



Journées mathématiques X-UPS

Année 2018

Heisenberg et son groupe

Pierre PANSU

Géométrie du groupe de Heisenberg

Journées mathématiques X-UPS (2018), p. 1-25.

<https://doi.org/10.5802/xups.2018-01>

© Les auteurs, 2018.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

GÉOMÉTRIE DU GROUPE DE HEISENBERG

par

Pierre Pansu

Résumé. On part d'un sujet de concours (X 2014) où est introduit le groupe de Heisenberg de dimension 3 : c'est l'ensemble des matrices 3×3 triangulaires supérieures et avec des 1 sur la diagonale. Les chemins de Carnot sont les chemins dont la vitesse, à translation à gauche près, est confinée dans un plan. La non-commutativité permet de relier deux éléments quelconques du groupe de Heisenberg par un chemin de Carnot, et de définir la distance de Carnot. Sa dimension de Hausdorff est 4. Tout est à l'avenant : bien qu'elle relève du calcul différentiel le plus ordinaire, la géométrie de Carnot est fractale. On tâchera de décrire la vie dans un univers aussi étrange. On expliquera aussi en quoi cette géométrie émerge de la thermodynamique, de la théorie du contrôle optimal, et comment elle est intimement attachée aux groupes nilpotents.

Table des matières

1. Un sujet de concours.....	2
1.1. Le groupe de Heisenberg et ses chemins.....	2
1.2. Parenthèse : parking.....	3
1.3. Accessibilité.....	3
1.4. Distance de Carnot-Carathéodory.....	5
1.5. Autosimilarité.....	5
2. Symétrie.....	6
2.1. Automorphismes.....	6
2.2. Coordonnées exponentielles.....	7
2.3. Isométries.....	7

Publication originelle dans Journées X-UPS 2018. Heisenberg et son groupe. Éditions de l'École polytechnique, 2018. P. P. participe au réseau Marie Curie MAnET et au projet ANR-15-CE40-0018 SRGI. Remerciements à Monique Chyba, Emmanuel Breuillard, Valentina Franceschi, Enrico Le Donne et Patrick Massot, pour les figures.

3. Propriétés rustiques.....	9
3.1. Dimension de Hausdorff.....	9
3.2. Catalogue de dimensions.....	11
3.3. Films et bulles de savon.....	12
4. Propriétés plus fines.....	12
4.1. Géodésiques.....	12
4.2. Films de savon.....	14
4.3. Bulles de savon.....	17
5. Retour sur le contrôle.....	18
5.1. Accessibilité en codimension 1.....	19
5.2. Trajectoires singulières et contrôle optimal.....	20
6. La thermodynamique selon Carathéodory.....	21
7. Géométrie asymptotique.....	22
7.1. Le groupe de Heisenberg discret.....	22
7.2. Groupes de type fini.....	23
7.3. Conclusion.....	24
Références.....	25

1. Un sujet de concours

1.1. Le groupe de Heisenberg et ses chemins

Au concours d'entrée à l'École polytechnique, en 2014, la composition de mathématiques B tournait autour de l'ensemble \mathbb{H} des matrices réelles 3×3 triangulaires supérieures, avec des 1 sur la diagonale, appelé *groupe de Heisenberg*,

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les deux premières parties étaient des préliminaires algébriques. On vérifiait que \mathbb{H} est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$. On reliait la multiplication dans \mathbb{H} à l'addition dans l'espace vectoriel

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

via l'exponentielle des matrices. On reliait chemins dans \mathbb{H} et chemins dans \mathbb{L} . Si $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{H}$ est un chemin de classe C^1 , alors, pour tout $t \in [0, L]$, $\gamma(t)^{-1}\gamma'(t) \in \mathbb{L}$. Réciproquement, pour toute application

continue $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{L}$ et tout point de départ $h_0 \in \mathbb{H}$, la solution γ de l'équation différentielle

$$\gamma'(t) = \gamma(t)\phi(t), \quad \gamma(0) = h_0,$$

est un chemin de classe C^1 dans \mathbb{H} . On peut penser à

$$t \mapsto \phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & u(t) & w(t) \\ 0 & 0 & v(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

comme le *contrôle* de la courbe γ , avec ses trois commandes u , v et w .

La troisième partie du sujet s'ouvrait sur la définition des *chemins de Carnot*. Ce sont ceux qui sont contrôlés par des applications ϕ où $w = 0$. Autrement dit, se déplacer le long d'un chemin de Carnot revient à limiter à deux le nombre de commandes disponibles.

1.2. Parenthèse : parking

Cela s'apparente au problème concret suivant : comment faire un créneau avec une voiture ? La position de la voiture est repérée par les deux coordonnées du centre de gravité de la voiture, et une direction, celle de l'axe de la voiture, soit 3 degrés de liberté. Une fois fixée une position initiale, toute autre position s'en déduit par un déplacement du plan. Remarquer que les déplacements forment un groupe \mathbb{D} , un sous-groupe du groupe affine. Un mouvement infinitésimal de la voiture est déterminé par un vecteur du plan, orienté dans le sens des roues avant, de longueur proportionnelle à la vitesse de rotation des roues. Autrement dit, une voiture dispose de deux commandes seulement. Les trajectoires de la voiture dans le groupe \mathbb{D} sont tout à fait analogues aux chemins de Carnot du groupe \mathbb{H} (même si les deux groupes ne sont pas isomorphes).

1.3. Accessibilité

Nous savons par expérience qu'en l'absence d'obstacles, en la pilotant correctement, on peut amener la voiture en n'importe quelle position. Voici l'énoncé similaire pour le groupe de Heisenberg.

Proposition 1. *Pour tous points $h_0, h \in \mathbb{H}$, il existe un chemin de Carnot reliant h_0 à h .*

Soit $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{H}$ un chemin de classe C^1 . Si

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) & z(t) \\ 0 & 1 & y(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad \gamma(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x(t) & -z(t) + x(t)y(t) \\ 0 & 1 & -y(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\gamma(t)^{-1}\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & x'(t) & z'(t) - x(t)y'(t) \\ 0 & 0 & y'(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que γ est un chemin de Carnot si et seulement si pour tout $t \in [0, L]$, $z'(t) - x(t)y'(t) = 0$. Autrement dit, il y a une bijection entre chemins de Carnot d'origine

$$h_0 = \begin{pmatrix} 0 & x_0 & z_0 \\ 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et chemins de classe C^1 issus de (x_0, y_0) dans le plan \mathbb{R}^2 . À un chemin de Carnot correspond son image par la projection

$$\pi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (x, y),$$

(qui est un homomorphisme de groupes). Réciproquement, étant donné un chemin de classe C^1 $\sigma : t \mapsto \sigma(t) = (x(t), y(t))$ dans \mathbb{R}^2 , tel que $\sigma(0) = (x_0, y_0)$, on le relève en un chemin de Carnot γ en posant

$$z(t) = z_0 + \int_0^t x(t)y'(t) dt = z_0 + \int_{\sigma} x dy.$$

Si σ_1 et σ_2 sont deux chemins de classe C^1 reliant (x_0, y_0) à (x, y) , les hauteurs des relèvements à \mathbb{H} diffèrent de

$$z_1(L) - z_2(L) = \int_{\sigma_1} x dy - \int_{\sigma_2} x dy = \int_{\overline{\sigma_1}\sigma_2} x dy.$$

L'intégrale curviligne de $x dy$ le long du lacet $\overline{\sigma_1}\sigma_2$ obtenu en suivant d'abord σ_2 puis σ_1 à l'envers s'interprète comme l'aire algébrique entourée par ce lacet.

