Journées mathématiques X-UPS
Année 2017
Une invitation à la théorie géométrique de la mesure

Emmanuel Russ

Inégalités isopérimétriques et isodiamétriques

Journées mathématiques X-UPS (2017), p. 1-69.
https://doi.org/10.5802/xups.2017-01

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2017, p. 1–69 doi: 10.5802/xups.2017-01

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES ET ISODIAMÉTRIQUES

par

Emmanuel Russ

Résumé. Le problème isopérimétrique semble remonter à l'Antiquité grecque et une version peut s'énoncer ainsi : parmi toutes les figures planes de même périmètre, quelle est celle dont l'aire est la plus grande ?

Le problème isodiamétrique, quant à lui, consiste à savoir, parmi toutes les figures planes de diamètre fixé, quelle est celle qui a l'aire maximale.

On donne les réponses à ces questions, ainsi que de leurs extensions en dimension n quelconque, en introduisant le minimum d'objets d'analyse et de théorie géométrique de la mesure nécessaires. On examine aussi leurs extensions à des contextes géométriques non euclidiens (groupes, variétés riemanniennes), et on fait le lien avec certaines méthodes de réarrangement.

Une partie de cette présentation est issue du livre d'Hervé Pajot et l'auteur ([36]).

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 2017. Une invitation à la théorie géométrique de la mesure. Éditions de l'École polytechnique, 2017.

Partie I. Quelques éléments de théorie de la mesure

On présente ici brièvement quelques définitions et propriétés élémentaires en théorie de la mesure, qui seront utilisées dans la suite de ces notes, et dont on trouvera un exposé par exemple dans [12, Ch. 1] (voir aussi [36, Ch. 1]).

1. Définitions et propriétés générales

Si X est un ensemble, on notera $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Si $A \subset X$, on notera $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A, c'est-à-dire

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in X \smallsetminus A. \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.2. Soit X un ensemble. Une *mesure positive* sur X est une application $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ telle que

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,
(2) pour toute suite $(A_k)_{k\geqslant 1}$ de parties de X et tout $A \subset \bigcup_{k\geqslant 1} A_k$,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \mu(A_k).$$

On dit aussi que (X, μ) est un *espace mesuré.*

On donne ici des premiers exemples de mesures.

Exemple 1.3. Soit X un ensemble.

(1) Pour tout $x \in X$, on définit δ_x sur X par $\delta_x(A) = \chi_A(x)$ (où χ_A désigne la fonction indicatrice de A). On vérifie facilement que δ_x est une mesure sur X, appelée mesure de Dirac au point x.

(2) Pour toute partie $A \subset X$, on pose $\mu(A) = \#A$, où $\#A$ désigne le cardinal de A dans $[0, +\infty]$. L'application μ est clairement une mesure sur X, appelée mesure de comptage sur X.

On définit maintenant la restriction d'une mesure à une partie :

Définition 1.4. Soient X un ensemble, μ une mesure sur X et $A \subset X$. On définit la *mesure μ restreinte à A*, notée $\mu \llcorner A$, par

$$\mu \llcorner A(B) = \mu(A \cap B)$$

pour tout $B \subset X$. On notera que $\mu \llcorner A$ est encore une mesure sur X.

Si (X, μ) est un ensemble mesuré, certaines parties sont dites mesurables :

Définition 1.5. Soient X un ensemble et μ une mesure sur X. Si $A \subset X$, on dit que A est *mesurable* (ou μ-mesurable) si, pour tout $B \subset X$,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Voici quelques propriétés des ensembles mesurables :

Proposition 1.6. *Soient X un ensemble et μ une mesure sur X.*

(1) *Si $A \subset X$ et $\mu(A) = 0$, alors A est mesurable.*

(2) *Si $A \subset X$, A est mesurable si, et seulement si, $X \setminus A$ est mesurable.*

(3) *Si $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite d'ensembles mesurables, alors $\bigcup_{k \geqslant 1} A_k$ et $\bigcap_{k \geqslant 1} A_k$ sont mesurables.*

(4) *Si $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{k \geqslant 1} A_k\right) = \sum_{k \geqslant 1} \mu(A_k).$$

(5) *Si $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite d'ensembles mesurables avec $A_k \subset A_{k+1}$ pour tout k, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{k \geqslant 1} A_k\right) = \lim_{k \to +\infty} \mu(A_k).$$

(6) *Si $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite d'ensembles mesurables avec $A_k \supset A_{k+1}$ pour tout k et $\mu(A_1) < +\infty$, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{k \geqslant 1} A_k\right) = \lim_{k \to +\infty} \mu(A_k).$$

En complément de la proposition précédente, on introduit la notion de propriété vraie presque partout :

Définition 1.7. Soit (X, μ) un espace mesuré. On considère une propriété P qui dépend de la variable $x \in X$ (i.e., $P(x)$ est définie pour tout $x \in X$). On dit que P est satisfaite *presque partout*, ou que $P(x)$ est vraie *pour presque tout $x \in X$* si

$$\mu\left(\{x \in X;\ P(x) \text{ n'est pas satisfaite}\}\right) = 0.$$

Remarque 1.8.

(1) La définition d'une mesure donnée dans la définition 1.2 correspond à ce qui est souvent appelé une mesure extérieure. Ici, $\mu(A)$ est définie pour toute partie A de X, même si A n'est pas mesurable.

(2) Si μ est une mesure sur X, alors pour toutes parties $A \subset B \subset X$, on a $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Définition 1.9. Soient X un ensemble et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une *tribu* si :

(1) $\varnothing \in \mathcal{T}$,
(2) pour tout $A \in \mathcal{T}$, $X \setminus A \in \mathcal{T}$,
(3) pour toute suite $(A_k)_{k \geqslant 1} \in \mathcal{T}$, $\bigcup_{k \geqslant 1} A_k \in \mathcal{T}$.

Si $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus de X, alors

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i := \{A \subset X;\ A \in \mathcal{T}_i \text{ pour tout } i \in I\}$$

est aussi une tribu de X. Cela permet de définir la tribu engendrée par une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ comme l'intersection de toutes les tribus de X contenant $\mathcal{A}$. C'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{A}$.

Définition 1.10. Soit (X, d) un espace métrique. La tribu engendrée par les ouverts de X s'appelle *tribu borélienne* de X. Les éléments de la tribu borélienne sont appelés *ensembles boréliens*.

Définition 1.11. Soient X un ensemble et μ une mesure sur X.

(1) La mesure μ est dite *régulière* si, pour tout $A \subset X$, il existe un ensemble mesurable $B \supset A$ tel que $\mu(A) = \mu(B)$.

(2) Si (X, d) est un espace métrique, μ est dite *borélienne* si tout ensemble borélien est mesurable.

(3) Si (X, d) est un espace métrique, μ est dite *borélienne régulière* si μ est borélienne et, pour tout $A \subset X$, il existe un borélien $B \supset A$ tel que $\mu(A) = \mu(B)$.

(4) Si (X, d) est un espace métrique, μ est une *mesure de Radon* si μ est borélienne régulière et $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact $K \subset X$.

