



# Journées mathématiques X-UPS

Année 2018

Heisenberg et son groupe

Francis NIER

**Variations sur un théorème de Stone-Von Neumann**

*Journées mathématiques X-UPS* (2018), p. 27-86.

<https://doi.org/10.5802/xups.2018-02>

© Les auteurs, 2018.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique  
Route de Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS,  
Institut polytechnique de Paris  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

## VARIATIONS SUR UN THÉORÈME DE STONE-VON NEUMANN

*par*

Francis Nier

---

**Résumé.** Ce texte sur le théorème de Stone-Von Neumann qui, historiquement, a été motivé par la synthèse des deux actes fondateurs de la mécanique quantique, par Heisenberg d'une part et par Schrödinger d'autre part. Nous donnons une démonstration complète du théorème et nous présentons ensuite la quantification des transformations linéaires symplectiques. Outre son aspect fondamental pour la mécanique quantique, le théorème de Stone-Von Neumann a eu de nombreuses conséquences dans le développement des mathématiques du  $xx^e$  siècle et ce jusqu'à aujourd'hui. Nous appuyant sur des éléments de la démonstration du théorème, nous évoquerons notamment ses incidences dans le domaine de l'analyse.

### Table des matières

1. Introduction.....	28
2. Pré-requis.....	32
2.1. Espaces symplectiques.....	32
2.2. Représentations unitaires de groupes.....	33
2.3. Transformée de Fourier, opérateurs de Hilbert-Schmidt.....	35
3. Le théorème de Stone-Von Neumann.....	37
3.1. Groupe de Heisenberg.....	37
3.2. Algèbre de Weyl, produit de Moyal.....	38
3.3. Représentation de Schrödinger.....	41
3.4. Énoncé et démonstration du théorème.....	44
4. Quantification des symplectomorphismes linéaires.....	47
4.1. Le groupe symplectique et sa représentation projective.....	48

4.2. Opérateurs Fourier intégraux.....	49
4.3. L'oscillateur harmonique.....	53
4.4. Indice de Maslov et groupe métaplectique.....	55
5. La révolution microlocale.....	60
5.1. Principe d'incertitude.....	61
5.2. AM-FM.....	63
5.3. Analyse microlocale et semi-classique.....	66
5.4. Groupes nilpotents et hypoellipticité.....	72
5.5. Complexification.....	75
Avertissement.....	83
Références.....	84

## 1. Introduction

Les débuts de la mécanique quantique ont été marqués par deux approches, la mécanique ondulatoire concrétisée par l'équation de Schrödinger (1926, [42]) et la mécanique des matrices de Heisenberg (1925, [8]). Le théorème de Stone-Von Neumann, qui est arrivé plus tard (1930-1931), avec les deux textes de M. Stone [45] et J. Von Neumann [34], répondait à une question posée par H. Weyl et fait la synthèse entre ces deux points de vue. Soyons un peu plus précis avant de commencer. La formule (5) de l'article [8] n'est rien d'autre que<sup>(1)</sup>

$$pq - qp = \frac{\hbar}{2\pi i} 1 = -i\hbar 1, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Le caractère non commutatif et le calcul « matriciel » sont clairement identifiés dans ce texte, ainsi que la nécessité de travailler avec des espaces de dimension infinie.

---

<sup>(1)</sup>En physique  $h \simeq 6,626070040 \times 10^{-34}$  J.s et donc  $\hbar = h/2\pi \simeq 1,0545718 \times 10^{-34}$  J.s sont des constantes universelles, intouchables. Les mathématiciens ont pris depuis l'habitude d'appeler  $h$ , voire même  $\hbar$ , un petit paramètre qui apparaît aux mêmes endroits que la constante de Planck. En fait, dans les modélisations dites semi-classiques, c'est le rapport de la constante de Planck à d'autres quantités typiques du problème en J.s qui apparaît comme un petit paramètre (sans dimension au sens des physiciens). Pour ne pas entretenir cette confusion et aussi pour ne pas suggérer une limitation stricte au cadre de la mécanique quantique, nous noterons  $\varepsilon$  un tel paramètre dans la suite.

Il est clair que  $q$  et  $p$  ne peuvent pas être des matrices de dimension finie, car la trace de  $pq - qp$  est nulle en dimension finie, ou aussi l'identité  $e^{(i/\hbar)tp}qe^{-(i/\hbar)tp} = q + t1$  donnerait une infinité de valeurs propres pour  $q$ . Notons aussi que cela dit que  $q$  et par symétrie  $p$  ne peuvent pas être des opérateurs bornés.

Par ailleurs l'équation de Schrödinger et plus généralement le principe de correspondance de la mécanique quantique dit qu'il faut décrire un état par une fonction d'onde

$$\mathbb{R} \ni q \mapsto \psi(q) \in \mathbb{C}, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}, dq; \mathbb{C}),$$

remplacer  $q$  par l'opérateur de multiplication par  $q$  et  $p$  par l'opérateur de dérivation  $(\hbar/i)\partial_q$ . Notons que l'exponentielle  $e^{(i/\hbar)sq}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , est la multiplication par cette même fonction  $(U_s\psi)(q) = e^{(i/\hbar)sq}\psi(q)$  et que  $V_t = e^{-(i/\hbar)tp} = e^{-t\partial_q}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , n'est rien d'autre que  $(V_t\psi)(q) = \psi(q - t)$ . Ces deux opérations sont des transformations unitaires qui satisfont à

$$U_s V_t = e^{(i/\hbar)st} V_t U_s$$

Il est donc naturel de considérer un groupe de transformations unitaires  $e^{(i/\hbar)r} V_t U_s$  simplement notées  $(t, s, r) \in \mathbb{R}^3$  avec la loi de composition

$$(1) \quad (t_1, s_1, r_1) \cdot (t_2, s_2, r_2) = (t_1 + t_2, s_1 + s_2, r_1 + r_2 + s_1 t_2),$$

qui a une formulation un peu plus symétrique si on écrit  $r = r' + ts/2$  :

$$(2) \quad (t_1, s_1, r'_1) \circ (t_2, s_2, r'_2) = \left( s_1 + s_2, t_1 + t_2, r'_1 + r'_2 + \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{2} \right).$$

Notons que ce groupe a une représentation linéaire, non unitaire, simplement à l'aide de matrices  $3 \times 3$  unipotentes (voir le texte de Pierre Pansu dans ce volume)

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & r_1 \\ 0 & 1 & t_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_2 & r_2 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 + s_2 & r_1 + r_2 + s_1 t_2 \\ 0 & 1 & t_1 + t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a donc pas unicité de la représentation linéaire. Ce que dit le théorème de Stone-Von Neumann, c'est qu'il y a unicité d'une représentation unitaire irréductible du groupe de Heisenberg à transformation unitaire près, c'est-à-dire isomorphisme d'espaces de Hilbert.

Ainsi, partant de la formulation matricielle de Heisenberg de la mécanique quantique, la correspondance

$$q \longmapsto q \times \quad (\text{opérateur de multiplication par } q)$$

et

$$p \longmapsto (\hbar/i)\partial_q \quad ((\hbar/i) \cdot \text{opérateur de dérivation relativement à } q)$$

qui conduit à l'équation de Schrödinger est la seule envisageable, à transformation unitaire près.

Ce résultat fondamental pour les débuts de la mécanique quantique a initié une série de travaux importants dans différentes directions. Nous en donnons une courte liste qui montre les directions variées, avec des développements encore actuels.

La première a été l'étude des représentations unitaires de groupes plus généraux en lien étroit avec les développements de la physique quantique. Sous l'impulsion d'H. Weyl, elle s'est développée avec comme principaux acteurs E. Wigner, G. Mackey qui a introduit la notion de représentation induite unitaire pour des groupes de Lie localement compacts, Harish-Chandra qui a développé l'analyse harmonique sur les groupes réductifs et Kirillov qui a introduit la méthode des orbites pour les groupes de Lie nilpotents sur laquelle nous reviendrons. L'équation de Dirac peut s'obtenir par exemple en étudiant les représentations irréductibles du groupe de Lorentz pour la relativité restreinte, l'opérateur de Dirac avec un spectre positif et négatif conduisant à la notion d'anti-particule. Plus généralement la théorie moderne des particules repose de façon essentielle sur la théorie des groupes et leurs représentations unitaires.

La quantification du champ électromagnétique et la physique statistique quantique ont conduit à la notion d'espace de Fock (voir le texte d'Olivier Schiffmann [41] dans ce volume). Via le point de vue intégrale fonctionnelle (ou intégrale de Feynman-Kac), cela a des liens avec les processus stochastiques.

L'écriture symétrique (2) que nous privilégions dans ce texte fait apparaître la forme symplectique

$$s_1 t_2 - t_1 s_2 = (t_1, s_1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ s_2 \end{pmatrix},$$

qui est une forme bilinéaire anti-symétrique non dégénérée. Indépendamment de considérations physiques, le groupe symplectique  $\mathrm{Sp}_d(\mathbb{R})$  ou des sous-groupes discrets de  $\mathrm{Sp}_d(\mathbb{Z})$  et leur action sur le demi-espace des matrices symétriques complexes à partie imaginaire positive, par  $Z \mapsto (aZ + b)(cZ + d)^{-1}$ , qui généralise l'action de  $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  sur le demi-plan de Poincaré, ont été étudiés par C. Siegel, motivé par la théorie analytique des nombres, et généralisant dans [43] la notion de forme modulaire. Les fonctions thêta, liées à cette théorie, peuvent d'ailleurs être introduites à partir de représentations unitaires de sous-groupes discrets du groupe de Heisenberg en considérant  $s, t \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$  par exemple (voir [33]). C'est à la suite de ses travaux sur les fonctions thêta, inspiré par les travaux de C. Siegel mentionnés précédemment d'une part et ceux d'I. Segal et D. Shale sur la théorie quantique des champs, qu'A. Weil a introduit le groupe métaplectique, revêtement à deux feuillets du groupe symplectique, que nous expliquons au paragraphe 4.

Il y aurait beaucoup d'autres domaines mathématiques à évoquer qui ont été influencés ou initiés par les développements de la mécanique quantique, comme les  $C^*$ -algèbres, les algèbres de Von Neumann et la géométrie non commutative d'A. Connes, pour lesquels le théorème de Stone-Von Neumann est moins central ou trop spécifique.

Il serait illusoire de vouloir en couvrir tous les aspects dans le cadre d'une présentation aussi brève. Dans un premier temps nous donnons une démonstration complète du théorème de Stone-Von Neumann suivie d'une présentation du groupe métaplectique et de l'indice de Maslov, adaptée du livre de G. Lion et M. Vergne [32]. Ensuite le parti pris de ce texte est de se concentrer sur les prolongements dans le domaine de l'analyse et plus particulièrement l'analyse des équations aux dérivées partielles (abrégé en EDPs). Nous montrerons comment les réflexions mathématiques sur la mécanique quantique et les phénomènes de propagation d'onde ont abouti au tournant des années 1970 à un renversement complet de point de vue : la mécanique ondulatoire, incluant la mécanique quantique, est devenue un cas particulier de la géométrie d'EDPs générales. Pour faire le lien avec le théorème

de Stone-Von Neumann il suffit de dire que sa démonstration, dans un langage moderne, contient tous les éléments pour comprendre la version affine de cette géométrie.

## 2. Pré-requis

**2.1. Espaces symplectiques.** La notion d'espace symplectique (mot introduit par H. Weyl sur la racine grecque *συμπλεκτικός* qui veut dire... complexe, cf. exemple 2.3 ci-dessous). En fait elle était déjà bien connue des mathématiciens et des physiciens depuis la formulation hamiltonienne de la mécanique classique. Il est d'ailleurs intéressant de noter que, dans leur article [8], Born, Jordan et Heisenberg, qui ont le souci de faire le lien avec la mécanique classique, étudient l'invariance de leur théorie par les transformations canoniques, i.e., qui préservent la structure symplectique.

On appelle *espace symplectique* un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée  $\sigma$ .

**Exemple 2.1.** On peut considérer  $V = \mathbb{R}^{2d}$  muni de la base canonique et de la forme symplectique donnée dans cette base par la matrice

$$\Sigma_d = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_d \\ \text{Id}_d & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2.2.** Si  $X$  est un espace vectoriel de dimension  $d$  et  $X^*$  son dual, on fixe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$  et on note  $x = x_1e_1 + \dots + x_de_d$ . La base duale étant donnée par  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_d^*)$  et en notant  $\xi = \xi_1e_1^* + \dots + \xi_de_d^*$  un élément de  $X^*$ , auquel cas  $dx_i = e_i^*$  et  $d\xi_i = e_i$ , on voit que sur  $V = X \oplus X^*$  la forme bilinéaire

$$d\xi \wedge dx = \sum_{j=1}^d d\xi_j \wedge dx_j, \quad \ell \wedge \ell' = \ell \otimes \ell' - \ell' \otimes \ell,$$

est une forme symplectique, indépendante du choix de la base  $\mathcal{B}$  dans  $X$ , dont la matrice dans la base  $(e_1, \dots, e_d, e_1^*, \dots, e_d^*)$  de  $V$  est encore  $\begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_d \\ \text{Id}_d & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exemple 2.3.** Enfin si  $V$  est un espace vectoriel complexe de dimension  $d$  muni d'un produit scalaire hermitien,  $(z_1, z_2) \mapsto \langle z_1, z_2 \rangle$  (antilinéaire à gauche pour fixer les choses), alors  $\operatorname{Re}\langle z_1, z_2 \rangle$  définit un produit scalaire euclidien sur  $V_{\mathbb{R}}$ , i.e.,  $V$  vu comme espace réel de dimension  $2d$ , et  $\operatorname{Im}\langle z_1, z_2 \rangle$  est une forme symplectique sur  $V_{\mathbb{R}}$ .

Un sous-espace  $W \subset V$  est dit

- isotrope si  $W \subset W^{\perp\sigma}$ , i.e.,

$$\sigma(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in W^2;$$

- involutif (ou co-isotrope) si  $W \supset W^{\perp\sigma}$ ;
- lagrangien si  $W = W^{\perp\sigma}$ .

Comme la forme bilinéaire est non dégénérée, on a

$$\dim W^{\perp\sigma} = \dim V - \dim W$$

et un espace isotrope (resp. involutif, lagrangien) est de dimension inférieure ou égale (resp. supérieure ou égale, égale) à  $\dim V/2$ . En complétant la base, tout sous-espace isotrope (en particulier  $\mathbb{R}x$ ,  $x \in V \setminus \{0\}$ ) est inclus dans un sous-espace lagrangien. Les sous-espaces lagrangiens sont donc les sous-espaces isotropes maximaux pour l'inclusion et de plus cela entraîne que l'espace symplectique  $V$  est forcément de dimension paire. Pour  $W$  lagrangien, on note  $W'$  un sous-espace isotrope maximal parmi les sous-espaces tels que  $W \cap W' = \{0\}$ . Notons qu'il existe  $x \notin W$  et que  $\mathbb{R}x$  est isotrope et satisfait à  $W \cap \mathbb{R}x = \{0\}$ , ce qui assure l'existence d'un  $W'$ . Mais alors  $W'^{\perp\sigma} + W^{\perp\sigma} = \{0\}^{\perp\sigma} = V$  et  $V = W \oplus W'$ ,  $\dim W' = \dim V/2$  et  $W'$  est lagrangien. Ainsi, tout espace lagrangien  $W$  admet un supplémentaire lagrangien qui s'identifie au dual  $W^*$  via  $\sigma$ . L'exemple 2.2 ci-dessus, voire le premier exemple 2.1 si on spécifie bien la base, sont donc les uniques modèles d'espaces vectoriels symplectiques de dimension finie.

**2.2. Représentations unitaires de groupes.** Une représentation unitaire du groupe  $G$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\varrho$  est un morphisme de groupe  $\varrho$  de  $G$  dans  $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\varrho)$ , le groupe des opérateurs unitaires sur  $\mathcal{H}_\varrho$ . Si  $G$  est un groupe topologique, nous supposons également que la représentation est fortement continue, à savoir pour tout  $x \in \mathcal{H}_\varrho$ ,  $g \mapsto \varrho(g)x$  est continue.

On dit qu'une représentation (unitaire) est irréductible s'il n'existe pas de sous-espace de Hilbert  $F$  différent de  $\{0\}$  ou  $\mathcal{H}_\varrho$  globalement invariant par  $\varrho(G)$ . Puisque  $\mathcal{H}_\varrho = F \oplus F^\perp$ , et puisque la projection orthogonale  $P_F$  sur  $F$  est un opérateur auto-adjoint borné, cela revient à dire qu'il n'existe pas de projection orthogonale propre (i.e., différente de 0 ou  $\text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$ ) commutant avec tous les éléments de  $\varrho(G)$ . Le théorème spectral nous dit alors que la représentation est irréductible si et seulement si les seuls opérateurs auto-adjoints bornés commutant avec tous les éléments de  $\varrho(G)$  sont de la forme  $\lambda \text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$ . De plus pour  $A \in \mathcal{L}(H_\varrho)$ , la commutation  $[A, \varrho(g)] = 0$  entraîne  $[\varrho(g^{-1}), A^*] = 0$ , et donc si  $A$  commute avec tous les éléments de  $\varrho(G)$  il en est de même de  $A^*$ ,  $(A + A^*)/2$  et  $(A - A^*)/2i$ . Nous arrivons à la conclusion que  $\varrho$  est irréductible si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite :

- Les seuls sous-espaces hilbertiens de  $\mathcal{H}_\varrho$  globalement invariants par  $\varrho(G)$  sont  $\{0\}$  et  $\mathcal{H}_\varrho$ .
- Les seules projections orthogonales qui commutent avec  $\varrho(G)$  sont 0 et  $\text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$ .
- Les seuls opérateurs bornés qui commutent avec  $\varrho(G)$  sont les  $\lambda \text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

On notera en particulier que si  $G$  est un groupe abélien, ses représentations irréductibles sont forcément de dimension 1, et qu'il s'agit de caractères de  $G$ .

Nous nous placerons dans le cas où  $G$  est un groupe localement compact unimodulaire. Rappelons que, sur un groupe localement compact, une mesure borélienne quasi-régulière invariante à gauche (c'est-à-dire  $\mu(gE) = \mu(E)$  pour tout borélien  $E$  et tout  $g \in G$ ) existe et est définie à une constante multiplicative près. Dire que le groupe est unimodulaire revient à dire que cette mesure est également invariante à droite,  $\mu(Eg) = \mu(E)$  pour tout borélien  $E$  et tout  $g \in G$ . C'est le cas, évidemment pour les groupes abéliens, pour le groupe de Heisenberg (voir plus loin) et plus généralement pour les groupes de Lie nilpotents connexes. À partir de là on peut associer à une représentation unitaire  $\varrho$  une algèbre d'opérateurs bornés  $\mathcal{A}_\varrho = \{\varrho(\Phi) \mid \Phi \in L^1(G, d\mu; \mathbb{C})\}$  avec

$$\varrho(\Phi) = \int_G \Phi(g) \varrho(g) d\mu(g)$$

et on note que  $\varrho(\Phi)\varrho(\Psi) = \varrho(\Phi * \Psi)$ , où

$$\Phi * \Psi(g) = \int_G \Phi(g\gamma^{-1})\Psi(\gamma) d\mu(\gamma)$$

est le produit de convolution sur  $G$  et  $\varrho(\overline{\Phi}) = \varrho(\Phi)^*$ .

*Représentation induite.* Si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ ,  $G$  localement compact unimodulaire, alors la topologie quotient sur  $G/H = \{gH \mid g \in G\}$  définit une tribu borélienne et la mesure image par  $g \mapsto gH$  définit une mesure  $\mu_{G/H}$  borélienne sur  $G/H$  invariante par l'action à gauche de  $G$  sur  $G/H$ . Si  $\varrho$  est une représentation unitaire fortement continue de  $H$  dans  $\mathcal{V}_\varrho$ , on appelle *représentation induite de  $G$  par  $\varrho$*  la représentation  $\varrho' : G \rightarrow \text{Ind}_H^G \varrho$  donnée par

$$\text{Ind}_H^G \varrho = \left\{ \begin{array}{l} \varphi : G \rightarrow \mathcal{V}_\varrho \text{ mesurable,} \\ \forall h \in H, \varphi(gh^{-1}) = \varrho(h)\varphi(g) \text{ } \mu_{G\text{-p.p.}} \text{ en } g, \\ \|\varphi(\bullet)\|_{\mathcal{V}_\varrho} \in L^2(G/H, \mu_{G/H}) \\ [\varrho'(g)\varphi](x) = \varphi(g^{-1}x), \quad \forall g, x \in G. \end{array} \right\}$$

Une fois que les choses sont claires, on note plus directement  $\varrho' = \text{Ind}_H^G \varrho$ .

Un cas particulier est celui où  $H$  est abélien et  $\varrho$  est irréductible donc scalaire,  $\mathcal{V}_\varrho = \mathbb{C}$  et  $\varrho(h) \in \mathbb{S}^1$  auquel cas la représentation induite est donnée par un espace de fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  avec des propriétés de quasi-invariance.

### 2.3. Transformée de Fourier, opérateurs de Hilbert-Schmidt

Sur  $\mathbb{R}^d$  on définit la transformée de Fourier<sup>(2)</sup> par

$$\mathcal{F}_\varepsilon \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(i/\varepsilon)\xi \cdot x} \varphi(x) dx$$

et la transformée de Fourier inverse est donnée par

$$(\mathcal{F}_\varepsilon)^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{(i/\varepsilon)x \cdot \xi} f(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi\varepsilon)^d}.$$

---

<sup>(2)</sup>Il est commode d'introduire un paramètre  $\varepsilon$  pour changer facilement de normalisation. Il suffit de se rappeler que pour la mesure de Lebesgue usuelle  $dx$ , la mesure duale est  $d\xi/(2\pi\varepsilon)^d$  et qu'il faut mettre  $1/\varepsilon$  dans les exponentielles et  $\varepsilon$  devant chaque signe de dérivation.