Pour relier h_0 à h , on relie (x_0, y_0) à (x, y) par un segment σ_1 , puis on ajuste la hauteur $z_1(L)$ en remplaçant σ_1 par un chemin σ_2

qui, avec σ_1 , entoure l'aire algébrique requise. Un arc de cercle fait l'affaire.

1.4. Distance de Carnot-Carathéodory

On peut déplacer une voiture d'une position à une autre quelconque, mais cela a un coût qui dépend des positions relatives. Le coût minimal définit une distance sur le groupe \mathbb{D} des déplacements du plan. Il en est de même dans le groupe de Heisenberg.

Définition 2. La longueur d'un chemin de Carnot est par définition la longueur euclidienne de sa projection dans \mathbb{R}^2 ,

$$\text{Long}(\gamma) := \text{Long}(\pi(\gamma)) = \int_0^L \sqrt{|(\pi \circ \gamma)'(t)|} dt.$$

La distance de Carnot-Carathéodory $d_c(h_0, h)$ est la borne inférieure des longueurs des chemins de Carnot reliant h_0 à h .

On vient de montrer que d_c est finie. L'argument montre en fait que d_c définit la topologie usuelle de \mathbb{H} : $d_c(h_0, h)$ tend vers 0 si et seulement si $h_0^{-1}h$ tend vers I_3 .

1.5. Autosimilarité

On appelle *dilatations* les difféomorphismes de \mathbb{H} définis pour $\varepsilon > 0$ par

$$\delta_\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon x & \varepsilon^2 z \\ 0 & 1 & \varepsilon y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors δ_ε est un automorphisme du groupe \mathbb{H} : $\delta_\varepsilon(gh) = \delta_\varepsilon(g)\delta_\varepsilon(h)$: c'est la conjugaison par la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Si γ est un chemin dans \mathbb{H} , on a $\pi(\delta_\varepsilon(\gamma)) = \varepsilon\pi(\gamma)$, donc

$$\text{Long}(\delta_\varepsilon(\gamma)) = \varepsilon \text{Long}(\gamma).$$

Les propriétés suivantes découlent de la définition.

(1) d_c est invariante à gauche : pour tout $g \in \mathbb{H}$, on a

$$d_c(gh_0, gh) = d_c(h_0, h).$$

(2) d_c est homogène de degré 1 sous les dilatations δ_ε :

$$d_c(\delta_\varepsilon(h_0), \delta_\varepsilon(h)) = \varepsilon d_c(h_0, h).$$

On reconnaît les propriétés familières des normes sur un espace vectoriel de dimension finie. L'argument de compacité qui donne l'équivalence des normes s'applique aussi ici.

Proposition 3. *Il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que, pour tout $h = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, on ait*

$$c \max\{|x|, |y|, \sqrt{|z|}\} \leq d_c(I_3, h) \leq C \max\{|x|, |y|, \sqrt{|z|}\}.$$

La démonstration de cette inégalité concluait le sujet de concours.

2. Symétrie

2.1. Automorphismes

Le groupe de Heisenberg possède davantage de symétries qu'il n'apparaît à première vue. Dans le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1, son normalisateur (les éléments $g \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ tels que $g^{-1}\mathbb{H}g \subset \mathbb{H}$) est le groupe des matrices triangulaires supérieures. Il contient en particulier les matrices diagonales, qui forment un groupe à 2 paramètres (dont le groupe des dilatations δ_ε est seulement un sous-groupe à 1 paramètre),

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/ab & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

L'action par conjugaison de A sur N produit les automorphismes

$$\Delta_{a,b} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (1/a^2b)x & (b/a)z \\ 0 & 1 & ab^2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il y a d'autres automorphismes. En effet, la théorie des groupes de Lie prédit que toute bijection linéaire ℓ de \mathbb{L} qui passe au travers du crochet

$$\ell([M, M']) = [\ell(M), \ell(M')]$$

détermine un automorphisme L de \mathbb{H} , à travers l'exponentielle de matrices,

$$(1) \quad L(\exp(M)) = \exp(\ell(M)).$$

Si $M = \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & u' & w' \\ 0 & 0 & v' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule

$$[M, M'] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & uv' - u'v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une bijection linéaire ℓ de \mathbb{L} préservant le crochet doit préserver la droite

$$\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dans la base évidente de \mathbb{L} , sa matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ e & f & ad - bc \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0,$$

il s'agit d'un groupe à 6 paramètres. Étant très proche d'être commutatif, le groupe \mathbb{H} possède presque autant d'automorphismes que le groupe commutatif \mathbb{R}^3 .

2.2. Coordonnées exponentielles

D'après la formule (1), les symétries se voient mieux dans les coordonnées exponentielles

$$(u, v, w) \mapsto \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & u & w + uv \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ces coordonnées, un automorphisme L est linéaire : ℓ est la lecture en coordonnées exponentielles de L .

2.3. Isométries

Lesquels, parmi ces automorphismes, sont des isométries de la distance de Carnot-Carathéodory ?

Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ le sous-espace vectoriel défini par l'équation $w = 0$. Pour chaque $h \in \mathbb{H}$, l'image $h\mathbb{K}$ de \mathbb{K} par la translation à gauche

par h est un sous-espace dans l'ensemble des matrices qui est tangent à \mathbb{H} . On l'appelle le *plan horizontal* en h . L'application $h \mapsto h\mathbb{K}$ s'appelle le *champ de plans horizontal*, il est noté K . Un chemin de Carnot n'est autre qu'un chemin de classe C^1 dans \mathbb{H} dont la vitesse est horizontale en tout point.

La figure 1 représente le champ de plan horizontal.