Voici des exemples de mesures de Radon :

Exemple 1.12.

(1) La mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^n$, qui sera définie plus bas (section 4) est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^n$ (voir la proposition 4.33).

(2) Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $x \in X$, la mesure δ_x (voir l'exemple 1.3) est une mesure de Radon.

(3) Soit (X, d) un espace métrique. La mesure de comptage sur A (voir l'exemple 1.3) est une mesure borélienne régulière. C'est une mesure de Radon si, et seulement si, tout compact de X est un ensemble fini, c'est-à-dire X est un espace discret.

La propriété suivante sera utilisée par la suite :

Proposition 1.13. *Soient (X, d) un espace métrique et μ une mesure borélienne régulière sur X. Soit $A \subset X$ mesurable avec $\mu(A) < +\infty$. Alors $\nu := \mu \llcorner A$ est une mesure de Radon.*

Une notion importante est celle de mesure σ-finie :

Définition 1.14. Soient X un ensemble et μ une mesure sur X. On dit que μ est *σ-finie* si il existe une famille dénombrable de parties $(X_k)_{k\geqslant 1} \subset X$ telles que $X = \bigcup_{k\geqslant 1} X_k$ et $\mu(X_k) < +\infty$ pour tout $k \geqslant 1$.

Par exemple, la mesure de comptage sur X est σ-finie si, et seulement si, X est fini ou dénombrable.

Enfin, étant donnés deux ensembles munis chacun d'une mesure, on peut munir leur produit cartésien d'une mesure produit comme suit :

Définition 1.15. Soient X, Y des ensembles, μ une mesure sur X, ν une mesure sur Y. On définit la mesure $\mu \times \nu : X \times Y \to [0, +\infty]$ de la façon suivante : si $S \subset X \times Y$, on pose

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\left(\sum_{i\geqslant 1} \mu(A_i)\nu(B_i)\right)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les familles dénombrables d'ensembles μ-mesurables $(A_i)_{i\geqslant 1}$ inclus dans X et toutes les familles dénombrables d'ensembles ν-mesurables $(B_i)_{i\geqslant 1}$ inclus dans Y telles que

$$S \subset \bigcup_{i\geqslant 1} A_i \times B_i.$$

La mesure $\mu \times \nu$ est appelée *mesure produit* de μ et de ν.

2. Propriétés d'approximation

Un phénomène important concernant les mesures boréliennes est constitué par leurs propriétés d'approximation :

Théorème 2.16. *Soient (X, d) un espace métrique et μ une mesure de Radon sur X.*

(1) *Soit $A \subset X$. On suppose qu'il existe une famille dénombrable d'ouverts $(V_k)_{k\geqslant 1}$ tels que $\mu(V_k) < +\infty$ pour tout $k \geqslant 1$ et $A \subset \bigcup_{k\geqslant 1} V_k$, alors*

$$\mu(A) = \inf_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \supset A}} \mu(U),$$

(2) *On suppose qu'il existe une famille dénombrable de compacts $(K_m)_{m\geqslant 1}$ tels que $X = \bigcup_{m\geqslant 1} K_m$. Alors, pour tout ensemble μ-mesurable $A \subset X$,*

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset A}} \mu(K).$$

On notera que A n'est pas supposé mesurable dans (1).

3. Fonctions mesurables et intégrale

On se contente ici de rappeler les définitions des fonctions mesurables et de leurs intégrales, ainsi que certaines propriétés qui seront utilisées par la suite, renvoyant par exemple à [12, 15, 40] pour une présentation détaillée.

3.1. Fonctions mesurables

Définition 3.17. Soient X un ensemble, Y un espace métrique et μ une mesure sur X. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est *mesurable* (ou μ-mesurable) si, pour tout ouvert $\omega \subset Y$, $f^{-1}(\omega)$ est μ-mesurable.

On notera que, si f est mesurable, alors pour tout borélien $E \subset Y$, $f^{-1}(E)$ est μ-mesurable.

Proposition 3.18 ([12, Ch. 1, §1.1, Th. 6])
Soit $(f_k)_{k \geqslant 1} : X \to [-\infty, +\infty]$ *une suite de fonctions mesurables. Alors* $\sup_k f_k$*,* $\inf_k f_k$*,* $\overline{\lim} f_k$ *et* $\underline{\lim} f_k$ *sont mesurables.*

Dans cette proposition, $[-\infty, +\infty]$ est muni de la topologie, donnée par la métrique standard $d(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$, avec la convention $\arctan(-\infty) = -\pi/2$ et $\arctan(+\infty) = \pi/2$.

3.2. Intégration des fonctions mesurables

Dans toute cette section, soient X un ensemble et μ une mesure sur X.

Définition 3.19. On appelle *fonction simple* sur X toute fonction $f : X \to [0, +\infty[$ telle que l'ensemble $f(X)$ est fini.

Si $f : X \to [0, +\infty[$ est une fonction simple, il existe $N \geqslant 1$, des réels $a_1, \ldots, a_N \geqslant 0$ et des ensembles $A_1, \ldots, A_N \subset X$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{1}_{A_i}, \tag{3.20}$$

et f est mesurable si, et seulement si, tous les A_i sont mesurables. On rappelle que $\mathbf{1}_{A_i}$ est la fonction indicatrice de A_i, définie dans (1.1).

Définition 3.21. Soit $f : X \to [0, +\infty[$ simple et mesurable. On définit l'*intégrale de f sur X par rapport à la mesure μ* par

$$\int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i),$$

si f s'écrit (3.20). On convient ici que, si $a_i = 0$ et $\mu(A_i) = +\infty$, alors $a_i \mu(A_i) = 0$.

On vérifie que cette définition ne dépend pas de la façon dont f est décomposée, i.e.,

$$\text{si } f = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{M} b_j \mathbf{1}_{B_j}, \quad \text{alors } \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{M} b_j \mu(B_j).$$

On définit alors l'intégrale d'une fonction mesurable positive quelconque :

Définition 3.22. Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On définit $\int_X f(x)d\mu(x)$ comme la borne supérieure des $\int_X s(x)d\mu(x)$, prise sur toutes les fonctions simples mesurables $s : X \to [0, +\infty[$ telles que $0 \leqslant s(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in X$.

Remarque 3.23. On convient que la borne supérieure dans la définition 3.22 vaut $+\infty$ si l'ensemble des $\int_X s(x)d\mu(x)$, où s parcourt l'ensemble des fonctions simples mesurables $s : X \to [0, +\infty[$ telles que $0 \leqslant s(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in X$, n'est pas majoré. On peut donc avoir $\int_X f(x)d\mu(x) = +\infty$, même si f ne prend jamais la valeur $+\infty$. Par exemple, si $X = \mathbb{N}^*$ muni de la mesure de comptage, et si $f(n) = 1/n$ pour tout $n \in X$, alors l'intégrale de f vaut $+\infty$.

Passons maintenant au cas où $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable.

Définition 3.24. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

(1) On dit que f est *intégrable* (par rapport à la mesure μ) si $\int_X |f(x)| \, d\mu(x) < +\infty$.

