PRÉFACE

Quels nombres réels ou complexes sont intéressants ? Entre les nombres rationnels et tous les nombres complexes, comment distinguer des sous-familles remarquables ? Les nombres algébriques, solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers, forment une petite famille. Les journées mathématiques X-UPS 2019 ont porté sur divers aspects de la théorie des *périodes*, fournissant de nombreux exemples de nombres transcendants remarquables.

Les périodes sont des nombres (tels que π, ou les valeurs prises aux nombres entiers par des fonctions spéciales, telles que les logarithmes, la fonction zêta) qui peuvent s'écrire comme des intégrales de fonctions rationnelles sur des domaines semi-algébriques (le cercle de rayon 1, le disque correspondant, un simplexe à sommets entiers, etc.).

L'étude des périodes, qui a une longue histoire, a été revitalisée au tournant du siècle par un article de Kontsevich et Zagier dans lequel les auteurs conjecturent que toutes les relations algébriques entre ces nombres proviennent des relations évidentes du calcul intégral : additivité, changement de variables, formule de Stokes. *Javier Fresán* explique en détail la définition des périodes, ainsi que quelques propriétés élémentaires qui s'ensuivent, en les illustrant par de nombreux exemples. Il aborde ensuite l'interprétation des périodes en termes de formes différentielles algébriques et de cycles topologiques sur les variétés algébriques, point de vue qui est à l'origine de toutes les percées récentes dans l'étude de ces nombres.

Les *valeurs zêta multiples* forment une famille de constantes mathématiques fondamentales qui contient notamment les valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann. Si Euler leur a consacré des travaux, c'est seulement à la fin du XX^e siècle que mathématiciens et physiciens ont réalisé l'importance de ces nombres qui apparaissent naturellement dans des situations variées. Des travaux récents ont mis en évidence une structure cachée qui est révélée par la géométrie : une théorie de Galois des valeurs zêta multiples. L'étude de cette structure a permis de prouver des résultats spectaculaires sur les relations algébriques satisfaites par ces nombres. Après avoir présenté ceux-ci, *Clément Dupont* discute de l'apparition des valeurs zêta multiples en physique des particules à travers le calcul d'intégrales de Feynman.

Siegel a introduit en 1929 les E- et G-fonctions, deux classes de séries entières à coefficients algébriques et solutions d'équations différentielles à coefficients polynomiaux. Son but était de généraliser les théorèmes classiques d'Hermite, Lindemann et Weierstrass concernant la nature arithmétique des valeurs des fonctions exponentielle et logarithme aux points algébriques, que ces deux classes généralisent respectivement. Les E-fonctions contiennent les fonctions de Bessel par exemple, tandis que les G-fonctions contiennent les polylogarithmes multiples (donc les valeurs zêta multiples par spécialisation) et sont fortement liées aux périodes de variétés algébriques sur $\mathbb{Q}$. *Tanguy Rivoal* explique comment l'on obtient ces résultats classiques au moyen de la théorie des approximants de Padé « explicites » ; puis comment avec des méthodes « inexplicites », Siegel et Shidlovsky ont obtenu leur célèbre résultat (1956) sur la nature arithmétique des valeurs de E-fonctions ; enfin, comment Chudnovsky a complété en 1984 le programme de Siegel sur la nature diophantienne des G-fonctions. Dans une seconde partie, il expose les travaux d'André, Chudnovsky et Katz, qui ont permis d'élucider complètement la nature des équations différentielles satisfaites par les G-fonctions puis, par ricochet, celle des équations différentielles satisfaites par les E-fonctions. Il conclut par de nouvelles applications arithmétiques déduites récemment de ces propriétés différentielles et qui complètent le théorème de Siegel-Shidlovsky.

Nous tenons à remercier la direction de l'École polytechnique, la Direction des Services de l'Enseignement et le Centre Poly-Média, pour l'aide matérielle importante qu'ils ont apportée à la préparation de ces journées et à la publication de ce volume. Nos remerciements vont aussi au Labex Mathématique Hadamard pour le financement des captations vidéos des exposés, ainsi qu'à Hélios Azzollini pour leur réalisation remarquable, mises en ligne sur la chaîne Youtube de l'École polytechnique : `https://www.youtube.com/playlist?list=PLrRN3yszYHZkR9vyUeOVkcF6yy4FjgkMn`

Nous remercions enfin le secrétariat du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, notamment Carole Juppin et Marine Amier, qui assure chaque année le bon déroulement des journées.

Pascale Harinck, Alain Plagne et Claude Sabbah