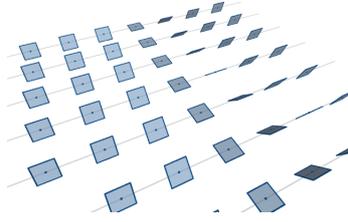


FIGURE 1. Le champ de plans horizontal

La première contrainte, pour être une isométrie, c'est de préserver le champ de plans K .

Lemme 4. *Un automorphisme L de \mathbb{H} , associé à une bijection linéaire ℓ de \mathbb{L} , préserve le champ de plans horizontal K si et seulement si $\ell(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.*

Démonstration. Un automorphisme s'entend bien avec les translations à gauche $\tau_h : L \circ \tau_h = \tau_{L(h)} \circ L$. Par conséquent, l'image par L de K est à nouveau un champ de plans invariant à gauche. Il reste à vérifier qu'en la matrice unité, ce champ de plans coïncide avec K . Comme la différentielle en 0 de \exp est l'identité, en la matrice unité, $L(K)$ vaut $\ell(\mathbb{K})$. \square

La seconde contrainte, c'est de préserver la longueur. Or $\pi \circ \exp : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}^2$ coïncide avec la projection sur \mathbb{K} parallèlement à \mathbb{W} . Par conséquent, si L est l'automorphisme de \mathbb{H} associé à une bijection linéaire ℓ , $\pi \circ L \circ \exp = \pi \circ \exp \circ \ell = \ell|_{\mathbb{K}}$ puisque $\ell(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$. On conclut que L est une isométrie de la distance de Carnot-Carathéodory si et seulement si $\ell(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ et ℓ est une isométrie de \mathbb{K} .

Si $\ell|_{\mathbb{K}}$ est une rotation, alors ℓ est une rotation d'axe \mathbb{W} . Si $\ell|_{\mathbb{K}}$ est une symétrie, alors ℓ est un demi-tour dont l'axe est une droite de \mathbb{K} (en effet, la restriction de ℓ à \mathbb{W} est le déterminant de sa restriction à \mathbb{K}).

Les translations à gauches sont des isométries. On peut montrer aisément que toute isométrie de la distance de Carnot-Carathéodory est la composée d'une translation à gauche et d'un automorphisme isométrique. On conclut qu'en coordonnées exponentielles, la distance de Carnot-Carathéodory possède une symétrie de révolution autour de chaque axe vertical, et un demi-tour autour de chaque droite horizontale.

La figure 2 représente le champ de plans horizontal K en coordonnées exponentielles. Dans ces coordonnées, on voit bien la symétrie de révolution.

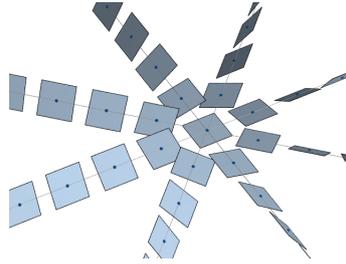


FIGURE 2. Le champ de plans horizontal en coordonnées exponentielles

3. Propriétés rustiques

On entend par là celles qui reposent seulement sur l'homogénéité et l'auto-similarité.

3.1. Dimension de Hausdorff

La proposition 3 encadre les boules de d_c par des parallélépipèdes. Plus les boules sont petites, plus les parallélépipèdes sont aplatis. Par exemple, imaginons qu'à l'intérieur de l'amphi Carnot de l'École polytechnique, les distances soient données par la distance d_c , et que la boule unité soit l'amphi lui-même. Une boule de rayon 10cm, soit 100

fois plus petite, serait contenue dans un parallélépipède de hauteur 10000 fois plus petite, soit 1mm. Monter, i.e., se déplacer vers le haut, a un coût exorbitant aux petites échelles. De la même façon, déplacer latéralement sa voiture d'un millimètre a un coût très important, en proportion : il faut la déplacer vers l'avant ou l'arrière de plusieurs centimètres.

Dans le groupe de Heisenberg, c'est exactement l'inverse aux grandes échelles. Les grandes boules contiennent des parallélépipèdes à allure de gratte-ciel. Il n'y a pas d'analogie dans le groupe des déplacements, qui ne possède pas de dilatations globales.

En première approximation, la dimension de Hausdorff compte le nombre de boules de rayon ε nécessaires pour recouvrir un ouvert borné, un cube par exemple. Comme les boules de rayon ε de d_c occupent une hauteur ε^2 , il faut en empiler ε^{-2} pour recouvrir une arête verticale du cube, et il faut ε^{-2} piles pour recouvrir le cube, d'où ε^{-4} boules. Un raisonnement plus rigoureux invoque le volume euclidien des boules : comme le jacobien de δ_ε vaut ε^4 , le volume d'une boule de rayon ε est proportionnel à ε^4 , donc il en faut ε^{-4} pour recouvrir le cube. Voici la définition précise de la dimension de Hausdorff.

Définition 5. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $\eta > 0$. La (pré-) mesure de Hausdorff p -dimensionnelle à l'échelle η d'un sous-ensemble relativement compact $A \subset X$ est la borne inférieure des sommes

$$\sum_j \text{diam}(A_j)^p,$$

sur tous les recouvrements de A par des ensembles A_j de diamètre $< \eta$. En faisant tendre η vers 0, on obtient la mesure de Hausdorff p -dimensionnelle $\mathcal{H}^p(A)$.

Lorsque p varie, $\mathcal{H}^p(A) = +\infty$ si p est petit, $\mathcal{H}^p(A) = 0$ si p est grand, la transition se fait pour une unique valeur de p qu'on appelle la *dimension de Hausdorff* de A .

Proposition 6. La dimension de Hausdorff (d'un ouvert borné) de (\mathbb{H}, d_c) est 4, et la mesure de Hausdorff 4-dimensionnelle est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.

En effet, pour tout recouvrement, on a $\text{diam}(A_j)^4 \geq \text{vol}(A_j)$, donc $\mathcal{H}^p(A) \geq \text{vol}(A)$. D'autre part, il existe des recouvrements par des boules qui réalisent cette inégalité à un facteur multiplicatif près. On termine par un analogue (dû à Alfred Haar) de la caractérisation (à un facteur multiplicatif près) de la mesure de Lebesgue : c'est la seule mesure invariante par translations à gauche, finie sur les compacts et positive sur les ouverts.

3.2. Catalogue de dimensions

De la même façon, on calcule les dimensions suivantes :

- (1) Les chemins de Carnot ont une dimension de Hausdorff égale à 1.
- (2) Un chemin de classe C^1 qui n'est pas de Carnot a une dimension de Hausdorff égale à 2.
- (3) Une surface de classe C^2 a une dimension de Hausdorff égale à 3.