(2) Si f est intégrable, on définit l'intégrale de f par

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f^+(x)d\mu(x) - \int_X f^-(x)d\mu(x), \tag{3.25}$$

où $f^+(x) = \max(0, f(x))$ et $f^-(x) = -\min(0, f(x))$.

On notera que $|f| = f^+ + f^-$, de sorte que, si f est intégrable, alors $\int_X f^+(x)d\mu(x) < +\infty$ et $\int_X f^-(x)d\mu(x) < +\infty$, ce qui fait que (3.25) est bien définie.

3.3. Espaces L^p

Définition 3.26. Soient (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. On définit $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ comme l'espace vectoriel des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que $\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty$. Si $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, on définit

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Pour traiter le cas $p = +\infty$, on définit d'abord la borne supérieure essentielle comme suit :

Définition 3.27. Soit (X, μ) un espace mesuré. Soit $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable. On considère

$$S := \{\alpha \in \mathbb{R};\ \mu(\{x \in X;\ f(x) > \alpha\}) = 0\}.$$

On définit la *borne supérieure essentielle* de f comme la borne inférieure de S (en convenant que cette borne inférieure vaut $+\infty$ si $S = \varnothing$). On note $\beta = \sup\operatorname{ess} f$.

Si $S \neq \varnothing$ et $\beta = \inf S$, on peut écrire

$$\{x \in X;\ f(x) > \beta\} := \bigcup_{n \geqslant 1} \{x \in X;\ f(x) > \beta + 1/n\},$$

ce qui montre que $\beta \in S$. Par définition de β, pour tout réel λ, $f(x) \leqslant \lambda$ pour presque tout $x \in X$ (voir la définition 1.7) si, et seulement si, $\beta \leqslant \lambda$.

Définition 3.28. Soit (X, μ) un espace mesuré.

(1) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. On dit que f est *essentiellement bornée* si la borne supérieure essentielle de f est finie.

(2) On appelle $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que $|f|$ est essentiellement bornée. On pose alors $\|f\|_\infty := \sup\operatorname{ess}|f|$.

Soit $p \in [1, +\infty]$. On vérifie facilement que $f \mapsto \|f\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Plus précisément, $\|f\|_p = 0$ si, et seulement si, $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in X$. Cette observation conduit à poser

$$\mathcal{N} := \{f : X \to \mathbb{R};\ f(x) = 0 \text{ pour presque tout } x \in X\},$$

puis à définir, pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(X, \mu)$ comme un espace quotient :

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{N}.$$

La norme d'une classe de fonctions dans $L^p(X, \mu)$ est la norme de n'importe lequel de ses représentants dans $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. On vérifie alors que $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur $L^p(X, \mu)$.

3.4. Théorème de convergence croissante

Ce théorème permet d'intervertir limite et intégrale pour une suite croissante de fonctions :

Théorème 3.29. *Soit* (X, μ) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $[0, +\infty]$. *On suppose que, pour presque tout* $x \in X$ *et tout* $n \geqslant 1$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, *Alors :*

(1) *il existe une fonction mesurable* $f : X \to [0, +\infty]$ *telle que, pour presque tout* $x \in X$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$,
(2) $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x)$.

On notera que les fonctions f et f_n peuvent valoir $+\infty$ en certains points, et que les intégrales considérées peuvent valoir $+\infty$.

3.5. Intégration par rapport à une mesure produit

On utilisera par la suite le théorème de Fubini, qui concerne l'intégrale d'une fonction par rapport à une mesure produit :

Théorème 3.30 **([12, Ch. 1, §1.4, Th. 1]).** *Soient* X, Y *des ensembles,* μ *une mesure sur* X *et* ν *une mesure sur* Y.

(1) *Si* $A \subset X$ *est* μ*-mesurable et* $B \subset Y$ *est* ν*-mesurable, alors* $A \times B$ *est* $\mu \times \nu$*-mesurable et* $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.
(2) *Soit* $S \subset X \times Y$, *supposé* σ*-fini pour* $\mu \times \nu$ *(voir la définition* 1.14*). Alors, pour* ν*-presque tout* $y \in Y$, *l'ensemble* $S_y := \{x \in X;\ (x, y) \in S\}$ *est* μ*-mesurable, pour* μ*-presque tout* $x \in X$, *l'ensemble* $S^x := \{y \in Y;\ (x, y) \in S\}$ *est* μ*-mesurable, et*

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y)d\nu(y) = \int_X \nu(S^x)d\mu(x).$$

(3) *Soit* $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ *une fonction* $\mu \times \nu$*-mesurable et* σ*-finie (ce qui veut dire que* $\{x \in X \times Y;\ f(x, y) \neq 0\}$ *est une réunion dénombrable de parties de* $X \times Y$ *de mesure finie pour la mesure* $\mu \times \nu$*). Alors la fonction* $y \mapsto \int_X f(x, y)d\mu(x)$ *est* ν*-mesurable, la fonction*

$x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est μ-mesurable et

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x).\end{aligned} \tag{3.31}$$

(4) *Soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction $\mu\times\nu$-intégrable et σ-finie. Alors, pour ν-presque tout $y \in Y$, $\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) < +\infty$ et la fonction $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ est ν-intégrable. Pour μ-presque tout $x \in X$, $\int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y) < +\infty$ et la fonction $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est μ-intégrable et* (3.31) *est satisfaite.*

4. La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

4.1. Définition

On définit la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

Définition 4.32.

(1) Un cube Q de $\mathbb{R}^n$ est un produit d'intervalles ayant tous la même longueur, appelée longueur du côté de Q.

(2) Si $Q \subset \mathbb{R}^n$ est un cube, dont la longueur du côté est égale à ℓ, on définit la mesure de Lebesgue de Q par

$$\mathcal{L}^n(Q) := \ell^n.$$

(3) On définit, pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$, la *mesure de Lebesgue* $\mathcal{L}^n$ de A par

$$\mathcal{L}^n(A) := \inf \sum_{j\geqslant 1} \mathcal{L}^n(Q_j)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les familles dénombrables de cubes $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $A \subset \bigcup_{j\geqslant 1} Q_j$.

On rappelle les propriétés suivantes ([15, Th. 2.40], [12, Ch. 1]) :

Proposition 4.33.

