voir pour cela [6, 61, 110] par exemple.

André a également décrit une base spéciale de solutions du E-opérateur L à l'infini, où la singularité est irrégulière. Cette base fait systématiquement intervenir entre autres des séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} n! a_n z^{-n} \in \overline{\mathbb{Q}}[[1/z]]$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n/n!) z^n$ soit une E-fonction stricte. Il a nommé *dualité* ce phénomène. Nous ne rentrons pas dans les détails ici et donnons seulement un exemple représentatif de la situation. Nous avons considéré dans la partie 5.3 les fonctions

$$\mathscr{E}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!n} \quad \text{et} \quad \mathscr{G}(z) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+z}\, dx.$$

On définit $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ avec $-\pi < \arg(z) < \pi$ et, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \,]-\infty, 0]$, on a alors

$$\mathscr{E}(z) = -\gamma - \log(z) - e^{-z}\mathscr{G}(z). \tag{6.19}$$

[22] Il existe une notion de division interne dans $\mathbb{C}(z)[d/dz]$ qui permet d'en factoriser les éléments, de manière non unique. Si l'on dispose d'une factorisation $L = MN$ avec $L, M, N \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$, toute solution de $Ny(z) = 0$ est alors une solution de $Ly(z) = 0$. Si une solution locale de N un point donné n'est pas une série formelle, elle induit alors automatiquement une singularité de L en ce même point.

La E-fonction $\mathscr{E}(z)$ est une solution locale en $z=0$ de l'opérateur différentiel

$$L := z\Big(\frac{d}{dz}\Big)^3 + (z+2)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 + \frac{d}{dz}.$$

L est un E-opérateur car

$$\mathscr{F}(L) = -\frac{d}{dz}\,z^3 + \Big(-\frac{d}{dz}+2\Big)z^2 + z = z^2(1+z)\frac{d}{dz} + z(1+z)$$

est un G-opérateur car on voit directement que la condition de Galochkin est satisfaite par $y'(z) = -(1/z)y(z)$. On vérifie ensuite que

$$1, \quad \log(z) \quad \text{et} \quad e^{-z}\mathscr{G}(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$$

sont aussi des solutions indépendantes sur $\mathbb{C}$ de L, dont elles forment une $\mathbb{C}$-base à l'infini. On peut donc interpréter (6.19) comme l'écriture d'une solution locale $\mathscr{E}(z)$ de L en $z=0$ sur une base locale à l'infini.(23) De plus, on a le développement asymptotique (au sens de Poincaré) lorsque $z\to\infty$ dans le secteur angulaire $|\arg(z)|<\pi$:

$$\mathscr{G}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{z^{n+1}}$$

qui est bien de la forme annoncée ci-dessus.

Pour conclure, mentionnons le résultat de structure suivant.

Théorème 6.20 **(R.-Roques** [145]**).**

(i) *Soit $L\in\overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ un E-opérateur d'ordre μ dont 0 est soit un point ordinaire soit une singularité apparente. Alors L admet une $\mathbb{C}$-base de solutions de la forme $P_1(z)e^{\beta_1 z}+\cdots+P_\ell(z)e^{\beta_\ell z}$ où $\ell\leqslant\mu$, $\beta_j\in\overline{\mathbb{Q}}^*$ et $P_j(z)\in\overline{\mathbb{Q}}[z]$ pour chaque j.*

(ii) *Soit $L\in\overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ un E-opérateur d'ordre μ tel que l'équation différentielle $Ly(z)=0$ admet en un point $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^*$ une solution locale non nulle de la forme $F(z-\alpha)$ avec $F(z)\in\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ une E-fonction stricte. Alors $F(z)=P_1(z)e^{\beta_1 z}+\cdots+P_\ell(z)e^{\beta_\ell z}$ où $\ell\leqslant\mu$, $\beta_j\in\overline{\mathbb{Q}}^*$ et $P_j(z)\in\overline{\mathbb{Q}}[z]$ pour chaque j.*

Dans (ii), si l'on remplace partout $\overline{\mathbb{Q}}$ par $\mathbb{Q}$, on a la même conclusion en supposant seulement que F est une fonction entière.

(23)Comme 1, $\log(z)$ et $\mathscr{E}(z)$ forment aussi une $\mathbb{C}$-base de solutions de L en $z=0$, on peut également interpréter (6.19) comme l'écriture d'une solution locale $e^{-z}\mathscr{G}(z)$ de L en $z=\infty$ sur une base locale en 0.

7. E- et G-fonctions, résultats diophantiens récents

7.1. Retour sur les valeurs des E-fonctions

Grâce à sa théorie des E-opérateurs, André [7] a réussi à donner une nouvelle preuve du théorème de Siegel-Shidlovskii (au sens strict) en se servant « uniquement » des propriétés différentielles de ces opérateurs, et principalement de leur conséquence donnée par le point (ii) du théorème 6.17. Ce n'est pas un argument ordinaire en théorie de la transcendance. André a d'ailleurs qualifié sa méthode de « transcendance sans transcendance » car il n'utilise pas les constructions classiques basées sur les appproximants de type Padé explicites ou ceux, inexplicites, construits avec le lemme de Siegel.

Pour illustrer cette méthode, donnons un exemple qu'André a indiqué à l'auteur. Nous allons montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, au moins un des deux nombres $J_0(\alpha)$ ou $J_0'(\alpha)$ est irrationnel,(24) au moyen d'un argument d'« irrationalité sans irrationalité ». On sait bien sûr que ces deux nombres sont transcendants mais ce n'est pas le point ici. Supposons au contraire que ces deux nombres soient rationnels. Comme $J_0(z)$ est solution du E-opérateur $L := z(d/dz)^2 + d/dz + z$,(25) on a $J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(u_n/n!)(z-\alpha)^n$ avec $u_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 0$; une propriété générale des équations différentielles linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$ assure alors que $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n/n!)z^n$ est une E-fonction stricte (voir [145, Prop. 1]). Par le théorème 6.20(ii) ci-dessus, $J_0(z+\alpha)$ est donc de la forme $P_1(z)e^{\beta_1 z} + P_2(z)e^{\beta_2 z}$ avec P_1, P_2 des polynômes. Or c'est impossible : l'équation $(z+\alpha)y''(z) + y'(z) + (z+\alpha)y(z) = 0$ est minimale pour $J_0(z+\alpha)$ et admet une solution non holomorphe en $z = -\alpha$ (notée $Y_0(z)$ dans la littérature [1]), tandis que l'équation minimale satisfaite par $P_1(z)e^{\beta_1 z} + P_2(z)e^{\beta_2 z}$ (d'ordre $\leqslant 2$) admet en n'importe quel point une base locale de solutions holomorphes en ce point, simplement donnée par $P_1(z)e^{\beta_1 z}$ et $P_2(z)e^{\beta_2 z}$. Avec un argument supplémentaire en lien avec le problème 1 dans la partie 8, cette

(24) On montre de façon similaire que si $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ est tel que $J_0(\alpha) \neq 0$, alors $J_0'(\alpha)/J_0(\alpha) \notin \mathbb{Q}$.

(25) $\mathscr{F}(L) = (z^2-1)d/dz - z$ est minimal pour la G-fonction $\sqrt{1-z^2}$, donc L est bien un E-opérateur.

démonstration se généralise pour montrer que si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ où $\mathbb{K}$ est un corps quadratique imaginaire, alors au moins un des deux nombres $J_0(\alpha)$ ou $J_0'(\alpha)$ n'est pas dans $\mathbb{K}$.

En un certain sens, une méthode de transcendance classique est implicitement présente dans celle d'André, puisque la démonstration du théorème 6.17 utilise le théorème 6.8 sur la structure des G-opérateurs. Or comme on l'a dit, la démonstration de ce dernier utilise des approximants de type Padé de type II. Cela n'enlève évidemment rien à la valeur du point de vue développé par André, qui s'est avéré fécond. Il a en effet permis d'obtenir un raffinement *optimal* du théorème de Siegel-Shidlovskii homogène pour les E-fonctions strictes. Un tel raffinement a d'abord été partiellement donné par Nesterenko et Shidlovskii [119].

Théorème 7.1 **(Théorème de relèvement de Nesterenko-Shidlovskii)**
Soit $Y(z) = {}^t(F_1(z), \ldots, F_n(z))$ *un vecteur de* E*-fonctions au sens large, solution d'un système différentiel* $Y'(z) = A(z)Y(z)$ *avec* $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$.

Alors, il existe un ensemble fini S *(qui dépend de* Y*) tel que, pour tout* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \smallsetminus S$*, la propriété suivante ait lieu : pour tout* $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_n]$ *homogène en* $X_1, \ldots, X_n$ *tel que*

$$P\big(F_1(\alpha), \ldots, F_n(\alpha)\big) = 0,$$

il existe $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[Z, X_1, \ldots, X_n]$ *homogène en* $X_1, \ldots, X_n$ *tel que*

$$Q\big(z, F_1(z), \ldots, F_n(z)\big) = 0 \quad \text{et} \quad Q(\alpha, X_1, \ldots, X_n) = P(X_1, \ldots, X_n).$$

Ce résultat affirme qu'une éventuelle relation polynomiale homogène entre les *valeurs* $F_1(\alpha), \ldots, F_n(\alpha)$ s'obtient uniquement par spécialisation d'une relation polynomiale homogène entre les *fonctions* $F_1(z), \ldots, F_n(z)$: on « relève » toute relation numérique en une relation fonctionnelle. Le défaut de ce théorème réside dans l'ensemble S, qui est en principe calculable sur chaque exemple mais qui reste inconnu en général. Beukers [23] a couplé la théorie d'André et la théorie de Galois différentielle pour le spécifier.