La propriété 3 repose sur le fait qu'une surface de classe C^2 contenue dans \mathbb{H} ne peut pas être partout horizontale. Plus précisément,

Proposition 7. *Sur une surface de classe C^2 contenue dans \mathbb{H} , le lieu des points où le plan tangent est horizontal est d'intérieur vide.*

Démonstration. On note θ la 1-forme différentielle $\theta = dz - xdy$ sur \mathbb{H} . Pour $h = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, on calcule

$$h^{-1}dh = \begin{pmatrix} 1 & -x & -z + xy \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & dx & dz \\ 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & dx & dz - xdy \\ 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette expression montre que le plan horizontal en h est le noyau de θ . On raisonne par l'absurde. Si S est un ouvert d'une surface de classe C^2 qui est horizontale en tout point, alors la restriction de θ à S est identiquement nulle. Par conséquent, la restriction de $d\theta$ à S est identiquement nulle. Or la restriction de $d\theta = -dx \wedge dy$ à $h\mathbb{K}$ est non dégénérée, contradiction. \square

Revenons à la figure 2 qui représente le champ de plans horizontal K en coordonnées exponentielles. Quand on s'éloigne de l'axe

vertical $I_3 + \mathbb{W}$, il tourne, c'est ce qui empêche une surface de lui être tangente. C'est aussi ce qui permet aux chemins de Carnot d'aller partout.

3.3. Films et bulles de savon

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n , tout lacet de longueur L borde une surface d'aire $\leq L^2/4\pi$. L'égalité a lieu pour un cercle contenu dans un plan.

Voici une construction simple qui donne une borne un peu moins bonne, en L^2 . À translation près, on peut supposer que le lacet γ est basé à l'origine. On utilise les homothéties euclidiennes : on définit $S : [0, L] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $S(\varepsilon, t) = \varepsilon\gamma(t)$. L'aire de S est $\leq L^2$.

Dans le groupe de Heisenberg, la construction analogue $S(\varepsilon, t) = \delta_\varepsilon\gamma(t)$ permet de remplir un lacet de Carnot de longueur L par une surface de mesure de Hausdorff 3-dimensionnelle $\leq CL^3$. La meilleure constante C n'est pas connue.

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n , un ouvert borné A à bord de classe C^1 obéit à l'*inégalité isopérimétrique*

$$\text{vol}(A) \leq c_n \text{vol}(\partial A)^{n/n-1}.$$

Le cas d'égalité est réalisé par les boules. L'inégalité isopérimétrique dans le groupe de Heisenberg prend la forme

$$\mathcal{H}^4(A) \leq C \mathcal{H}^3(\partial A)^{4/3}.$$

La constante optimale C n'est pas connue, [CDPT07].

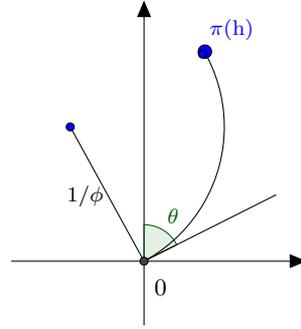
4. Propriétés plus fines

Dans cette partie, on va donner des formules pour les quantités définies précédemment de façon plutôt abstraite : la distance de Carnot-Carathéodory, les mesures de Hausdorff 1-, 2- et 3-dimensionnelles.

4.1. Géodésiques

Chercher le plus court chemin de Carnot γ entre l'origine et un point h revient à chercher un chemin σ dans le plan entre l'origine et $\pi(h)$, enfermant (avec le segment $[0, \pi(h)]$) une aire algébrique donnée. La solution est connue depuis l'antiquité : c'est un arc de cercle.

Si $\pi(h) \neq 0$, il est unique. Les *géodésiques minimisantes*, i.e., les chemins parcourus à vitesse constante et réalisant la distance entre leurs extrémités, sont donc les relèvements horizontaux d'arcs de cercles parcourus à vitesse constante. Le sujet de concours donnait des formules, en coordonnées exponentielles, pour un paramétrage sur $[0, 1]$ de toutes les géodésiques minimisantes de longueur 1 issus de I_3 . Nous allons les retrouver ici.



Étant donnés deux angles θ et ϕ , soit $\sigma_{\theta, \phi}$ l'arc de cercle du plan parcouru à vitesse 1, partant de l'origine avec la vitesse $(\sin \theta, \cos \theta)$, et dont le vecteur vitesse tourne à son tour avec vitesse angulaire constante ϕ . Alors, en notation complexe $\mathbf{v} = u + iv$, le vecteur vitesse est

$$\mathbf{v}(t) = e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta + \phi t)} = ie^{-i\theta} e^{i\phi t}.$$

On obtient $\sigma_{\theta, \phi}(t)$ en intégrant,

$$\sigma_{\theta, \phi}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(s) ds = \frac{1}{\phi} e^{-i\theta} (e^{i\phi t} - 1).$$

Soit $\gamma_{\theta, \phi}$ son relèvement horizontal d'origine I_3 dans \mathbb{H} . En coordonnées exponentielles, la forme θ s'écrit

$$\theta = dw - \frac{1}{2}(udv - vdu) = dw - \frac{1}{2}\Im(\bar{v}dv).$$

Par conséquent, la coordonnée verticale de $\gamma_{\theta, \phi}(t)$ vaut

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2}\Im\left(\int_0^t \frac{1}{\phi} e^{i\theta} (e^{-i\phi s} - 1) \frac{1}{\phi} e^{-i\theta} (i\phi) e^{i\phi s} ds\right) \\ &= \frac{1}{2}\Im\left(\frac{it}{\phi} - \frac{1}{\phi^2}(e^{i\phi t} - 1)\right) = \frac{\phi t - \sin(\phi t)}{2\phi^2}. \end{aligned}$$

La géodésique $\gamma_{\theta,\phi}$ est minimisante tant que sa vitesse n'a pas fait un tour complet, i.e., tant que $|\phi t| \leq 2\pi$. Elle est minimisante sur l'intervalle $[0, 1]$ si et seulement si $|\phi| \leq 2\pi$.

Proposition 8. *Le chemin de Carnot $\gamma_{\theta,\phi}$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\phi \in [-2\pi, 2\pi]$, réalise la distance entre ses extrémités. Inversement, tout chemin de Carnot de longueur 1, parcouru à vitesse 1 et réalisant la distance entre I_3 et son extrémité est l'un des $\gamma_{\theta,\phi}$. En particulier, la sphère unité de centre I_3 est paramétrée en coordonnées exponentielles par*

$$(\theta, \phi) \mapsto \left(\frac{1}{\phi} e^{-i\theta} (e^{i\phi} - 1), \frac{\phi - \sin \phi}{2\phi^2} \right), \quad (\theta, \phi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-2\pi, 2\pi].$$

La figure 3 représente la sphère unité de la distance de Carnot-Carathéodory, en coordonnées exponentielles. Elle possède une symétrie de révolution. Elle présente deux points singuliers en forme de pointes tournées vers l'intérieur, sur l'axe vertical.