(1) *La fonction $\mathcal{L}^n$ est une mesure de Radon σ-finie sur $\mathbb{R}^n$.*

(2) *Si $A \subset \mathbb{R}^n$, A est mesurable pour $\mathcal{L}^n$ si, et seulement si, il existe des boréliens $A_0 \subset A \subset A_1$ tels que $\mathcal{L}^n(A_1 \setminus A_0) = 0$.*

(3) *Pour tout ensemble mesurable* $E \subset \mathbb{R}^n$*, il existe des ensembles* A_1, A_2, N_1, N_2 *tels que* $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \setminus N_2$*,* $\mathcal{L}^n(N_1) = \mathcal{L}^n(N_2) = 0$*,* A_1 *est une réunion dénombrable de fermés et* A_2 *une intersection dénombrable d'ouverts.*

(4) *La mesure* $\mathcal{L}^n$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *satisfait à la propriété de récurrence suivante : si* $n = k + l$ *avec* $k, l \in [\![1, n]\!]$ *et si on considère que* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$*, alors* $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l$*.*

(5) *Les conclusions du théorème* 2.16 *s'appliquent à la mesure* $\mathcal{L}^n$*, et portent habituellement le nom de « propriété de régularité de la mesure de Lebesgue ».*

Voici une conséquence importante du théorème de Fubini, qui permet de calculer l'intégrale de f^p (où f est une fonction mesurable positive) en fonction des mesures des ensembles de niveau de f :

***Lemme 4.34* (Principe de Cavalieri).** *Soient* X *un ensemble et* μ *une mesure* σ*-finie sur* X*. Soit* $1 \leqslant p < \infty$*. Alors, pour toute fonction mesurable* $f : X \to [0, +\infty]$*,*

$$\int_X f(x)^p d\mu(x) = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu\left(\{x \in X;\ f(x) > \lambda\}\right) d\mathcal{L}^1(\lambda).$$

Preuve du lemme 4.34*.* par le théorème de Fubini (on rappelle que la mesure μ est σ-finie),

$$\begin{aligned}\int_X f(x)^p d\mu(x) &= \int_X \int_0^{f(x)} p\lambda^{p-1}\, d\lambda\, d\mu(x) \\ &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \int_{\{x:\ f(x) > \lambda\}} d\mu(x)\, d\lambda. \qquad \square\end{aligned}$$

Dans la suite, on notera souvent $\int f(x)dx$ au lieu de $\int f(x) d\mathcal{L}^n(x)$ pour désigner l'intégrale calculée par rapport à la mesure de Lebesgue.

4.2. Mesure de Lebesgue et applications linéaires

On termine ce paragraphe par le comportement de la mesure de Lebesgue vis-à-vis des applications linéaires :

Proposition 4.35. *Soit* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *linéaire. Alors, pour tout ensemble* $A \subset \mathbb{R}^n$ *mesurable,* $\mathcal{L}^n(T(A)) = |\det T|\, \mathcal{L}^n(A)$*.*

5. La mesure de Hausdorff

Nous terminons ce chapitre en définissant la mesure de Hausdorff dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.36. Soit $s > 0$. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Pour tout $\delta > 0$, on définit

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \sum_i \alpha(s) \Big(\frac{d(E_i)}{2} \Big)^s,$$

où la borne inférieure est prise sur tous les recouvrements $A \subset \bigcup_i E_i$ par des parties $E_i \subset \mathbb{R}^n$ avec $d(E_i) \leqslant \delta$, et $\alpha(s) = \pi^{s/2} / \Gamma\left(s/2 + 1\right)$ et

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

pour tout $x > 0$. Il est clair que $\delta \mapsto \mathcal{S}^4_\delta(A)$ est décroissante.

(2) On pose alors

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leqslant +\infty.$$

On vérifie que $\mathcal{H}^s$ est bien une mesure, appelée *mesure de Hausdorff de dimension s.*

La mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ jouera un rôle central dans la formulation et la preuve de l'inégalité isopérimétrique (voir la partie III plus loin).

Partie II. L'inégalité isodiamétrique

Soient (X, d) un espace métrique et μ une mesure sur X. On rappelle que, si $A \subset X$, le diamètre de A, noté $d(A)$, est défini par

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

On fixe un réel $d > 0$ et on pose la question suivante : parmi tous les sous-ensembles bornés de X de diamètre d, quel est celui dont la mesure est maximale ? Cette question est appelée *problème isodiamétrique.*

6. Le cas de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

Le but de cette section est de montrer l'inégalité isodiamétrique pour $\mathcal{L}^n$:

***Théorème 6.1* (Inégalité isodiamétrique).** *Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$,*

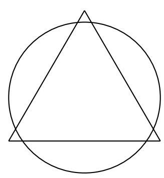
$$\mathcal{L}^n(A) \leqslant \alpha(n)\Big(\frac{d(A)}{2}\Big)^n, \tag{6.2}$$

où

$$\alpha(n) := \mathcal{L}^n(B(0,1)). \tag{6.3}$$

En d'autres termes, la mesure de A est inférieure à celle de la boule euclidienne de même diamètre que A.

On remarque d'abord que, si A est de diamètre d, A n'est pas, en général, inclus dans une boule euclidienne de diamètre d (si c'était le cas, la preuve de (6.2) serait triviale !). Ainsi, il n'est pas possible d'inclure un triangle équilatéral de diamètre 2 dans un disque de même diamètre :



Nous allons présenter deux preuves de l'inégalité isodiamétrique. La première repose sur une construction géométrique, appelée symétrisation de Steiner, qu'on présente maintenant. La deuxième utilise l'inégalité de Brunn-Minkowski (voir la section 6.2).

6.1. La symétrisation de Steiner

On fixe des vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^n$ avec $|a| = 1$. On définit

$$L_b^a := \{b + ta;\ t \in \mathbb{R}\}$$

et

$$P_a := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Définition 6.4. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ avec $|a| = 1$. On définit la *symétrisation de Steiner* par rapport à l'hyperplan P_a de la manière suivante : si $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$S_a(A) := \bigcup_{\substack{b \in P_a \\ A \cap L_b^a \neq \varnothing}} \Big\{ b + ta;\ |t| \leqslant \frac{1}{2} \mathcal{L}^1(A \cap L_b^a) \Big\}.$$

En termes plus intuitifs, on écrit A comme la réunion disjointe des $A \cap L_b^a$ pour $b \in P_a$. Si $A \cap L_b^a$ n'est pas vide, on considère sa mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle, et on le remplace par le segment centré en b, de même direction que L_b^a, de longueur totale égale à la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle de $A \cap L_b^a$.

Voici des propriétés de la symétrisation de Steiner :

Proposition 6.5 **([12, Ch. 1, §2.2, Lem. 2]).** *On reprend les notations de la définition* 6.4. *Alors :*

(1) $d(S_a(A)) \leqslant d(A)$,

(2) *si A est mesurable, alors $S_a(A)$ l'est aussi, et $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$.*

On aura besoin du

Lemme 6.6. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ mesurable. Alors*

$$A := \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \big\}$$

est $\mathcal{L}^{n+1}$ mesurable.