Cela définit une transformation unitaire de l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d, dx; \mathbb{C})$  sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}^d, d\xi/(2\pi\varepsilon)^d; \mathbb{C})$ . Indépendamment d'un choix de coordonnées, si  $X^*$  est l'espace dual de  $X$  et  $\xi \cdot x$  le produit de dualité de  $\xi \in X^*$  et  $x \in X$ , les mesures de Lebesgue  $\lambda_X$  et  $\lambda_{X^*}$  sont normalisées de telle sorte que le volume de deux parallélépipèdes duaux soit 1, alors  $\mathcal{F}_\varepsilon$  définit une application naturelle de  $L^2(X, \lambda_X)$  dans  $L^2(X^*, \lambda_{X^*}/(2\pi\varepsilon)^d)$ .

De même la définition de l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S}(X) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(X) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, x^\alpha \partial_x^\beta f \in L^\infty(X, \lambda_X)\}$$

et son dual  $\mathcal{S}'(X)$ , l'espace des distributions tempérées, ne dépendent pas du choix d'une base. On rappelle que  $\mathcal{F}^\varepsilon$  envoie continûment  $\mathcal{S}(X)$  (resp.  $\mathcal{S}'(X)$ ) dans  $\mathcal{S}(X^*)$  (resp.  $\mathcal{S}'(X^*)$ ).

Rappelons également les formules

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\varepsilon D_x)(\mathcal{F}^\varepsilon)^{-1}(\bullet) = \xi \times \bullet, \quad \mathcal{F}_\varepsilon(x \times)(\mathcal{F}^\varepsilon)^{-1}(\bullet) = -\varepsilon D_\xi \bullet$$

avec  $D_{x_j} = (1/i)\partial_{x_j}$ ,  $j = 1, \dots, \dim X$ , qui viennent de la dérivation sous le signe somme de  $\varphi(x) = [(\mathcal{F}_\varepsilon)^{-1}f](x)$  pour  $f = \mathcal{F}^\varepsilon \varphi$ , ainsi que la transformée des produits de convolution en produits pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(X)$  (ou plus généralement quand les expressions ont un sens)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi * \psi) &= (\mathcal{F}_\varepsilon \varphi) \times (\mathcal{F}_\varepsilon \psi) \\ \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi \times \psi) &= (\mathcal{F}_\varepsilon \varphi) \underset{(2\pi\varepsilon)^d}{*} (\mathcal{F}_\varepsilon \psi) \end{aligned}$$

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur  $L^2(X, \lambda_X)$  sont les opérateurs compacts  $A$  tels que  $A^*A$  est à trace. C'est un espace de Hilbert muni de la norme donnée par  $\|A\|_{HS}^2 = \text{Tr}(A^*A)$ . De plus la relation

$$\forall u \in L^2(X, \lambda_X), \quad Au(x) = \int_X A(x, y)u(y) d\lambda_X(y)$$

définit un isomorphisme entre l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt et l'espace  $L^2(X \times X, d\lambda_X \otimes d\lambda_X; \mathbb{C})$ .

Une variante de la transformée de Fourier est le cas où  $X = V$  est un espace symplectique,  $\dim V = 2d$ , avec mesure de Lebesgue normalisée par  $\lambda_V^\varepsilon = dx d\xi/(2\pi\varepsilon)^d$  dans une base symplectique (une

base dans laquelle  $\sigma = \sum_{j=1}^d d\xi_j \wedge dx_j$ ). La forme bilinéaire non dégénérée  $\sigma$  permettant d'identifier  $V$  à son dual, on notera alors

$$\widehat{\varphi}(v) = \int_V e^{-(i/\varepsilon)\sigma(v,v')} \varphi(v') d\lambda_V^\varepsilon(v').$$

L'écriture  $\widehat{\varphi}(x, \xi) = [(\mathcal{F}_\varepsilon \otimes \mathcal{F}_\varepsilon^{-1})\varphi](\xi, x)$  assure que  $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$  envoie  $\mathcal{S}(V)$  (resp.  $\mathcal{S}'(V)$ ) dans lui-même et qu'elle est unitaire sur  $L^2(V, \lambda_V^\varepsilon)$ . Elle donne aussi

$$\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi$$

tandis qu'en coordonnées symplectiques  $v = (x, \xi)$ , avec  $\sigma(v, v') = \xi \cdot x' - x \cdot \xi'$ , on a

$$\varepsilon D_{\xi_j} \widehat{\varphi} = \widehat{-x'_j \varphi}, \quad \varepsilon D_{x_j} \widehat{\varphi} = \widehat{\xi'_j \varphi},$$

$$\text{ou encore} \quad (\varepsilon D_v) \widehat{\varphi} = \widehat{-(\Sigma_d v') \varphi}, \quad (\Sigma_d \varepsilon D_v) \widehat{f} = \widehat{v' f}.$$

Nous allons manipuler des intégrales, régulières ou au sens des distributions, de fonctions à valeurs opérateurs linéaires continus sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ou envoyant continûment  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . La meilleure façon de comprendre ces intégrales est de se rappeler que de tels opérateurs  $A$  sont déterminés pas la famille des scalaires

$$(\langle \psi, A\varphi \rangle)_{\varphi, \psi \in L^2 \text{ ou } \mathcal{S}}$$

et de se ramener ainsi à des intégrales scalaires.

### 3. Le théorème de Stone-Von Neumann

**3.1. Groupe de Heisenberg.** On se donne un espace symplectique  $(V, \sigma)$  sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $2d$ , muni de la mesure de Lebesgue  $\lambda_V^\varepsilon$  introduite précédemment.

**Définition 3.1.** On appelle *groupe de Heisenberg* sur  $(V, \sigma)$  le groupe  $\mathcal{N} = V \oplus \mathbb{R}e_0$  donné par loi de composition

$$(v_1 + r_1 e_0) \circ (v_2 + r_2 e_0) = v_1 + v_2 + \left( r_1 + r_2 + \frac{\sigma(v_1, v_2)}{2} \right) e_0,$$

ou avec une notation exponentielle

$$\exp(v_1 + r_1 e_0) \exp(v_2 + r_2 e_0) = \exp\left(v_1 + v_2 + \left(r_1 + r_2 + \frac{\sigma(v_1, v_2)}{2}\right) e_0\right).$$

La mesure de Lebesgue  $\lambda_V^\varepsilon \otimes \lambda_{\mathbb{R}}$  est une mesure de Haar sur  $\mathcal{N}$ , ( $\mathcal{N}$  est unimodulaire) et  $\mathbb{R}e_0$  est le centre de  $\mathcal{N}$ .

Le groupe de Heisenberg est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie n'est rien d'autre, en posant

$$\frac{d}{dt} \exp(t(v + re_0)) \Big|_{t=0} = v + re_0,$$

que  $\mathfrak{g} = V \oplus \mathbb{R}e_0 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  avec

$$\forall v_1, v_2 \in \mathfrak{g}_1, \quad [v_1, v_2] = \sigma(v_1, v_2)e_0 \in \mathfrak{g}_2.$$

tandis que  $[e_0, v] = 0$  et  $[e_0, e_0] = 0$ . La relation précédente vient de la différentiation en  $s = 0$  et  $t = 0$  de

$$\begin{aligned} \exp(s(v_1 + r_1e_0)) \exp(t(v_2 + r_2e_0)) \exp(-s(v_1 + r_1e_0)) \\ = \exp(t(v_2 + r_2e_0) + st\sigma(v_1, v_2)e_0) \\ = \exp(t(v_2 + r_2e_0)) \exp(st\sigma(v_1, v_2)e_0). \end{aligned}$$

C'est donc une algèbre de Lie nilpotente de rang 2 et c'est d'ailleurs l'algèbre de Lie nilpotente non abélienne la plus élémentaire (encore plus élémentaire si on prend  $\dim V = 2$ ).

Si  $\Lambda'$  est un sous-espace lagrangien de  $(V, \sigma)$  alors  $H_{\Lambda'} = \Lambda' \oplus \mathbb{R}e_0$  est un sous-groupe abélien (maximal) de  $\mathcal{N}$ .

La notation exponentielle que nous adopterons par la suite indique, entre autres, que l'on peut remplacer  $\mathcal{N} = V \times \mathbb{R}$  par  $V \times \mathbb{S}^1$ , voire remplacer  $V$  par  $V/\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{L}$  est un réseau tel que  $(i/2\varepsilon)\sigma(\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \subset (2\pi\mathbb{Z})$ .

**3.2. Algèbre de Weyl, produit de Moyal.** On se donne une représentation unitaire continue  $\varrho : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}_\varrho$  telle que  $\varrho(\exp(re_0)) = e^{(i/\varepsilon)r} \text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$  et on rappelle que

$$\mathcal{A}_\varrho = \left\{ \int_{\mathcal{N}} \Phi(v, r) \varrho(\exp(v + re_0)) d\lambda_V^\varepsilon(v) dr \mid \Phi \in L^1(\mathcal{N}, d\lambda_V^\varepsilon dr; \mathbb{C}) \right\}$$

est une algèbre d'opérateurs bornés avec  $\varrho(\Phi *_{\mathcal{N}} \Psi) = \varrho(\Phi) \circ \varrho(\Psi)$  et  $\varrho(\overline{\Phi}) = \varrho(\Phi)^*$ . Pour  $f \in \mathcal{S}(V)$  et  $\chi \in L^1(\mathbb{R}, dr; \mathbb{C})$  telle que  $\int_{\mathbb{R}} \chi(r) dr = 1$  on note

$$W_\varrho(f) = \varrho(\widehat{f} \otimes (\chi e^{-i/\varepsilon \cdot})),$$

où  $\widehat{f}$  est la transformée de Fourier symplectique, paramétrée par  $\varepsilon$ , introduite au paragraphe 2.3.

**Proposition 3.2.** *Pour  $f \in \mathcal{S}(V)$ , l'opérateur  $W_\varrho(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varrho)$  :*

$$W_\varrho(f) = \int_V \widehat{f}(v) \varrho(\exp(v)) d\lambda_V^\varepsilon(v)$$

*ne dépend pas du choix de  $\chi$ . Pour deux fonctions  $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(V)$ , on a*

$$W_\varrho(f_1) \circ W_\varrho(f_2) = W_\varrho(f_1 \#^\varepsilon f_2),$$

*où  $f_1 \#^\varepsilon f_2$  est le produit de Moyal donné par*

$$(3) \quad f_1 \#^\varepsilon f_2(v) = \left[ e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v'_1, v'_2)} \widehat{f}_1(v'_1) \widehat{f}_2(v'_2) \right](v, v) \\ = e^{(i\varepsilon/2)\sigma(D_{v_1}, D_{v_2})} (f_1 \otimes f_2) \Big|_{v_1=v_2=v}.$$

*Ce produit  $\#^\varepsilon$  sur  $\mathcal{S}(V)$ , est une application bilinéaire continue de  $\mathcal{S}(V) \times \mathcal{S}(V)$  dans  $\mathcal{S}(V)$ , ne dépendant de la représentation  $\varrho$  que par le choix du caractère central  $\varrho(\exp(re_0)) = e^{ir/\varepsilon} \text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$ .*

Ainsi  $(\mathcal{S}(V), \#^\varepsilon)$  a une structure d'algèbre, appelée algèbre de Weyl, et  $W_\varrho : (\mathcal{S}(V), \#^\varepsilon) \rightarrow (\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varrho), \circ)$  est un morphisme d'algèbre avec de plus  $W_\varrho(\bar{f}) = W_\varrho(f)^*$ .

*Démonstration.* Pour l'indépendance par rapport au choix de  $\chi$ , on écrit simplement

$$W_\varrho(f) = \int_{\mathcal{N}} \widehat{f}(v) \chi(r) e^{-(i/\varepsilon)r} \varrho(\exp(v + re_0)) d\lambda_V^\varepsilon(v) dr \\ = \int_V \widehat{f}(v) \varrho(\exp(v)) d\lambda_V^\varepsilon(v) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \chi(r) dr}_{=1}.$$

Pour la composition on écrit

$$W_\varrho(f_1) W_\varrho(f_2) \\ = \int_{V \times V} \widehat{f}_1(v_1) \widehat{f}_2(v_2) \varrho(\exp(v_1)) \varrho(\exp(v_2)) d\lambda_V^\varepsilon(v_1) d\lambda_V^\varepsilon(v_2) \\ = \int_{V \times V} \widehat{f}_1(v_1) \widehat{f}_2(v_2) e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v_1, v_2)} \varrho(\exp(v_1 + v_2)) d\lambda_V^\varepsilon(v_1) d\lambda_V^\varepsilon(v_2) \\ = \int_{V \times V \times V} \widehat{f}_1(v'_1) \widehat{f}_2(v'_2) e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v'_1, v'_2)} (2\pi\varepsilon)^d \delta((v'_1 + v'_2) - v) \\ \times \varrho(\exp(v)) d\lambda_V^\varepsilon(v'_1) d\lambda_V^\varepsilon(v'_2) d\lambda_V^\varepsilon(v).$$

On utilise alors  $(2\pi\varepsilon)^d \widehat{\delta(\bullet - v_0)} = e^{(i/\varepsilon)\sigma(v_0, \bullet)}$  qui donne avec la transformée de Fourier symplectique sur  $(V \oplus V, \sigma \oplus \sigma)$

$$(2\pi\varepsilon)^d \widehat{[\delta(v'_1 + v'_2 - v)]}(v_1, v_2) = (2\pi\varepsilon)^d \delta(v_1 - v_2) e^{(i/\varepsilon)\sigma(v, v_1)}.$$

Toujours dans  $V \oplus V$ , la formule de Parseval  $\int_{V \oplus V} \widehat{F} \widehat{G} d\lambda_{V \oplus V}^\varepsilon = \int_{V \oplus V} F \overline{G} d\lambda_{V \oplus V}^\varepsilon$  appliquée avec

$$F(v'_1, v'_2) = \widehat{f}_1(v'_1) \widehat{f}_2(v'_2) e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v'_1, v'_2)}$$

$$\text{et } G(v_1, v_2) = (2\pi\varepsilon)^d \delta(v_1 - v_2) e^{(i/\varepsilon)\sigma(v, v_1)}$$

donne

$$W_\varrho(f_1) W_\varrho(f_2) = \int_V \widehat{(f_1 \#^\varepsilon f_2)}(v) \varrho(\exp(v)) d\lambda_V^\varepsilon(v)$$

avec

$$(f_1 \#^\varepsilon f_2)(v) = \left[ e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v'_1, v'_2)} \widehat{f}_1(v'_1) \widehat{f}_2(v'_2) \right](v, v),$$

qui est la première égalité de (3). La décomposition

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &\longmapsto (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2) \longmapsto \widehat{f}_1 \otimes \widehat{f}_2 \longmapsto e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v'_1, v'_2)} (\widehat{f}_1 \otimes \widehat{f}_2) \\ &\longmapsto \widehat{e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v'_1, v'_2)} (\widehat{f}_1 \otimes \widehat{f}_2)} \longmapsto f_1 \#^\varepsilon f_2 \end{aligned}$$

montre tout de suite que  $\#^\varepsilon$  est bilinéaire continue de  $\mathcal{S}(V) \times \mathcal{S}(V)$  dans  $\mathcal{S}(V)$ .

Pour la dernière égalité, il suffit de remarquer que

$$\widehat{e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v'_1, v'_2)} (\widehat{f}_1 \otimes \widehat{f}_2)} = e^{(i/2\varepsilon)\sigma(\Sigma_d(\varepsilon D_{v_1}), \Sigma_d(\varepsilon D_{v_2}))} (f_1 \otimes f_2)$$

avec  ${}^t \Sigma_d \Sigma_d \Sigma_d = -{}^t \Sigma_d = \Sigma_d$ .  $\square$

**Remarque 3.3.** La dernière écriture

$$f \#^\varepsilon g(v) = e^{(i\varepsilon/2)\sigma(D_{v_1}, D_{v_2})} f \otimes g \Big|_{v_1=v_2=v},$$

en travaillant avec  $\varepsilon = 1$  pour les transformations de Fourier, assure que la continuité du produit de Moyal  $\#^\varepsilon : \mathcal{S}(V) \times \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathcal{S}(V)$  est uniforme par rapport au paramètre  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 5.3.

Notons de plus pour  $v_0 \in V$ ,

$$\begin{aligned} \varrho(\exp(v_0)) \circ W_\varrho(f) &= \int_V \widehat{f}(v) \varrho(\exp(v_0 + v)) e^{(i/2\varepsilon)\sigma(v_0, v)} d\lambda_V^\varepsilon(v) \\ &= \int_V \widehat{f(\bullet - v_0/2)}(v - v_0) \varrho(\exp(v)) d\lambda_V^\varepsilon(v) \\ &= \int_V \widehat{e^{(i/\varepsilon)\sigma(v_0, \bullet)} f(\bullet - v_0/2)}(v) \varrho(v) d\lambda_V^\varepsilon(v). \end{aligned}$$

Comme

$$\varrho(\exp(v_0)) = \int_V (2\pi\varepsilon)^d \delta_{v_0}(v) \varrho(\exp(v)) d\lambda_V^\varepsilon(v)$$

et 
$$\widehat{(2\pi\varepsilon)\delta_{v_0}} = e^{-(i/\varepsilon)\sigma(\bullet, v_0)} = e^{(i/\varepsilon)\sigma(v_0, \bullet)},$$

il est naturel de poser  $\varrho(\exp(v_0)) = W_\varrho(e^{(i/\varepsilon)\sigma(v_0, \bullet)})$ . Par un calcul direct, la première égalité dans (3) se généralise en

$$e^{(i/\varepsilon)\sigma(v_0, \bullet)} f(\bullet - v_0/2) = (e^{(i/\varepsilon)\sigma(v_0, \bullet)}) \#^\varepsilon f \in \mathcal{S}(V) \quad \text{pour } f \in \mathcal{S}(V),$$

avec  $W_\varrho((e^{(i/\varepsilon)\sigma(v_0, \bullet)}) \#^\varepsilon f) = \varrho(\exp(v_0))W_\varrho(f)$  et la formule symétrique en passant par l'adjoint. On voit aussi que la définition de  $W_\varrho(f)$  consiste à commuter  $W_\varrho$  et le signe d'intégration dans

$$f = \int_V e^{-(i/\varepsilon)\sigma(\bullet, v)} \widehat{f}(v) d\lambda_V^\varepsilon(v) = \int_V \widehat{f}(v) e^{(i/\varepsilon)\sigma(v, \bullet)} d\lambda_V^\varepsilon(v)$$

La conjugaison par  $\exp(v_0)$  dans  $\mathcal{N}$  donne encore plus simplement

$$\varrho(\exp(v_0))W_\varrho(f)\varrho(\exp(-v_0)) = W_\varrho(f(\bullet - v_0)).$$

Les automorphismes intérieurs de  $\mathcal{N}$  s'interprètent donc dans la représentation  $\varrho$  comme des translations dans l'espace symplectique  $V$ .

**3.3. Représentation de Schrödinger.** Si  $\varrho : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}_\varrho$  est une représentation unitaire (continue) irréductible de  $\mathcal{N}$ , non triviale au sens où  $\mathcal{H}_\varrho \neq \mathbb{C}$ , alors  $\varrho(\exp(re_0))$  commute avec  $\varrho(\mathcal{N})$  et vaut  $\varrho(\exp(re_0)) = e^{i\alpha r} \text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  (le cas  $\alpha = 0$  rendrait  $\varrho(\mathcal{N})$  commutatif et donc par irréductibilité imposerait  $\mathcal{H}_\varrho = \mathbb{C}$ ). En changeant  $e_0$  en  $(1/\alpha)e_0$  et de façon cohérente  $\sigma$  en  $\alpha\sigma$  on pourrait se ramener au cas  $\alpha = 1$ , mais gardons de façon plus générale  $\alpha = 1/\varepsilon$  et supposons  $\varepsilon > 0$ .

Pour  $\Lambda'$  sous-espace lagrangien de  $V$ , le caractère central

$$\omega : \exp(re_0) \longmapsto \omega(\exp(re_0)) = e^{ir/\varepsilon}$$

se prolonge en un caractère (i.e., une représentation unitaire de dimension 1) sur le sous-groupe abélien  $H_{\Lambda'} = \Lambda' \oplus \mathbb{R}e_0$  par

$$\forall \xi \in \Lambda', \forall r \in \mathbb{R}, \quad \omega(\xi \oplus re_0) = e^{ir/\varepsilon}.$$

**Définition 3.4.** Soit  $\Lambda'$  un sous-espace lagrangien de  $V$ . On appelle *représentation de Schrödinger* de  $\mathcal{N}$ , associée à  $\Lambda'$  et au caractère central  $\omega(\exp(re_0)) = e^{(i/\varepsilon)r}$ , la représentation induite  $\varrho_S : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{U}(\text{Ind}_{H_{\Lambda'}}^{\mathcal{N}} \omega)$ .