Théorème 7.2 **(Théorème de relèvement de Beukers)**
On se place dans les hypothèses et notations du théorème 7.1.

On suppose de plus que les E-fonctions $F_1(z), \dots, F_n(z)$ le sont au sens strict.

Alors, la conclusion du théorème 7.1 *a lieu avec*

$$S = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : \alpha T(\alpha) = 0\},$$

où $T(z)$ est un dénominateur commun des coefficients de la matrice $A(z)$, de degré minimal.

Ce théorème de relèvement de Beukers est donc un raffinement optimal du théorème de Siegel-Shidlovskii homogène dans le cas strict. Donnons-en deux corollaires intéressants. Le premier est énoncé dans [59, p. 2 & p. 9] mais sa démonstration en avait été esquissée par l'arbitre de [58] dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$. Sa démonstration s'étend au cas général sans difficulté.

***Corollaire 7.3* (Dichotomie diophantienne).** *Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $F(z) \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ une E-fonction stricte.*

Alors pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, soit $F(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ soit $F(\alpha) \in \mathbb{K}(\alpha)$.

Par exemple, une E-fonction stricte à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ne prend que des valeurs rationnelles ou transcendantes aux point rationnels. Ainsi, il n'existe aucune E-fonction stricte $F(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$ telle que $F(1) = \sqrt{2}$.

Le second corollaire se déduit par contraposition du théorème 7.2 puisqu'une relation linéaire est une relation homogène de degré 1.

***Corollaire 7.4* (Beukers).** *On se place dans les conditions et notations du théorème* 7.2*. On suppose de plus que les E-fonctions strictes $F_1(z), \dots, F_n(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

Alors pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$, les nombres

$$F_1(\alpha), \dots, F_n(\alpha)$$

sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Ce résultat est celui évoqué dans la note de bas de page annoncée avant le théorème 5.20, ce dernier étant le meilleur résultat d'indépendance linéaire connu auparavant (mais il porte sur les E-fonctions au sens large).

La condition $\alpha T(\alpha) \neq 0$ est optimale dans le corollaire. En effet, si $\alpha = 0$, les nombres $F_1(\alpha), \dots, F_n(\alpha)$ sont tous algébriques donc liés sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Si par ailleurs $T(\alpha) = 0$, la relation

$$0 = \lim_{z\to\alpha} T(z)Y'(z) = \lim_{z\to\alpha} T(z)A(z)Y(z)$$

implique que les nombres $F_1(\alpha), \dots, F_n(\alpha)$ sont également liés sur $\overline{\mathbb{Q}}$ puisque la matrice $\lim_{z\to\alpha} T(z)A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}})$ n'est pas identiquement nulle.

Aussi puissants soient-ils, les énoncés des théorèmes de Siegel-Shidlovskii et de Beukers ne permettent pas toujours de décider la transcendance des valeurs de E-fonctions strictes. Étant donnés $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $F_1(z)$ une E-fonction, supposons en effet que nous désirions savoir si $F_1(\alpha)$ est transcendant ou pas. Il y a deux obstructions immédiates.

(1) Injectons $F_1(z)$ dans un vecteur $Y(z) = {}^t(F_1(z), \dots, F_n(z))$ satisfaisant à un certain système différentiel.

- Si $\deg\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)(F_1(z), \dots, F_n(z)) = n$, le théorème 5.10 assure en particulier que $F_1(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$.
- En revanche, si $m := \deg\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)(F_1(z), \dots, F_n(z)) < n$, alors il existe m nombres transcendants parmi les n nombres $F_1(\alpha), F_2(\alpha), \dots, F_n(\alpha)$ mais rien ne dit que $F_1(\alpha)$ lui-même soit transcendant.

(2) Dans la même situation que précédemment, le théorème 5.10 ne dit rien sur la nature des nombres $F_k(\alpha)$ ($k = 1, \dots, n$) lorsque $T(\alpha) = 0$.

Peut-on quand même déterminer la nature arithmétique de $F_1(\alpha)$? Adamczewski et l'auteur [2] ont apporté la réponse suivante à cette question.

***Théorème 7.5* (Adamczewski-R.).** *Il existe un algorithme qui réalise les tâches suivantes.*

Étant donnée une E-fonction stricte $F(z)$ en entrée, il commence par déterminer si $F(z)$ est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ ou pas. Si elle ne l'est pas, il affiche le polynôme $F(z)$ en sortie. Si elle l'est, il poursuit et affiche en sortie la liste finie des $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tels que $F(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, ainsi que la liste correspondante des valeurs $F(\alpha)$.

Afficher un nombre algébrique α signifie : expliciter un polynôme $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$ et donner une approximation numérique de α permettant de le distinguer des autres racines complexes de P. Sans rentrer dans les détails, indiquons que la démonstration de ce résultat utilise la borne de Grigoriev [80] ou celle de [32] sur le degré en z des facteurs à droite des opérateurs de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$, un « lemme de zéros » de Bertrand-Beukers [17](26), une procédure algorithmique de désingularisation des systèmes différentiels(27) et le corollaire 7.4 de Beukers énoncé ci-dessus.

André [10, p. 6, Cor. 1.7.1] a étendu le théorème de relèvement de Beukers au cas des E-fonctions au sens large (et même dans un cadre encore plus général), obtenant ainsi un raffinement optimal du théorème de Siegel-Shidlovskii homogène.

***Théorème 7.6* (André).** *On se place dans les hypothèses et notations du théorème* 7.1.

Alors la conclusion du théorème 7.1 *a lieu avec* $S = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : \alpha T(\alpha) = 0\}$, *où* $T(z)$ *est un dénominateur commun des coefficients de la matrice* $A(z)$, *de degré minimal.*

Les corollaires 7.3 et 7.4 s'étendent donc aux E-fonctions au sens large. La démonstration du théorème 7.6 n'utilise pas la théorie des E-opérateurs comme l'avait fait Beukers mais des arguments très généraux relevant de la théorie de Galois différentielle. Citons enfin l'article de Fischler et l'auteur [66] qui présente un algorithme permettant de déterminer les valeurs algébriquement liées sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des valeurs (en des points algébriques) de E-fonctions algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

---

(26)Dans la situation du théorème de Siegel-Shidlovskii, si l'on se donne des polynômes $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{C}[z]$, ce lemme produit un entier explicite N tel que si l'on vérifie que l'ordre en $z = 0$ de $R(z) := \sum_{j=1}^{n} P_j(z) F_j(z)$ est $\geqslant N$, alors on est assuré que $R(z)$ est identiquement nul.

(27)Partant d'un système $Y'(z) = A(z)Y(z)$ avec $A(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{C}(z))$, cette procédure détermine un système différentiel « équivalent » $Y'(z) = B(z)Y(z)$ avec $B(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{C}(z))$ dont aucun pôle des coefficients n'est une singularité apparente.

7.2. Retour sur les valeurs des G-fonctions

On a énoncé dans la partie 4.6 le théorème 4.27 qui affirme que pour tout entier q et tout entier $s \geqslant 1$ tels que $|q| > e^{s^2}$, les nombres $1, \mathrm{Li}_1(1/q), \ldots, \mathrm{Li}_s(1/q)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Plus généralement, étant donné un rationnel $a/b \neq 0$, les nombres $1, \mathrm{Li}_1(a/b), \ldots, \mathrm{Li}_s(a/b)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ pourvu que $|b|$ soit beaucoup plus grand que $|a|$ (cette condition dépendant de s). En particulier, $|a/b|$ est alors beaucoup plus petit que 1, le rayon de convergence des séries Li_j.

Plus récemment, des résultats d'une nature différente ont été obtenus. Le point de vue est en quelque sorte dual du précédent : on perd l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de tous les nombres $1, \mathrm{Li}_1(a/b), \ldots, \mathrm{Li}_s(a/b)$ mais l'on gagne le fait que a/b est un rationnel quelconque satisfaisant à $0 < |a/b| < 1$. On peut même remplacer a/b par un nombre algébrique.