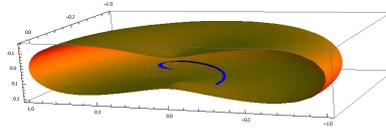


FIGURE 3. La sphère unité de la distance de Carnot-Carathéodory

En effet, si $\pi(h) = 0$, i.e., lorsque h appartient à l'axe vertical passant par la matrice unité, il y a par symétrie de révolution, une infinité de plus courts chemins reliant la matrice unité à h . Chacun est le relèvement horizontal d'un cercle complet passant par l'origine, donc une sorte d'hélice. La figure 4 représente la réunion de toutes ces géodésiques, c'est une surface de révolution.

4.2. Films de savon

4.2.1. Mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle. Pour les chemins de Carnot, la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle \mathcal{H}^1 coïncide avec la longueur.

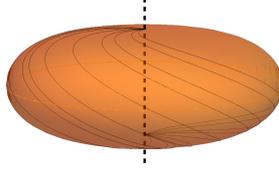


FIGURE 4. La réunion des géodésiques joignant deux points

4.2.2. Mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle. Soit γ un chemin de classe C^1 qui n'est pas de Carnot en un point $h_0 = \gamma(0)$. Quitte à traduire à gauche, on peut supposer que $h_0 = I_3$ est la matrice unité. Soit $\varepsilon > 0$ petit. On s'intéresse à l'intersection de γ et de la boule $B(I_3, \varepsilon)$ relative à la distance de Carnot-Carathéodory d_c . Appliquons lui la dilatation $\delta_{1/\varepsilon}$. Comme c'est une homothétie pour la distance d_c ,

$$\delta_{1/\varepsilon}(\gamma \cap B(I_3, \varepsilon)) = \delta_{1/\varepsilon}(\gamma) \cap B(I_3, 1).$$

Comme la vitesse $\gamma'(0)$ n'est pas horizontale, quand ε tend vers 0, $\delta_{1/\varepsilon}(\gamma)$ converge vers l'axe vertical $I_3 + \mathbb{W}$. Considérons la quantité $|\theta|$ vue comme une mesure sur γ . Comme $\delta_\varepsilon^* \theta = \varepsilon^2 \theta$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \cap B(I_3, \varepsilon)} |\theta| &= \int_{\delta_{1/\varepsilon}(\gamma \cap B(I_3, \varepsilon))} |\delta_\varepsilon^* \theta| \\ &= \varepsilon^2 \int_{\delta_{1/\varepsilon}(\gamma \cap B(I_3, \varepsilon))} |\theta| \\ &\sim \varepsilon^2 \int_{(I_3 + \mathbb{W}) \cap B(I_3, 1)} |\theta|. \end{aligned}$$

Cela suffit à démontrer que la mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle (sphérique) \mathcal{H}^2 sur γ est proportionnelle à $|\theta|$.

4.2.3. Mesure de Hausdorff 3-dimensionnelle. Soit S une surface de classe C^2 qui n'est pas horizontale en $h_0 = I_3$. Par le théorème des fonctions implicites, au voisinage de I_3 , l'intersection du plan tangent à S , $T_h S$ et du plan horizontal $h\mathbb{K}$ est une droite sur laquelle on peut choisir un vecteur $ha(h)$ tel que $a(h) \in \mathbb{K}$ est unitaire et est fonction C^1 de h . Les lignes intégrales de ce champ de vecteurs permettent de paramétrer localement S (voir la figure 4 pour un exemple) :

on note γ la ligne intégrale du champ de vecteurs directement orthogonal $hJa(h)$ (où J désigne la rotation de $\pi/2$ dans \mathbb{K}) partant de h_0 , puis on note $\tilde{\gamma}_t$ la ligne intégrale de $ha(h)$ partant de $\gamma(t)$. L'application

$$(s, t) \mapsto \psi(s, t) = \tilde{\gamma}_t(s)$$

est un difféomorphisme local. La 2-forme différentielle $\psi_* ds \wedge \theta$ définit une mesure sur S . Par un argument similaire à celui du paragraphe précédent, on montre que $|\psi_* ds \wedge \theta|$ est proportionnelle à la mesure de Hausdorff (sphérique) 3-dimensionnelle \mathcal{H}^3 . Autrement dit, dans des coordonnées adaptées au feuilletage de S par les chemins de Carnot, $\mathcal{H}^3 = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2$ est une mesure produit, de la mesure 1-dimensionnelle le long des chemins de Carnot contenus dans S , et de la mesure 2-dimensionnelle dans la direction transverse.

4.2.4. Surfaces minimales. Depuis L. Euler et J.-L. Lagrange, on sait caractériser par une équation aux dérivées partielles les surfaces S dans l'espace euclidien qui sont *extrémales* pour l'aire (on dit parfois minimales). Cela signifie que pour toute famille à un paramètre $t \mapsto S(t)$ de surfaces telles que $S(0) = S$, et qui coïncident avec S hors d'un voisinage d'un point, la dérivée $\frac{d}{dt} \text{Aire}(S(t))|_{t=0} = 0$. Ces surfaces modélisent les films de savon. Leur méthode s'applique aussi pour \mathcal{H}^3 . L'équation obtenue a une interprétation géométrique simple.

Proposition 9. *Une surface de classe C^2 , nulle part horizontale, est extrémale pour \mathcal{H}^3 si et seulement si les chemins de Carnot tracés dessus sont des lignes droites.*

Autrement dit, il est aisé de construire des exemples de telles surfaces : la réunion d'une famille de classe C^2 quelconque de droites horizontales est extrémale en dehors de son enveloppe. On peut montrer que si, en outre, la restriction de π à une telle surface S est injective, alors S est *minimisante* : parmi toutes les surfaces de même bord, son aire (au sens de \mathcal{H}^3) est un minimum absolu. L'argument s'étend à des surfaces modérément singulières, comme l'exemple suivant.

Considérons la famille des droites du plan \mathbb{R}^2 orthogonales à une droite donnée D . Choisissons un relèvement horizontal \tilde{D} de D , puis relevons horizontalement chaque droite perpendiculaire D' à partir du point de \tilde{D} situé au-dessus de $D \cap D'$. On obtient une surface minimisante $S_{\tilde{D}}$, invariante par le groupe à un paramètre des translations à gauche le long de \tilde{D} . Fixons un élément $h \in S_{\tilde{D}}$, appartenant au relèvement horizontal \tilde{D}' d'une perpendiculaire D' à D . Appliquons la translation à gauche de h à $S_{\tilde{D}}$. La nouvelle surface $hS_{\tilde{D}}$ coupe $S_{\tilde{D}}$ le long de \tilde{D}' . Considérons la surface S réunion de la moitié gauche de $S_{\tilde{D}}$ et de la moitié droite de $hS_{\tilde{D}}$. C'est une surface minimisante qui ne possède pas de plan tangent le long de \tilde{D}' . Un tel phénomène ne se produit jamais pour les films de savon euclidiens.