Preuve du lemme 6.6. Soient

$$B := \{ x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = +\infty \}$$

et

$$C := \{ x \in \mathbb{R}^n;\ 0 \leqslant f(x) < +\infty \}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $k \geqslant 1$, soit

$$C_{j,k} := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n;\ \frac{j}{k} \leqslant f(x) < \frac{j+1}{k} \Big\},$$

de sorte que, pour tout $k \geqslant 1$, $C = \bigcup_{j\geqslant 0} C_{j,k}$. On définit aussi

$$D_k = \bigcup_{j\geqslant 0} (C_{j,k} \times [0, j/k]) \bigcup (B \times [0, +\infty]) ,$$
$$E_k = \bigcup_{j\geqslant 0} (C_{j,k} \times [0, (j+1)/k]) \bigcup (B \times [0, +\infty])$$

et

$$D = \bigcup_{k\geqslant 1} D_k, \ E = \bigcap_{k\geqslant 1} E_k.$$

Pour tout $k \geqslant 1$, D_k et E_k sont $\mathcal{L}^{n+1}$ mesurables et $D_k \subset A \subset E_k$. On a donc $D \subset A \subset E$, et les ensembles D et E sont $\mathcal{L}^{n+1}$ mesurables. De plus, pour tout $R > 0$ et tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{n+1} ((E \smallsetminus D) \cap B(0, R)) &\leqslant \mathcal{L}^{n+1} ((E_k \smallsetminus D_k) \cap B(0, R)) \\ &\leqslant \frac{1}{k} \mathcal{L}^n(B(0, R)),\end{aligned}$$

ce qui implique $\mathcal{L}^{n+1}((E \smallsetminus D) \cap B(0, R)) = 0$, donc $\mathcal{L}^{n+1}(E \smallsetminus D) = 0$. Ainsi, $\mathcal{L}^{n+1}(A \smallsetminus D) = 0$, ce qui montre que A est $\mathcal{L}^{n+1}$ mesurable. □

Preuve de la proposition 6.5. Pour (1), il suffit de le faire quand $d(A) < +\infty$. Il suffit aussi de supposer que A est fermé : en effet, en général, on aura

$$S_a(A) \subset S_a(\overline{A}), \quad \text{donc} \quad d(S_a(A)) \leqslant d(S_a(\overline{A})) \leqslant d(\overline{A}) = d(A).$$

Ainsi, on peut supposer A compact. Comme A est borné, donc inclus dans une boule euclidienne de centre 0, $S_a(A)$ est inclus dans la même boule, donc borné aussi.

Soient $\varepsilon > 0$ et $x, y \in S_a(A)$ tels que $d(S_a(A)) \leqslant |x - y| + \varepsilon$. On décompose

$$x = b + \langle x, a\rangle a \quad \text{et} \quad y = c + \langle y, a\rangle a.$$

En d'autres termes, b (resp. c) est la projection orthogonale de x (resp. y) sur P_a. On définit

$$\begin{aligned}r &:= \inf \{t;\ b + ta \in A\} ,\\ s &:= \sup \{t;\ b + ta \in A\} ,\\ u &:= \inf \{t;\ c + ta \in A\} ,\\ v &:= \sup \{t;\ c + ta \in A\} .\end{aligned}$$

On suppose que $v-r \geqslant s-u$ (raisonnement analogue si $v-r < s-u$). Alors

$$\begin{aligned} v-r &\geqslant \tfrac{1}{2}(v-r)+\tfrac{1}{2}(s-u) \\ &= \tfrac{1}{2}(s-r)+\tfrac{1}{2}(v-u) \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^1(A\cap L_b^a)+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}^1(A\cap L_c^a). \end{aligned}$$

Comme $x \in S_a(A)$ et $|\langle x,a\rangle| = |x-b|$, on a $|\langle x,a\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A\cap L_b^a)$, et de même $|\langle y,a\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A\cap L_c^a)$. Ainsi,

$$v-r \geqslant |\langle x,a\rangle| + |\langle y,a\rangle| \geqslant |\langle x,a\rangle - \langle y,a\rangle| .$$

On a donc

$$\begin{aligned} (d(S_a(A))-\varepsilon)^2 &\leqslant |x-y|^2 \\ &= |b-c|^2 + |\langle x,a\rangle - \langle y,a\rangle|^2 \\ &\leqslant |b-c|^2 + |v-r|^2 \\ &\leqslant |(b+ra)-(c+va)|^2 \\ &\leqslant d(A)^2, \end{aligned} \tag{6.7}$$

car $b+ra \in A$ et $c+va\in A$ puisque A est fermé. Comme (6.7) est vraie pour tout $\varepsilon>0$, on obtient bien (1).

Pour (2), il suffit de le faire quand $a=e_n=(0,\dots,0,1)$, par invariance de $\mathcal{L}^n$ par rotation (voir la proposition 4.35). Ainsi, $P_a=\mathbb{R}^{n-1}$. Le théorème de Fubini montre que, si $f(b) := \mathcal{L}^1(A\cap L_b^{e_n})$ pour tout $b\in\mathbb{R}^{n-1}$, alors f est $\mathcal{L}^{n-1}$ mesurable et

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{b\in\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db.$$

Comme

$$S_{e_n}(A) = \left\{(b,y)\in\mathbb{R}^n;\ -\frac{f(b)}{2} \leqslant y \leqslant \frac{f(b)}{2}\right\} \setminus \{(b,0);\ A\cap L_b^a = \varnothing\},$$

le lemme 6.6 montre que $S_{e_n}(A)$ est mesurable et

$$\mathcal{L}^n(S_{e_n}(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db = \mathcal{L}^n(A). \qquad \square$$

Preuve du théorème 6.1. L'idée est la suivante : si A est inclus dans la boule euclidienne de centre 0 et de même diamètre que A, la conclusion est immédiate. Cette inclusion n'est pas vraie en général, mais on va appliquer plusieurs symétrisations de Steiner à A pour le rendre symétrique par rapport à 0, ce qui diminuera son diamètre sans changer sa mesure, et on pourra conclure ainsi car l'ensemble obtenu par ces transformations sera inclus dans la boule euclidienne de centre 0 et de même diamètre que A.

Il suffit de faire la preuve quand A est de diamètre fini. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $A_1 = S_{e_1}(A)$, $A_k := S_{e_k}(A_{k-1})$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et $A^* := A_n$.

On montre d'abord que A^* est symétrique par rapport à 0. Pour cela, on vérifie par récurrence sur k que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k est symétrique par rapport à $P_{e_1}, \dots, P_{e_k}$. C'est clair pour $k = 1$. Supposons que ce soit vrai pour A_k. Alors A_{k+1} est clairement symétrique par rapport à $P_{e_{k+1}}$. De plus, soient $j \in [\![1, k]\!]$ et S_j la réflexion orthogonale par rapport à P_{e_j}. Soit $b \in P_{e_{k+1}}$. Alors, comme $S_j(A_k) = A_k$ par hypothèse de récurrence,

$$\mathcal{L}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{L}^1(A_k \cap L_{S_j(b)}^{e_{k+1}}).$$

Cela implique que

$$\mathcal{L}^1\left(\{t;\ b + te_{k+1} \in A_{k+1}\}\right) = \mathcal{L}^1\left(\{t;\ S_j b + te_{k+1} \in A_{k+1}\}\right).$$

Ainsi, $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$.

Finalement, A^* est symétrique par rapport à $P_{e_1}, \dots, P_{e_n}$, donc par rapport à 0.