Théorème 7.7 **(Marcovecchio [111]).** *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $0 < |\alpha| < 1$. Lorsque $s \to +\infty$, on a*

$$\dim_{\mathbb{Q}(\alpha)} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}(\alpha)}\big(1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \ldots, \mathrm{Li}_s(\alpha)\big) \geqslant \frac{1 + o(1)}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \ln(2e)} \ln(s). \tag{7.8}$$

L'auteur [135] avait obtenu le même énoncé mais avec l'hypothèse supplémentaire que $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$. La démonstration de ce dernier résultat utilise la série

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-rn)}{k^s(k+1)^s\cdots(k+n)^s}\, z^{k+n} = \mathscr{O}(z^{(r+1)n+1}),$$

où r, s, n sont des entiers positifs. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $(k-rn)_{rn}/(k)_{n+1}^s$, on montre aisément qu'il existe des polynômes (explicitables) $P_{0,n}, P_{1,n}, \ldots, P_{s,n} \in \mathbb{Q}[z]$, de degré au plus n, tels que

$$S_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{j=1}^{s} P_{j,n}(z) \mathrm{Li}_j(z).$$

La série $S_n(z)$ produit donc des approximants *explicites* de type Padé de type I pour les polylogarithmes. Grâce aux formules explicites, on sait contrôler finement, en fonction de r et s, la croissance des

$|P_{j,n}(\alpha)|$ et la décroissance de $|S_n(\alpha)|$ lorsque $n \to +\infty$. Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, le critère d'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ donné par la proposition 4.3 dans la partie 4.1 permet alors de minorer le rang sur $\mathbb{Q}$ de la famille $(1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \dots, \mathrm{Li}_s(\alpha))$ en fonction de r et A ; le choix optimal $r = [s/\ln(s)^2]$ produit alors la minoration (7.8). On utilise un critère similaire dans le cas général $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ (voir par exemple [63]). La démonstration du théorème 7.7 est un raffinement de l'esquisse précédente. La principale difficulté est alors de prouver la non-nullité de $S_n(\alpha)$, ce que l'on fait en construisant plusieurs séries similaires à S_n et en concluant par une méthode proche de celle de Siegel et Shidlovskii pour les E-fonctions.

Le théorème 7.7 a très récemment été généralisé de la façon suivante. Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ une G-fonction dont le rayon de convergence est $R > 0$. Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $s \geqslant 0$, on définit les G-fonctions

$$F_n^{[s]}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(k+n)^s} z^{k+n}.$$

Pour tout $S \geqslant 0$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |\alpha| < R$, posons

$$\Phi_{\alpha,S} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\big(F_n^{[s]}(\alpha); n \geqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant S\big).$$

Si F est polynôme, alors $\Phi_{\alpha,S} \subset \mathbb{K}$.

Théorème 7.9 **(Fischler-R.** [63]**).** *Supposons que F ne soit pas un polynôme. Il existe une constante $c_1 > 0$ et des entiers explicitables $c_2, c_3 \geqslant 1$ (dépendant de F uniquement) tels que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < R$,*

$$\frac{1 + o(1)}{c_1[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]} \log(S) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\Phi_{\alpha,S}) \leqslant c_2 S + c_3,$$

où le $o(1)$ est lorsque $S \to +\infty$.

On retrouve le théorème 7.7 avec $F(z) = 1/(1-z)$. Dans [64], ce résultat a même été généralisé en des points $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour lesquels les séries ne convergent pas et en utilisant à la place le prolongement analytique des G-fonctions $F_n^{[s]}(z)$ pour définir $F_n^{[s]}(\alpha)$. Mentionnons que le théorème 6.8 d'André, Chudnovsky et Katz sur la structure des G-opérateurs est crucial pour parvenir à montrer que la série

$$T_n(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^S}\, a_k z^{k+n}$$

permet de construire des approximants explicites de type Padé de type I des fonctions $F_n^{[s]}(z)$ $(1 \leqslant s \leqslant S)$ et des dérivées de F. La preuve du théorème 7.9 suit alors la trame de celle du théorème 7.7 mais elle est techniquement beaucoup plus compliquée, en particulier parce qu'elle nécessite d'appliquer la méthode du col à une représentation intégrale de $T_n(z)$ pour en estimer le comportement asymptotique quand $n \to +\infty$.

Ce théorème admet l'intéressant corollaire suivant, qui est un cas où $c_2 = 1$.

Corollaire 7.10. *Fixons* $a_1, \ldots, a_{p+1} \in \mathbb{Q}$ *et* $b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{Q}$ *tels que* $a_i \notin \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}$ *et* $b_j \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ *pour tout* i, j.

Alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que* $0 < |\alpha| < 1$, *une infinité des valeurs hypergéométriques*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_{p+1})_k}{(1)_k (b_1)_k \cdots (b_p)_k} \frac{\alpha^k}{(k+1)^s}, \quad s \in \mathbb{N},$$

sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.

On connaît très peu de valeurs de G-fonctions évaluées en un point algébrique qui soient transcendantes. On connaît la transcendance des valeurs de la G-fonction $\log(1-z)$ *via* l'étude de sa « réciproque », la E-fonction $\exp(z)$, mais pas par une étude directe. La méthode de Siegel, Galochkin, Bombieri et Chudnovsky pour les G-fonctions n'est pas assez forte pour produire une seule valeur transcendante d'une G-fonction. Toutefois, André [5] a réussi à introduire un ingrédient supplémentaire dans cette méthode (qu'il a appelé « uniformisation adélique simultanée »), ce qui lui a permis de démontrer en 1996 le

Théorème 7.11 **(André).** *Soit* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que* $0 < |\alpha| < 1$. *Les nombres*

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}1/2, 1/2\\ 1\end{matrix}; \alpha\right] \quad \text{et} \quad {}_2F_1\left[\begin{matrix}-1/2, 1/2\\ 1\end{matrix}; \alpha\right] \tag{7.12}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Sur cet exemple, la mise en œuvre de l'uniformisation adélique simultanée exploite le lien profond entre ces deux séries hypergéométriques, les périodes de courbes elliptiques et les formes modulaires (voir (7.13) ci-dessous). Malheureusement, aucun autre exemple d'application fondamentalement différent n'a été découvert depuis. Notons qu'André a aussi démontré une version p-adique du théorème 7.11.

Un corollaire du théorème 7.11 est l'indépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$ des nombres π et $\Gamma(1/4)^4$, qui est aussi une conséquence d'un théorème de Chudnovsky [38] sur les fonctions elliptiques démontré en 1980 par une méthode de transcendance sans rapport direct avec les G-fonctions. À la connaissance de l'auteur, on ne connaît pas à ce jour trois nombres algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ qui soient des valeurs de G-fonctions en des points algébriques. Le contraste avec le théorème de Siegel-Shidlovskii sur les valeurs de E-fonctions est frappant. On peut d'ailleurs construire des exemples simples qui montrent que l'analogue exact pour les G-fonctions du théorème de Siegel-Shidlovskii est faux, voir [138]. Des séries hypergéométriques transcendantes peuvent également prendre des valeurs algébriques en des points algébriques :

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}1/3, 2/3\\ 5/6\end{matrix}; \frac{27}{32}\right] = \frac{8}{5}, \qquad {}_2F_1\left[\begin{matrix}1/6, 1/2\\ 2/3\end{matrix}; \frac{125}{128}\right] = \frac{4}{3}\sqrt[6]{2},
$$

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}1/12, 5/12\\ 1/2\end{matrix}; \frac{1323}{1331}\right] = \frac{3}{4}\sqrt[4]{11},
$$

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}1/12, 5/12\\ 1/2\end{matrix}; \frac{392}{253^3}(44372 - 1767\sqrt{3})\right] = \frac{2}{3}\sqrt[4]{21 + 20\sqrt{3}}.
$$

Ces évaluations sont difficilement prévisibles *a priori* puisqu'une légère variation des paramètres peut produire un nombre transcendant, tel que

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}7/12, 11/12\\ 3/2\end{matrix}; \frac{1323}{1331}\right] = \frac{11^{7/4}\,\Gamma(1/4)^4}{336\,\pi^2}.
$$

Ces évaluations exotiques, parmi beaucoup d'autres [21, 90], découlent essentiellement du lien entre formes modulaires et certaines séries hypergéométriques. Considérons par exemple les séries d'Eisenstein

$$E_2(q) = 1 - 24 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}, \qquad E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-q^n},$$
$$E_6(q) = 1 - 504 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1-q^n},$$

l'invariant modulaire $J(q) = 1728 E_4(q)^3/(E_4(q)^3 - E_6(q)^2)$ (pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$) et la G-fonction

$$F(z) := {}_2F_1\begin{bmatrix} 1/12, 5/12 \\ 1 \end{bmatrix}; z\Big]^2 = {}_3F_2\begin{bmatrix} 1/12, 1/6, 5/6 \\ 1, 1 \end{bmatrix}; z\Big].$$

En notant $z(q) = 1728/J(q)$ et en supposant $|q|$ assez proche de 0 pour que $|z(q)| < 1$, on a

$$\begin{gathered} E_2(q) = \sqrt{1 - z(q)}\,\big(F\big(z(q)\big) + 6z(q)F'\big(z(q)\big)\big)\,, \\ E_4(q) = F\big(z(q)\big)^2, \qquad E_6(q) = \sqrt{1 - z(q)}F\big(z(q)\big)^3. \end{gathered} \tag{7.13}$$

Les identités pour E_4 et E_6 sont démontrées dans [163], tandis que celle pour E_2 l'est dans [126]. Les évaluations exotiques ci-dessus proviennent d'identités similaires à (7.13) et de ce que $j(\tau) := J(e^{2i\pi\tau})$ est un entier algébrique pour tout nombre quadratique τ tel que $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ (voir [153] pour les propriétés diophantiennes de j). Il existe également des G-fonctions transcendantes qui prennent des valeurs algébriques sur un ensemble dense de nombres algébriques dans leur disque de convergence [165].

Compte tenu de la conjecture de Bombieri-Dwork liant G-fonctions et périodes, il est en fait probable que les relations polynomiales sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre valeurs de G-fonctions aux points algébriques soient décrites par *la conjecture des périodes de Grothendieck*, qui est largement ouverte. Voir [9, Chap. 23] pour la présentation de cette conjecture au moyen du groupe de Galois motivique absolu, qui étend aux périodes l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les nombres algébriques.