En coordonnées (x, y, z) , dans lesquelles $\theta = dz - x dy$, si D a pour équation $x = 0$, $S_{\tilde{D}}$ est le plan d'équation $\{z = 0\}$, sa translatée de $(1, 0, 0)$ est le plan d'équation $\{z = y\}$. S est la réunion de deux demi-plans se rencontrant le long de la droite $\{y = z = 0\}$.

4.3. Bulles de savon

Considérons maintenant des surfaces fermées S de classe C^2 . Les surfaces qui sont extrémales parmi les surfaces enfermant le même volume modélisent les bulles de savon. Elles aussi sont caractérisées par une équation aux dérivées partielles. Lorsqu'on substitue à l'aire euclidienne la mesure \mathcal{H}^3 , on trouve à nouveau une condition géométrique.

Proposition 10. *Soit S une surface de classe C^2 , extrémale pour \mathcal{H}^3 à volume intérieur constant. Au voisinage d'un point où le plan tangent à S n'est pas horizontal, il existe une constante r telle que les chemins de Carnot contenus dans S sont les relevés horizontaux de cercles euclidiens de rayon r .*

Lorsqu'on relève horizontalement tous les cercles de rayon r passant par l'origine à partir du même point I_3 de \mathbb{H} , on obtient la surface de révolution β représentée en coordonnées exponentielles sur la figure 4. On peut montrer qu'elle est extrémale à volume intérieur constant. En ce sens, c'est une bulle de savon. On sait que c'est, à translation et dilatation près, la seule surface fermée extrémale à

volume intérieur constant et de classe C^2 , [RR08]. On conjecture depuis 35 ans que c'est la surface de plus petite aire (au sens de \mathcal{H}^3) à volume intérieur fixé, [CDPT07]. À ce jour, seulement des résultats partiels ont été obtenus. Par exemple, β est optimale parmi les surfaces de révolution, [Mon08], ou parmi les surfaces bordant un ensemble convexe, [MR09].

5. Retour sur le contrôle

Le déplacement d'un véhicule (éventuellement avec remorques) est un exemple d'une vaste classe de problèmes issus de l'industrie : robotique, contrôle de procédés dans l'industrie chimique ou la production d'énergie.

Un système contrôlé peut être modélisé par une famille de champs de vecteurs $X(t, u)$ dans un espace \mathbb{R}^n dépendant du temps t et d'un paramètre $u \in \mathbb{R}^c$ représentant les commandes disponibles. Un contrôle est une application U de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^c . La trajectoire γ dans \mathbb{R}^n partant de x_0 et contrôlée par U est la solution de l'équation différentielle

$$\gamma'(t) = X(t, U(t)), \quad \gamma(0) = x_0.$$

Le problème d'*accessibilité* consiste à décider si tout point de \mathbb{R}^n (ou au moins d'un voisinage de x_0) est l'extrémité $\gamma(T)$ d'une trajectoire contrôlée.

Si on se donne une fonction κ sur \mathbb{R}^c , le coût d'un contrôle est $\int_0^T \kappa(U(t)) dt$. Le problème du *contrôle optimal* consiste à trouver le contrôle qui minimise le coût parmi ceux qui conduisent de la position x_0 à une position x_T donnée. En particulier, à déterminer les sphères, lieux des positions atteignables avec un coût donné.

Par exemple, les chemins de Carnot dans \mathbb{H} correspondent à la famille linéaire indépendante du temps $X(u, v) = uM_{100} + vM_{010}$, où

$$M_{100} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{010} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et la fonction de coût est $\kappa(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$. Le système est accessible (proposition 1) et on a pu résoudre le problème du contrôle optimal et dessiner les sphères (proposition 8 et figure 3).

5.1. Accessibilité en codimension 1

Le théorème suivant (que nous ne démontrerons pas) donne une réponse assez complète.

Théorème 11 (théorème de l'orbite de Nagano-Süssmann, [Mon02])

On considère un système de contrôle à c commandes, impair par rapport aux commandes, défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine. Il existe un entier d compris entre c et n tel que l'ensemble des points atteignables depuis l'origine par une trajectoire contrôlée soit une variété immergée de dimension d , i.e., localement une réunion dénombrable d'images disjointes d'immersions injectives de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^n .

On retrouve un résultat classique, une condition d'existence d'un facteur intégrant pour une 1-forme différentielle.

Corollaire 12. *Soit θ une 1-forme différentielle définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , de classe C^2 et qui ne s'annule pas. On considère le système de contrôle linéaire par rapport aux commandes défini par le noyau de θ . On suppose que le lieu des points accessibles depuis 0 n'est pas un voisinage de 0. Alors il existe des fonctions f et g définies au voisinage de 0 telles que $\theta = f dg$.*

Démonstration. Le nombre de commandes est $c = n - 1$. Par hypothèse, $n - 1 = c \leq d < n$, donc $d = n - 1$. Cela entraîne que l'espace tangent à chaque composante accessible coïncide avec $\ker(\theta)$. La différentielle $d\theta$ s'annule sur cet espace tangent. L'algèbre bilinéaire indique qu'il existe une 1-forme différentielle de classe C^1 β telle que $d\theta = \theta \wedge \beta$. Alors

$$0 = dd\theta = d\theta \wedge \beta - \theta \wedge d\beta = -\theta \wedge d\beta.$$

La restriction de β aux composantes accessibles est fermée donc exacte. Localement, il existe une fonction h de classe C^1 telle que $\beta = dh \pmod{\theta}$. Alors

$$d\theta = dh \wedge \theta, \quad d(e^{-h}\theta) = e^{-h}(-dh \wedge \theta + d\theta) = 0.$$

La forme fermée $e^{-h}\theta$ est localement exacte, $e^{-h}\theta = dg$, $\theta = f dg$ avec $f = e^h$. \square

5.2. Trajectoires singulières et contrôle optimal

Revenons au problème du contrôle optimal. Il s'agit de minimiser une fonction sur l'ensemble des trajectoires reliant deux points. Pour appliquer les méthodes du calcul des variations, on a besoin que l'application qui à un contrôle U associe le point final $\Phi(U) = \gamma(T)$ ait une différentielle surjective. Dans ce cas, on dit que la trajectoire contrôlée par U est *régulière*. On peut voir cette condition comme une forme quantitative de l'accessibilité. Lorsqu'elle est satisfaite, on peut montrer que le contrôle optimal est la solution d'une équation différentielle du second ordre.