Il convient d'expliquer l'appellation représentation de Schrödinger. Si  $\Lambda$  est un sous-espace lagrangien de  $(V, \sigma)$  supplémentaire à  $\Lambda'$ , identifié au dual de  $\Lambda$  via  $\sigma$ , on sait que l'on peut trouver une base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $\Lambda$  et  $(e_1^*, \dots, e_d^*)$  de  $\Lambda'$ , base duale, c'est-à-dire telle que  $\sigma(e_i^*, e_j) = \delta_{i,j}$ . En coordonnées  $x = \sum_i x_i e_i$  et  $\xi = \sum_i \xi_i e_i^*$  on identifie donc  $e_i^* = dx_i$ ,  $e_i = d\xi_i$  et ainsi

$$\sigma = d\xi \wedge dx = \sum_i d\xi_i \wedge dx_i.$$

On notera que :

- $\mathcal{N}/H_{\Lambda'} \sim \Lambda$  est muni de la mesure de Lebesgue  $dx$  invariante par l'action de  $\mathcal{N}$  à gauche (et à droite car  $H_{\Lambda'}$  est un sous-groupe distingué).

- Un élément  $\varphi$  de  $\text{Ind}_{H_{\Lambda'}}^{\mathcal{N}} \omega$ , c'est-à-dire une fonction  $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable telle que

$$\forall \xi' + r'e_0 \in H_{\Lambda'}, \quad \varphi(g \exp(-(\xi' + r'e_0))) = e^{(ir'/\varepsilon)} \varphi(g) \text{ p.p. en } g \in \mathcal{N}$$

ou encore en notant simplement  $\varphi(x, \xi, r) = \varphi(\exp(x, \xi, r))$ ,  $x \in \Lambda \sim \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \in \Lambda' \sim \mathbb{R}^d$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall (\xi', r') \in \mathbb{R}^{2d+1}, \quad \varphi(x, \xi - \xi', r - r' + \xi' \cdot x/2) = e^{(i/\varepsilon)r'} \varphi(x, \xi, r) \\ \text{p.p. en } (x, \xi, r) \in \mathbb{R}^{2d+1},$$

est caractérisée par

$$\varphi(x, \xi, r) = \varphi(x, 0, 0) e^{-(i/\varepsilon)(r + \xi \cdot x/2)}$$

avec  $|\varphi(x, \xi, r)| = |\varphi(x, 0, 0)|$  pour presque tout  $x \in \Lambda \sim \mathbb{R}^d$ . Ainsi  $\varphi \mapsto \varphi(\bullet, 0, 0)$  définit une application unitaire de  $\text{Ind}_{H_{\Lambda'}}^{\mathcal{N}}$  sur  $L^2(\Lambda, dx; \mathbb{C}) \sim L^2(\mathbb{R}^d, dx; \mathbb{C})$ .

• Enfin l'action par  $g_0 = \exp(x_0, \xi_0, r_0) \in \mathcal{N}$  sur une fonction  $\varphi \in \text{Ind}_{H_{\Lambda'}}^{\mathcal{N}}$ ,  $\omega$  est donnée par

$$\begin{aligned} [\varrho_S(g_0)\varphi](x, 0, 0) &= \varphi(x - x_0, -\xi_0, -r_0 - \xi_0 \cdot x/2) \\ &= \varphi(x - x_0, 0, 0) e^{(i/\varepsilon)(r_0 + \frac{\xi_0 \cdot x}{2} + \frac{\xi_0 \cdot (x - x_0)}{2})} \\ &= \varphi(x - x_0, 0, 0) e^{(i/\varepsilon)r_0} e^{(i/\varepsilon)\xi_0 \cdot (x - x_0/2)}. \end{aligned}$$

Et on trouve

$$\varrho_S(g_0)\varphi = e^{(i/\varepsilon)(r + \xi_0 \cdot x_0/2)} U_{x_0} V_{\xi_0} \varphi$$

avec

$$U_{x_0}\varphi(x) = e^{(i/\varepsilon)\xi_0 \cdot x} \varphi(x), \quad V_{\xi_0}\varphi = \varphi(\bullet - x_0) = e^{-(i/\varepsilon)x_0 \cdot ((\varepsilon/i)\partial_x)} \varphi.$$

C'est donc la généralisation  $d$ -dimensionnelle du cas présenté dans l'introduction (avec  $\varepsilon = \hbar$ ,  $x = q$ ,  $\xi = p$ ) plus précisément sous la forme (2) qui correspond à la définition 3.1.

Avec ce que nous venons de discuter, il est intéressant d'exprimer dans les coordonnées  $x \in \Lambda \sim \mathbb{R}^d$  et  $\xi \in \Lambda'$ ,  $\text{Ind}_{H_{\Lambda'}}^{\mathcal{N}} \omega = L^2(\mathbb{R}^d, dx)$  les éléments de l'algèbre de Weyl,  $W_{\varrho_S}(f)$ ,  $f \in \mathcal{S}(\Lambda \oplus \Lambda' = V)$ . Nous écrivons maintenant  $\varphi(x) = \varphi(x, 0, 0)$ ,  $x \in \Lambda \sim \mathbb{R}^d$  et pour  $v' = (x', \xi') \in V$  (i.e.,  $r = 0$ )

$$[\varrho_S(\exp(v'))\varphi](x) = e^{(i/\varepsilon)\xi' \cdot (x - x'/2)} \varphi(x - x')$$

Travaillons d'abord avec  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , pour calculer

$$\begin{aligned} [\varrho_S(\exp(v'))\varphi](x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{(i/\varepsilon)\xi' \cdot (x - x'/2)} \delta(y - x + x') \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot (x - y)/\varepsilon} e^{(i/\varepsilon)(\xi' \cdot (x + y)/2 - x' \cdot \xi)} \frac{d\xi}{(2\pi\varepsilon)^d} \right] \varphi(y) dy \end{aligned}$$

Pour  $f \in \mathcal{S}(V)$ , nous en déduisons

$$[W_{\varrho_S}(f)\varphi](x) = \int_V \widehat{f}(v') [\varrho_S(v')\varphi](x) d\lambda_V(v') = \int_{\mathbb{R}^d} A_f(x, y) \varphi(y) dy$$

avec

$$\begin{aligned} A_f(x, y) &= \int_V \widehat{f}(v') \left[ \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot (x-y)/\varepsilon} e^{(i/\varepsilon)(\xi' \cdot (x+y)/2 - x' \cdot \xi)} \frac{d\xi}{(2\pi\varepsilon)^d} \right] d\lambda_V^\varepsilon(v') \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot (x-y)/\varepsilon} \left[ \int_V e^{-(i/\varepsilon)((x+y)/2 \cdot \xi' - \xi \cdot x')} \widehat{f}(v') d\lambda_V^\varepsilon(v') \right] \frac{d\xi}{(2\pi\varepsilon)^d}, \end{aligned}$$

où l'on reconnaît dans le dernier crochet

$$\widehat{f}((x+y)/2, \xi) = f((x+y)/2, \xi).$$

On obtient donc pour  $f \in \mathcal{S}(V)$

$$(4) \quad [W_{\varrho_S}(f)\varphi](x) = \int_{\mathbb{R}^d} A_f(x, y)\varphi(y) dy$$

$$(5) \quad \text{avec} \quad A_f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot (x-y)/\varepsilon} f((x+y)/2, \xi) \frac{d\xi}{(2\pi\varepsilon)^d} \\ = [(\text{Id} \otimes \mathcal{F}_\varepsilon^{-1})f]((x+y)/2, x-y)$$

$$(6) \quad \text{et} \quad f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot s/\varepsilon} A_f(x+s/2, x-s/2) ds,$$

et comme  $A_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  pour  $f \in \mathcal{S}(V)$  avec  $W_{\varrho_S}(f) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d, dx))$ , la première égalité à un sens pour  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$  par densité.

L'application  $f \mapsto W_\varrho(f)$  est appelée *quantification de Weyl*, et  $f$  est appelé *symbole de Weyl* de l'opérateur  $W_{\varrho_S}(f)$ .

### 3.4. Énoncé et démonstration du théorème.

**Théorème de Stone-Von Neumann.** Toute représentation unitaire irréductible non triviale  $\varrho : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\varrho)$  du groupe de Heisenberg  $\mathcal{N}$  telle que  $\varrho(\exp(re_0)) = e^{ir/\varepsilon} \text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$  est unitairement équivalente à une représentation de Schrödinger  $\varrho_S = \text{Ind}_{H_\Lambda}^{\mathcal{N}} \omega$  avec  $\omega(\exp(\xi + re_0)) = e^{i\xi \cdot r/\varepsilon} \in \mathbb{C}$  pour  $\xi \in \Lambda'$ .

Le premier résultat concerne l'irréductibilité de la représentation de Schrödinger.

**Proposition 3.5.** *La représentation de Schrödinger  $\varrho_S$  associée au sous-espace lagrangien  $\Lambda'$  et au caractère central  $\omega(\exp(re_0)) = e^{(i/\varepsilon)r}$ , est irréductible.*

*Démonstration.* La relation (5) nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |A_f(x, y)|^2 dx dy = \int_V |f(v)|^2 d\lambda_V^\varepsilon(v),$$

de telle sorte que  $f \mapsto W_{\varrho_S}(f)$  initialement défini pour  $f \in \mathcal{S}(V)$ , se prolonge en fait comme un opérateur continu de  $L^2(V, d\lambda_V^\varepsilon)$  dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt  $\mathcal{L}^2(L^2(\Lambda \sim \mathbb{R}^d, dx))$ . L'inversion (6) nous dit que cette application est unitaire de  $L^2(V, d\lambda_V^\varepsilon)$  sur  $\mathcal{L}^2(L^2(\Lambda, dx))$ .

Si  $B \in \mathcal{L}(L^2(\Lambda, dx))$  commute avec tous les  $\varrho_S(g)$ ,  $g \in \mathcal{N}$ , alors il commute avec tous les  $W_{\varrho_S}(f)$ ,  $f \in L^2(V, d\lambda_V^\varepsilon)$ , i.e., avec tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt. Ainsi  $B$  commute avec tous les opérateurs de rang 1 dans  $L^2(\Lambda, dx)$ ,  $\varphi \mapsto \langle \psi_1, \varphi \rangle \psi_2$ ,  $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Lambda, dx)$ , ce qui implique  $B = \lambda \text{Id}_{L^2(\Lambda, dx)}$ .  $\square$

On fixe maintenant  $\psi \in \mathcal{S}(\Lambda \sim \mathbb{R}^d)$  telle que  $\|\psi\|_{L^2} = 1$ . Le projecteur orthogonal  $P = |\psi\rangle\langle\psi|$  a la forme (4) avec  $A_f(x, y) = \psi(x)\overline{\psi(y)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  et donc  $P = |\psi\rangle\langle\psi| = W_{\varrho_S}(f)$  avec  $f \in \mathcal{S}(V)$ ,  $f \neq 0$ . Les relations

$$P^2 = P, \quad P^* = P, \quad PW_{\varrho_S}(g)P = \underbrace{\langle \psi, W_{\varrho_S}(g)\psi \rangle}_{=\alpha_\psi(g)} P,$$

avec  $g = \exp(v + re_0) \in \mathcal{N}$ ,  $v \in V$ , se traduisent par

$$(7) \quad f \#^\varepsilon f = f, \quad \overline{f} = f, \quad f \#^\varepsilon (e^{(i/\varepsilon)\sigma(v, \bullet)} e^{ir/\varepsilon}) \#^\varepsilon f = \alpha_\psi(g)f.$$

*Démonstration du théorème de Stone-Von Neumann*

Soit  $\varrho$  une représentation irréductible de  $\mathcal{N}$  telle que  $\varrho(\exp(re_0)) = e^{(i/\varepsilon)r} \text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$  et soit  $f$  la fonction de  $\mathcal{S}(V)$  introduite précédemment. Les relations (7) donnent

$$W_\varrho(f) \circ W_\varrho(f) = W_\varrho(f), \quad W_\varrho(f)^* = W_\varrho(f), \\ W_\varrho(f)\varrho(g)W_\varrho(f) = \alpha_\psi(g)W_\varrho(f).$$

En particulier  $W_\varrho(f)$  est une projection orthogonale. La démonstration se fait maintenant en deux étapes.

(1) L'ensemble  $E = \{\varrho(\exp(v))W_\varrho(f)\varphi \mid \varphi \in \mathcal{H}_\varrho, v \in V\}$  est dense dans  $\mathcal{H}_\varrho$ . Pour vérifier cela, on prend  $\varphi, \varphi' \in \mathcal{H}_\varrho$  et on calcule

$$\begin{aligned} \langle \varphi', W_\varrho(\exp(v_1))W_\varrho(f)W_\varrho(\exp(-v_1))\varphi \rangle &= \langle \varphi', W_\varrho(f(\bullet - v_1))\varphi \rangle \\ &= \int_V \widehat{f(\bullet - v_1)}(v) \langle \varphi', \varrho(\exp(v))\varphi \rangle d\lambda_V^\varepsilon(v) \\ &= \int_V [\widehat{f}(v) \langle \varphi', \varrho(\exp(v))\varphi \rangle] e^{-(i/\varepsilon)\sigma(v, v_1)} d\lambda_V^\varepsilon(v), \end{aligned}$$

où le dernier membre est la transformée de Fourier, évaluée en  $-v_1$ , de la fonction  $v \mapsto \widehat{f}(v) \langle \varphi', \varrho(\exp(v))\varphi \rangle \in L^2(V, d\lambda_V^\varepsilon)$ . Ainsi, si  $\varphi' \in E^\perp$ , cette fonction doit être nulle. Mais comme  $\widehat{f} \neq 0$ , il existe  $v_0 \in V$  tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}_\varrho, \quad \langle \varphi', \varrho(\exp(v_0))\varphi \rangle = 0,$$

et comme  $\varrho(\exp(v_0))\mathcal{H}_\varrho = \mathcal{H}_\varrho$ , cela entraîne  $\varphi' = 0$ .

(2) Pour  $\varphi'_1 = W_\varrho(f)\varphi_1, \varphi'_2 = W_\varrho(f)\varphi_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_\varrho$ , et  $v_1, v_2 \in V$  on a

$$\langle \varrho(\exp(v_1))\varphi'_1, \varrho(\exp(v_2))\varphi'_2 \rangle = \alpha_\psi(\exp(-v_1)\exp(v_2)) \langle \varphi'_1, \varphi'_2 \rangle.$$

En effet le membre de gauche s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \varrho(\exp(v_1))W_\varrho(f)\varphi_1, \varrho(\exp(v_2))W_\varrho(f)\varphi_2 \rangle &= \langle \varphi_1, W_\varrho(f)\varrho(-v_1)\varrho(v_2)W_\varrho(f)\varphi_2 \rangle \\ &= \langle \varphi_1, W_\varrho(f) \#^\varepsilon (e^{(i/\varepsilon)\sigma(v, \bullet)} e^{ir/\varepsilon}) \#^\varepsilon f \varphi_2 \rangle, \\ &= \langle \varphi_1, \alpha_\psi(g)W_\varrho(f)\varphi_2 \rangle \\ &= \alpha_\psi(g) \langle W_\varrho(f)\varphi_1, W_\varrho(f)\varphi_2 \rangle = \alpha_\psi(g) \langle \varphi'_1, \varphi'_2 \rangle, \end{aligned}$$

où l'on a posé  $g = \exp(v + re_0) = \exp(-v_1)\exp(v_2)$ .

(3) Conclusion : On prend  $\varphi' = W_\varrho(f)\varphi \in \text{Im } W_\varrho(f)$  non nul. On sait qu'il en existe un d'après (1) et on peut le normaliser par  $\|\varphi'\| = 1$ . Alors l'identité du (2) nous dit

$$\begin{aligned} \langle \varrho(\exp(v_1))\varphi', \varrho(\exp(v_2))\varphi' \rangle &= \alpha_\psi(\exp(-v_1)\exp(v_2)) \\ &= \langle \varrho_S(\exp(v_1))\psi, \varrho_S(\exp(v_2))\psi \rangle. \end{aligned}$$

Et l'application linéaire  $\Phi$  de

$$\begin{aligned} F_{\varrho_S, \psi} &= \text{Vect}(\varrho_S(\exp(v))\psi, v \in V) \\ &= \left\{ \sum_{i \in I, I \text{ fini}} \alpha_i \varrho_S(\exp(v_i))\psi \right\} \subset \mathcal{H}_{\varrho_S} \end{aligned}$$

dans  $F_{\varrho, \varphi'} = \text{Vect}(\varrho(\exp(v))\varphi', v \in V) \subset \mathcal{H}_\varrho$  définie par

$$\Phi \left[ \sum_{i \in I, I \text{ fini}} \alpha_i \varrho_S(\exp(v_i))\psi \right] = \sum_{i \in I, I \text{ fini}} \alpha_i \varrho(\exp(v_i))\varphi'$$

est une isométrie. Comme  $\varrho_S$  est irréductible,  $F_{\varrho_S, \psi}$  est dense dans  $\mathcal{H}_{\varrho_S}$  (sinon  $\overline{F_{\varrho_S, \psi}}$  serait un sous-espace de Hilbert propre invariant par  $\varrho_S(\mathcal{N})$ ). L'application  $\Phi$  se prolonge en une isométrie de  $\mathcal{H}_{\varrho_S}$  dans  $\mathcal{H}_\varrho$  et  $\Phi(\mathcal{H}_{\varrho_S}) = \overline{F_{\varrho, \varphi'}}$  est un sous-espace de Hilbert invariant par  $\varrho(\mathcal{H})$ . Comme la représentation  $\varrho$  est supposée irréductible on doit avoir  $\overline{F_{\varrho, \varphi'}} = \mathcal{H}_\varrho$  et  $\Phi$  est une transformation unitaire de  $\mathcal{H}_{\varrho_S}$  sur  $\mathcal{H}_\varrho$ .  $\square$

**Remarque 3.6.** La démonstration ci-dessous dit aussi deux choses :

(1) Sous l'hypothèse d'irréductibilité de  $\varrho$ ,  $W_\varrho(f)$  est de rang 1 et le vecteur  $\varphi'$  est défini à un facteur de module 1 près.

(2) Si on supprime l'hypothèse d'irréductibilité de  $\varrho$ , tout en gardant la densité de l'étape (1), alors on a  $\varrho = \varrho_S \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}_1}$ , où  $\mathcal{H}_1 = \text{Im } W_\varrho(f)$  (remplacer  $\{\varphi'\}$  par une base hilbertienne  $(\varphi'_j)_{j \in J}$  de  $\text{Im } W_\varrho(f)$ ). Plus généralement sans hypothèse de densité, on prend  $\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{k \in K}^\perp \text{Im } W_\varrho(f_k)$ , pour une famille  $(f_k)_{k \in K}$  qui assure l'orthogonalité.

#### 4. Quantification des symplectomorphismes linéaires

Une représentation irréductible  $\varrho : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}_\varrho$  associée au caractère central  $\omega(\exp(re_0)) = e^{ir/\varepsilon}$  est unitairement équivalente à la représentation de Schrödinger  $\varrho_S = \text{Ind}_{H_{\Lambda'}}^{\mathcal{N}} \omega$  avec  $\mathcal{H}_{\varrho_S} = L^2(\Lambda, dx)$ , quand  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont deux sous-espaces lagrangiens supplémentaires. Même si nous allons d'abord regarder ce qui se passe pour une paire  $(\Lambda, \Lambda')$  fixée, la suite montrera qu'il est utile de faire bouger la paire  $(\Lambda, \Lambda')$ .

#### 4.1. Le groupe symplectique et sa représentation projective

À partir de

$$\exp(v_1 + v_2) \exp(-v_1) \exp(-v_2) = \exp\left(\frac{\sigma(v_1, v_2)}{2} e_0\right),$$

on voit qu'un automorphisme de  $\mathcal{N}$  de la forme  $L \times \text{Id}$  avec  $L$  linéaire sur  $V$  doit vérifier

$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad \sigma(Lv_1, Lv_2) = \sigma(v_1, v_2).$$

Comme la forme symplectique  $\sigma$  détermine un volume orienté  $((-1)^d/d!) \sigma^{\wedge d} = (dx_1 \wedge d\xi_1) \wedge \cdots \wedge (dx_d \wedge d\xi_d)$  préservé par  $L$ , on a  $\det(L) = 1$ .

**Définition 4.1.** On note  $\text{Sp}(V, \sigma)$ , ou  $\text{Sp}_d(\mathbb{R})$  si  $V \sim \mathbb{R}^{2d}$  et  $\sigma = \Sigma_d$ , le groupe des applications linéaires qui préserve  $\sigma$ .

Si  $V = \mathbb{R}^{2d}$  et avec  $\sigma$  donnée par  $\Sigma_d$ , une application linéaire symplectique a la forme par blocs  $d \times d$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad {}^t ad - {}^t bc = \text{Id}_d, \quad {}^t bd = {}^t db, \quad {}^t ac = {}^t ca.$$

En particulier si  $d = 1$ ,  $\text{Sp}_1(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ .

Pour  $L \in \text{Sp}(V, \sigma)$ , l'application  $\exp(v + re_0) \rightarrow \varrho(\exp(Lv + re_0)) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\varrho)$  donne une nouvelle représentation irréductible de  $\mathcal{N}$ . Le théorème de Stone-Von Neumann nous dit alors qu'il existe une  $U_L \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\varrho)$  telle que

$$\forall v \in V, \quad \varrho(\exp(Lv)) = U_L \varrho(\exp(v)) U_L^{-1}.$$

De plus si  $U'_L$  et  $U_L$  sont deux telles transformations unitaires, on doit avoir

$$\forall g \in \mathcal{N}, \quad U_L^{-1} U'_L \varrho(g) = \varrho(g) U_L^{-1} U'_L$$

et comme  $\varrho$  est irréductible  $U_L^{-1} U'_L = \lambda \text{Id}_{\mathcal{H}_\varrho}$  avec  $|\lambda| = 1$ . Ainsi une quantification de la transformation symplectique  $L$ , i.e., une transformation unitaire sur  $\mathcal{H}_\varrho$  associée à  $L$ , est définie de façon unique à un facteur de module 1 près.