7.3. Mesures d'irrationalité de valeurs de E- et G-fonctions

Comme avec les approximants explicites, les approximants de Padé inexplicites permettent de déterminer des mesures d'irrationalité, d'indépendance linéaire ou de transcendance le cas échéant des valeurs de E- ou G-fonctions. Voir par exemple [157, Chap. 11 à 13] pour les E-fonctions. Comme l'indique Shidlovskii [157, p. 405], ces mesures ont longtemps souffert d'une certaine réputation d'ineffectivité[(28)]) due à celle de la méthode originelle de Shidlovskii. Cette réputation n'a maintenant plus lieu d'être car cette méthode a été rendue effective à la suite de divers travaux d'André, Bertrand, Beukers, Chirskii, Chudnovsky, Osgood, Yebbou [4, 17, 18, 123] entre autres. De ce fait, toutes les constantes qui apparaissent dans les trois énoncés ci-dessous pourraient être explicitées.

Zudilin a obtenu des mesures d'irrationalité aussi bien des valeurs de E-fonctions que de G-fonctions.

Théorème 7.14 **(Zudilin** [167]**).** *Soit* $Y(z) = {}^t(F_1(z), \dots, F_n(z))$ *un vecteur de E-fonctions de* $\mathbb{Q}[\![z]\!]$ *solution du système différentiel* $Y'(z) = A(z)Y(z) + B(z)$, *où* $A(z)$ *et* $B(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}(z))$. *Supposons que* $F_1(z), \dots, F_n(z)$ *soient algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{C}(z)$. *Soit* $a/b \in \mathbb{Q}^*$ *qui n'est pas un pôle des matrices* $A(z)$ *et* $B(z)$.

Alors il existe deux constantes $Q, \kappa > 0$, *qui dépendent de* Y *et* a/b, *telles que pour tout entier* $q \geqslant Q$ *et tout* $p \in \mathbb{Z}$ *on ait*

$$\left|F_j(a/b) - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{2+\kappa\cdot(\ln\ln(q))^{-1/(n+1)}}}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{7.15}$$

Théorème 7.16 **(Zudilin** [168]**).** *Soit*

$$Y(z) = {}^t(F_1(z), \dots, F_n(z))$$

un vecteur de G-fonctions de $\mathbb{Q}[\![z]\!]$ *solution du système différentiel* $Y'(z) = A(z)Y(z)+B(z)$, *où* $A(z)$ *et* $B(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}(z))$. *Supposons soit que* $n = 2$ *et que* $1, F_1(z), F_2(z)$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{C}(z)$, *soit que* $n \geqslant 3$ *et* $F_1(z), \dots, F_n(z)$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{C}(z)$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

---

(28) c'est-à-dire qu'on ne sait pas calculer toutes les constantes qui apparaissent.

Il existe deux constantes $B(\varepsilon, a, Y) \geqslant 0$ et $Q(\varepsilon, Y) \geqslant 0$ satisfaisant aux propriétés suivantes. Soit $b \in \mathbb{Z}$ tel que $b \geqslant B(\varepsilon, a, Y)$. Alors $F_j(a/b) \notin \mathbb{Q}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout entier $q \geqslant Q(\varepsilon, Y)$, on a

$$\Big|F_j(a/b) - \frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.17}$$

Bien que superficiellement similaires, les mesures (7.15) et (7.17) sont très différentes. En effet, pour s'approcher de 2 dans (7.17), il faut prendre b et q de plus en plus grands. En revanche, le 2 dans (7.15) ne dépend essentiellement pas de a et b fixés, au sens où l'on s'en approche en prenant seulement q de plus en plus grand. C'est une illustration de l'état très avancé de la théorie diophantienne des valeurs de E-fonctions alors que celle des valeurs de G-fonctions est très incomplète ; voir les remarques à la fin de la partie 7.2.

Il est également intéressant de mesurer l'écart entre un irrationnel α donné et des nombres rationnels d'une forme spécifique. En particulier, on utilise souvent les rationnels b-adiques, c'est-à-dire de la forme n/b^m, car une telle « mesure d'approximation restreinte » donne des renseignements sur la répartition des chiffres du développement de α en base b. On dispose d'un résultat pour les G-fonctions.

Théorème 7.18 **(Fischler-R.** [62]**).** *Soit $F(z) \in \mathbb{Q}[\![z]\!]$ une G-fonction telle que $F(z) \notin \mathbb{Q}(z)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Il existe deux constantes $B(\varepsilon, a, F) \geqslant 1$ et $M(\varepsilon, F) \geqslant 0$ satisfaisant aux propriétés suivantes.*

Soit $b \in \mathbb{Z}$ tel que $b \geqslant B(\varepsilon, a, Y)$. Alors $F(a/b) \notin \mathbb{Q}$ et pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $m \geqslant M(\varepsilon, F)$, on a

$$\Big|F(a/b) - \frac{n}{b^m}\Big| > \frac{1}{b^{m(1+\varepsilon)}}.$$

Le principal défaut des théorèmes 7.16 et 7.18 est de ne pas s'appliquer à tous les rationnels a/b en lesquels les nombres $F(a/b)$ et $F_j(a/b)$ sont définis. Par exemple, on ne connaît ainsi pas de G-fonction F et de rationnel a/b tels que l'un ou l'autre de ces théorèmes s'applique à $F(a/b) = \pi$.

Les démonstrations de ces trois théorèmes utilisent des approximants inexplicites de type Padé de type II non diagonaux auxquels on applique le schéma de démonstration donné après la proposition 4.34

de la partie 4.7. La principale difficulté est d'assurer la non-nullité des approximations ainsi construites, ce qui découle d'arguments à la Siegel-Shidlovskii. Il existe des résultats plus fins pour les fonctions $(1-z)^s$ et $\log(1-z)$, qui ont été obtenus par Bennett [15], Beukers [19] et l'auteur [136] entre autres en utilisant les approximants de Padé explicites non diagonaux de ces fonctions.

8. Quelques problèmes

En plus des conjectures classiques déjà mentionnées dans le texte, nous donnons quelques problèmes ouverts autour des E- et G-fonctions. Ils ont presque tous déjà été mentionnés dans des articles parus.

Problème 1. La notion de « quasi-E-fonctions » a été définie dans [146] en affaiblissant la définition 5.1 des E-fonctions de la manière suivante : on garde (i) et (iii) mais on remplace (ii) par une condition (ii)′ où l'on demande seulement que $|a_n| \leqslant n!^{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geqslant N(\varepsilon)$, et l'on oublie les autres automorphismes galoisiens. Donner un exemple de quasi-E-fonction qui ne soit pas une E-fonction. Notons qu'une quasi-E-fonction à coefficients dans un corps quadratique (galoisien) imaginaire $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ est une E-fonction, où $d \geqslant 1$ entier sans facteur carré. En effet, donnons-nous $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n/n! \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ une quasi-E-fonction : comme $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q}) = \{\text{identité}, \text{conjugaison complexe}\}$, on a $|\sigma(a_n)| = |a_n|$ pour tout $n \geqslant 0$ et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, et F est donc une E-fonction. En revanche, le problème est ouvert pour les quasi-E-fonctions à coefficients dans un corps quadratique réel, tel que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

On définit de façon similaire les notions de « quasi-E-fonctions au sens strict », de « quasi-G-fonctions » et de « quasi-G-fonctions au sens large », pour lesquelles le même problème se pose.

Problème 2. On reprend les notations utilisées lorsque nous avons évoqué la condition de Galochkin dans la partie 5.4. Celle-ci demande qu'une suite d'entiers $(Q_k)_{k\geqslant 1}$ liée à une matrice $A(z) \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ satisfait à $1 \leqslant Q_k \leqslant C^k$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Définissons la constante de Galochkin de A (ou taille de A) par

$$\sigma(A) := \limsup_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \ln(Q_k),$$

qui est donc finie. Le théorème 6.5 de Chudnovsky permet en fait de borner très explicitement $\sigma(A)$ à partir de la connaissance d'un vecteur de G-fonctions indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$ et solution du système (voir [51, p. 299]). Est-il quand même possible de borner directement $\sigma(A)$ si l'on ne connaît pas explicitement un tel vecteur ?

Problème 3. Il est facile de créer une E-fonction transcendante prenant des valeurs algébriques données en des valeurs algébriques données : il suffit de considérer $p(z)+q(z)e^z$ où $p(z), q(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ sont bien choisis. Notons que l'exponentielle est « purement transcendante » au sens où elle ne prend que des valeurs transcendantes aux points algébriques non nuls. Ce type de représentation est en fait général. Beukers [23] a montré qu'étant donnés une E-fonction stricte $F(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tels que $F(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, la fonction $(F(z) - F(\alpha))/(z - \alpha)$ est encore une E-fonction. Ce fait est l'un des ingrédients de son théorème 7.2 de relèvement. En le combinant au corollaire 7.4 dans la partie 7.1, on peut en déduire la propriété suivante (voir les détails dans [139]).

Proposition 8.1. *Pour toute E-fonction stricte $F(z)$, il existe des polynômes $p(z), q(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ et une E-fonction stricte $f(z)$ purement transcendante tels que $F(z) = p(z) + q(z)f(z)$.*

Peut-on estimer le nombre de E-fonctions strictes purement transcendantes parmi toutes les E-fonctions strictes solutions des opérateur de $\overline{\mathbb{Q}}[z][d/dz]$ de degré et ordre donnés ? Par ailleurs, on sait que le coefficient dominant d'un E-opérateur est de la forme z^b : peut-on déterminer la nature des E-fonctions solutions d'un E-opérateur pour les petites valeurs de l'entier $b \geqslant 0$?