On en déduit que

$$A^* \subset B\Big(0, \frac{1}{2} d(A^*)\Big). \tag{6.8}$$

En effet, soit $x \in A^*$. Comme $-x \in A^*$, $2\,|x| \leqslant d(A^*)$, ce qui donne bien (6.8). On déduit de (6.8) que

$$\mathcal{L}^n(A^*) \leqslant \alpha(n)\Big(\frac{1}{2} d(A^*)\Big)^n,$$

où on rappelle que $\alpha(n)$ est défini dans (6.3). Pour conclure (rappelons que A n'a pas été supposé mesurable dans les hypothèses du théorème

6.1), comme $\overline{A}$ est mesurable, la proposition 6.5 montre que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &\leqslant \mathcal{L}^n(\overline{A})\\ &\leqslant \mathcal{L}^n((\overline{A})^*)\\ &\leqslant \alpha(n)\Big(\frac{1}{2}d((\overline{A})^*)\Big)^n\\ &\leqslant \alpha(n)\Big(\frac{1}{2}d(\overline{A})\Big)^n\\ &= \alpha(n)\Big(\frac{1}{2}d(A)\Big)^n,\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (6.2). □

6.2. Une autre approche via l'inégalité de Brunn-Minkowski

Nous allons donner une autre approche de l'inégalité isodiamétrique, qui repose sur *l'inégalité de Brunn-Minkowski*, que nous présentons maintenant.

Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$, on définit la somme de Minkowski de A et B par

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \exists a \in A \text{ et } b \in B \text{ tels que } x = a + b\}.$$

Proposition 6.9. *Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables non vides. On suppose $A + B$ mesurable. Alors*

$$\mathcal{L}^n(A + B)^{1/n} \geqslant \mathcal{L}^n(A)^{1/n} + \mathcal{L}^n(B)^{1/n}.$$

Remarque 6.10. Il peut arriver que $A+B$ ne soit pas mesurable, même si A et B le sont, voir l'appendice.

La proposition 6.9 possède une version fonctionnelle, appelée *inégalité de Prekopa-Leindler* :

Proposition 6.11. *Soient $\theta \in [0, 1]$ et u, v, w des fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^n$, telles que*

$$w(\theta x + (1 - \theta)y) \geqslant u(x)^\theta v(y)^{1-\theta} \tag{6.12}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)dx \geqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx\Big)^\theta \Big(\int_{\mathbb{R}^n} v(x)dx\Big)^{1-\theta}. \tag{6.13}$$

On va d'abord prouver la proposition 6.9 pour $n = 1$, puis la proposition 6.11 pour tout $n \geqslant 1$, et enfin, la proposition 6.9 pour tout $n \geqslant 2$.

Preuve de la proposition 6.9 *quand* $n = 1$. On suppose d'abord que A et B sont des compacts non vides de $\mathbb{R}$. Si on remplace A et B par $A + x$ et $B + y$ respectivement (avec $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques), $A + B$ est transformé en $A + B + x + y$, de sorte que les mesures de Lebesgue de A, B et $A + B$ restent inchangées. Comme A et B sont compacts, on peut les translater de sorte que $\sup A = \inf B = a \in \mathbb{R}$, et, quitte à translater encore, on peut supposer que $a = 0$, de sorte que $A \cap B = \{0\}$. On a donc $A + B \supset A \cup B$, donc

$$\mathcal{L}^1(A + B) \geqslant \mathcal{L}^1(A \cup B) = \mathcal{L}^1(A) + \mathcal{L}^1(B),$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

Si maintenant A et B sont des ensembles mesurables quelconques de mesure finie, soit $\varepsilon > 0$. Par la proposition 4.33, il existe des compacts A_ε et B_ε, inclus respectivement dans A et B et tels que

$$\mathcal{L}^1(A_\varepsilon) \geqslant \mathcal{L}^1(A) - \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^1(B_\varepsilon) \geqslant \mathcal{L}^1(B) - \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(A + B) \geqslant \mathcal{L}^1(A_\varepsilon + B_\varepsilon) &\geqslant \mathcal{L}^1(A_\varepsilon) + \mathcal{L}^1(B_\varepsilon) \\ &\geqslant \mathcal{L}^1(A) + \mathcal{L}^1(B) - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

et comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient l'inégalité voulue.

Enfin, si par exemple, $\mathcal{L}^1(A) = +\infty$, $A + B$ contient un translaté de A, donc est aussi de mesure infinie, ce qui rend l'inégalité triviale. $\square$

Preuve de la proposition 6.11. On raisonne par récurrence sur la dimension. Commençons par le cas $n = 1$. On suppose d'abord u et v bornées, et on peut donc supposer que $\|u\|_\infty = \|v\|_\infty = 1$. Soient $t \in [0, 1[$, $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) > t$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $v(y) > t$. On a alors $w(\theta x + (1 - \theta)y) > t$ par l'hypothèse (6.12). Ainsi, d'après le cas $n = 1$ de la proposition 6.9 (appliquée aux ensembles non vides $A := \{x \in \mathbb{R};\ u(x) > t\}$ et $B := \{y \in \mathbb{R};\ v(y) > t\}$), et en notant que $\{w > t\} \supset \theta A + (1 - \theta)B$ et utilisant la proposition 4.35,

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^1\left(\{z\in\mathbb{R};\ w(z)>t\}\right)\\&\qquad\geqslant\theta\mathcal{L}^1\left(\{x\in\mathbb{R};\ u(x)>t\}\right)+(1-\theta)\mathcal{L}^1\left(\{y\in\mathbb{R};\ v(y)>t\}\right).\end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant (4.34), la proposition 6.9 pour $n=1$ et l'inégalité arithmético-géométrique, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}w(x)dx&\geqslant\int_0^1\mathcal{L}^1\left(\{z\in\mathbb{R};\ w(z)>t\}\right)dt\\&\geqslant\theta\int_0^1\mathcal{L}^1\left(\{x\in\mathbb{R};\ u(x)>t\}\right)dt\\&\qquad\qquad+(1-\theta)\int_0^1\mathcal{L}^1\left(\{y\in\mathbb{R};\ v(y)>t\}\right)dt\\&=\theta\int_{\mathbb{R}}u(x)dx+(1-\theta)\int_{\mathbb{R}}v(x)dx\\&\geqslant\left(\int_{\mathbb{R}}u(x)dx\right)^{\theta}\left(\int_{\mathbb{R}}v(x)dx\right)^{1-\theta}\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

Dans le cas général, pour tout entier $j\geqslant 0$, on pose

$$u_j(x)=\begin{cases}u(x) & \text{si } u(x)\leqslant j,\\ 0 & \text{si } u(x)>j,\end{cases}$$

et on définit v_j de façon analogue. Comme $u_j\leqslant u$ et $v_j\leqslant v$, l'inégalité (6.12) est satisfaite avec u_j et v_j à la place de u et v dans le membre de droite. On en déduit (6.13) avec u_j et v_j dans le membre de droite, et on obtient la conclusion en faisant tendre j vers $+\infty$ et utilisant le théorème de convergence croissante (théorème 3.29).