Nous savons déjà quantifier les translations en conjuguant par  $\varrho(\exp(v_0))$ . La quantification des transformations affines symplectiques, se traduit alors sur l'algèbre de Weyl tout simplement (utiliser

$\sigma(Lv, v') = \sigma(v, L^{-1}v')$  dans  $\widehat{f}(v)$  par

$$U_L \varrho(\exp(v_0)) W_\varrho(f) \varrho(\exp(-v_0)) U_L^{-1} = W_\varrho[f(L^{-1}\cdot - v_0)].$$

Concentrons nous sur les transformations linéaires. Si  $U_{L_1}, U_{L_2}, U_{L_1 L_2}$  sont des transformations unitaires associées aux transformations symplectiques  $L_1, L_2, L_1 L_2$ . Avec la relation

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \quad U_{L_1 L_2} \varrho(\exp(v)) U_{L_1 L_2}^{-1} &= \varrho(\exp(L_1 L_2 g)) \\ &= U_{L_1} \varrho(\exp(L_2 v)) U_{L_1}^{-1} \\ &= U_{L_2} U_{L_1} \varrho(\exp(v)) U_{L_2}^{-1} U_{L_1}^{-1} \end{aligned}$$

et encore une fois l'irréductibilité de  $\varrho$ , on obtient

$$U_{L_1} U_{L_2} \simeq U_{L_1 L_2},$$

l'équivalence  $U \simeq U'$  dans  $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\varrho)$  signifiant qu'il existe  $\lambda \in \mathcal{S}^1$  tel que  $U' = \lambda U$ . On parle de *représentation projective*.

**4.2. Opérateurs Fourier intégraux.** On prend  $V = \mathbb{R}^{2d}$  et on travaille avec les coordonnées  $x \in \Lambda = \mathbb{R}^d$  et  $\xi \in \Lambda' = \mathbb{R}^d$ , ainsi que la représentation de Schrödinger associée à  $\Lambda, \Lambda'$  et  $\omega(\exp(re_0)) = e^{ir/\varepsilon}$ .

On rappelle que pour  $v_0 = (x_0, \xi_0) \in V$ , on a

$$\varrho_S(\exp(tv_0))u(x) = e^{(i/\varepsilon)t\xi_0 \cdot (x - tx_0/2)} u(x - tx_0)$$

et donc

$$-i\varepsilon \partial_t \varrho_S(\exp(tv_0)) \Big|_{t=0} = \xi_0 \cdot x - x_0 \cdot \varepsilon D_x = \sigma(v_0, (x, \varepsilon D_x)).$$

Ainsi, la version différentielle de la relation

$$\varrho_S(\exp(Lv_0)) = U_L \varrho_S(\exp(v)) U_L^{-1}$$

est

$$\sigma(Lv_0, U_L^{-1}(x, \varepsilon D_x) U_L) = \sigma(v_0, (x, \varepsilon D_x)) = \sigma(Lv_0, L(x, \varepsilon D_x))$$

et donc il suffit de calculer les opérateurs différentiels  $U_L^{-1}(x \times) U_L$  et  $U_L^{-1}(\varepsilon D_x) U_L$  pour déterminer la transformation symplectique  $L$ .

On se donne une forme quadratique sur  $\Lambda \times \Lambda$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} {}^t x A x + {}^t x B y + \frac{1}{2} {}^t y C y,$$

avec  $\partial_x \partial_y \varphi = B$  inversible

$${}^t A = A, \quad {}^t C = C \quad \text{et } B \in \text{GL}_d(\mathbb{R}).$$

On pose alors

$$[I_\varphi u](x) = \frac{|\det(B)|^{1/2}}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi(x,y)/\varepsilon} u(y) dy$$

C'est une transformation unitaire dans  $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$  (attention ici on garde la mesure  $dx = (2\pi\varepsilon)^d(dx/(2\pi\varepsilon)^d)$  même pour la transformée de Fourier) comme composée des quatre transformations unitaires,  $I_\varphi = I_4 \circ I_3 \circ I_2 \circ I_1$ ,

$$\begin{aligned} u \xrightarrow{I_1} u_1(y) &= e^{(i/2\varepsilon){}^t y C y} u(y) \xrightarrow{I_2} u_2(y) = \frac{u_1(B^{-1}y)}{|\det B|^{1/2}} \\ \xrightarrow{I_3} u_3 &= (2\pi\varepsilon)^{d/2} \mathcal{F}_\varepsilon^{-1} u_2 \xrightarrow{I_4} [I_\varphi u](x) = e^{(i/2\varepsilon){}^t x A x} u_3(x). \end{aligned}$$

Avec  $I_1^{-1}(y \times) I_1$  et  $I_1^{-1}(\varepsilon D_y) I_1$  donnés par

$$e^{-(i/2\varepsilon){}^t y C y} (y \times) e^{(i/2\varepsilon){}^t y C y} = y$$

et

$$e^{-(i/\varepsilon){}^t y C y} (\varepsilon D_y) e^{(i/2\varepsilon){}^t y C y} = (\varepsilon D_y) + C y,$$

on obtient la transformation symplectique

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \eta + C y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_d & 0 \\ C & \text{Id}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}.$$

De même  $I_4$  est associée à la transformation symplectique  $\begin{pmatrix} \text{Id}_d & 0 \\ A & \text{Id}_d \end{pmatrix}$ .  
Avec

$$I_2^{-1}(y \times) I_2 = (B y \times) \quad \text{et} \quad I_2^{-1}(\varepsilon D_y) I_2 = {}^t B^{-1}(\varepsilon D_y),$$

la transformation unitaire  $I_2$  est associée à la transformation symplectique de matrice  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & {}^t B^{-1} \end{pmatrix}$ .

Enfin  $I_3 = (2\pi\varepsilon)^{d/2} \mathcal{F}_\varepsilon^{-1}$  est la transformée de Fourier inverse au facteur près :

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x \times) \mathcal{F}_\varepsilon^{-1} = -\varepsilon D_y \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_\varepsilon(\varepsilon D_x) \mathcal{F}_\varepsilon^{-1} = y$$

est associée à la transformation symplectique de matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_d \\ \text{Id}_d & 0 \end{pmatrix} = \Sigma_d$ . Ainsi  $I_\varphi$  est bien associée à une transformation symplectique  $\kappa_\varphi$

qui est donnée par

$$(8) \quad (y, -\partial_y \varphi) \xrightarrow{\kappa_\varphi} (x, \partial_x \varphi).$$

En effet avec  $\partial_x \varphi = Ax + By$  et  $-\partial_y \varphi = -{}^t Bx - Cy$ , il suffit de calculer

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{Id}_d & 0 \\ A & \text{Id}_d \end{pmatrix} \Sigma_d \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & {}^t B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id}_d & 0 \\ C & \text{Id}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -{}^t Bx - Cy \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \text{Id}_d & 0 \\ A & \text{Id}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_d \\ \text{Id}_d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} By \\ -x \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x \\ Ax + By \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme  $B$  est inversible la relation (8) définit parfaitement la transformation symplectique  $\kappa_\varphi$ . Mais on observe aussi que l'image par  $\kappa_\varphi$  du plan lagrangien  $\Lambda' = \{(0, {}^t Bx) \mid x \in \mathbb{R}^d\}$

$$\kappa_\varphi(\Lambda') = \{(x, Ax) \mid x \in \mathbb{R}^d\}$$

est transverse à  $\Lambda'$ , i.e.,  $V = \Lambda' \oplus \kappa_\varphi(\Lambda')$ , et de même  $\kappa_\varphi^{-1}(\Lambda') = \{(y, -Cy) \mid y \in \mathbb{R}^d\}$  est transverse à  $\Lambda'$ .

L'ensemble des opérateurs  $I_\varphi$  ne contient pas l'identité et quand on travaille avec des groupes de Lie, il s'agit en premier lieu de comprendre un voisinage de l'identité. On résout cela en composant à droite par la transformée de Fourier, en fait  $(2\pi\varepsilon)^{-d/2} \mathcal{F}_\varepsilon$  pour l'unitarité sans changer la mesure de Lebesgue.

**Définition 4.2.** Pour une phase quadratique  $\varphi(x, \eta) = \frac{1}{2} {}^t x A x + {}^t x B \eta + \frac{1}{2} {}^t \eta C \eta$ , avec  $\det B \neq 0$ , l'opérateur  $(2\pi\varepsilon)^{-d/2} I_\varphi \circ \mathcal{F}_\varepsilon$  donné par

$$\begin{aligned} (2\pi\varepsilon)^{-d/2} [I_\varphi \circ \mathcal{F}_\varepsilon u](x) \\ = |\det(\partial_{x\eta} \varphi)|^{1/2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{(i/\varepsilon)(\varphi(x, \eta) - \eta \cdot y)} u(y) \frac{d\eta}{(2\pi\varepsilon)^d} dy \end{aligned}$$

est appelé *opérateur intégral de Fourier de phase  $\varphi$* .

Comme la transformée de Fourier est associée à la transformation symplectique de matrice  $-\Sigma_d$ , l'opérateur unitaire  $I_\varphi \circ \mathcal{F}_\varepsilon$  est associé

à la transformation

$$({}^t Bx + C\eta, \eta) = (\partial_\eta \varphi, \eta) \xrightarrow{\tilde{\kappa}_\varphi} (x, \partial_x \varphi) = (x, Ax + B\eta)$$

qui envoie le plan lagrangien  $\Lambda = \{({}^t Bx, 0) \mid x \in \mathbb{R}^d\}$  sur  $\tilde{\kappa}_\varphi \Lambda = \{(x, Ax) \mid x \in \mathbb{R}^d\}$  transverse à  $\Lambda'$ , tandis que  $\tilde{\kappa}_\varphi^{-1}$  envoie  $\Lambda' = \{(0, B\eta) \mid \eta \in \mathbb{R}^d\}$  sur  $\{(C\eta, \eta) \mid \eta \in \mathbb{R}^d\}$ , transverse à  $\Lambda$ .

Les transformations symplectiques  $\tilde{\kappa}_\varphi$  pour  $\|A\| + \|B - \text{Id}_{\mathbb{R}^d}\| + \|C\|$  petit décrivent un voisinage de l'identité dans  $\text{Sp}_d(\mathbb{R})$  : en effet, une transformation symplectique proche de l'identité envoie  $\Lambda$  sur un plan lagrangien transverse à  $\Lambda'$  et son inverse envoie  $\Lambda'$  sur un plan lagrangien transverse à  $\Lambda$ . Un plan transverse à  $\Lambda'$  se projette bijectivement sur  $\Lambda$  et il est de la forme  $\{(x, Ax) \mid x \in \mathbb{R}^d\}$  avec  $A$  symétrique (écrire  $d(Ax) \wedge dx = \sum_{ij} A_{ij} dx_i \wedge dx_j = 0$ ) proche de 0. Cette paramétrisation de  $\tilde{\kappa}_\varphi(\Lambda)$  détermine  $A$ . De même  $C$  est donné par le paramétrage de l'image inverse de  $\Lambda'$ . Enfin  ${}^t B$  est un automorphisme de  $\Lambda$  proche de l'identité.

L'ensemble des transformations symplectiques  $\tilde{\kappa}_\varphi$  caractérisées par  $V = \tilde{\kappa}_\varphi(\Lambda) \oplus \Lambda'$  est un ouvert dense de  $\text{Sp}(V)$ .

Notons enfin que pour  $A = C = 0$  et  $B = \text{Id}$ ,  $(2\pi\varepsilon)^{-d/2} I_\varphi \circ \mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F}_\varepsilon^{-1} \circ \mathcal{F}_\varepsilon = \text{Id}_{L^2(\Lambda)}$ . On résume :

(a) Le groupe symplectique  $\text{Sp}_d(\mathbb{R})$  est connexe et engendré par les matrices  $\begin{pmatrix} \text{Id}_d & A \\ 0 & \text{Id}_d \end{pmatrix}$ ,  $A$  symétrique,  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & {}^t B^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $B$  inversible, et  $\Sigma_d$ .

(b) Si  $\text{Mp}_d(\mathbb{R})$  est un groupe de Lie connexe, de transformations unitaires  $U$ , telles que  $U \varrho_S(\exp(v)) U^{-1} = \varrho_S(\exp(Lv))$ , avec  $L \in \text{Sp}_d(\mathbb{R})$ , alors il contient l'ensemble des opérateurs Fourier intégraux,  $(2\pi\varepsilon)^{-d/2} I_\varphi \circ \mathcal{F}_\varepsilon$  avec  $\|A\| + \|B - \text{Id}_d\| + \|C\|$  proche de 0.

**Définition 4.3.** On appelle *groupe métaplectique sur  $\mathbb{R}$* , le groupe  $\text{Mp}_d(\mathbb{R})$ , engendré par l'ensemble des opérateurs Fourier intégraux,  $(2\pi\varepsilon)^{-d/2} I_\varphi \circ \mathcal{F}_\varepsilon$  avec  $\|A\| + \|B - \text{Id}_d\| + \|C\|$  petit.

C'est la définition suivie par J. Leray dans [30] alors qu'A. Weil dans [49] ou V.I. Arnold dans [3] y arrivent par des arguments plus algébriques et topologiques.

Ce qui suit va expliquer que le groupe métaplectique est un revêtement à deux feuillets de  $\text{Sp}_d(\mathbb{R})$  et qu'en fait il contient tous

les opérateurs de Fourier intégraux  $\pm(2\pi\varepsilon)^{-d/2}I_\varphi \circ \mathcal{F}_\varepsilon$  avec  $\|A\| + \|B - \text{Id}_d\| + \|C\|$  petit.

**4.3. L'oscillateur harmonique.** Sur  $\mathbb{R}$ , l'opérateur

$$O = \frac{-\varepsilon^2 \partial_x^2 + x^2}{2} = a_\varepsilon^* a_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

avec

$$a_\varepsilon = (\varepsilon \partial_x + x)/\sqrt{2}, \quad a_\varepsilon^* = (-\varepsilon \partial_x + x)/\sqrt{2},$$

est auto-adjoint dans  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  avec le domaine

$$D(O) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}, dx) \mid \partial_x^2 u, x \partial_x u, x^2 u \in L^2(\mathbb{R}, dx) \right\}.$$

En utilisant  $[a_\varepsilon, a_\varepsilon^*] = \varepsilon \text{Id}_{L^2}$ , sa résolution spectrale est donnée par la base des fonctions de Hermite :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{e^{-x^2/2\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{1/4}}, & \varphi_n &= \frac{1}{(\varepsilon^n n!)^{1/2}} (a_\varepsilon^*)^n \varphi_0, \\ \varphi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} P_n\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon/2}}\right) \frac{e^{-x^2/2\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{1/4}} & O\varphi_n &= \varepsilon n \varphi_n, \end{aligned}$$

les fonctions  $P_n$  étant les polynômes de Hermite

$$P_0 = 1, \quad P_{n+1} = (-\partial_x + x)P_n.$$

La solution de l'équation de Schrödinger  $-i\varepsilon \partial_t u = Ou$ ,  $u(0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \varphi_n$  est donnée par

$$e^{(it/\varepsilon)O} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \varphi_n \right) = e^{it/2} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{itn} \alpha_n \varphi_n.$$

Elle est définie continûment par rapport à  $t \in \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$  et holomorphe dans  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ .

Des cas particuliers intéressants viennent de

$$\mathcal{F}_\varepsilon(-\varepsilon \partial_x + x) \mathcal{F}_\varepsilon^{-1} = i(-\varepsilon \partial_\xi + \xi),$$

avec  $(2\pi\varepsilon)^{-1/2} \mathcal{F}_\varepsilon \varphi_0 = \varphi_0$  qui donne

$$[(2\pi\varepsilon)^{-1/2} \mathcal{F}_\varepsilon]^\pm \varphi_n = (\pm i)^n \varphi_n,$$

tandis que  $\varphi_n(x)$  a la parité de  $n$  :

$$\begin{aligned} e^{(i\pi/2\varepsilon)O}u &= e^{(i\pi/4)}[(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}_\varepsilon]u, & e^{(i\pi/\varepsilon)O}u(x) &= iu(-x), \\ e^{(i3\pi/2\varepsilon)O}u &= e^{(3i\pi/4)}[(2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}_\varepsilon]^{-1}u. \end{aligned}$$

La différentiation de

$$X(t) = e^{-(it/\varepsilon)O}(x \times) e^{(it/\varepsilon)O} \quad \text{et} \quad D(t) = e^{-(it/\varepsilon)O}(\varepsilon D_x) e^{(it/\varepsilon)O}$$

donne

$$\begin{aligned} X'(t) &= e^{-(it/\varepsilon)O}(1/i\varepsilon)[O, x]e^{(it/\varepsilon)O} = e^{-(it/\varepsilon)O}(-\varepsilon D_x)e^{(it/\varepsilon)O} = -D(t) \\ D'(t) &= e^{-(it/\varepsilon)O}(1/i\varepsilon)[O, \varepsilon D_x]e^{(it/\varepsilon)O} = e^{-(it/\varepsilon)O}(x \times)e^{(it/\varepsilon)O} = X(t) \end{aligned}$$

dont la solution est

$$X(t) = \cos(t)x - \sin(t)(\varepsilon D_x), \quad D(t) = \sin(t)x + \cos(t)(\varepsilon D_x).$$

Ainsi  $e^{(it/\varepsilon)O}$  est une quantification de la transformation symplectique  $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$  qui est la rotation  $R_t$  d'angle  $t$  dans le plan  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ . On note en particulier que la condition de transversalité  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_\xi \oplus R_t(\mathbb{R}_x)$  n'est satisfaite que pour  $t \notin \pm\pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$ .

On peut écrire  $e^{(it/\varepsilon)O}$  sous la forme d'un opérateur intégral de Fourier en écrivant

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bx + c\eta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax + b\eta \end{pmatrix},$$

ce qui donne  $b = 1/\cos(t)$ ,  $a = c = \tan t$ . Ainsi, pour  $t \notin \pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $e^{(it/\varepsilon)O}$  s'écrit  $\lambda_t^{-1}(2\pi\varepsilon)^{-1/2}I_\varphi\mathcal{F}_\varepsilon$  avec

$$I_\varphi u(x) = \frac{1}{(|\cos(t)|2\pi\varepsilon)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i/\varepsilon)(\sin(t)x^2 + 2xy + \sin(t)y^2)/2\cos(t)} u(y) dy,$$

$$|\lambda(t)| = 1.$$

Pour déterminer  $\lambda(t)$ , il suffit de comparer les valeurs en  $x = 0$  de

$$e^{(it/\varepsilon)O}\varphi_0 = e^{(it/2)}\varphi_0$$

$$\begin{aligned} \text{et } \lambda(t)^{-1}I_\varphi[(2\pi\varepsilon)^{-1/2}\mathcal{F}_\varepsilon]\varphi_0 &= \lambda(t)I_\varphi\varphi_0 = \lambda(t)^{-1} \frac{1}{(2\pi\varepsilon|\cos(t)|)^{1/2}} \\ &\times \int_{\mathbb{R}} e^{i(\sin(t)x^2 + 2xy + \sin(t)y^2)/2\varepsilon\cos(t)} e^{-y^2/2\varepsilon} \frac{dy}{(\pi\varepsilon)^{1/4}}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \frac{e^{it/2}}{|\cos(t)|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y^2/2\varepsilon)(1-i\tan(t))} \frac{dy}{(2\pi\varepsilon)^{1/2}} \\ &= \frac{e^{it/2}}{\sqrt{|\cos(t)|(1-i\tan(t))}}\end{aligned}$$

en prenant la détermination principale de la racine carrée sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Le dénominateur étant  $2\pi$ -périodique on voit  $\lambda(t + 2\pi) = -\lambda(t)$ . Outre les singularités en  $t = \pm\pi/2 + 2k\pi$ , il y a un changement de signe de  $\lambda(t)$  à chaque tour.

Cela entraîne que  $\text{Mp}_1(\mathbb{R})$  contient  $\pm \text{Id}_{L^2}$  et tous les éléments  $\pm(2\pi\varepsilon)^{-1/2}I_\varphi\mathcal{F}_\varepsilon$ . En dimension  $d$ , il suffit de prendre

$$\mathcal{O}_1 = (-\partial_{x_1}^2 + x_1^2)/2$$

pour voir que  $\text{Mp}_d(\mathbb{R})$  contient  $\pm \text{Id}_{L^2}$ , donc tous les  $\pm(2\pi\varepsilon)^{-d/2}I_\varphi\mathcal{F}_\varepsilon$ .

Si on cherche à simplifier au maximum la représentation projective, l'exemple de l'oscillateur harmonique montre que l'on ne peut pas s'affranchir de l'indétermination du signe :

$$U_{L_1}U_{L_2} = \pm U_{L_1L_2}.$$

**4.4. Indice de Maslov et groupe métaplectique.** Cette partie sera moins détaillée que ce qui précède. Nous renvoyons notamment à [32] pour plus de détails.

L'indice de Maslov permet de clarifier la situation précédente. On a vu dans l'exemple de l'oscillateur harmonique en dimension 1 deux aspects : 1) une singularité apparaît quand l'image du plan lagrangien  $\Lambda = \mathbb{R}_x$  n'est plus transverse à  $\Lambda' = \mathbb{R}_\xi$  et dans ce cas la transformation unitaire est  $e^{i(2n+1)\pi/4}[(2\pi\varepsilon)^{-d/2}\mathcal{F}_\varepsilon]^{(-1)^{n-1}}$  ; 2) la transformation unitaire change de signe après un tour.