Problème 4. André a esquissé dans [7] la théorie des G-opérateurs au sens large. Il a montré qu'un tel opérateur $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[d/dz]$ est fuchsien avec des exposants rationnels. Des arguments standard montrent qu'en tout point ordinaire, il existe une $\mathbb{C}$-base locale composée de G-fonctions au sens large. Peut-on compléter son étude aux points singuliers de façon à obtenir un analogue complet du théorème 6.8 d'André, Chudnovsky et Katz ? Quelles conséquences peut-on en déduire pour la théorie sous-jacente des E-opérateurs au sens large ainsi que pour les propriétés diophantiennes des E-fonctions ?

Problème 5. Curieusement, un analogue du théorème 7.18 n'est connu pour aucune valeur de E-fonctions aux rationnels, pas même pour le nombre e. Les conditions de (dé)croissance en C^n ou C^{-n} des suites d'approximants simultanés de type Padé de type I ou II des G-fonctions sont très bien adaptées pour déterminer une mesure d'approximation restreinte avec des fractions de la forme n/b^m. En revanche, il a été remarqué dans [62] que les conditions de (dé)croissance en $n!$ ou $1/n!^s$ des suites d'approximants simultanés de type Padé de type I ou II des E-fonctions ne permettent pas de déterminer une mesure d'approximation restreinte avec les fractions n/b^m qui soit meilleure que celle déduite de la mesure d'irrationalité donnée par le théorème 7.14 de Zudilin avec $p/q = n/b^m$. Peut-on prouver au moins pour le nombre e que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous entiers $n \in \mathbb{Z}$ et m assez grand, on a $|e - n/b^m| \geqslant 1/b^{m(1+\varepsilon)}$?

Problème 6. Fischler et l'auteur ont défini dans [59] l'ensemble des E-valeurs, noté $\boldsymbol{E}$, comme l'ensemble de toutes les valeurs des E-fonctions au sens strict en des points algébriques. Il est facile de montrer que $\boldsymbol{E}$ est un sous-anneau dénombrable de $\mathbb{C}$ et que le groupe $\boldsymbol{E}^*$ des unités de $\boldsymbol{E}$ contient les nombres αe^{β} ($\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$). L'ensemble de ces nombres est évidemment un sous-groupe multiplicatif de $\boldsymbol{E}^*$, que l'on note $\boldsymbol{e}$. Est-ce que $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{E}^*$? Cette question est à mettre en regard du résultat d'André qui affirme que les unités de l'anneau des E-fonctions sont exactement de la forme $\alpha e^{\beta z}$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$. Le théorème 7.2 de relèvement de Beukers pourrait être utile ici, comme le montre le résultat partiel en direction de l'égalité $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{E}^*$ obtenu dans [143].

Problème 7. Les mêmes auteurs ont également défini dans [58] l'ensemble des G-valeurs, noté $\boldsymbol{G}$, comme l'ensemble de toutes les valeurs des prolongements analytiques des G-fonctions en des points algébriques. $\boldsymbol{G}$ est aussi un sous-anneau dénombrable de $\mathbb{C}$ mais c'est beaucoup moins facile à montrer que pour $\boldsymbol{E}$. Le groupe $\boldsymbol{G}^*$ des unités de $\boldsymbol{G}$ contient $\overline{\mathbb{Q}}^*$ mais aussi les valeurs de la fonction Bêta $B(x, y)$

aux points $x, y \in \mathbb{Q}$ en lesquels elle est définie ; on note $\boldsymbol{g}$ le sous-groupe multiplicatif de $\boldsymbol{G}^*$ engendré par ces nombres. En particulier $\pi = B(1/2, 1/2) = \Gamma(1/2)^2 \in \boldsymbol{g}$, comme on le voit avec cette identité de Ramanujan [131] :

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^3 (42n+5)}{2^{12n+4}}, \tag{8.2}$$

où la série à droite est la somme de deux G-fonctions hypergéométriques. Plus généralement, l'identité

$$\Gamma(a/b)^b = (a-1)! \prod_{j=1}^{b-1} B(a/b, ja/b)$$

montre que $\Gamma(a/b)^b \in \boldsymbol{g}$ pour tous entiers $a, b \geqslant 1$. Est-ce que $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{G}^*$? Rappelons qu'André a montré que les unités de l'anneau des G-fonctions sont exactement les fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ holomorphes en $z = 0$. Il y a donc une importante différence entre le groupe des unités fonctionnelles et le groupe des unités numériques, qui contient des nombres transcendants.

Problème 8. Étant donnée une E-fonction stricte explicite $F(z)$ d'ordre différentiel $\geqslant 3$, on peut se demander si elle est de la forme demandée dans le *problème de Siegel* (énoncé après le théorème 5.7 dans la partie 5.2) ou si elle peut en être un contre-exemple. Une approche possible serait de « comparer » $F(z)$ et les polynômes en les fonctions hypergéométriques ${}_pF_p$ au moyen de leurs développements asymptotiques à l'infini. Il a été montré dans [59] que les coefficients de ces développements appartiennent au $\boldsymbol{G}[\gamma]$-module $\boldsymbol{S}$ engendré par tous les nombres $\Gamma(a/b)$, $a/b \in \mathbb{Q} \smallsetminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$. La comparaison de ces développements asymptotiques donnera donc des relations polynomiales sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre éléments de $\boldsymbol{S}$ qui peuvent être ou ne pas être compatibles (au besoin modulo certaines conjectures diophantiennes, dont celle de Rohrlich-Lang sur les valeurs de la fonction Gamma ou celle faite dans [59, p. 34]). La question se pose par exemple pour

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n} \right) \frac{z^n}{n!},$$

solution de

$$z^2y'''(z) + (3z - 11z^2)y''(z) + (1 - 22z - z^2)y'(z) - (3 + z)y(z) = 0.$$

Problème 9. Un nombre de Liouville [106] est un réel ξ pour lequel on peut trouver une suite des rationnels $(p_n/q_n)_n$ et une suite de réels $(s_n)_n$ tels que $s_n \to +\infty$ et $0 < |\xi - p_n/q_n| < 1/q_n^{s_n}$. Un tel nombre est transcendant. Dans les conditions du théorème 7.14, respectivement du théorème 7.16, la conclusion assure en particulier que les nombres $F_j(a/b) \in \boldsymbol{E}$, respectivement $F_j(a/b) \in \boldsymbol{G}$, ne sont pas de Liouville. Il est conjecturé dans [58] qu'aucun élément de $\boldsymbol{G}$ n'est de Liouville et on peut formuler la même conjecture pour les éléments de $\boldsymbol{E}$. Répondre positivement à l'une ou l'autre de ces conjectures ne nécessite pas forcément de montrer au préalable qu'une valeur donnée de $\boldsymbol{E}$ ou de $\boldsymbol{G}$ est irrationnelle car les nombres rationnels ne sont pas de Liouville non plus.

Problème 10. On a vu que la théorie des G-fonctions permet d'étudier finement les E-fonctions strictes grâce aux propriétés spéciales des E-opérateurs construits à partir des G-opérateurs. Réciproquement, on peut se demander si la théorie des E-fonctions strictes peut apporter de nouvelles informations sur les G-fonctions. Il existe déjà un lien entre $\boldsymbol{G}$ et « valeurs » de E-fonctions. En effet, les propriétés des E-opérateurs à l'infini (que nous n'avons pas exposées, voir [6, 59]) permettent de montrer la

***Proposition 8.3* (R. [140]).** *L'ensemble $\boldsymbol{G}$ coïncide avec l'ensemble des valeurs des intégrales convergentes $\int_0^\infty F(x)dx$ où F est une E-fonction stricte. De manière équivalente, $\boldsymbol{G}$ coïncide avec l'ensemble des limites finies des E-fonctions strictes dans des directions quelconques vers l'infini.*

L'équivalence résulte simplement du fait que $\int_0^z F(x)dx$ est une E-fonction stricte si et seulement si $F(z)$ l'est. Par exemple, $\sin(z)/z$ étant une E-fonction stricte, on a que

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx \in \boldsymbol{G},$$

ce que l'on savait déjà. Mais c'est parfois moins évident, comme le montre l'identité (voir [29, p. 6] et [76])

$$\int_0^{+\infty} J_0(ix)^3\, e^{-3x} dx = \frac{\sqrt{6}}{96\pi^3}\, \Gamma(1/24)\, \Gamma(5/24)\, \Gamma(7/24)\, \Gamma(11/24).$$

Le membre de droite est donc *de facto* dans $\boldsymbol{G}$ puisque $J_0(iz)^3 e^{-3z}$ est une E-fonction stricte. Voir également [35] pour d'autres intégrales impliquant des fonctions de Bessel et dont la valeur est dans $\boldsymbol{G}$.