On suppose maintenant le résultat prouvé en dimension $n-1$ pour un $n\geqslant 2$. On considère u,v,w vérifiant l'hypothèse de la proposition 6.11. Pour tout $q\in\mathbb{R}$, on pose

$$u_q(x)=u(x,q),\quad v_q(x)=v(x,q)\quad\text{et}\quad w_q(x)=w(x,q)$$

pour tout $x\in\mathbb{R}^{n-1}$. Le théorème de Fubini montre que u_q,v_q et w_q sont mesurables pour presque tout $q\in\mathbb{R}$. De plus, par hypothèse, pour tous $q_0,q_1\in\mathbb{R}$ tels que $q=\theta q_0+(1-\theta)q_1$ et tous $x,y\in\mathbb{R}^{n-1}$,

$$w_q(\theta x+(1-\theta)y)\geqslant u_{q_0}(x)^{\theta}v_{q_1}(y)^{1-\theta}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à w_q, u_{q_0} et v_{q_1}, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_q(x)dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_{q_0}(x)dx\right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_{q_1}(x)dx\right)^{1-\theta}.$$

D'après l'inégalité en dimension 1 appliquée aux fonctions

$$q \longmapsto \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_q(x)dx, \\ \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_q(x)dx\right), \\ \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_q(x)dx\right), \end{cases}$$

et le théorème de Fubini, on obtient que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} w(z)dz &= \int_{q\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_q(x)dx\right) dq \\ &\geqslant \left(\int_{q\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_q(x)dx\right) dq\right)^\theta \left(\int_{q\in\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_q(x)dx\right) dq\right)^{1-\theta} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(z)dz\right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^n} v(z)dz\right)^{1-\theta}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Preuve de la proposition 6.9 *pour* $n \geqslant 2$. Tout comme dans le cas $n = 1$, on peut supposer que A et B sont de mesure finie. On fixe $\theta \in [0,1]$ et on applique la proposition 6.11 avec $u = \chi_{A'}$, $v = \chi_{B'}$ et $w = \chi_{\theta A'+(1-\theta)B'}$ où A' et B' sont des parties mesurables de $\mathbb{R}^n$ qui seront choisies ensuite. L'inégalité (6.12) est trivialement satisfaite et on obtient donc

$$\mathcal{L}^n(\theta A' + (1-\theta)B') \geqslant \mathcal{L}^n(A')^\theta \mathcal{L}^n(B')^{1-\theta}. \tag{6.14}$$

et ce pour tout choix de $\theta \in [0,1]$. Si on choisit maintenant

$$A' = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)^{1/n}} A \quad \text{et} \quad B' = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)^{1/n}} B,$$

(6.14) signifie que

$$\mathcal{L}^n(\theta A' + (1-\theta)B') \geqslant 1, \tag{6.15}$$

d'après la proposition 4.35. Si on pose

$$\theta = \frac{\mathcal{L}^n(A)^{1/n}}{\mathcal{L}^n(A)^{1/n} + \mathcal{L}^n(B)^{1/n}},$$

on voit que

$$\theta A' + (1-\theta)B' = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)^{1/n} + \mathcal{L}^n(B)^{1/n}}(A+B),$$

et l'inégalité (6.15) donne bien la conclusion de la proposition 6.9. □

On explique maintenant comment déduire l'inégalité isodiamétrique (théorème 6.1) de l'inégalité de Brunn-Minkowski. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte. Il suffit de prouver (6.2) quand $\mathcal{L}^n(A) = 1$ (en effet, dans le cas général, on peut bien sûr supposer que $\mathcal{L}^n(A) > 0$; on pose alors $A' = \lambda A$ avec $\lambda > 0$ et $\lambda^{-n} = \mathcal{L}^n(A)$, et on obtient la conclusion en utilisant la proposition 4.35 et le fait que $d(A') = \lambda d(A)$).

On suppose donc A compact avec $\mathcal{L}^n(A) = 1$. Soit

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n;\ -x \in A\}.$$

Par la proposition 6.9 (on note que $\frac{1}{2}A$ et $\frac{1}{2}B$ sont compacts, donc aussi $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$),

$$\mathcal{L}^n(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)^{1/n} \geqslant \mathcal{L}^n(\tfrac{1}{2}A)^{1/n} + \mathcal{L}^n(\tfrac{1}{2}B)^{1/n}.$$

Comme $\mathcal{L}^n(\frac{1}{2}A) = \mathcal{L}^n(\frac{1}{2}B)$, on obtient donc

$$\mathcal{L}^n(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \geqslant \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B).$$

On vérifie maintenant que $d(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \leqslant 1$. En effet, soient $x, y \in \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Il existe $x_1 x_2, y_1, y_2 \in A$ tels que $x = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ et $y = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$. On a donc

$$|x-y| = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\right| \leqslant 1.$$

De plus, $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ est symétrique par rapport à 0, et est donc inclus dans la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $1/2$. Ainsi,

$$\mathcal{L}^n(A) \leqslant \mathcal{L}^n(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \leqslant \mathcal{L}^n(B\,(0, 1/2)) = \frac{\alpha(n)}{2^n},$$

ce qui termine la preuve quand A est compact. Dans le cas général, il suffit de prouver l'inégalité pour $\overline{A}$, comme dans la preuve donnée dans la section 6.1. □

6.3. Le problème de la stabilité

L'inégalité isodiamétrique assure que la boule euclidienne réalise le maximum de la mesure de Lebesgue parmi tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de diamètre fixé. La question de la stabilité de cette inégalité est la suivante : si $E \subset \mathbb{R}^n$ est de même diamètre que la boule euclidienne de rayon $r > 0$, comment mesurer l'écart de E à une boule ?

Pour répondre à cette question, on introduit le défaut isodiamétrique, défini par

$$\delta(E) := \left(\frac{d(E)}{2}\right)^n \frac{\alpha(n)}{\mathcal{L}^n(E)} - 1.$$

Une première réponse fait intervenir la différence symétrique entre E et une boule euclidienne de rayon 1. On rappelle la définition de la différence symétrique : pour tous $A, B \subset \mathbb{R}^n$,

$$A\Delta B := (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A). \tag{6.16}$$

On a alors ([30, Th. 1]) :

Théorème 6.17. *Soit $n \geqslant 2$. Il existe $C_n > 0$ tel que, pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable de diamètre 2* [(1)] *,*

$$C(n)\delta(E)^{1/2} \geqslant \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{L}^n(E\Delta B(x,1))}{\mathcal{L}^n(B(x,1))}.$$

En d'autres termes,

$$\mathcal{L}^n(B(x,1)) \geqslant \mathcal{L}^n(E)\left(1 + \frac{1}{C(n)^2}\left(\frac{\mathcal{L}^n(E\Delta B(x,1))}{\mathcal{L}^n(B(x,1))}\right)^2\right).$$

Cet énoncé indique, en particulier, que s'il y a égalité dans l'inégalité isodiamétrique pour l'ensemble E, alors la différence symétrique entre E et une certaine boule euclidienne est de mesure nulle.

[(1)] On a choisi cette normalisation pour simplifier les énoncés, et on peut toujours s'y ramener par dilatation.