Partant d'un voisinage de l'identité dans  $\text{Mp}_1(\mathbb{R})$ , on arrive à un voisinage de la singularité avec  $t = \pi/2$  mais en composant avec  $e^{-i\pi/4}[(2\pi\varepsilon)^{-d/2}\mathcal{F}_\varepsilon]^{-1}$ , on peut se ramener au voisinage de l'identité. Le changement de signe après un tour s'expliquant par  $(e^{-i\pi/4}[(2\pi\varepsilon)^{-d/2}\mathcal{F}_\varepsilon]^{-1})^4 = -\text{Id}_{L^2}$ . Il s'agit de mieux comprendre le passage de la singularité.

Ceci étant, travailler en coordonnées  $(x, \xi)$  fixées est un peu artificiel, même si c'est plus commode dans une première présentation. Si on prend un autre plan lagrangien  $\Lambda'_1$  transverse à  $\Lambda$  avec l'angle  $\widehat{\Lambda, \Lambda'_1} = \theta_1$  (en dimension 1), la singularité dans la représentation de Schrödinger associée à  $\Lambda'_1$  pour la quantification de la rotation  $R(t)$  inchangée, apparaîtrait au temps  $t = \theta_1 \neq \pi/2$ . Pour deux plans lagrangiens,  $\Lambda'_1, \Lambda'_2$ , le choix de  $\Lambda$  peut-être quelconque tant qu'il est transverse aux deux plans  $\Lambda'_1, \Lambda'_2$ . Il n'est donc pas nécessaire de préciser  $\Lambda$  et pour cela il est plus commode de travailler avec les représentations induites.

**Définition 4.4.** Pour un plan lagrangien  $\Lambda'$  et un caractère central  $\omega(re_0) = e^{ir/\varepsilon}$ , étendu à  $H_{\Lambda'} = \Lambda' \times \mathbb{R}$ ,  $\varrho_{\Lambda'}$  désigne la représentation de Schrödinger  $\varrho_{\Lambda'} = \text{Ind}_{H_{\Lambda'}}^{\mathcal{N}} \omega : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\varrho_{\Lambda'}})$ , où on rappelle

$$\mathcal{H}_{\varrho_{\Lambda'}} = \left\{ u \in L^2(\mathcal{N}) \mid \forall (\xi, r) \in \Lambda' \times \mathbb{R}, \right. \\ \left. u(g \exp(\xi + re_0)) = e^{-ir/\varepsilon} u(g), \text{ p.p. dans } \mathcal{N} \right\}.$$

Pour deux plans lagrangiens  $\Lambda'_1, \Lambda'_2$  on note

$$\forall u \in \mathcal{H}_{\Lambda'_1}, \quad \mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u(g) = \int_{\Lambda'_2 / (\Lambda'_1 \cap \Lambda'_2)} u(g \exp(\xi')) d\lambda_{1,2}^{\varepsilon}(\xi'),$$

la mesure de Lebesgue  $\lambda_{1,2}^{\varepsilon}$  étant normalisée pour que  $\|\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1}\| = 1$ .

**Proposition 4.5.** Pour deux plans lagrangiens  $\Lambda'_1, \Lambda'_2$  la transformation  $\mathcal{F}_{\Lambda'_1, \Lambda'_2}$  est unitaire de  $\mathcal{H}_{\varrho_{\Lambda'_1}}$  dans  $\mathcal{H}_{\varrho_{\Lambda'_2}}$  avec  $\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1}^{-1} = \mathcal{F}_{\Lambda'_1, \Lambda'_2}$  et entrelace les deux représentations de Schrödinger :

$$\forall g \in \mathcal{N}, \quad \mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} \varrho_{\Lambda'_1}(g) = \varrho_{\Lambda'_2}(g) \mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1}.$$

*Démonstration.* On note  $\Lambda'_{1,2} = \Lambda'_1 \cap \Lambda'_2$  et on prend un supplémentaire  $\tilde{\Lambda}_j$ ,  $j = 1, 2$ , de  $\Lambda'_{1,2}$  dans  $\Lambda'_j = \tilde{\Lambda}_j \oplus \Lambda'_{1,2}$ , avec la notation correspondante  $\xi_j = \tilde{\xi}_j \oplus \hat{\xi}_j$  d'un élément de  $\Lambda'_j$ . L'espace  $\tilde{\Lambda}_j$  est isotrope et  $\tilde{\Lambda}_j \cap \Lambda'_{3-j} = \{0\}$ . Il existe donc  $\Lambda_{3-j}$  lagrangien tel que  $\tilde{\Lambda}_j \subset \Lambda_{3-j}$  et  $V = \Lambda_{3-j} \oplus \Lambda'_{3-j}$ . Pour  $x \in \Lambda_j$ , on notera  $x_j = \tilde{x}_j \oplus \hat{x}_j$  dans la décomposition  $\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_{3-j} \oplus \hat{\Lambda}_j$ , où  $\tilde{\Lambda}_j$  est un supplémentaire

de  $\tilde{\Lambda}_{3-j}$  dans  $\Lambda_j$ . Pour une fonction  $u \in \mathcal{H}_{\varrho_{\Lambda'_1}}$ , i.e., telle que

$$\begin{aligned} u\left(\exp\left(x_1, \xi_1 + \xi'_1, r + r' + \frac{\sigma}{2}(x_1, \xi'_1)\right)\right) \\ = u(\exp(x_1, \xi_1, r) \circ \exp(\xi'_1, r')) \\ = e^{-ir'/\varepsilon} u(\exp(x_1, \xi_1, r)) \end{aligned}$$

pour  $x_1 \in \Lambda_1, \xi_1 \in \Lambda'_1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} u(\exp(x_1, \xi_1, r)) &= u(\exp(x_1, 0, 0)) e^{(-i(2r + \sigma(\xi_1, x_1)))/2\varepsilon} \\ &= \tilde{u}(x_1) e^{(-i(2r + \sigma(\xi_1, x_1)))/2\varepsilon} \end{aligned}$$

en posant  $\tilde{u}(x_1) = u(\exp(x_1, 0, 0))$ .

En identifiant  $\Lambda'_2/(\Lambda'_{1,2})$  avec  $\tilde{\Lambda}_2 \subset \Lambda_1$  et, pour

$$g_1 = \exp(x_1 + \xi_1 + r_1 e_0), \quad x_1 = \underbrace{\tilde{x}_1}_{\in \tilde{\Lambda}_2} + \underbrace{\hat{x}_1}_{\in \tilde{\Lambda}_1} \quad \text{et} \quad \xi_1 = \underbrace{\tilde{\xi}_1}_{\in \tilde{\Lambda}_1} + \underbrace{\hat{\xi}_1}_{\in \Lambda'_{1,2}},$$

on calcule

$$\forall \xi' \in \tilde{\Lambda}_2 \subset \Lambda_1,$$

$$\exp(g_1) \exp(\xi') = \exp\left((x_1 + \xi') + \xi_1 + \left(r_1 + \frac{\sigma(\xi_1, \xi')}{2}\right) e_0\right)$$

et

$$\begin{aligned} (9) \quad & \mathcal{F}_{\Lambda'_2 \Lambda'_1} u(\exp(g_1)) \\ &= \int_{\tilde{\Lambda}_2} \tilde{u}(x_1 + \xi') e^{-ir_1/\varepsilon} e^{-(i/2\varepsilon)\sigma(\xi_1, x_1 + 2\xi')} d\lambda_{1,2}^\varepsilon(\xi') \\ &= \int_{\tilde{\Lambda}_2} \tilde{u}(\tilde{x}_1 + \xi', \hat{x}_1) e^{-ir/\varepsilon} e^{i(\sigma(\xi_1, \tilde{x}_1) - \sigma(\xi_1, \hat{x}_1))/2\varepsilon} e^{(i/\varepsilon)\sigma(\xi_1, \tilde{x}_1 + \xi')} d\lambda_{1,2}^\varepsilon(\xi') \\ &= e^{-ir/\varepsilon} e^{i(\sigma(\tilde{\xi}_1, \tilde{x}_1) - \sigma(\xi_1, \hat{x}_1))/2\varepsilon} \int_{\tilde{\Lambda}_2} \tilde{u}(\xi', \hat{x}_1) e^{-i\sigma(\tilde{\xi}_1, \xi')/\varepsilon} d\lambda_{1,2}^\varepsilon(\xi'), \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que  $\tilde{\xi}_1, \tilde{x}_1 + \xi' \in \Lambda_2$ . Dans la dernière égalité,  $\tilde{\Lambda}_1 \times \tilde{\Lambda}_2 : (\tilde{\xi}_1, \xi') \mapsto \sigma(\tilde{\xi}_1, \xi')$  est une forme bilinéaire non dégénérée et donc l'intégrale correspond à une transformée de Fourier partielle dans la variable  $\tilde{x}_1$ .

Vérifions que  $\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u$  appartient à  $\mathcal{H}_{e_{\Lambda'_2}}$ . On décompose  $\xi_2 \in \Lambda'_2$  en

$$\xi_2 = \underbrace{\tilde{\xi}_2}_{\in \tilde{\Lambda}_2 \subset \Lambda_1} + \underbrace{\hat{\xi}_2}_{\Lambda'_{1,2}}$$

et on écrit

$$\begin{aligned} \exp(g_1) \exp(\xi_2) &= \exp\left(x_1 + \xi_1 + \xi_2 + \left(r + \frac{\sigma(x_1 + \xi_1, \xi_2)}{2}\right) e_0\right) \\ &= \exp(\tilde{x}'_1 + \hat{x}'_1 + \tilde{\xi}'_1 + \hat{\xi}'_1 + r' e_0) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_1 &= \tilde{x}_1 + \tilde{\xi}_2, & \hat{x}'_1 &= \hat{x}_1, & \tilde{\xi}'_1 &= \tilde{\xi}_1, & \hat{\xi}'_1 &= \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2, \\ r' &= r + \frac{\sigma(\hat{x}_1 + \tilde{\xi}_1, \xi_2)}{2}. \end{aligned}$$

Comme  $\tilde{\xi}_1$  et  $\hat{x}_1$  ne sont pas changés, il en est de même pour l'intégrale dans (9) dans l'expression de  $\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u(g_1 \exp(\xi_2))$ . Il suffit donc de vérifier

$$\sigma(\tilde{\xi}_1, \tilde{x}_1) - \sigma(\xi_1, \hat{x}_1) - \sigma(\tilde{\xi}'_1, \tilde{x}'_1) + \sigma(\xi'_1, \hat{x}'_1) + \sigma(\hat{x}_1 + \tilde{\xi}_1, \xi_2) = 0.$$

D'une part

$$\sigma(\tilde{\xi}_1, \tilde{x}_1) - \sigma(\tilde{\xi}'_1, \tilde{x}'_1) = -\sigma(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2),$$

d'autre part

$$\sigma(\xi'_1, \hat{x}'_1) - \sigma(\xi_1, \hat{x}_1) = \sigma(\xi_2, \hat{x}_1)$$

et enfin

$$\sigma(\hat{x}_1 + \tilde{\xi}_1, \xi_2) = \sigma(\hat{x}_1, \xi_2) + \sigma(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2).$$

En choisissant

$$\tilde{\xi}_2 = -\tilde{x}_1, \quad \hat{\xi}_2 = -\hat{\xi}_1 \quad \text{et} \quad r_2 = -r' = -r - \sigma(\hat{x}_1 + \tilde{\xi}_1, \xi_2)/2,$$

on voit que  $\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u$  est représentée par la fonction

$$\tilde{u}_2(\tilde{\xi}_1, \hat{x}_1) = e^{-(i/2\varepsilon)\sigma(\tilde{\xi}_1, \hat{x}_1)} \int_{\tilde{\Lambda}_2} \tilde{u}(\xi', \hat{x}_1) e^{-i\sigma(\tilde{\xi}_1, \xi')/\varepsilon} d\lambda_{1,2}^\varepsilon(\xi'),$$

avec

$$\begin{aligned} u_2(\exp(x_1 + \xi_1 + r e_0)) \mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u(\exp(x_1 + \xi_1 + r e_0)) \\ = e^{-ir/\varepsilon + i(\sigma(\tilde{\xi}_1, \tilde{x}_1) - \sigma(\hat{\xi}_1, \hat{x}_1))/2\varepsilon} \tilde{u}_2(\tilde{\xi}_1, \hat{x}_1) \end{aligned}$$

Avec  $\exp(g_1) \exp(\tilde{\xi}') = \exp(x_1 + \xi_1 + \tilde{\xi}' + (r + \sigma(x_1, \tilde{\xi}')/2))$ , et

$$\mathcal{F}_{\Lambda'_1, \Lambda'_2} u_2(g_1) = \int_{\tilde{\Lambda}_1} u_2(g_1 \exp(\tilde{\xi}')) d\lambda_{12}^\varepsilon(\tilde{\xi}')$$

on aboutit à

$$\begin{aligned} & [\mathcal{F}_{\Lambda'_1, \Lambda'_2} \circ \mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u](g_1) \\ &= e^{-ir/\varepsilon} e^{-i\sigma(\tilde{\xi}_1, x_1) + \sigma(\hat{\xi}_1, \hat{x}_1)/2\varepsilon} \tilde{c}u(x_1, \hat{x}_1)^{\sigma(\hat{\xi}_1, \hat{x}_1)=0} cu(g_1) \end{aligned}$$

où  $c > 0$  est forcément égal à 1 par unitarité des transformées de Fourier partielles  $\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1}$  en coordonnée  $\tilde{x}_1$  et  $\mathcal{F}_{\Lambda'_1, \Lambda'_2}$  en coordonnée  $\tilde{x}_2$ . Ainsi  $\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1}$  est bien une transformation unitaire de  $\mathcal{H}_{\varrho_{\Lambda'_1}}$  dans  $\mathcal{H}_{\varrho_{\Lambda'_2}}$ .

L'entrelacement devient maintenant très simple avec

$$\begin{aligned} \varrho_{\Lambda'_2}(g) [\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u](g_1) &= [\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u](g^{-1} g_1) = [\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} u(g^{-1} \bullet)](g_1) \\ &= [\mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} \varrho_{\Lambda'_1}(g) u](g_1). \quad \square \end{aligned}$$

Le problème n'apparaît pas après un unique changement de représentation de Schrödinger, passant dans un sens ou dans l'autre de  $\varrho_{\Lambda'_1}$  à  $\varrho_{\Lambda'_2}$ , comme nous l'avons observé en dimension 1, mais quand on enchaîne 3 transformations. C'est donc lié à une façon de coder la position relative de 3 plans lagrangiens  $\Lambda'_1, \Lambda'_2$  et  $\Lambda'_3$ . De plus un tel codage doit être invariant par transformation symplectique. La définition suivante est due à M. Kashiwara et peut être trouvée accompagnée de diverses propriétés dans [32] et [25].

**Définition 4.6.** À trois plans lagrangiens  $\Lambda'_1, \Lambda'_2$  et  $\Lambda'_3$  de l'espace symplectique  $(V, \sigma)$ , on associe le signe  $\tau(\Lambda'_1, \Lambda'_2, \Lambda'_3) := p - q \in \mathbb{Z}$  de la forme quadratique de signature  $(p, q)$  :

$$Q(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) = \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, x_3) + \sigma(x_3, x_1)$$

définie sur  $\Lambda'_1 \times \Lambda'_2 \times \Lambda'_3$ .

À partir de là on montre (nous ne le ferons pas ici) :

**Proposition 4.7.** Pour trois plans lagrangiens  $\Lambda'_1, \Lambda'_2, \Lambda'_3$  de  $V$  on a

$$\mathcal{F}_{\Lambda'_1, \Lambda'_3} \mathcal{F}_{\Lambda'_3, \Lambda'_2} \mathcal{F}_{\Lambda'_2, \Lambda'_1} = e^{-(i\pi/4)\tau(\Lambda'_1, \Lambda'_2, \Lambda'_3)}.$$

Ensuite (et cela vient d'une propriété de cocycle de  $\tau$  pour 4 plans lagrangiens) on construit le groupe  $\tilde{G}_{\Lambda'_0} = \mathrm{Sp}(V) \times \mathbb{Z}$  associé à un plan lagrangien  $\Lambda'_0$  avec pour loi de composition

$$(L_1, n_1) \circ (L_2, n_2) = (L_1 L_2, n_1 + n_2 + \tau(\Lambda'_0, L_1(\Lambda'_0), L_1 L_2(\Lambda'_0))).$$

Ce groupe a une structure de groupe de Lie et admet une représentation unitaire  $\varrho$  dans  $\mathcal{H}_{\Lambda'_0}$  telle que pour tout  $(v, r) \in V \times \mathbb{R}$ , on ait

$$\varrho(L, n) \varrho_{\Lambda'_0}(\exp(v + r_0)) \varrho(L, n)^{-1} = \varrho_{\Lambda'_0}(\exp(Lv + r e_0))$$

et  $\varrho(\mathrm{Id}_V, n) \in e^{i\pi\mathbb{Z}/4}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Si on note  $\tilde{\mathcal{L}} = \{(\Lambda', n) \mid \Lambda' \subset V \text{ lagrangien}, n \in \mathbb{Z}\}$ , le groupe  $\tilde{G}_{\Lambda'_0}$  agit sur  $\tilde{\mathcal{L}}$  par

$$(L, n) \cdot (\Lambda', m) = (L(\Lambda'), n + m + \tau(\Lambda'_0, L(\Lambda_0)), L(\Lambda'))$$

et la quantité définie sur  $\tilde{\mathcal{L}} \times \tilde{\mathcal{L}}$  par

$$m_{\Lambda'_0}((\Lambda'_1, m_1), (\Lambda'_2, m_2)) = m_1 - m_2 + \tau(\Lambda'_0, \Lambda'_1, \Lambda'_2)$$

est invariante par l'action de  $\tilde{G}_{\Lambda'_0}$ . C'est ce que l'on appelle *l'indice de Maslov* (ou de Keller-Maslov dans certains textes).

En travaillant un peu plus sur l'orientation des plans lagrangiens (si on revient sur l'exemple de dimension 1, nous n'avons pas distingué les angles  $\pi/2$  et  $3\pi/2$ ), on montre que  $\varrho(\tilde{G}_{\Lambda'_0})$  a 4 composantes connexes avec des règles de multiplications par  $e^{i\pi/4}$ , ou de décalage dans les  $n \in \mathbb{N}$  qui assurent que la composante de  $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_{\Lambda'_0}}$  est le groupe métaplectique revêtement à 2 feuillets de  $\mathrm{Sp}(V, \sigma)$ . Si on ne veut pas suivre tous ces indices, la règle la plus simple du groupe métaplectique est donc

$$U_L \circ U_{L'} = \pm U_{LL'},$$

mais déterminer le  $+$  ou  $-$  nécessite de suivre les racines huitième de l'unité  $e^{i\pi/4n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 5. La révolution microlocale

La preuve que nous avons donnée du théorème de Stone-von Neumann conduit très vite à la quantification des transformations symplectiques affines et nous aurions pu même éviter les discussions sur l'indice de Maslov, données par souci de complétude. Elle contient

également le produit de Moyal dont l'étude asymptotique donne des outils de localisation par partition de l'unité dans l'espace des phases  $V = \mathbb{R}_{x,\xi}^{2d}$ . On est donc dans la même situation que celle de la construction du calcul différentiel sur les variétés, reposant sur une bonne compréhension des structures linéaires et des procédés de localisation. Avant de préciser ces choses et pour suivre un fil historique, nous rappelons le principe d'incertitude et présentons les approximations BKW pour la mécanique ondulatoire. Le titre de ce paragraphe, qui peut intriguer, fait référence à un basculement conceptuel parfaitement daté : Il s'agit du congrès international des mathématiciens à Nice en 1970 avec

- l'exposé de M. Sato [40] sur l'approche algébrique des singularités analytiques dans le cadre complexe et ses petits dessins pour illustrer sa compréhension de ce qu'on appelle maintenant le *front d'onde* ;
- le programme résumé par L. Hörmander dans [23] pour développer la géométrie  $C^\infty$  des équations aux dérivées partielles.

Mais laissons la parole à l'un des principaux acteurs de ce changement de point de vue, L. Hörmander, dans son article fondateur sur la théorie des Fourier intégraux publié la même année [22] :

« *The purpose of the present paper is not to extend the more or less formal methods used in geometrical optics but to extract from them a precise operator theory which can be applied to the theory of partial differential equations.* »<sup>(3)</sup>

Comme nous le verrons à la fin, ces idées issues de la mécanique quantique une fois bien généralisées, sont revenues récemment pour traiter finement des problèmes de *mécanique classique*.