Est-il possible d'adapter les diverses méthodes diophantiennes d'André, Beukers, Chudnovsky, Siegel, Shidlovskii, etc, pour démontrer de nouveaux résultats sur les valeurs finies de E-fonctions strictes à l'infini, c'est-à-dire sur les éléments de $\boldsymbol{G}$? Rappelons que l'on connaît relativement « peu » de nombres prouvés transcendants dans $\boldsymbol{G}$; parmi ceux-ci, il y a les logarithmes de nombres algébriques, $\pi = \Gamma(1/2)^2$, et aussi $\Gamma(1/3)^3$, $\Gamma(1/4)^4$, $\Gamma(1/6)^6$ et les valeurs des séries (7.12). On sait qu'au moins un des nombres $\Gamma(1/5)^5$ ou $\Gamma(2/5)^5$ est transcendant [81, p. 52, Th. 3.3.5] mais on ne sait pas lequel. Pour $k = 3$ ou 4, on sait que π et $\Gamma(1/k)^k$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ mais on ne connaît pas trois valeurs de $\boldsymbol{G}$ qui le soient.

On pourrait même espérer déterminer la nature arithmétique des intégrales convergentes de la forme $\int_0^\infty R(x)F(x)dx$ où $F(x)$ est une E-fonction (stricte ou large) et $R(x) \in \overline{\mathbb{Q}}(x)$. L'intérêt de cette généralisation est justifié par les identités

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(1+x)e^{-x}}{x(1+x)}\, dx = \gamma \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Enfin, on conjecture que $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{G} = \overline{\mathbb{Q}}$, qui est analogue au fait (prouvé) que l'intersection des E-fonctions et des G-fonctions est réduite à $\overline{\mathbb{Q}}[z]$. Cette conjecture contient plusieurs problèmes classiques encore ouverts, dont la transcendance de $e+\pi$ et de $e\pi$ puisque $e, e^{-1} \in \boldsymbol{E}$ et $\pi \in \boldsymbol{G}$. Les questions abordées dans ce problème 10 sont bien sûr très ambitieuses et le lecteur peut penser à juste titre qu'elles relèvent de la science-fiction à ce jour.[29] Tout nouveau résultat dans ces directions, même modeste, serait intéressant.

9. Ajout sur les épreuves

Depuis la première version de ce survol écrite en 2019, plusieurs résultats ont été démontrés qui répondent à des questions du texte ou bien améliorent certains des énoncés présentés.

- Dans [56], Fischler a significativement amélioré le point (i) du théorème 4.29 en montrant que l'on peut remplacer le membre de droite par $0,21\sqrt{s/\ln(s)}$.
- Dans [166], Zeilberger et Zudilin ont amélioré la majoration de l'exposant d'irrationalité de π obtenue par Salikhov (voir la partie 4.7). Ils ont montré que cet exposant est majoré par 7,1033.
- Dans [69], Fresán et Jossen ont montré que le problème de Siegel énoncé dans la partie 5.2 admet une réponse négative en produisant une E-fonction explicite qui ne peut pas s'écrire comme un polynôme en des E-fonctions hypergéométriques de la forme demandée.
- Le théorème 6.20 a été généralisé par l'auteur dans [141].
- L'algorithme décrit dans le théorème 7.5 a été modifié dans l'article [33] afin qu'il soit plus rapide ; cette nouvelle version a été implémentée sous Maple. Les méthodes de cet article ont également permis d'obtenir de nouveaux exemples d'évaluations algébriques de fonctions hypergéométriques ${}_2F_1$ en des points algébriques et qui ne semblent pas « provenir » des formes modulaires (comme les exemples pages 279 et 281).
- Le problème 4 de la partie 8 a été complètement résolu par Lepetit dans [103].

---

[29] Siegel [159, p. 84] a remarqué que l'exemple de la transcendance de α^β (pour $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha \neq 0, 1$ et $\beta \notin \mathbb{Q}$), conjecturée par Hilbert [86] qui en regardait la démonstration future comme *extrêmement difficile*, montre qu'il est très délicat d'estimer la difficulté d'un problème mathématique avant de l'avoir résolu. Deux preuves relativement courtes en ont été données en 1934 par Gel'fond [75] et Schneider [153] indépendamment ; voir également [122, 159]. Leurs méthodes étaient dans le droit fil de celle de Siegel sur les E-fonctions, qui était très novatrice à l'époque.

Références

[1] M. Abramowitz & I. A. Stegun (éds.) – *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1992.

[2] B. Adamczewski & T. Rivoal – « Exceptional values of E-functions at algebraic points », *Bull. London Math. Soc.* **50** (2018), no. 4, p. 697–708.

[3] K. Alladi & M. L. Robinson – « Legendre polynomials and irrationality », *J. reine angew. Math.* **318** (1980), p. 137–155.

[4] Y. André – *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, vol. E13, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[5] ———, « G-fonctions et transcendance », *J. reine angew. Math.* **476** (1996), p. 95–125.

[6] ———, « Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité », *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 2, p. 705–740.

[7] ———, « Séries Gevrey de type arithmétique. II. Transcendance sans transcendance », *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 2, p. 741–756.

[8] ———, « Arithmetic Gevrey series and transcendence. A survey », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **15** (2003), no. 1, p. 1–10, Les XXIIèmes Journées Arithmetiques (Lille, 2001).

[9] ———, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas & Synthèses, vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[10] ———, « Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties : a new differential Galois correspondence », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **47** (2014), no. 2, p. 449–467.

[11] R. Apéry – « Irrationalité de $\zeta 2$ et $\zeta 3$ », in *Journées arithmétiques de Luminy*, Astérisque, vol. 61, Société Mathématique de France, Paris, 1979, p. 11–13.

[12] ———, « Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes », in *Mathematics*, CTHS : Bull. Sec. Sci., III, Bibliothèque Nationale, Paris, 1981, p. 37–53.

[13] A. Baker – *Transcendental number theory*, 2e éd., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[14] K. Ball & T. Rivoal – « Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs », *Invent. Math.* **146** (2001), no. 1, p. 193–207.

[15] M. Bauer & M. A. Bennett – « Applications of the hypergeometric method to the generalized Ramanujan-Nagell equation », *Ramanujan J.* **6** (2002), no. 2, p. 209–270.

[16] D. Bertrand – « On André's proof of the Siegel-Shidlovsky theorem », in *Colloque Franco-Japonais : Théorie des Nombres Transcendants (Tokyo, 1998)*, Sem. Math. Sci., vol. 27, Keio University, Yokohama, 1999, p. 51–63.

[17] D. Bertrand & F. Beukers – « Équations différentielles linéaires et majorations de multiplicités », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **18** (1985), no. 1, p. 181–192.

[18] D. Bertrand, V. Chirskii & J. Yebbou – « Effective estimates for global relations on Euler-type series », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **13** (2004), no. 2, p. 241–260.

[19] F. Beukers – « On the generalized Ramanujan-Nagell equation. I », *Acta Arith.* **38** (1980/81), no. 4, p. 389–410.

[20] ———, « Padé-approximations in number theory », in *Padé approximation and its applications (Amsterdam, 1980)*, Lect. Notes in Math., vol. 888, Springer, Berlin-New York, 1981, p. 90–99.

[21] ———, « Algebraic values of G-functions », *J. reine angew. Math.* **434** (1993), p. 45–65.

[22] ———, « A rational approach to π », *Nieuw Arch. Wisk.* **1** (2000), no. 4, p. 372–379.

[23] ———, « A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem », *Ann. of Math. (2)* **163** (2006), no. 1, p. 369–379.

[24] ———, « E-functions and G-functions », disponible à `http://swc.math.arizona.edu/aws/2008/08BeukersNotesDraft.pdf`, 2008.

[25] ———, « Algebraic A-hypergeometric functions », *Invent. Math.* **180** (2010), no. 3, p. 589–610.

[26] F. Beukers & G. Heckman – « Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$ », *Invent. Math.* **95** (1989), no. 2, p. 325–354.

[27] F. Beukers & C. A. M. Peters – « A family of $K3$ surfaces and $\zeta(3)$ », *J. reine angew. Math.* **351** (1984), p. 42–54.

[28] E. Bombieri – « On G-functions », in *Recent progress in analytic number theory, Vol. 2 (Durham, 1979)*, Academic Press, London-New York, 1981, p. 1–67.

[29] A. Bostan – « Calcul formel pour la combinatoire des marches », Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Univ. Paris 13, 2017, `tel-01660300`.

[30] A. Bostan & M. Kauers – « The complete generating function for Gessel walks is algebraic », *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), no. 9, p. 3063–3078.

[31] A. Bostan, P. Lairez & B. Salvy – « Multiple binomial sums », *J. Symbolic Comput.* **80** (2017), no. part 2, p. 351–386.

[32] A. Bostan, T. Rivoal & B. Salvy – « Explicit degree bounds for right factors of linear differential operators », *Bull. Lond. Math. Soc.* **53** (2021), no. 1, p. 53–62.

[33] ———, « Minimization of differential equations and algebraic values of E-functions », *Math. Comp.* **93** (2024), no. 347, p. 1427–1472.

[34] C. Brezinski – *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*, International Series of Numerical Math., vol. 50, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, Mass., 1980.

[35] D. Broadhurst – « Feynman integrals, L-series and Kloosterman moments », *Commun. Number Theory Phys.* **10** (2016), no. 3, p. 527–569.

[36] G. Christol – « Fonctions hypergéométriques bornées », in *Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, vol. 14, Université de Paris VII, 1986/87, Exp. 8.

[37] D. V. Chudnovsky & G. V. Chudnovsky – « Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G-functions », in *Number theory (New York, 1983–84)*, Lect. Notes in Math., vol. 1135, Springer, Berlin, 1985, p. 9–51.