Il existe des trajectoires singulières non constantes, il en existe même qui minimisent le coût, même dans le cas linéaire. C'est le cas dans l'exemple suivant, en dimension 4. On est dans $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ et on considère la famille

$$X(u, v, w) = (uM_{100} + vM_{010}, w).$$

Alors le contrôle constant $t \mapsto U(t) = (0, 0, 1)$ et la trajectoire $t \mapsto (I_3, t)$ sont singuliers et minimisants. Cela se traduit dans l'aspect de la sphère de rayon T : au point (I_3, T) , elle présente une pointe. La figure 5 représente l'intersection de la sphère de rayon 1 avec une coupe de dimension 3 de l'espace $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$, l'hyperplan d'équation $\{y = 0\}$.

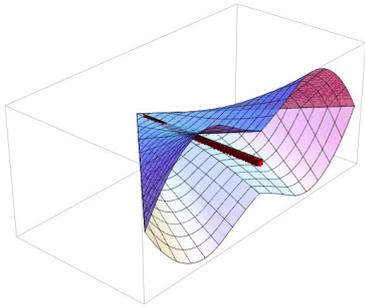


FIGURE 5. Une coupe d'une sphère de $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$

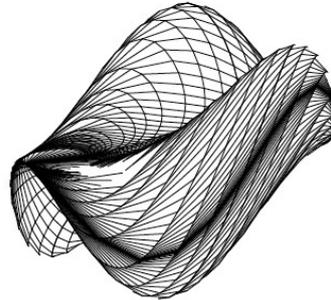


FIGURE 6. Une sphère du système de Martinet

Voici un autre exemple, en dimension 3 cette fois. Il s'agit du champ de plans donné comme le noyau de la 1-forme différentielle

$$dz - x^2 dy.$$

La droite $\{x = z = 0\}$ est une trajectoire singulière, minimisante. Les sphères présentent des singularités encore plus marquées, la pointe est de la forme $\{y, z \leq e^{-1/x}\}$, elle ne peut pas être décrite par des inéquations algébriques, [BC99]. La figure 6 montre une sphère de ce système, dit de Martinet.

Ces trajectoires singulières sont une pierre dans le jardin du spécialiste du contrôle. On conjecture que la réunion des trajectoires singulières issues d'un point x_0 est de mesure nulle, mais la question reste ouverte depuis plusieurs décennies. On conjecture que les trajectoires minimisantes singulières sont de classe C^1 . On sait seulement, depuis peu, qu'elles ne peuvent pas présenter de coins, voir le survol [Rif17].

6. La thermodynamique selon Carathéodory

En 1909, le mathématicien grec Constantin Carathéodory a proposé un formalisme pour la thermodynamique permettant une formulation mathématique des principes de cette discipline, [Car09]. Pour lui, l'état d'un système physique est décrit par un point dans un espace \mathbb{R}^n . Les grandeurs comme le volume, la pression, l'énergie interne sont des fonctions différentiables des coordonnées. Ce n'est pas le cas pour la chaleur. Cette dernière est produite ou dissipée lors de l'évolution du système, en quantité qui dépend fortement de l'évolution suivie, et non seulement de l'état initial et de l'état final. Carathéodory postule que la quantité infinitésimale δQ de chaleur produite lors d'une transformation infinitésimale de l'état dépend linéairement de la variation des coordonnées. Autrement dit, δQ est une 1-forme différentielle sur \mathbb{R}^n .

Les transformations durant lesquelles aucune chaleur n'est produite ou dissipée sont appelées *adiabatiques*. Elles sont réalisables expérimentalement, en gardant le système thermiquement isolé et en le faisant évoluer très lentement. Carathéodory baptise *second principe* l'existence d'états arbitrairement voisins d'un état donné

qu'on ne peut pas rejoindre par une transformation adiabatique. D'après le corollaire 12, il existe deux fonctions d'état T et S telles que $\delta Q = T dS$. Carathéodory baptise S *entropie* et T *température*. L'entropie est constante le long des transformations adiabatiques. On retrouve la formulation due à Clausius du second principe de Sadi Carnot.

C'est ainsi que Carathéodory réduit un postulat commode mais un peu mystérieux (existence de la fonction d'état entropie) à un postulat plus naturel, l'inaccessibilité. Naturel en apparence, car l'inaccessibilité n'est pas spécialement aisée à vérifier expérimentalement, la formulation de Carathéodory a donc donné lieu à un débat continu au fil des décennies.

La terminologie *Carnot-Carathéodory* est due à M. Gromov. Autant la référence à Carathéodory est fondée, autant celle à Carnot doit être vue comme un mot d'esprit, renvoyant les nombreux auteurs qui ont redécouvert des critères d'accessibilité jusqu'au milieu du xx^e siècle à une antériorité très ancienne.

7. Géométrie asymptotique

7.1. Le groupe de Heisenberg discret

On appelle *groupe de Heisenberg discret* le sous-ensemble

$$\mathbb{H}_{\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

C'est un sous-groupe. Par bien des côtés, il ressemble au groupe commutatif \mathbb{Z}^3 . Munissons-le d'une distance invariante à gauche en discrétisant la définition de la métrique de Carnot-Carathéodory. Ce qui remplace le sous-espace vectoriel \mathbb{K} , c'est l'ensemble des 4 matrices

$$\mathcal{S} = \{M_{100}, M_{010}, M_{100}^{-1}, M_{010}^{-1}\}.$$

Les chemins de Carnot sont remplacés par les suites d'éléments h_0, h_1, \dots, h_k de $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$ satisfaisant

$$\forall i = 1, \dots, k, \quad h_{i-1}^{-1} h_i \in \mathcal{S}.$$

La longueur d'une telle suite est k , la distance $d_{\mathcal{S}}(h, h')$ est la longueur minimum d'une suite reliant $h_0 = h$ à $h_k = h'$. Elle est à valeurs entières. L'espace métrique obtenu est discret. Toutefois, à

grande échelle, il ressemble à (\mathbb{H}, d_c) , ou plutôt, à une variante de d_c , notée d_1 , où la norme euclidienne $\sqrt{u^2 + v^2}$ sur \mathbb{R}^2 utilisée pour définir la longueur des chemins de Carnot est remplacée par la norme ℓ_1 $|u| + |v|$. La figure 7 représente la sphère unité de (\mathbb{H}, d_1) , c'est une version polygonale de la sphère de d_c , elle comporte des parties planes qui ont été évidées pour laisser voir l'intérieur de la sphère.