**5.1. Principe d'incertitude.** On a donc vu que le principe de correspondance de la mécanique quantique est finalement un théorème mathématique. Il en est de même et de façon encore plus élémentaire pour le principe d'incertitude, autre aspect parfois mis en avant

---

<sup>(3)</sup>Trad : Le but du présent article n'est pas de développer les méthodes plus ou moins formelles de l'optique géométrique mais d'en extraire une théorie précise des opérateurs qui peut être appliquée à la théorie des équations aux dérivées partielles.

dans la présentation de la mécanique quantique. Prenons une fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_q^d)$  telle que  $\|\psi\|_{L^2} = 1$  et notons

$$\begin{aligned}\langle q \rangle_\psi &= \langle \psi, q\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} q |\psi(q)|^2 dq \\ \langle p \rangle_\psi &= \langle \psi, p\psi \rangle = \langle \psi, \varepsilon D_q \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} p |\mathcal{F}_\varepsilon(\psi)|^2(p) dp / (2\pi\varepsilon)^d,\end{aligned}$$

les valeurs moyennes de la position (resp. de moment) pour la mesure de probabilité de densité  $|\psi|^2(q)$  (resp.  $(2\pi\varepsilon)^{-d} |\mathcal{F}_\varepsilon\psi|^2(p)$ ). Avec

$$\tilde{p} = p - \langle p \rangle_\psi \text{Id}_{L^2} \quad \text{et} \quad \tilde{q} = q - \langle q \rangle_\psi \text{Id}_{L^2},$$

on voit que

$$\|\tilde{q}\psi\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |q - \langle q \rangle_\psi|^2 |\psi(q)|^2 dq \right)^{1/2}$$

s'interprète comme l'écart type  $\Delta_\psi q$  et il en est de même pour  $\Delta_\psi p = \|\tilde{p}\psi\|_{L^2}$ . En utilisant

$$i[\tilde{p}, \tilde{q}] = \varepsilon[\partial_q, q] = \varepsilon \text{Id}_{L^2},$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$2\Delta_\psi p \Delta_\psi q \geq |\langle \tilde{p}\psi, \tilde{q}\psi \rangle - \langle \tilde{q}\psi, \tilde{p}\psi \rangle| = |\langle \psi, i[\tilde{p}, \tilde{q}]\psi \rangle| = \varepsilon.$$

Ainsi les concentrations simultanées d'une fonction  $\psi$  en un point et de sa transformée de Fourier sont limitées par le principe d'incertitude.

Ce n'est pas uniquement de la mécanique quantique. Cela peut se comprendre graphiquement : pour identifier précisément une période d'une fonction oscillante, il faut une plage contenant suffisamment d'oscillations.

C'est aussi accessible à l'oreille : un signal sonore avec les variables de temps  $t$  (en seconde) et de fréquence  $\tau$  (en Herz =  $s^{-1}$ ), le paramètre étant tout simplement  $\varepsilon = 1/2\pi$ . Une variation d'un demiton correspondant à la multiplication par  $2^{1/12}$ , partant d'une fréquence  $\tau$  on a  $\Delta\tau = (2^{1/12} - 1)\tau$  et le principe d'incertitude nous dit  $\Delta t \geq 1/(4\pi \times (2^{1/12} - 1)\tau) \simeq 1/0,747\tau$  est le temps minimal pour distinguer ces variations de fréquence. Ainsi plus on est dans les notes graves (basses fréquences) plus il nous faut du temps pour identifier

des variations d'un demi-ton. La fréquence la plus basse sur un piano (la touche la plus à gauche qui correspond à un LA 4 octaves en dessous du LA-440Hz) est 27,5Hz et on trouve alors  $\Delta t \geq 1/20s$ , laps de temps pas très éloigné de ce que peut atteindre un pianiste assez agile, tandis que pour le LA-440Hz on trouve  $\Delta t \geq 1/330s$ .

Si on veut faire le lien avec les aspects spatiaux, le fait que les sons aigus soient plus directifs que les sons graves est encore un effet du principe d'incertitude. Avec une vitesse du son de  $340ms^{-1}$ , une fréquence de 20 Hz (limite basse audible) correspond à une longueur d'onde de 17m tandis qu'une fréquence de 20 000 Hz (limite haute audible) correspond à une longueur d'onde de 17mm.

Revenons à des aspects mathématiques : En dimension 1, les valeurs propres de l'oscillateur harmonique  $O = (p^2 + q^2)/2 = (-\varepsilon^2 \partial_q^2 + q^2)/2$  valent  $\varepsilon(n + 1/2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $O - \varepsilon/2 \geq 0$ . Classiquement la fonction  $p^2 + q^2 - \varepsilon/2$  prend des valeurs négatives dans l'espace des phases  $\mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p$  mais cela correspond au disque dans lequel  $\Delta_q \times \Delta_p \leq \varepsilon/2$ , qui ne permet pas de placer une fonction.

Cette interprétation géométrique dans l'espace des phases du principe d'incertitude, est un point important de l'analyse harmonique : (1) d'une part cela donne des inégalités ; (2) d'autre part cela indique les limitations à des découpages géométriques de l'espace des phases. C. Fefferman a poussé très loin ce point de vue géométrique et nous renvoyons à son texte programmatique [16].

**5.2. AM-FM.** L'approximation BKW (ou WKB pour les anglosaxons), dont l'acronyme rappelle les trois auteurs indépendants Brillouin [12], Kramers [28] et Wentzel [50] (1926), consiste à chercher une solution approchée de l'équation de Schrödinger

$$i\varepsilon \partial_t \psi^\varepsilon = [-\varepsilon^2 \Delta_q + V(q)]\psi, \quad \psi^\varepsilon(t=0) = \psi_0^\varepsilon,$$

sous la forme

$$\psi_{\text{app}}^\varepsilon(t) = e^{iS(t,q)/\varepsilon} a(t, q, \varepsilon), \quad a(t, q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n a_n(t, q) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

En mettant cette approximation dans l'équation de Schrödinger on obtient

$$i\varepsilon\partial_t a - (\partial_t S)a = -\varepsilon^2\Delta_q a - 2i\varepsilon\partial_q S \cdot \partial_q a - i\varepsilon(\Delta_q S)a + (|\partial_q S|^2 + V(q))a$$

et en identifiant les termes selon les puissances de  $\varepsilon$ , on obtient d'abord, à l'ordre 0, l'équation de Hamilton-Jacobi

$$-\partial_t S - |\partial_q S|^2 - V(q) = 0, \quad S(0, q) = S_0(q)$$

qui fait le lien avec la mécanique classique,  $S(t, q)$  s'interprétant comme une action ([1], [3], [17]).

Une fois  $S(t, q)$  connue, les termes d'ordre  $> 0$  donnent la suite d'équations de transport

$$\begin{cases} \partial_t a_k = -2\partial_q S \cdot \partial_q a_k - \Delta_q^2 S a_k + i\Delta_q a_{k-1} \\ a_k(t=0, q) = a_{k,0}(q) \end{cases}$$

que l'on résout par la méthode des caractéristiques avec  $a_{-1} = 0$ .

L'application de cette méthode à l'équation des ondes et aux équations de l'électromagnétisme est apparemment intervenue plus tard (le livre [7] de M. Born date de 1933). Dans le cas de l'équation des ondes, le flot hamiltonien sous-jacent est le flot géodésique. L'approximation BKW est parfois appelée approximation de l'optique géométrique et fait donc le lien entre description ondulatoire et géométrie des rayons lumineux (vaste débat depuis Snell, Descartes, Fermat et Huygens). Expérimentalement du point de vue physique ou numérique, on sait que ces approximations (bien faites) donnent des résultats très pertinentes à partir de  $\varepsilon \leq 1/3$ , i.e., 3 longueurs d'onde par unité de longueur caractéristique.

Arrêtons-nous un instant sur le sens de cette approximation BKW. Une fonction d'onde  $\psi^\varepsilon(x)$  (avec  $x = (t, q)$  ou  $x = q$  en régime stationnaire) étant définie à une constante de module 1 près, son approximation autour d'un point  $x_0$  est donnée par

$$\tilde{\psi}^\varepsilon(x) = e^{iS(x_0)/\varepsilon} \left[ e^{i(S(x)-S(x_0))/\varepsilon} a(x, \varepsilon) \right].$$

Pour  $x$  proche de  $x_0$  on a donc une amplitude  $a(x)$  proche de  $a(x_0)$  et une fréquence  $(S(x) - S(x_0))/\varepsilon$  proche de  $k_0 \cdot (x - x_0)/\varepsilon = dS(x_0) \cdot (x - x_0)/\varepsilon$ . Cela signifie que l'approximation BKW consiste

essentiellement à reprendre l'analyse en ondes planes  $a_0 e^{ik_0 \cdot (x-x_0)/\varepsilon}$  en modulant l'amplitude (bouton AM sur un poste de radio) et la fréquence (bouton FM) par rapport à la position  $x$ , « modulation » signifiant des variations lentes par rapport à l'échelle  $\varepsilon$ .

On peut décrire cela dans l'espace des phases  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$  : un signal de type BKW et porté géométriquement par

$$\Lambda_S = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d} \mid \xi = \partial_x S(x)\}$$

qui, en supposant  $S \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_x^d)$ , décrit une variété lagrangienne, à savoir celle définie par les équations

$$d(dS \wedge dx) = \sum_{i,j} \partial_{x_i x_j}^2 S(x) dx_i \wedge dx_j = 0,$$

qui se projette bien sur l'ensemble  $\mathbb{R}_x^d$  par  $(x, \partial_x S(x)) \mapsto x$ .

On est ainsi appelé à travailler dans l'espace des phases et considérer la géométrie de cet espace. Si  $x = t$  est une variable temporelle, se placer dans l'espace temps-fréquences, n'est pas une nouveauté : depuis des temps immémoriaux les musiciens évoluent dans cet espace et une partition de musique (l'écriture occidentale de la musique remontant à Guido d'Arezzo 993-1033) code cet espace avec comme abscisse le temps et comme ordonnée la fréquence (en échelle logarithmique).

Pour une application assez récente de cette idée, on peut penser aux ondelettes qui après des travaux précurseurs de A. Haar, D. Gabor on été développées de façon plus systématique par J. Morlet, A. Grossmann, Y. Meyer et I. Daubechies dans les années 1980 avant d'envahir les outils de traitement du signal et de codage de l'information (format JPEG 2000 par exemple). La discrétisation d'une fonction aux variations rapides conduit à une grande complexité, mais la localisation position-fréquence dans l'espace des phases peut réduire ce coût numérique avec une géométrie plus facilement codable dans l'espace des phases. Les bases d'ondelettes sont des méthodes numériques astucieuses pour discrétiser l'espace des phases.

Dernier point : le paramétrage d'une variété lagrangienne sous la forme

$$\{(x, \partial_x S(x)) \mid x \in \mathbb{R}^d\}$$

dans l'espace des phases  $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d$  est possible quand cette variété lagrangienne se projette bien sur  $\mathbb{R}_x^d$  (c'est même une équivalence localement par le théorème des fonctions implicites). Or il peut arriver que la variété lagrangienne ait des directions tangentes à  $\mathbb{R}_\xi^d$  en certains points. C'est ce qu'on appelle le *phénomène des caustiques*, qui crée mathématiquement une impossibilité à résoudre globalement les équations de Hamilton-Jacobi, et qui en pratique s'observe dans la concentration des rayons lumineux après réflexion sur un miroir concave ou traversée d'une lentille convergente (« caustique » faisant référence au point brûlant et aux activités militaires d'Archimède selon la légende). Dans l'espace des phases, ce peut être une fausse singularité dans le sens où il suffit de changer le plan lagrangien  $\mathbb{R}_\xi^d$ . C'est en étudiant le prolongement au delà des caustiques des approximations BKW que Maslov a introduit l'indice qui porte son nom, une première étude topologique ayant été développée par V. Arnold [2].

**5.3. Analyse microlocale et semi-classique.** Les principes de l'analyse microlocale et semi-classique peuvent se résumer ainsi : la géométrie des équations aux dérivées partielles se comprend dans l'espace des phases,  $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d$  si l'EDP est posée dans  $\mathbb{R}_x^d$  ou plus généralement l'espace cotangent  $T^*M$  si l'EDP est posée sur la variété  $M$ . Par exemple si on prend un opérateur différentiel  $P(x, \varepsilon D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (\varepsilon D_x)^\alpha$ , avec toujours  $D_j = -i\partial_{x_j}$ , on peut chercher une approximation BKW des solutions en résolvant d'abord l'équation de Hamilton-Jacobi  $P(x, \partial_x S) = 0$  puis les équations de transport en partant d'une hypersurface. Autre idée sous-jacente : tout ce que l'on sait faire sur des opérateurs différentiels à coefficients constants par analyse de Fourier se transpose à des opérateurs à coefficients variables par modulation des fréquences et des amplitudes.

Les deux variantes

- microlocale : étude des singularités d'une fonction ou distribution à la fois en position et fréquence,
- et semi-classique : comportement asymptotique en présence d'un petit paramètre  $\varepsilon$ ,

sont extrêmement liées : l'étude des singularités ou de la régularité de solution d'une EDP consiste à regarder ce qui se passe quand

la variable de fréquence  $\xi$  tend vers  $\infty$ , et il suffit alors de prendre comme paramètre  $\varepsilon = 1/|\xi|$  pour faire le lien avec le semi-classique. En théorie de la diffusion on s'intéresse à  $x \rightarrow \infty$  et  $\varepsilon = 1/|x|$  (cf. [14], [24, Chap. XIV & XXX]).

Pour suivre la présentation de ce texte nous resterons dans le cadre semi-classique  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

L'analyse microlocale repose sur deux piliers : (1) le calcul pseudo-différentiel qui permet des localisations dans l'espace des phases et qui apparaît dans la démonstration du théorème de Stone-Von Neumann ; (2) les opérateurs de Fourier intégraux associés à des transformations symplectiques qui permet des déformations géométriques dans l'espace des phases et dont la version linéaire a été présentée dans le paragraphe sur l'indice de Maslov. Ainsi l'exposé mathématique fait ici donne la version linéarisée qui est à l'analyse microlocale et semi-classique ce que sont les partitions de l'unité et l'algèbre linéaire à la géométrie différentielle.

Le calcul pseudo-différentiel associe à un symbole, c'est-à-dire une fonction  $f(x, \xi; \varepsilon)$  sur l'espace des phases  $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d$  (plus généralement  $T^*M$ ), éventuellement paramétrée par  $\varepsilon > 0$ , un opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}_x^d)$  (plus généralement  $L^2(M)$ ). Nous avons rencontré la quantification de Weyl dans (4) et (5) donnée par

$$\begin{aligned} f^{\text{Weyl}}(x, \varepsilon D_x)u(x) &= W_{\varrho_S}(f)u(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\xi \cdot (x-y)/\varepsilon} f((x+y)/2, \xi)u(y) \frac{d\xi}{(2\pi\varepsilon)^d} dy, \end{aligned}$$

pour laquelle la composition se traduit pas le produit de Moyal

$$f_1 \#^\varepsilon f_2 = e^{(i\varepsilon/2)\sigma(D_{v_1}, D_{v_2})} f_1 \otimes f_2 \Big|_{v_1=v_2=v}$$

qui agit bilinéairement continûment de  $S(\mathbb{R}^{2d}) \times S(\mathbb{R}^{2d})$  dans  $S(\mathbb{R}^{2d})$ . Si on utilise la transformée de Fourier symplectique pour  $\varepsilon = 1$ ,  $\widehat{f}^{\varepsilon=1}(x, \xi) = [(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^{-1})f](\xi, x)$  on voit que la continuité

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &\longmapsto f_1 \otimes f_2 \longmapsto \widehat{f_1 \otimes f_2}^{\varepsilon=1} \longmapsto e^{(i\varepsilon/2)\sigma(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)} \widehat{f_1}^{\varepsilon=1}(\widehat{v}_1) \widehat{f_2}^{\varepsilon=1}(\widehat{v}_2) \\ &\longmapsto e^{(i\varepsilon/2)\sigma(D_{v_1}, D_{v_2})} f_1 \otimes f_2 \longmapsto f_1 \#^\varepsilon f_2 \end{aligned}$$

est uniforme par rapport au paramètre  $\varepsilon \in (0, 1)$ . De plus le développement de Taylor avec reste intégral de l'exponentielle

$$e^{is} = \sum_{k=0}^N \frac{(is)^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} e^{its} dt (is)^{N+1}$$

utilisé avec  $s = (\varepsilon/2)\sigma(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)$  et l'uniformité par rapport à  $t \in [0, 1]$  conduit à

$$f_1 \#^\varepsilon f_2 = \sum_{k=0}^N \frac{\varepsilon^k}{k!} \left( \frac{i}{2} \sigma(D_{v_1}, D_{v_2}) \right)^k f_1 \otimes f_2 \Big|_{v_1=v_2=v} + \varepsilon^{N+1} R_N(f_1, f_2, \varepsilon),$$

tous les termes, y compris  $R_N(f_1, f_2, \varepsilon)$ , étant uniformément continus par rapport à  $\varepsilon \in (0, 1)$ , bilinéaires continus de  $S(\mathbb{R}^{2d}) \times S(\mathbb{R}^{2d})$  dans  $S(\mathbb{R}^{2d})$ . On a donc un développement asymptotique en puissance de  $\varepsilon$  du produit de Moyal qui donne

- à l'ordre 0 :

$$f_1 \#^\varepsilon f_2 = f_1 f_2 \text{ mod } \varepsilon$$

- à l'ordre 1 :

$$f_1 \#^\varepsilon f_2 = f_1 f_2 + \frac{\varepsilon}{2i} \{f_1, f_2\} \text{ mod } \varepsilon^2$$

où  $\{f_1, f_2\} = \partial_\xi f_1 \cdot \partial_x f_2 - \partial_x f_1 \cdot \partial_\xi f_2$  désigne le crochet de Poisson, faisant encore un lien avec la mécanique classique, le terme d'ordre 0 du commutateur  $(i/\varepsilon)[f_1^{\text{Weyl}}, f_2^{\text{Weyl}}]$  est  $(\{f_1, f_2\})^{\text{Weyl}} \text{ mod } \varepsilon$ .

On peut étendre la classe de symboles  $f(x, \xi)$  pour lesquels la formule de composition est encore valable avec estimation des restes dans les développements asymptotiques. Par exemple on peut considérer les fonctions  $C^\infty$  avec toutes les dérivées bornées, muni des semi-normes

$$p_n(f) = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^{2d} \\ |\alpha| \leq n}} |\partial_v^\alpha f(v)|,$$

le reste  $R_N(f_1, f_2, \varepsilon)$  satisfaisant à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m_{N,n} \in \mathbb{N}, \exists C_{N,n} > 0, \forall \varepsilon \in (0, 1),$$

$$p_n(R_N(f_1, f_2, \varepsilon)) \leq C_{N,n} p_{m_{N,n}}(f_1) p_{m_{N,n}}(f_2).$$

Pour une telle estimation et compte tenu de la remarque sur l'uniformité par rapport à  $\varepsilon t$  dans le reste intégral, il suffit de comprendre la continuité bilinéaire de

$$e^{(i\varepsilon/2)\sigma(D_{v_1}, D_{v_2})}(f_1 \otimes f_2)|_{v_1=v_2=v} = \overline{e^{(i/2\varepsilon)\sigma(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)} \widehat{f}_1 \otimes \widehat{f}_2}|_{v_1=v_2=v},$$

uniformément par rapport à  $\varepsilon \in (0, 1)$  dans  $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ . Cette dernière propriété s'obtient, après décomposition  $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} f \chi(\cdot - v_j)$  où  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \chi(\cdot - v_j) \equiv 1$  est une partition de l'unité  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ , par des arguments de phase non stationnaire dans les intégrales oscillantes obtenues en explicitant le dernier membre, cela afin de contrôler les semi-normes de  $(f_1 \chi(\cdot - v_i)) \#^\varepsilon (f_2 \chi(\cdot - v_j))$  par  $(1 + |v_i - v_j|)^{-N}$  avec  $N \in \mathbb{N}$  arbitraire.

Avec ce type de calcul que l'on peut généraliser à des algèbres de fonctions plus riches (par exemple contenant les polynômes en  $\xi$  pour inclure les opérateurs différentiels), on voit

- que pour deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$  et de support disjoints  $f_1 \#^\varepsilon f_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$ ;
- qu'un symbole  $f = f_0 + \varepsilon f_1(\varepsilon)$  tel que  $f_0$  ne s'annule pas (et  $f_1(\varepsilon)$  uniformément borné dans  $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ ), admet pour  $\varepsilon$  assez petit un inverse approché à droite (inverser l'ordre pour avoir un inverse à gauche) à tout ordre en écrivant  $f \# \frac{1}{f}(v, \varepsilon) = 1 - \varepsilon r(v, \varepsilon)$ ,

$$\sum_{k=0}^N \varepsilon^k \underbrace{r(\varepsilon) \#^\varepsilon \cdots \#^\varepsilon r(\varepsilon)}_{k \text{ fois}}$$

fournissant un inverse approché à droite (et à gauche) à l'ordre  $N + 1$  de  $(1 - \varepsilon r(\varepsilon))$  pour  $\#^\varepsilon$ .

Ces choses sont à la base de la microlocalisation, c'est-à-dire la localisation de l'analyse dans l'espace des phases et de l'inversion microlocale des opérateurs elliptiques (dans un cadre plus général que l'exemple semi-classique présenté ici). Le calcul symbolique (en terme de produit de Moyal) est complété par le théorème de Calderón-Vaillancourt qui dit ici

$$\|f^{\text{Weyl}}(x, \varepsilon D_x)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_d p_{N_d}(f)$$

avec  $C_d$  et  $N_d$  déterminés par la dimension  $d$ . Ce théorème repose sur le lemme de Cotlar-Klapp-Stein

$$\max\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \|A_i^* A_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{1/2}, \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \|A_i^* A_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{1/2}\right) \leq M$$

$$\implies \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}} A_j \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M,$$

après une décomposition

$$f^{\text{Weyl}} = \sum_{j \in \mathbb{N}} [f \chi((v - \sqrt{\varepsilon} v_j)/\sqrt{\varepsilon})]^{\text{Weyl}}$$

à l'aide d'une partition de l'unité

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \chi(\cdot - \sqrt{\varepsilon} v_j) \equiv 1, \quad \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2d}).$$

Là encore ce résultat se généralise pour des algèbres de symboles plus riches, les opérateurs bornés dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  correspondant, en simplifiant, à la sous-classe des symboles bornés.