[38] G. V. Chudnovsky – « Algebraic independence of the values of elliptic function at algebraic points. Elliptic analogue of the Lindemann-Weierstrass theorem », *Invent. Math.* **61** (1980), no. 3, p. 267–290.

[39] ———, « On applications of Diophantine approximations », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **81** (1984), no. 22, p. 7261–7265.

[40] H. Cohn – « A short proof of the simple continued fraction expansion of e », *Amer. Math. Monthly* **113** (2006), no. 1, p. 57–62.

[41] L. Comtet – « Calcul pratique des coefficients de Taylor d'une fonction algébrique », *Enseign. Math. (2)* **10** (1964), p. 267–270.

[42] J. B. Conway – *Functions of one complex variable*, 2e éd., Graduate Texts in Math., vol. 11, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[43] C. S. Davis – « Rational approximations to e », *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **25** (1978), no. 4, p. 497–502.

[44] P. Dèbes – « G-fonctions et théorème d'irreductibilité de Hilbert », *Acta Arith.* **47** (1986), no. 4, p. 371–402.

[45] E. Delaygue – « Critère pour l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir », *J. reine angew. Math.* **662** (2012), p. 205–252.

[46] E. Delaygue, T. Rivoal & J. Roques – *On Dwork's p-adic formal congruences theorem and hypergeometric mirror maps*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 246, no. 1163, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[47] R. Descombes – *Éléments de théorie des nombres*, Mathématiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1986.

[48] L. Di Vizio – « Sur la théorie géométrique des G-fonctions. Le théorème de Chudnovsky à plusieurs variables », *Math. Ann.* **319** (2001), no. 1, p. 181–213.

[49] B. Dwork – « On Apéry's differential operator », in *Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, vol. 7-8, Université de Paris VII, 1979/81, Exp. No. 25.

[50] ———, « Differential operators with nilpotent p-curvature », *Amer. J. Math.* **112** (1990), no. 5, p. 749–786.

[51] B. Dwork, G. Gerotto & F. J. Sullivan – *An introduction to G-functions*, Annals of Math. Studies, vol. 133, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[52] G. Eisenstein – « Über eine allgemeine Eigenschaft der Reihen-Entwicklungen aller algebraischen Funktionen », *Bericht Königl. Preuss Akad. d. Wiss. zu Berlin* (1852), p. 411–444.

[53] S. R. Finch – *Mathematical constants*, Encyclopedia of Math. and its Applications, vol. 94, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[54] S. Fischler – « Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal,...) », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 294, Société Mathématique de France, Paris, 2004, p. 27–62.

[55] ———, « Nesterenko's linear independence criterion for vectors », *Monatsh. Math.* **177** (2015), no. 3, p. 397–419.

[56] ———, « Linear independence of odd zeta values using Siegel's lemma », 2021, `arXiv:2109.10136`.

[57] S. Fischler & T. Rivoal – « Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées », *J. Math. Pures Appl. (9)* **82** (2003), no. 10, p. 1369–1394.

[58] ———, « On the values of G-functions », *Comment. Math. Helv.* **89** (2014), no. 2, p. 313–341.

[59] ———, « Arithmetic theory of E-operators », *J. Éc. polytech. Math.* **3** (2016), p. 31–65.

[60] ———, « On the denominators of the Taylor coefficients of G-functions », *Kyushu J. Math.* **71** (2017), no. 2, p. 287–298.

[61] ———, « Microsolutions of differential operators and values of arithmetic Gevrey series », *Amer. J. Math.* **140** (2018), no. 2, p. 317–348.

[62] ———, « Rational approximation to values of G-functions, and their expansions in integer bases », *Manuscripta Math.* **155** (2018), no. 3-4, p. 579–595, Erratum : *Ibid.* p. 597–598.

[63] ———, « Linear independence of values of G-functions », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **22** (2020), no. 5, p. 1531–1576.

[64] ———, « Linear independence of values of G-functions, II : outside the disk of convergence », *Ann. Math. Qué.* **45** (2021), no. 1, p. 53–93.

[65] ———, « On Siegel's problem for E-functions », *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **148** (2022), p. 83–115.

[66] ———, « Effective algebraic independence of values of E-functions », *Math. Z.* **305** (2023), no. 3, article no. 48 (17 pages).

[67] S. Fischler, J. Sprang & W. Zudilin – « Many values of the Riemann zeta function at odd integers are irrational », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **356** (2018), no. 7, p. 707–711.

[68] ———, « Many odd zeta values are irrational », *Compositio Math.* **155** (2019), no. 5, p. 938–952.

[69] J. Fresán & P. Jossen – « A non-hypergeometric E-function », *Ann. of Math. (2)* **194** (2021), no. 3, p. 903–942.

[70] G. Frobenius – « Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen », *J. reine angew. Math.* **76** (1873), p. 214–235.

[71] A. I. Galočkin – « Lower bounds of polynomials in the values of a certain class of analytic functions », *Mat. Sb. (N.S.)* **95** (1974), p. 396–417.

[72] ———, « The arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions », *Sibirsk. Mat. Zh.* **17** (1976), no. 6, p. 1220–1235.

[73] ———, « Criterion for membership of hypergeometric Siegel functions in a class of E-functions », *Mat. Zametki* **29** (1981), no. 1, p. 3–14.

[74] A. Gel'fond – « Sur les nombres transcendants », *C. R. Acad. Sci. Paris* **189** (1929), p. 1224–1226.

[75] ———, « Sur le 7ème problème de Hilbert », *Bull. Acad. Sci. URSS* **7** (1934), p. 623–640.

[76] M. L. Glasser & I. J. Zucker – « Extended Watson integrals for the cubic lattices », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), no. 5, p. 1800–1801.

[77] V. A. Gorelov – « On the Siegel conjecture for the case of second-order linear homogeneous differential equations », *Mat. Zametki* **75** (2004), no. 4, p. 549–565.

[78] ———, « On the structure of the set of E-functions satisfying second-order linear differential equations », *Mat. Zametki* **78** (2005), no. 3, p. 331–348.

[79] P. A. Griffiths – « Periods of integrals on algebraic manifolds : summary and discussion of open problems », *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), p. 228–296.

[80] D. Yu. Grigor'ev – « Complexity of factoring and calculating the GCD of linear ordinary differential operators », *J. Symbolic Comput.* **10** (1990), no. 1, p. 7–37.

[81] P. Grinspan – « Approximation et indépendance algébrique de quasi-périodes de variétés abéliennes », thèse de doctorat, Université Paris 6, 2000, `tel-00001328`.

[82] W. A. Harris, Jr. & Y. Sibuya – « The reciprocals of solutions of linear ordinary differential equations », *Adv. in Math.* **58** (1985), no. 2, p. 119–132.

[83] M. Hata – « On the linear independence of the values of polylogarithmic functions », *J. Math. Pures Appl. (9)* **69** (1990), no. 2, p. 133–173.

[84] ———, « Rational approximations to π and some other numbers », *Acta Arith.* **63** (1993), no. 4, p. 335–349.

[85] C. Hermite – « Sur la fonction exponentielle », *C. R. Acad. Sci. Paris* **77** (1873), p. 18–24, 74–79, 226–233 et 285–293, disponible à `http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/theorie-des-nombres/la-demonstration-de-la-transcendance-de-e`.

[86] D. Hilbert – *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1902, réédition Jacques Gabay, 1990.

[87] E. Hille – *Ordinary differential equations in the complex domain*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1997, Reprint of the 1976 original.

[88] A. Huber & S. Müller-Stach – *Periods and Nori motives*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 65, Springer, Cham, 2017.

[89] E. L. Ince – *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1944, disponible à `https://archive.org/details/ordinarydifferen029666mbp`.

[90] G. S. JOYCE & I. J. ZUCKER – « Special values of the hypergeometric series. III », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **133** (2002), no. 2, p. 213–222.

[91] N. KATZ – « Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **39** (1970), p. 175–232.

[92] A. YA. KINTCHINE – *Continued fractions*, Dover Publications, 1935, trad. anglaise : 1964, rééditions 1992, 1997.

[93] J. F. KOKSMA & J. POPKEN – « Zur transzendenz von e^{π} », *J. reine angew. Math.* **168** (1932), p. 211–230.

[94] M. KONTSEVICH & D. ZAGIER – « Periods », in *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer, Berlin, 2001, p. 771–808.

[95] D. KRAMMER – « An example of an arithmetic Fuchsian group », *J. reine angew. Math.* **473** (1996), p. 69–85.

[96] R. KUZMIN – « Sur une nouvelle classe de nombres transcendants », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **7** (1930), no. 6, p. 585–597, en russe.

[97] P. LAIREZ – « Computing periods of rational integrals », *Math. Comp.* **85** (2016), no. 300, p. 1719–1752.

[98] J.-H. LAMBERT – « Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin* **17** (1861), p. 265–322.

[99] E. LANDAU – « Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre », in *Collected works, I*, Thales-Verlag, 1985, p. 116.

[100] F. LE LIONNAIS – *Les nombres remarquables*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1407, Hermann, Paris, 1983.

[101] A.-M. LEGENDRE – « Éléments de géométrie », 1795, Note IV.

[102] G. LEPETIT – « Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz », 2018, mémoire de master recherche, Institut Fourier, Grenoble, `arXiv:2109.10239`.