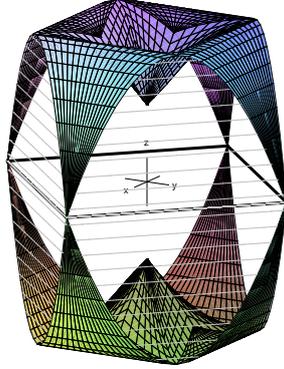


FIGURE 7. La boule unité de la distance d_1

On vérifie aisément que $d_{\mathcal{S}}$ n'est autre que la restriction de d_1 au sous-ensemble $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$ de \mathbb{H} .

Multiplions la distance $d_{\mathcal{S}}$ par ε . Pour réaliser l'espace métrique $(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}, \varepsilon d_{\mathcal{S}})$, il suffit de considérer la restriction de d_1 au sous-ensemble $\delta_{\varepsilon}(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}})$. Lorsqu'on fait tendre ε vers 0, $\delta_{\varepsilon}(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}})$ devient de plus en plus dense dans \mathbb{H} , on peut dire que la suite d'espaces métriques $(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}, \varepsilon d_{\mathcal{S}})$ converge vers (\mathbb{H}, d_1) . La notion de convergence appropriée est la topologie de Gromov-Hausdorff pointée, [Edw75], [Gro81].

Il résulte entre autres de cette observation que le nombre d'éléments dans une boule de rayon n de $(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}, d_{\mathcal{S}})$ croît comme n^4 .

7.2. Groupes de type fini

Un groupe abstrait G est *de type fini* s'il possède un sous-ensemble fini \mathcal{S} tel que tout élément de G soit un produit d'éléments pris dans \mathcal{S} . C'est le cas des groupes commutatifs \mathbb{Z}^d , des groupes de symétrie des pavages euclidiens et non-euclidiens mais aussi des groupes fondamentaux qu'on rencontre en topologie. On trouve dans

la galerie de Jos Leys de nombreuses figures associées à des groupes de type fini : <http://www.josleys.com/galleries.php?catid=5>, <http://www.josleys.com/galleries.php?catid=7>.

La notion de chemins discrets s'étend à un groupe G muni d'un système générateur \mathcal{S} , ainsi que la distance $d_{\mathcal{S}}$. Deux systèmes générateurs finis donnent des distances équivalentes sur G . Une idée profonde, due à M. Gromov, [Gro81], est que le fait de voir un groupe de type fini comme un espace métrique à équivalence près permet d'apporter de l'intuition géométrique, et parfois les outils de l'analyse, à l'étude algébrique de ces groupes. Son point de vue a donné naissance à la théorie géométrique des groupes, une branche devenue majeure de la topologie depuis les années 1990.

Décrire le comportement des espaces métriques $(G, \varepsilon d_{\mathcal{S}})$ lorsque ε tend vers 0 est riche d'enseignements. La famille converge au sens de Gromov-Hausdorff pointé si et seulement si G contient un sous-groupe d'indice fini qui est *nilpotent*, i.e., l'opération de prise de commutateurs $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, itérée un nombre borné de fois, aboutit à l'élément neutre. Les espaces limites, appelés *cônes asymptotiques*, sont des groupes continus munis de métriques à la Carnot-Carathéodory. Il en résulte par exemple que le nombre de points dans une boule de rayon n de $(G, \varepsilon d_{\mathcal{S}})$ croît comme une puissance de n (voir [BLD13] pour des estimations plus précises). D'une certaine façon, tous les invariants à grande échelle pour les groupes de type fini nilpotents s'étudient par passage à la limite continue. C'est même le cas pour le comportement en temps grand des marches aléatoires.

7.3. Conclusion

L'idée de cône asymptotique s'inspire de celle de cône tangent (on parle plus souvent d'espace tangent). En retour, la notion de cône tangent est utile en théorie du contrôle. Les systèmes de contrôle linéaires en les commandes possèdent des cônes tangents en tous points, ce sont des systèmes invariants à gauche sur des groupes continus nilpotents, voir le livre [BR96]. Par exemple, le cône tangent (en n'importe quel point) au système de la voiture à garer est le groupe de Heisenberg.

En géométrie, le groupe de Heisenberg est un prototype, un exemple commun à plusieurs théories. Il appartient à la théorie du contrôle et à la théorie géométrique des groupes. Ces deux théories très éloignées s'enrichissent mutuellement par les éclairages qu'elles apportent à leurs exemples communs. C'est ce qui fait la popularité du groupe de Heisenberg parmi les géomètres.

Références

- [BR96] A. BELLAÏCHE & J.-J. RISLER (éds.) – *Sub-Riemannian geometry*, Progress in Math., vol. 144, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
- [BC99] B. BONNARD & M. CHYBA – « Méthodes géométriques et analytiques pour étudier l'application exponentielle, la sphère et le front d'onde en géométrie sous-riemannienne dans le cas Martinet », *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **4** (1999), p. 245–334.
- [BLD13] E. BREUILLARD & E. LE DONNE – « On the rate of convergence to the asymptotic cone for nilpotent groups and subFinsler geometry », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110** (2013), no. 48, p. 19220–19226.
- [CDPT07] L. CAPOGNA, D. DANIELLI, S. D. PAULS & J. T. TYSON – *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, Progress in Math., vol. 259, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [Car09] C. CARATHÉODORY – « Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik », *Math. Ann.* **67** (1909), no. 3, p. 355–386.
- [Edw75] D. A. EDWARDS – « The structure of superspace », in *Studies in topology (Proc. Conf., Univ. North Carolina, Charlotte, NC, 1974)*, Academic Press, New York, 1975, p. 121–133.
- [Gro81] M. GROMOV – *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Mathématiques, vol. 1, CEDIC, Paris, 1981, Edité par J. Lafontaine and P. Pansu.
- [Mon02] R. MONTGOMERY – *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Math. Surveys and Monographs, vol. 91, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [Mon08] R. MONTI – « Heisenberg isoperimetric problem. The axial case », *Adv. Calc. Var.* **1** (2008), no. 1, p. 93–121.
- [MR09] R. MONTI & M. RICKLY – « Convex isoperimetric sets in the Heisenberg group », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **8** (2009), no. 2, p. 391–415.
- [Rif17] L. RIFFORD – « Singulières minimisantes en géométrie sous-riemannienne », in *Séminaire Bourbaki. Vol. 2015/2016*, Astérisque, vol. 390, Société Mathématique de France, Paris, 2017, Exp. No. 1113, p. 277–301.
- [RR08] M. RITORÉ & C. ROSALES – « Area-stationary and stable surfaces in the sub-Riemannian Heisenberg group \mathbb{H}^1 », *Mat. Contemp.* **35** (2008), p. 185–203.

Pierre Pansu, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS,
 Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France
E-mail : pierre.pansu@math.u-psud.fr
Url : <https://www.math.u-psud.fr/~pansu/>