Les déformations géométriques sont faites à l'aide d'opérateurs intégraux de Fourier de la forme

$$[J(a, \varphi)u](x) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(\varphi(x, \eta) - y \cdot \eta)/\varepsilon} a(x, \eta) u(y) \frac{d\eta}{(2\pi\varepsilon)^d} dy$$

avec  $\varphi$  réelle,  $\partial_{x, \eta}^2 \varphi$  inversible sur le support de  $a$ . On vérifie alors

$$J(a, \varphi) f^{\text{Weyl}} J(a, \varphi)^*$$

$$= \left[ (f \circ \kappa_\varphi^{-1})(x, \xi) \times \frac{|a|^2(x, \eta(x, \xi))}{|\det[\partial_{x, \eta} \varphi(x, \eta(x, \xi))]|} + \varepsilon R(a, f, \varepsilon) \right]^{\text{Weyl}},$$

$R(a, f, \varepsilon)$  étant borné uniformément par rapport à  $\varepsilon \in (0, 1)$ , dans la classe de symboles de  $f$  sous les bonnes hypothèses. L'application  $\kappa_\varphi : (\partial_\eta \varphi, \eta) \mapsto (x, \partial_x \varphi)$  est une transformation symplectique, qui est linéaire quand  $\varphi$  est quadratique en  $(x, \xi)$ . Dans ce dernier cas avec  $a = 1$ , la formule est exacte comme nous l'avons vu à l'aide du théorème de Stone-Von Neumann au paragraphe 4.1. Le facteur  $|a|^2/|\det \partial_{x, \eta}^2 \varphi|$  fait intervenir  $\eta(x, \xi) = \partial_x \varphi(x, \cdot)^{-1}(\xi)$  bien défini sous les bonnes hypothèses qui peuvent être plus ou moins techniques.

Mais microlocalement la situation où  $\varphi$  est quadratique et  $a \equiv 1$  permet de comprendre pas mal de choses.

Ce cas des transformations symplectiques linéaires joue un rôle d'ailleurs dans l'étude des classes générales de symboles introduites par Hörmander dans [24, Chap. XVIII] (voir aussi [6], [31]) après des travaux précurseurs de Beals [4], Beals-Fefferman [5], Unterberger [46] et Voros [48].

Des transformations symplectiques particulières sont associées aux changements de variables en  $x = \psi^{-1}(y)$ , pour lesquels on prend la phase  $\varphi(x, \xi) = \psi(x) \cdot \xi$  et la transformation symplectique

$$\kappa_\varphi : (\psi(x), \xi) \longmapsto (x, {}^t[D\psi_x]\xi),$$

qui est la traduction du changement de variable dans l'espace cotangent. Cela assure que le calcul semi-classique (pseudo-différentiel local en  $x$  autorisant  $\xi \rightarrow \infty$ ) a un sens sur une variété différentielle, la géométrie se comprenant dans l'espace cotangent  $T^*M$ . Avec la localisation par le calcul pseudo-différentiel et des opérateurs Fourier intégraux pour faire des transformations géométriques, on ramène l'étude d'EDP générales à des modèles algébriques ou géométriques simples et on peut classifier leurs propriétés mathématiques. Quelques exemples :

- un opérateur elliptique est un opérateur dont le symbole principal (le premier terme dans un développement asymptotique en puissance de  $\varepsilon$  ou de  $1/|\xi|$ ) est inversible dans sa classe. Exemples :

- le laplacien  $-\Delta$  de symbole  $|\xi|^2$ ,
- l'opérateur  $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$  de symbole  $(\xi + i\eta)/2$ ,
- plus généralement un opérateur  $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$  avec les  $a_\alpha \in \mathcal{C}_b^\infty$  et  $|P(x, \xi)| \geq \frac{1}{C}|\xi|^m$  pour  $|\xi| \geq C$ .

- Un opérateur de type principal réel est un opérateur de symbole principal réel  $P(x, \xi)$ , dont la différentielle ne s'annule pas le long de la variété caractéristique  $P^{-1}(\{0\})$ . Dans ce cas il y a le phénomène de propagation des singularités dans la variété caractéristique, le long du flot hamiltonien associé à  $P$ , i.e., le long des solutions des équations de Hamilton

$$\dot{x} = \partial_\xi P(x, \xi), \quad \dot{\xi} = -\partial_x P(x, \xi).$$

Dans un cadre non semi-classique et l'asymptotique  $\xi \rightarrow \infty$ , le symbole principal est homogène en  $\xi$  et quand on parle de différentielle de  $P(x, \xi)$  qui ne s'annule pas, cela veut dire la différentielle restreinte à la sphère unité en  $\xi$ ,  $\{(x, \xi) \mid |\xi| = 1\}$ . L'exemple le plus simple étant le champ de vecteur  $(1/i)\partial_{x_1}$  de symbole  $\xi_1$  (c'est le modèle simple) et l'autre exemple classique est celui de l'équation des ondes

$$\partial_{x_0}^2 - \Delta_{x'}, \quad x' = (x_1, \dots, x_n)$$

de symbole  $-\xi_0^2 + |\xi'|^2$ .

- Les opérateurs à caractéristique double sont des opérateurs dont la différentielle s'annule avec une hessienne transverse non dégénérée, et pour lesquels travailler avec le symbole principal ne suffit pas.

Ce résumé ainsi fait de l'analyse microlocale visait à montrer le lien avec le théorème de Stone-Von Neumann, à rappeler à la fois l'inspiration issue de la mécanique ondulatoire et l'optique géométrique, et finalement le tournant qui a été pris en 1970. D'autres approches ont été envisagées et développées, notamment sur le calcul pseudo-différentiel. Historiquement le calcul pseudo-différentiel a d'abord été introduit pour inverser des opérateurs elliptiques, en construisant une algèbre de fractions à partir des opérateurs différentiels [27], [47], et résoudre des problèmes avec conditions aux limites [13]. L'action des opérateurs Fourier intégraux sur les opérateurs pseudo-différentiels a été observée par Y. Egorov dans [15] mais l'approche moderne démarre avec [22].

**5.4. Groupes nilpotents et hypoellipticité.** L'ellipticité d'un opérateur  $P(x, D_x) = \sum_{i,j=d} \partial_{x_i} A_{ij}(x) \partial_{x_j}$  avec  $A \geq c \text{Id}_d$  assure qu'une solution  $u$  de  $P(x, D_x)u = f$  a deux crans de régularité de plus que le second membre  $f$  (pour le laplacien écrire  $|\xi|^2 \mathcal{F}_1 u = \mathcal{F}_1 f$ ). Une question qui se pose est de savoir ce qu'il en reste si  $A$  n'est plus définie positive quelque part. Par exemple si on considère

$$\partial_{x_1}^2 u + (x_1 \partial_{x_2})^2 u = f,$$

une transformée de Fourier dans la variable  $x_2$  donne

$$\frac{-\partial_{x_1}^2 + \xi_2^2 x_1^2}{2} \tilde{u} = -\frac{\tilde{f}}{2}$$

où l'on reconnaît l'oscillateur harmonique en  $x_1$  pour lequel la résolution spectrale en terme de fonctions de Hermite donne

$$\left\| \frac{-\partial_{x_1}^2 + \xi_2^2 x_1^2}{2} \tilde{u} \right\|_{L^2} \geq \frac{|\xi_2|}{2} \|\tilde{f}\|_{L^2}.$$

Cette dernière inégalité dit que, bien que le champ de vecteur  $x_1 \partial_{x_2}$  s'annule quand  $x_1 = 0$ , on gagne au moins un ordre de régularité (et non plus deux) dans la direction  $x_2$ .

Dans un théorème célèbre [21] Hörmander montre qu'une somme de carré de champ de vecteurs (opérateurs de dérivation d'ordre 1)  $\sum_{j=1} X_j^2$  satisfait à des propriétés similaires (hypoellipticité, estimations sous-elliptiques) si en tout point  $x$ , il existe un  $r_x \in \mathbb{N}$  tel que l'ensemble des commutateurs itérés

$$X_{(i_1, \dots, i_k)} = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \dots]], \quad k \leq r_x,$$

engendre tout l'espace tangent. Dans l'exemple,

$$X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = x_1 \partial_{x_2} \quad \text{et} \quad [X_1, X_2] = \partial_{x_2}.$$

À partir de développements de Taylor sur les lieux d'annulation des champs de vecteurs

$$X_j = \sum_{k=1}^d a_{j,k}(x) \partial_{x_k},$$

Rotschild et Stein ont montré dans [39] que le modèle algébrique associé à la condition de Hörmander était celui des algèbres de Lie nilpotentes :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^r \mathfrak{g}_i \quad \text{avec} \quad [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_{j+1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{r+1} = 0.$$

Pour une algèbre de Lie nilpotente, on identifie l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et le groupe de Lie connexe  $G$  associé par l'application exponentielle,  $\exp : X \mapsto g = \exp(X)$ . Le groupe de Heisenberg est le cas le plus simple d'une algèbre de Lie nilpotente non abélienne. Les représentations unitaires irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes sont l'objet de la théorie de Kirillov (voir [26], [36]), où la méthode des orbites coadjointes permet de généraliser la représentation de Schrödinger. En fait on peut définir une action  $\kappa$  de  $G$  sur le dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$  par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad [\kappa(\exp X) \cdot \ell](Y) = \ell(\text{Ad}_{\exp(-X)} Y),$$

qui au niveau différentiel donne

$$(\mathrm{ad}_X^* \ell)(Y) = -\ell([X, Y]).$$

On note  $\mathcal{O}^\ell$  l'orbite de  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  par l'action de  $G$ . La forme bilinéaire anti-symétrique  $B^\ell(X, Y) = \ell([X, Y])$  sur  $\mathfrak{g}$  a une version duale sur l'espace tangent en  $\ell$  à  $\mathcal{O}^\ell$  :

$$\sigma_\ell(\mathrm{ad}_X^* \ell, \mathrm{ad}_Y^* \ell) = B^\ell(X, Y)$$

où  $\mathrm{ad}_X^* \ell$  et  $\mathrm{ad}_Y^* \ell$  sont des vecteurs tangents à  $\mathcal{O}^\ell$  au point  $\ell$ . Cela définit une forme symplectique sur  $T\mathcal{O}^\ell$ , invariante par l'action de  $G$ , qui confère à l'orbite  $\mathcal{O}^\ell$  une structure de variété symplectique. La représentation irréductible associée à  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  est alors une variante de la représentation de Schrödinger.

S'appuyant sur la méthode des orbites de Kirillov, et entre autres motivés par la conjecture de Rockland [38], B. Helffer et J. Nourrigat ont donné dans [18] des critères extrêmement précis pour l'hypoellipticité (dite maximale) de polynômes (sans limitation de degré) de champs de vecteurs. Leur méthode qui repose sur la méthode des orbites de Kirillov et des arguments de théorie spectrale, implémente une récurrence sur le rang de nilpotence  $r$  qui via le passage par les représentations irréductibles, peut s'interpréter en coordonnées en écrivant  $X_i = X_i(x_1, \dots, x_d)$  comme une double récurrence sur le rang  $r$  et le nombre de variables  $d$ . La démarche contient également deux choses utiles pour d'autres applications :

- des estimations précises et algébriques en terme de différents jeux de paramètres.
- un algorithme pour vérifier dans des situations purement algébriques, les critères d'hypoellipticité maximale.

D'autres approches ont été développées sur ces problèmes : Hörmander dans [24, Chap. 27] suit une voie plus géométrique ; Malliavin a introduit le calcul qui porte son nom pour donner une version probabiliste du théorème des sommes de carrés ; plus récemment C. Villani a repris des méthodes un peu plus pédestres, non optimales mais plus souples, en vue d'applications à des problèmes non linéaires.

**5.5. Complexification.** Il y a plusieurs raisons pour lesquelles il est nécessaire de faire de l'analyse microlocale dans le domaine complexe :

- Comme on le sait, si la géométrie complexe est un peu moins intuitive au premier abord, l'algèbre est plus simple ou plus naturelle qu'en restant sur le réel.

- Les opérateurs différentiels même réels et même les plus simples ne sont pas tous à symbole réels. Par exemple l'équation de la chaleur  $\partial_t u = \Delta_x u$ ,  $u(t = 0) = u_0$ , fait intervenir l'opérateur différentiel  $\partial_t - \Delta_x$  de symbole  $i\tau + |\xi|^2$ .

- Pour l'instant, et c'est ce qui est mis en avant dans la théorie des représentations, nous avons parlé d'opérateurs unitaires, de groupes unitaires  $U(t) = e^{itA}$  avec  $t \in \mathbb{R}$  et  $A$  auto-adjoint. Mais beaucoup de problèmes d'évolution font intervenir des semi-groupes de contractions  $S(t) = e^{-tL} = e^{it(iL)}$  pour  $t \geq 0$  et  $iL$  non auto-adjoint, à l'instar de l'équation de la chaleur  $u(t) = e^{t\Delta} u_0 = e^{it(i\Delta)} u_0$ .

- Si les méthodes WKB avec phase réelle décrivent bien les phénomènes oscillatoires, on peut être tenté d'utiliser des phases complexes pour décrire précisément des phénomènes de décroissance exponentielle. De tels phénomènes sont très présents en physique ou en mathématiques. On peut penser à la décroissance exponentielle pour des semi-groupes, intervenant dans des problèmes de retour à l'équilibre, ou dans l'étude de la stabilité linéaire de solutions particulières d'équations aux dérivées partielles non linéaires à partir de l'étude de l'EDP linéarisé. Il y a les exposants de Lyapunov dans les systèmes dynamiques. En physique, on peut penser aux oscillations amorties, aux ondes amorties, à l'effet de peau de l'électromagnétisme, à l'effet tunnel de la mécanique quantique, à l'étude des résonances quantiques et plus généralement à l'étude des états métastables (états qui ont une évolution lente par rapport à des échelles de temps « microscopique » et qui suivent une loi de décroissance exponentielle sur une échelle de temps « macroscopique »).

- Rappelons aussi que les phénomènes de diffraction en optique font intervenir la fonction d'Airy pour laquelle les développements asymptotiques, se comprennent bien par la méthode du col de l'analyse complexe.

Une autre motivation historique du passage dans le complexe vient aussi du théorème de Cauchy-Kowalevski qui permet de résoudre des EDPs éventuellement non linéaires en étendant la méthode de résolution des équations différentielles à l'aide de séries entières, et dont une version précisée a été donnée dans le cas linéaire par J. Leray dans [29]. Ce point de vue qui se place d'emblée dans le domaine complexe, met sur un pied d'égalité l'opérateur des ondes  $\partial_{x_0}^2 - \Delta_{x'}$  et le laplacien  $-(\partial_{x_0}^2 + \Delta_{x'})$  alors que l'on sait que les phénomènes observés sont très différents : propagation avec l'équation des ondes, décroissance loin de la source pour l'équation de Poisson. Cela a été pointé par Hadamard au début du XX<sup>e</sup> siècle qui a mis en avant la notion de stabilité des solutions d'équations aux dérivées partielles, celle-ci interdisant la croissance exponentielle des modes de Fourier. Plus précisément dans l'exemple de l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^{1+d}$  avec donnée initiale en  $x_0 = 0$  on passe en Fourier en  $x' = (x_1, \dots, x_d)$  et on voit que la solution s'écrit

$$\mathcal{F}_1 u(x_0, \xi') = A(\xi') e^{ix_0|\xi'|} + B(\xi') e^{-ix_0|\xi'|}.$$

Résoudre l'équation de Poisson avec donnée en  $x_0 = 0$  conduit donc (on passe de l'équation des ondes à l'équation de Poisson en multipliant  $x_0$  par  $i$ ) :

$$\mathcal{F}_1 u(x_0, \xi') = A(\xi') e^{-x_0|\xi'|} + B(\xi') e^{x_0|\xi'|}.$$

La condition de stabilité de Hadamard dit que cela a un sens avec  $A \equiv 0$  pour  $x_0 < 0$  et  $B \equiv 0$  pour  $x_0 > 0$ . Donc, là encore, on voit qu'une analyse pertinente doit prendre en compte des phénomènes de comportement, ici de croissance, exponentiel.

Une fois ces considérations faites, passer dans le complexe (1) requiert de travailler avec des coefficients analytiques (au moins partiellement) et donc de ne pas se contenter de développements asymptotiques, par exemple dans le calcul pseudo-différentiel, mais de préciser une méthode de sommation des séries ; (2) interdit les découpages à l'aide de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact.

L'outil d'analyse repose sur les transformations dites de Fourier-Bros-Iagolnitzer ou FBI, nommées d'après les physiciens J. Bros et D. Iagolnitzer, et les espaces de Sjöstrand, dont la théorie complète a

été posée dans [44] en lien avec d'autres travaux de L. Boutet de Monvel ([10], [9], [11]).

Dans l'esprit de cet exposé, nous resterons dans un cadre de transformations symplectiques linéaires dans  $\mathbb{C}^{2d}$  qui permet déjà d'avoir un aperçu de la géométrie mise en jeu. Démarrer ainsi est d'ailleurs le point de vue pris dans un cours assez récent de Hitrik-Sjöstrand [20].

Tout d'abord on munit  $\mathbb{R}^{2d}$  et  $\mathbb{C}^{2d} \supset \mathbb{R}^{2d}$  de la forme symplectique

$$\begin{aligned} d\xi \wedge dx &= \sum_{j=1}^d d\xi_j \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^d d\xi_j^R \wedge dx_j^R - d\xi_j^I \wedge dx_j^I + i \sum_{j=1}^d d\xi_j^R \wedge dx_j^I + d\xi_j^I \wedge dx_j^R \\ &= \sigma^R + i\sigma^I, \end{aligned}$$

avec  $x = x^R + ix^I$  et  $\xi = \xi^R + i\xi^I$ . On remarque que  $\sigma^R$  et  $\sigma^I$  sont deux formes symplectiques réelles sur  $\mathbb{C}^{2d}$ , que  $\mathbb{R}^{2d}$  est un sous-espace symplectique pour  $\sigma^R$  et lagrangien pour  $\sigma^I$  (on dit  $R$ -symplectique et  $I$ -lagrangien).

Une transformation  $\mathbb{C}$ -linéaire symplectique préserve la forme canonique et donc envoie les sous-espaces réels  $R$ -symplectiques et  $I$ -lagrangiens sur des sous-espaces ayant les mêmes propriétés.

*Les trois phases.* Les outils d'analyse mettent en jeu trois phases intimement liées.

On considère une forme quadratique

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} {}^t x A x + {}^t x B y + \frac{1}{2} {}^t y C y$$

avec  $A$  et  $C$  symétriques, telle que  $\det(\partial_x \partial_y \varphi) = \det(B) \neq 0$  et  $\text{Im } C$  est définie positive.

On pose alors

$$\forall x \in \mathbb{C}^d, \quad \Phi(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^d} \text{Re} [i\varphi(x, y)] = \max_{y \in \mathbb{R}^d} (-\text{Im } \varphi(x, y)).$$

Pour  $x \in \mathbb{C}^d$ , la fonction  $y \mapsto -\text{Im } \varphi(x, y)$  a un unique point critique  $y(x)$  dans  $\mathbb{R}^d$  que l'on note  $y(x)$ . Deux propriétés importantes de cette phase  $\Phi(x)$  sont

- pour  $x \in \mathbb{C}^d$  et  $y \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} \varphi(x, y) &= \Phi(x) - \frac{1}{2} [{}^t(y - y(x))C(y - y(x))] \\ &\leq \Phi(x) - \text{Cte} |y - y(x)|^2, \end{aligned}$$

•  $\Phi$  est *strictement pluri-sousharmonique*. Le caractère pluri-sousharmonique, qui signifie que la forme quadratique de matrice  $(\partial_{\bar{x},x}^2 \Phi)$  est  $\geq 0$ , vient du fait qu'elle est définie comme un sup (max) de fonctions pluri-harmoniques de  $x$ . Le caractère strict (i.e., que la forme quadratique de matrice  $(\partial_{\bar{x},x}^2 \Phi)$  est définie positive) vient du fait que

$$\Lambda_\Phi = \left\{ (x, \frac{2}{i} \partial_x \Phi(x)) \mid x \in \mathbb{C}^d \right\}$$

est l'image de  $\mathbb{R}^{2d}$  par la transformation canonique complexe de

$$\kappa_\varphi : (y, -\partial_y \varphi) \longmapsto (x, \partial_x \varphi),$$

et  $\Lambda_\Phi$  est donc  $R$ -symplectique.