[103] ______, « Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz 'au sens large' », *North-West. Eur. J. Math.* **7** (2021), p. 83–149.

[104] L. LEWIN – *Dilogarithms and associated functions*, Macdonald, London, 1958.

[105] F. LINDEMANN – « Ueber die Zahl π », *Math. Ann.* **20** (1882), p. 213–225.

[106] J. LIOUVILLE – « Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques », *J. Math. Pures Appl.* **16** (1851), p. 133–142.

[107] K. MAHLER – « Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I », *J. reine angew. Math.* **166** (1931), p. 118–136.

[108] ______, « On the approximation of π », *Indag. Math.* **15** (1953), p. 30–42.

[109] ______, « Applications of a theorem by A. B. Shidlovski », *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **305** (1968), p. 149–173.

[110] B. MALGRANGE – *Équations différentielles linéaires et transformation de Fourier. Une introduction.*, Ensaios Matemáticos, vol. 1, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1989.

[111] R. MARCOVECCHIO – « Linear independence of linear forms in polylogarithms », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)* **5** (2006), no. 1, p. 1–11.

[112] ______, « The Rhin-Viola method for $\log 2$ », *Acta Arith.* **139** (2009), no. 2, p. 147–184.

[113] H. MCKEAN & V. MOLL – *Elliptic curves. Function theory, geometry, arithmetic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[114] M. NAGATA – « Rational approximations to linear forms in values of G-functions », *Acta Arith.* **70** (1995), no. 4, p. 313–341.

[115] ———, « Diophantine approximations related to rational values of G-functions », *Acta Arith.* **106** (2003), no. 4, p. 311–344.
[116] Yu. V. Nesterenko – « Linear independence of numbers », *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* (1985), no. 1, p. 46–49.
[117] ———, « Modular functions and transcendence questions », *Mat. Sb.* **187** (1996), no. 9, p. 65–96.
[118] ———, « Some remarks on $\zeta(3)$ », *Mat. Zametki* **59** (1996), no. 6, p. 865–880.
[119] Yu. V. Nesterenko & A. B. Shidlovskiĭ – « On the linear independence of values of E-functions », *Mat. Sb.* **187** (1996), no. 8, p. 93–108.
[120] E. M. Nikišin – « Irrationality of values of functions $F(x, s)$ », *Mat. Sb. (N.S.)* **109(151)** (1979), no. 3, p. 410–417.
[121] I. Niven – « A simple proof that π is irrational », *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), p. 509.
[122] ———, *Irrational numbers*, 3e éd., The Carus Mathematical Monographs, vol. 11, The Mathematical Association of America & John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1967.
[123] C. F. Osgood – « Nearly perfect systems and effective generalizations of Shidlovski's theorem », *J. Number Theory* **13** (1981), no. 4, p. 515–540.
[124] H. Padé – *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1892, Thèse de doctorat de la Faculté des sciences.
[125] ———, *Œuvres*, Librairie Albert Blanchard, Paris, 1984, rassemblées et présentées par Claude Brezinski.
[126] F. Pellarin, T. Rivoal & J.-A. Weil – « Some remarks on classical modular forms and hypergeometric series », `http://rivoal.perso.math.cnrs.fr/articles/modhyp.pdf`, 2019.
[127] O. Perron – « Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten », *Acta Math.* **34** (1910), p. 139–163.
[128] M. Petkovšek, H. S. Wilf & D. Zeilberger – $A = B$, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996, `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/AeqB.pdf`.
[129] E. G. C. Poole – *Introduction to the theory of linear differential equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1960.
[130] A. van der Poorten – « A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$ », *Math. Intelligencer* **1** (1978/79), no. 4, p. 195–203.
[131] S. Ramanujan – « Modular equations and approximations to π », *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **45** (1914), p. 350–372.
[132] E. Reyssat – « Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels », in *Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982)*, Progress in Math., vol. 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 235–245.
[133] G. Rhin & C. Viola – « The group structure for $\zeta(3)$ », *Acta Arith.* **97** (2001), no. 3, p. 269–293.
[134] T. Rivoal – « La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 4, p. 267–270.
[135] ———, « Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **15** (2003), no. 2, p. 551–559.
[136] ———, « Convergents and irrationality measures of logarithms », *Rev. Mat. Iberoamericana* **23** (2007), no. 3, p. 931–952.

[137] ______, « On the arithmetic nature of the values of the gamma function, Euler's constant, and Gompertz's constant », *Michigan Math. J.* **61** (2012), no. 2, p. 239–254.

[138] ______, « Remarks on the impossibility of a Siegel-Shidlovskii like theorem for G-functions », *Hardy-Ramanujan J.* **38** (2015), p. 29–35.

[139] ______, « Valeurs algébriques de E-fonctions aux points algébriques », `hal-03676576`, 2016.

[140] ______, « Is Euler's constant a value of an arithmetic special function ? », `hal-01619235`, 2017.

[141] ______, « Factors of E-operators with an η-apparent singularity at zero », *J. Math. Soc. Japan* **74** (2022), no. 3, p. 719–733.

[142] ______, « On Galochkin's characterization of hypergeometric G-functions », *Mosc. J. Comb. Number Theory* **11** (2022), no. 1, p. 11–19.

[143] T. Rivoal & J. Roques – « E-functions of order 2 and units of E-values », 2015, `http://rivoal.perso.math.cnrs.fr/articles/unitse.pdf`. Une partie des résultats de cette prépublication est parue dans [144].

[144] ______, « On the algebraic dependence of E-functions », *Bull. London Math. Soc.* **48** (2016), no. 2, p. 271–279.

[145] ______, « Siegel's problem for E-functions of order 2 », prépublication, 2016.

[146] ______, « Holomorphic solutions of E-operators », *Israel J. Math.* **220** (2017), no. 1, p. 275–282.

[147] F. Rodriguez Villegas – « Integral ratios of factorials and algebraic hypergeometric functions », 2007, `arXiv:math/0701362`.

[148] K. F. Roth – « Rational approximations to algebraic numbers », *Mathematika* **2** (1955), p. 1–20, Corrigendum : *Ibid.*, p. 168.

[149] E. A. Rukhadze – « A lower bound for the approximation of $\ln 2$ by rational numbers », *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* (1987), no. 6, p. 25–29, 97.

[150] V. Kh. Salikhov – « On the irrationality measure of $\ln 3$ », *Dokl. Akad. Nauk* **417** (2007), no. 6, p. 753–755.

[151] ______, « On the measure of irrationality of π », *Mat. Zametki* **88** (2010), no. 4, p. 583–593.

[152] E. Sandifer – « How Euler did it », MAA Online, `http://eulerarchive.maa.org/hedi/`, février 2006.

[153] T. Schneider – « Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. Transzendenz von Potenzen », *J. reine angew. Math.* **172** (1935), p. 65–69.

[154] ______, *Introduction aux nombres transcendants*, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[155] A. B. Shidlovskii – « A criterion for algebraic independence of the values of a class of entire functions », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **23** (1959), p. 35–66.

[156] ______, « Algebraic independence of the values of certain hypergeometric E-functions », *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **18** (1968), p. 55–64.

[157] ______, *Transcendental numbers*, De Gruyter Studies in Math., vol. 12, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989.

[158] C. L. Siegel – *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, vol. 1, S. Abhandlungen Akad., Berlin, 1929.

[159] ______, *Transcendental numbers*, Annals of Math. Studies, vol. 16, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1949.

[160] ______, « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen », in *On some applications of Diophantine approximations*, Quad./Monogr., vol. 2, Scuola Normale, Pisa & Springer, 2014, Avec un commentaire et l'article « Integral points on curves : Siegel's theorem after Siegel's proof » par C. Fuchs and U. Zannier.

[161] L. J. Slater – *Generalized hypergeometric functions*, 2e éd., Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[162] J. de Stainville – « Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie », `http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/theorie-des-nombres/melange-d-analyse-algebrique-et-de-geometrie`, 1815.

[163] P. F. Stiller – « Classical automorphic forms and hypergeometric functions », *J. Number Theory* **28** (1988), no. 2, p. 219–232.

[164] M. Waldschmidt – « Une mesure de transcendance de e^π », in *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1975/76*, vol. 17, no. 2, Secrétariat Math., Paris, 1977, Exp. No. G4.

[165] J. Wolfart – « Werte hypergeometrischer Funktionen », *Invent. Math.* **92** (1988), no. 1, p. 187–216.

[166] D. Zeilberger & W. Zudilin – « The irrationality measure of π is at most 7.103205334137... », *Mosc. J. Comb. Number Theory* **9** (2020), no. 4, p. 407–419.

[167] W. Zudilin – « On rational approximations of values of a class of entire functions », *Mat. Sb.* **186** (1995), no. 4, p. 89–124.

[168] ———, « On the irrationality measure of values of G-functions », *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **60** (1996), no. 1, p. 87–114.

[169] ———, « One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational », *Uspekhi Mat. Nauk* **56** (2001), no. 4(340), p. 149–150.

[170] ———, « Two hypergeometric tales and a new irrationality measure of $\zeta(2)$ », *Ann. Math. Québec* **38** (2014), no. 1, p. 101–117.

Tanguy Rivoal, Institut Fourier, CNRS et Université Grenoble Alpes, CS 40700, 38058 Grenoble cedex 9, France
E-mail : `Tanguy.Rivoal@univ-grenoble-alpes.fr`