Enfin, écrire  $\Phi(x) = \psi(x, \bar{x})$ , alors que  $E = \{(x, \bar{x}) \mid x \in \mathbb{C}^d\}$  est totalement réel (c'est-à-dire que  $\mathbb{C}^d = E \oplus iE$ ), définit  $\psi(x, y)$  de façon unique comme forme quadratique holomorphe des deux variables  $x, y \in \mathbb{C}^d$ . Tout simplement dans ce cas quadratique

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} {}^t x \Phi''_{xx} x + {}^t \bar{x} \Phi''_{\bar{x},x} x + \frac{1}{2} {}^t \bar{x} \Phi''_{\bar{x},\bar{x}} \bar{x}$$

donne

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} {}^t x \Phi''_{xx} x + {}^t y \Phi''_{\bar{x},x} x + \frac{1}{2} {}^t y \Phi''_{\bar{x},\bar{x}} y.$$

Et cette fonction  $\psi$  satisfait à l'inégalité

$$2 \operatorname{Re} \psi(x, \bar{y}) - \Phi(x) - \Phi(y) = -{}^t(\overline{y - x}) \Phi''_{\bar{x},x} (y - x) \leq -\text{Cte} |y - x|^2.$$

**Exemple.** Avec  $\varphi(x, y) = i((x - y)/2) - ix^2/4$ , on a  $\Phi(x) = |x|^2/4$  et  $\psi(x, y) = {}^t xy/4$ .

*Transformation FBI.* À une phase  $\varphi$  comme ci-dessus on associe la transformation, dite FBI,

$$T_\varphi u(x) = C_\varphi \varepsilon^{-3d/4} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi(x,y)/\varepsilon} u(y) dy.$$

Pour  $C_\varphi > 0$  bien choisie et déterminée par  $\varphi$ ,  $T_\varphi$  est une transformation unitaire de  $L^2(\mathbb{R}^d, dy)$  dans l'espace des fonctions entières

$H_\Phi = L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\Phi(x)/\varepsilon} L(dx)) \cap \text{Hol}(\mathbb{C}^d)$ ,  $L(dx)$  désignant la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^d$ . L'espace  $H_\Phi$  est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{C}^d, e^{-2\Phi(x)/\varepsilon} L(dx))$  et la projection orthogonale sur  $H_\Phi$  s'écrit

$$\Pi_\Phi v(x) = \frac{2^d \det(\psi''_{xy})}{(\pi\varepsilon)^d} \int_{\mathbb{C}^d} e^{2\psi(x,\bar{y})/\varepsilon} v(y) e^{-2\Phi(y)/\varepsilon} L(dy).$$

Les inégalités satisfaites par  $\Phi$  et  $\psi$  assurent la convergence de ces intégrales (au moins pour des  $u$  et  $v$  pris dans des ensembles denses).

Pour un opérateur pseudo-différentiel  $a^{\text{Weyl}}(y, \varepsilon D_y)$  avec  $a \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ , on peut par ailleurs vérifier

$$\begin{aligned} T_\varphi \circ a^{\text{Weyl}}(y, \varepsilon D_y) \circ T_\varphi^* \\ = \Pi_\Phi \left[ (a \circ \kappa_\varphi^{-1})(x, \frac{2}{i} \partial_x \Phi(x)) \times \right] \Pi_\Phi + \mathcal{O}_{\mathcal{L}(H_\Phi)}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Les fonctions  $u \in L^2(\mathbb{R}^d, dy)$  deviennent des fonctions holomorphes  $v = T_\varphi u$  telles que

$$|v(x)| \leq C_v \varepsilon^{-Nd} e^{\Phi(x)/\varepsilon} \leq C_{v,\delta} e^{(\Phi(x)+\delta)/\varepsilon}$$

pour tout  $\delta > 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et l'analyse microlocale devient de l'analyse locale sur l'espace  $R$ -symplectique  $I$ -lagrangien  $\Lambda_\Phi \subset \mathbb{C}^{2d}$  paramétré par  $x \in \mathbb{C}^d \sim \mathbb{R}^{2d}$ . Si l'on pense que c'est le comportement exponentiel par rapport au poids  $e^{\Phi(x)/\varepsilon}$  de  $T_\varphi u_\varepsilon$  qui caractérise le comportement microlocal de  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on dira que  $x$  n'est pas dans le microsupport analytique de  $u$  si il existe  $C, \delta_0 > 0$  tel que  $|T_\varphi u|(x) \leq C e^{(\Phi(x)-\delta_0)/\varepsilon}$ .

Comme dans l'exemple, on prend  $\varphi(x, y) = (i(x-y)^2/2) - ix^2/4$ ,  $\Psi(x) = |x|^2/4$  et  $\psi(x, y) = {}^t xy/4$  avec

$$T_\varphi u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \varepsilon^{3d/4}} e^{x^2/4\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x-y)^2/2\varepsilon} u(y) dy$$

qui est une normalisation possible de la transformée de Bargmann.

Si on prend

$$u_\varepsilon(y) = (\pi\varepsilon)^{-d/4} e^{i\xi_0 \cdot (y-x_0)/2\varepsilon} e^{-(y-x_0)^2/2\varepsilon}, \quad x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d,$$

un calcul simple montre que

$$T_\varphi u_\varepsilon(x) = \frac{e^{2x \cdot \bar{z}_0 - |z_0|^2/4\varepsilon}}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \quad \text{avec } z_0 = x_0 - i\xi_0 = \kappa_\varphi(x_0, \xi_0)$$

et

$$|T_\varphi u_\varepsilon| = \frac{e^{-|x-z_0|^2+|x|^2/4\varepsilon}}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} = \alpha(x, \varepsilon)e^{\Phi(x)/\varepsilon},$$

avec  $\alpha(x, \varepsilon) = 1/(2\pi\varepsilon)^d$  si  $x = z_0$  tandis que  $\alpha(x, \varepsilon) = O(e^{-\delta_x/\varepsilon})$  avec  $\delta_x > 0$  si  $x \neq z_0$ . Ainsi le microsupport analytique de  $u_\varepsilon$  est  $z_0 = x_0 - i\xi_0$ , qui améliore les estimations données par la théorie  $\mathcal{C}^\infty$ .

Pour l'instant les transformations FBI permettent tout juste de traduire l'analyse microlocale réelle sur  $\mathbb{R}_{x,\xi}^{2d}$  en une analyse sur des fonctions holomorphes satisfaisant des inégalités. Mais revenons au problème de départ : étant donnée une équation

$$P(y, \varepsilon D_y)u_\varepsilon = f_\varepsilon$$

avec  $\mathbb{R}^{2d} \ni (y, \eta) \mapsto P(y, \eta)$  analytique réelle, comment tirer profit de cette propriété du symbole  $p$  pour déduire des propriétés de  $u_\varepsilon$  à partir de celles de  $f_\varepsilon$ ? Travaillons avec une fonction  $P \in \text{Hol}(\Omega_M)$ , où  $\Omega_M$  désigne l'ouvert

$$\Omega_M = \{(y, \eta) \in \mathbb{C}^{2d} \mid |\text{Im}(y, \eta)| < M\}$$

qui est bornée sur  $\Omega_{M'}$  pour tout  $M' < M$ . Les inégalités de Cauchy disent que pour  $M' < M$ , il existe  $C > 0$  telle que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall (y, \eta) \in \Omega_{M'}, \quad |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta P(y, \eta)| \leq (C(|\alpha| + |\beta|))^{|\alpha|+|\beta|}.$$

La composition classique (moins symétrique que le produit de Moyal) des opérateurs pseudo-différentiels s'écrit formellement au niveau des symboles

$$P \#^\varepsilon Q \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \frac{(i\varepsilon)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha P(x, \xi) D_x^\alpha Q(x, \xi)$$

où la série est a priori divergente. Ce problème est résolu, ainsi que le fait d'avoir des approximations avec des erreurs  $\mathcal{O}(e^{-c/\varepsilon})$  avec  $c > 0$ , par la méthode de sommation des astronomes (cf. [35], [37]). En version simplifiée, il s'agit d'un exercice assez simple pour un étudiant de prépa, qui pourra comparer les différentes notions s'il a les idées

claires sur la convergence et divergence des séries : si pour tout ordre  $N \in \mathbb{N}$

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varepsilon^k + \varepsilon^N R_N(\varepsilon) \text{ avec } |a_k| \leq (Ck)^k \quad |R_N(\varepsilon)| \leq (CN)^N,$$

alors on a

$$\left| A(\varepsilon) - \sum_{k \leq (C\varepsilon)^{-1}} a_k \varepsilon^k \right| = O(e^{-1/C\varepsilon}).$$

Combinons maintenant ce calcul pseudo-différentiel analytique avec les transformations FBI. Sous les hypothèses précédentes sur  $P$ , et si l'on transpose ce que nous savons sur l'action des transformations symplectiques sur les opérateurs pseudo-différentiels à la version complexe, l'équation  $P(y, \varepsilon D_y)u_\varepsilon = f_\varepsilon$  devient

$$\tilde{P}(x, \varepsilon D_x, \varepsilon)(T_\varphi u_\varepsilon) = (T_\varphi f_\varepsilon),$$

avec  $\tilde{P}(x, \xi, \varepsilon) = p \circ \kappa_\varphi^{-1}(x, \xi) + O(\varepsilon)$ . Maintenant toutes les quantités,  $T_\varphi u_\varepsilon$ ,  $T_\varphi f_\varepsilon$  et  $\tilde{P}$  sont holomorphes par rapport à  $(x, \xi)$  voisin d'un  $(x_0, \xi_0) \in \Lambda_\Phi$ . L'action d'un opérateur pseudo-différentiel sur l'espace  $H_\Phi$  s'étudie à l'aide de la méthode du col. De plus une fois que tout est traduit dans le monde complexe, on peut envisager toutes les techniques de déformation de contour : si on pense que l'appartenance  $v \in H_\Phi$  se traduit par  $v$  holomorphe et  $|v(x)| \leq C_\delta e^{(\Phi(x)+\delta)/\varepsilon}$  pour tout  $\delta$ , que l'analyse avec ces poids exponentiels se localise sur

$$\Lambda_\Phi = \left\{ (x, \frac{2}{i} \partial_x \Phi(x)) \mid x \in \mathbb{C}^d \right\},$$

on peut envisager de déformer le contour lagrangien  $\Lambda_\Phi$  (microlocalement et ce sans changer la fonction  $\varphi$  intervenant dans  $T_\varphi$ ) en un contour  $\Lambda_{\Phi'}$  pourvu que  $\Phi'$  reste strictement pluri-sousharmonique.

Voilà résumées (très rapidement) les idées de l'analyse microlocale analytique.

Ceci m'amène à un autre exemple, qui sollicite tout cet échafaudage d'idées microlocales et d'analyse complexe, et qui pourtant vient de la mécanique classique, fournissant encore une illustration du transfert des idées initiales de la mécanique quantique vers une approche générale des EDPs.

Considérons une particule classique évoluant dans un potentiel  $V(q)$  mais subissant une force de friction bruitée. C'est la description de Langevin du mouvement brownien et l'évolution est donnée par

$$\begin{cases} dq = \frac{p}{m} dt \\ dp = \nabla V(q) dt - \gamma_0 p dt + \frac{\sqrt{2}m\gamma_0}{\beta} dW_t \end{cases}$$

où  $\beta = 1/k_B T$ ,  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  la température,  $\gamma_0$  le coefficient de friction et  $m$  la masse de la particule. Alors l'espérance

$$\mathbb{E}(u_0(q(t), p(t)) | q(0) = q, p(0) = p) = u(q, p, t)$$

résout l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t u + \frac{p}{m} \cdot \partial_q u - \partial_q V(q) \cdot \partial_p u - \gamma_0 \partial_p \cdot \left( \frac{m}{\beta} \partial_p + p \right) u = 0.$$

En posant  $v = e^{-(\beta/2)(p^2/2m + V(q))} u$ , et en se plaçant dans les bons régimes asymptotiques (correspondant essentiellement au régime de basse température) on aboutit à un générateur du semi-groupe d'évolution de la forme

$$p \cdot (\varepsilon \partial_q) - \partial_q V \cdot (\varepsilon \partial_p) + \frac{-\varepsilon^2 \Delta_p + p^2}{2}$$

avec pour symbole semi-classique

$$i(p \cdot \xi_q - \partial_q V(q) \cdot \xi_p) + \frac{\xi_p^2 + p^2}{2},$$

à valeurs complexes sur  $\mathbb{R}_{q,p,\xi_q,\xi_p}^{4d}$  et analytique réel si  $V$  est analytique réelle. Pour étudier finement des phénomènes de métastabilités, ou de thermalisation dans un profil de potentiel  $V$ , avec ces équations, Hérau-Hitrik-Sjöstrand ont obtenu dans [19] avec les outils de l'analyse microlocale analytique, des expressions extrêmement précises sur des quantités mesurables à l'échelle macroscopique. Arrêtons-nous un peu sur ce que cela signifie. On part d'un problème physique observé en dimension  $d = 2$  ou  $3$ ,  $q \in \mathbb{R}^d$ . En suivant Langevin, on le décrit dans l'espace des phases position-quantité de mouvement (ou vitesse),  $(q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$ . On aboutit un opérateur différentiel dont le symbole dépend des variables  $(q, p, \xi_q, \xi_p) \in \mathbb{R}^{4d}$ . Et enfin il faut faire des déformations de contour dans  $\mathbb{C}^{4d} \sim \mathbb{R}^{8d}$ . Imaginer Robert Brown

penché sur son microscope observant pour la première fois le mouvement brownien en 1827 ( $d = 2$ ) et quelques deux siècles plus tard des mathématiciens faire de la géométrie dans  $\mathbb{C}^8 = \mathbb{R}^{16}$  (en fait Hérau-Hitrik-Sjöstrand ont travaillé en dimension quelconque) pour faire des calculs précis sur des problèmes intimement liés, ne manque pas de poésie.

Les esprits chagrins diront « Cette sophistication géométrique est-elle bien nécessaire ? ». Répondons honnêtement « pas toujours » et, suivant les problèmes étudiés ou la structure d'équations aux dérivées partielles particulières, des méthodes plus directes sont parfois plus efficaces. Des problèmes d'équations aux dérivées partielles mettent en jeu d'autres structures mathématiques plus adaptées, s'appuyant plus sur des méthodes variationnelles, des propriétés algébriques, des arguments d'analyse fonctionnelle ou d'analyse harmonique, des descriptions de solutions particulières explicites.

Indiscutablement, cette approche de la géométrie des EDPs qui depuis cinquante ans n'a cessé de montrer son efficacité, fait maintenant partie de la palette des mathématiciens. Soumises à de nouvelles problématiques, ces techniques continuent de s'enrichir et de s'affiner. Par ailleurs au delà de l'interaction naturelle des EDPs soit avec la modélisation soit avec d'autres branches des mathématiques, les notions de microlocalisation, de quantification (associer à une algèbre de fonctions une algèbre d'opérateurs, plus généralement associer par une procédure naturelle une algèbre non commutative à une algèbre commutative, ou encore dans l'esprit semi-classique suivre une famille de structures géométriques ou algébriques en fonction d'un ou plusieurs paramètres), de géométrie symplectique associée à des objets mathématiques variés, ont largement débordé les motifs initiaux de la mécanique quantique et de l'optique géométrique.

**Avertissement.** La bibliographie ci-dessous est forcément incomplète. Les références citées ont été privilégiées avec les critères suivants :

- (a) celles qui pouvaient avoir un intérêt historique pour repérer la chronologie,
- (b) celles qui étaient assez facilement accessibles ou constituaient des ouvrages de références si possible rédigés en français,

(c) celles qui étaient plus particulièrement liées d'une façon ou d'une autre au coeur de l'exposé, à savoir le théorème de Stonevon Neumann et la quantification de la géométrie symplectique affine.

### Références

- [1] R. ABRAHAM & J. E. MARSDEN – *Foundations of mechanics*, 2<sup>e</sup> éd., Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1978.
- [2] V. I. ARNOLD – « On a characteristic class entering into conditions of quantization », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **1** (1967), p. 1–14.
- [3] ———, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Math., vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [4] R. BEALS – « A general calculus of pseudodifferential operators », *Duke Math. J.* **42** (1975), p. 1–42.
- [5] R. BEALS & C. FEFFERMAN – « Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators. I », *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), p. 1–24.
- [6] J.-M. BONY & N. LERNER – « Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur. I », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989), no. 3, p. 377–433.
- [7] M. BORN – *Optik. Ein Lehrbuch der Elektromagnetischen Lichttheorie*, Springer, 1933.
- [8] M. BORN, P. JORDAN & W. HEISENBERG – « Zur Quantenmechanik. II », *Zeitschrift für Physik* **35** (1926), no. 8, p. 557–615.
- [9] L. BOUTET DE MONVEL & V. GUILLEMIN – *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of Math. Studies, vol. 99, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [10] L. BOUTET DE MONVEL & P. KRÉE – « Pseudo-differential operators and Gevrey classes », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **17** (1967), no. fasc. 1, p. 295–323.
- [11] L. BOUTET DE MONVEL & J. SJÖSTRAND – « Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő », in *Journées : Équations aux dérivées partielles (Rennes, 1975)*, Astérisque, vol. 34-35, Société Mathématique de France, Paris, 1976, p. 123–164.
- [12] L. BRILLOUIN – « La mécanique ondulatoire de Schrödinger ; une méthode générale de résolution par approximations successives », *C. R. Acad. Sci. Paris* **183** (1926), p. 24–26.
- [13] J. CHAZARAIN & A. PIRIOU – *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [14] J. DEREZIŃSKI & C. GÉRARD – *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [15] J. V. EGOROV – « The canonical transformations of pseudodifferential operators », *Uspekhi Mat. Nauk* **24** (1969), no. 5, p. 235–236.
- [16] C. L. FEFFERMAN – « The uncertainty principle », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **9** (1983), no. 2, p. 129–206.
- [17] V. GUILLEMIN & S. STERNBERG – *Symplectic techniques in physics*, 2<sup>e</sup> éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [18] B. HELFFER & J. NOURRIGAT – *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Progress in Math., vol. 58, Birkhäuser, Boston, MA, 1985.
- [19] F. HÉRAU, M. HITRIK & J. SJÖSTRAND – « Tunnel effect for Kramers-Fokker-Planck type operators », *Ann. Henri Poincaré* **9** (2008), no. 2, p. 209–274.

- [20] M. HITRIK & J. SJÖSTRAND – « Two minicourses on analytic microlocal analysis », in *Algebraic and analytic microlocal analysis*, Springer Proc. Math. Stat., vol. 269, Springer, Cham, 2018, p. 483–540.
- [21] L. HÖRMANDER – « Hypoelliptic second order differential equations », *Acta Math.* **119** (1967), p. 147–171.
- [22] ———, « Fourier integral operators. I », *Acta Math.* **127** (1971), no. 1-2, p. 79–183.
- [23] ———, « Linear differential operators », in *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 121–133.
- [24] ———, *The analysis of linear partial differential operators. I–IV*, Classics in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [25] M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA – *Sheaves on manifolds*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [26] A. A. KIRILLOV – « Unitary representations of nilpotent Lie groups », *Uspekhi Mat. Nauk* **17** (1962), no. 4 (106), p. 57–110.
- [27] J. J. KOHN & L. NIRENBERG – « An algebra of pseudo-differential operators », *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965), p. 269–305.
- [28] H. A. KRAMERS – « Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung », *Zeitschrift für Physik* **39** (1926), no. 10, p. 828–840.
- [29] J. LERAY – « Problème de Cauchy. I. Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy », *Bull. Soc. math. France* **85** (1957), p. 389–429.
- [30] ———, « Analyse lagrangienne et mécanique quantique », in *Séminaire sur les Équations aux dérivées partielles (1976–1977), I*, Collège de France, Paris, 1977, Exp. No. 1, p. 1–313.
- [31] N. LERNER – *Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators*, Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications, vol. 3, Birkhäuser, Basel, 2010.
- [32] G. LION & M. VERGNE – *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Progress in Math., vol. 6, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.
- [33] D. MUMFORD – *Tata lectures on theta. I, II, III*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, Boston, MA, 2007.
- [34] J. VON NEUMANN – « Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren », *Math. Ann.* **104** (1931), p. 570–578.
- [35] H. POINCARÉ – « Sur les groupes des équations linéaires », *Acta Math.* **4** (1884), p. 201–312.
- [36] L. PUKÁNSZKY – *Leçons sur les représentations des groupes*, Monographies de la Société Mathématique de France, vol. 2, Dunod, Paris, 1967.
- [37] J.-P. RAMIS – « Séries divergentes et théories asymptotiques », in *Séries divergentes et procédés de resommation*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 1991, p. 1–73.
- [38] C. ROCKLAND – « Hypoellipticity on the Heisenberg group-representation-theoretic criteria », *Trans. Amer. Math. Soc.* **240** (1978), p. 1–52.
- [39] L. P. ROTHSCILD & E. M. STEIN – « Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups », *Acta Math.* **137** (1976), no. 3-4, p. 247–320.
- [40] M. SATO – « Regularity of hyperfunctions solutions of partial differential equations », in *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2*, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 785–794.
- [41] O. SCHIFFMANN – « Algèbre de heisenberg et espaces de fock », in *Heisenberg et son groupe*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2018, ce volume.

- [42] E. SCHRÖDINGER – « An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules », *Phys. Rev.* **28** (1926), p. 1049–1070.
- [43] C. L. SIEGEL – « Symplectic geometry », *Amer. J. Math.* **65** (1943), p. 1–86.
- [44] J. SJÖSTRAND – *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque, vol. 95, Société Mathématique de France, Paris, 1982.
- [45] M. H. STONE – « Linear transformations in Hilbert space. III. Operational methods and group theory », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **16** (1930), no. 2, p. 172–175.
- [46] A. UNTERBERGER – « Encore des classes de symboles », in *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1977/1978)*, École Polytechnique, Palaiseau, 1978, Exp. No. 6.
- [47] A. UNTERBERGER & J. BOKOBZA – « Les opérateurs de Calderon-Zygmund précisés », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **259** (1964), p. 1612–1614.
- [48] A. VOROS – « An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics », *J. Functional Analysis* **29** (1978), no. 1, p. 104–132.
- [49] A. WEIL – « Sur certains groupes d'opérateurs unitaires », *Acta Math.* **111** (1964), p. 143–211.
- [50] G. WENTZEL – « Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik », *Zeitschrift für Physik* **38** (1926), no. 6, p. 518–529.

Francis Nier, LAGA, UMR-CNRS 9345, Université de Paris 13, av. J.B. Clément,  
93430 Villetaneuse, France

*E-mail* : [nier@math.univ-paris13.fr](mailto:nier@math.univ-paris13.fr)

*Url* : <https://www.math.univ-paris13.fr/~nier/>