On peut formuler une autre version de la stabilité pour l'inégalité isodiamétrique. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ de diamètre 2. On définit les rayons intérieur et extérieur de E par

$$r_E^{\mathrm{int}} := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \inf \{r > 0;\ B(x,1) \subset E + B(0,r)\}$$

et

$$r_E^{\mathrm{ext}} := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \inf \{r > 0;\ E \subset B(x,1+r)\}.$$

Une autre version de la stabilité pour l'inégalité isodiamétrique est alors ([30, Th. 2]) :

Théorème 6.18. *Soit $n \geqslant 2$. Il existe $C(n) > 0$ tel que, pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable de diamètre égal à 2,*

$$r_E^{\mathrm{int}} \leqslant C(n)\delta(E)^{1/n}$$

et

$$r_E^{\mathrm{ext}} \leqslant \begin{cases} C(2)\delta(E)^{1/2} & si\ n = 2, \\ C(3)\left(\delta(E)\max\left(\left|\ln(\delta(E))\right|, 1\right)\right)^{1/2} & si\ n = 3, \\ C(n)\delta(E)^{2/(n+1)} si\ n \geqslant 4. \end{cases}$$

7. Le cas du groupe de Heisenberg

La question de la validité de l'inégalité isodiamétrique peut être posée dans des contextes non euclidiens. On se concentre ici sur le cas du groupe de Heisenberg, que l'on présente maintenant.

On considère $X = \mathbb{R}^3$, qu'on munit de la loi de groupe (non commutative !) suivante : si $x = (x_1, x_2, t)$ et $y = (y_1, y_2, s)$, on pose

$$x \cdot y := \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, t + s + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}\right).$$

On notera $\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ muni de cette loi. Le groupe $\mathbb{H}$ est appelé *groupe de Heisenberg.*

Pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{H}$, on pose

$$T_\lambda(x) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 t).$$

Pour tout $\lambda > 0$, T_λ est un automorphisme de groupes, appelé dilatation.

Pour tout $x \in \mathbb{H}$, on pose

$$\|x\| := \left(\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 + t^2\right)^{1/4}$$

On vérifie immédiatement que $\left\|x^{-1}\right\| = \|-x\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{H}$. De plus, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{H}$,

$$\|T_\lambda x\| = \lambda \|x\| . \tag{7.19}$$

On définit alors, pour tous $x, y \in \mathbb{H}$,

$$d(x, y) = \left\|y^{-1} \cdot x\right\|.$$

On vérifie que d est une distance sur $\mathbb{H}$, et que d est invariante à gauche, ce qui signifie que, pour tous $a, x, y \in \mathbb{H}$, $d(a \cdot x, a \cdot y) = d(x, y)$.

Pour formuler le problème isodiamétrique dans $\mathbb{H}$, on introduit la mesure de Hausdorff sphérique de dimension 4. Soit $A \subset \mathbb{H}$. Pour tout $\delta > 0$, on définit

$$\mathcal{S}^4_\delta(A) := \inf \sum_i d(B_i)^4,$$

où la borne inférieure est prise sur tous les recouvrements $A \subset \bigcup_i B_i$ par des boules $B_i \subset \mathbb{H}$ avec $d(B_i) \leqslant \delta$. Il est clair que $\delta \mapsto \mathcal{S}^4_\delta(A)$ est décroissante. On pose alors

$$\mathcal{S}^4(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{S}^4_\delta(A) \leqslant +\infty.$$

On vérifie que $\mathcal{S}^4$ est bien une mesure. On peut montrer ([39, Prop. 2.1]) que, si $B \subset \mathbb{H}$ est une boule, alors

$$\mathcal{S}^4(B) = d(B)^4. \tag{7.20}$$

Comme la mesure $\mathcal{S}^4$ est homogène, au sens où

$$\mathcal{S}^4(\delta_\lambda(A)) = \lambda^4 \mathcal{S}^4(A)$$

pour tout $A \subset \mathbb{H}$ et tout $\lambda > 0$, on peut reformuler le problème isodiamétrique ainsi : quelle est la borne supérieure du quotient $\mathcal{S}^4(A)/d(A)^4$ parmi tous les sous-ensembles bornés $A \subset \mathbb{H}$ de diamètre non nul ? On définit donc la constante isodiamétrique de $\mathbb{H}$ par

$$C_d := \sup_{0 < d(A) < +\infty} \frac{\mathcal{S}^4(A)}{d(A)^4}. \tag{7.21}$$

L'identité (7.20) signifie que $C_d \geqslant 1$. On peut aussi montrer ([39, Th. 3.1]) qu'il existe des ensembles isodiamétriques, c'est-à-dire des ensembles $A \subset \mathbb{H}$ qui réalisent la borne supérieure dans (7.21). Toutefois ([39, Th. 3.5]) :

Théorème 7.22. *Les boules fermées de $\mathbb{H}$ pour la distance d ne sont pas des ensembles isodiamétriques. On a donc $C_d > 1$.*

Le problème isodiamétrique peut aussi être envisagé pour une autre distance, appelée distance de Carnot-Carathéodory. On introduit les champs de vecteurs

$$X = \partial_x + 2y\partial_z, \quad Y = \partial_y - 2x\partial_z, \quad T = \partial_t.$$

Soit $T > 0$. On dira qu'une courbe absolument continue $\gamma : [0, T] \to \mathbb{H}$ est admissible si, et seulement si, il existe des fonctions mesurables $h_1, h_2 : [0, T] \to \mathbb{R}$ telles que $h_1^2(t) + h_2^2(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in [0, T]$ et

$$\dot{\gamma}(t) = h_1(t)X(\gamma(t)) + h_2(t)Y(\gamma(t))$$

pour presque tout $t \in [0, T]$ (on rappelle qu'une fonction absolument continue est presque partout dérivable). On montre que, pour tous $x, y \in \mathbb{H}$, il existe une courbe admissible joignant x et y. On définit alors la distance de Carnot-Carathéodory de x et y comme la borne inférieure des $T > 0$ tels qu'il existe une courbe admissible $\gamma : [0, T] \to \mathbb{H}$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Cette distance est notée d_{CC}.

Si on considère le problème isodiamétrique pour la distance d_{CC}, les boules ne sont pas non plus solution de ce problème ([39, Th. 3.6]) :

Théorème 7.23. *Les boules fermées de $\mathbb{H}$ pour la distance d_{CC} ne sont pas des ensembles isodiamétriques. On a donc $C_{d_{\mathrm{CC}}} > 1$.*

Partie III. L'inégalité isopérimétrique

On peut formuler le problème isopérimétrique dans le plan de la manière suivante : parmi tous les domaines bornés $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ d'aire fixée, quel est celui de périmètre minimal ? La réponse à cette question est bien connue : en effet, si $\mathcal{A}(\Omega)$ est l'aire de Ω et $\operatorname{Per}\Omega$ son périmètre, on a l'inégalité suivante entre $\mathcal{A}(\Omega)$ et $\operatorname{Per}\Omega$:

$$\mathcal{A}(\Omega) \leqslant \frac{(\operatorname{Per}\Omega)^2}{4\pi}, \tag{7.1}$$

et l'égalité dans (7.1) a lieu seulement lorsque Ω est un disque. En d'autres termes, à aire fixée, le domaine de plus petit périmètre est le disque. L'inégalité (7.1) est appelée inégalité isopérimétrique.

Dans cette partie, nous examinons la validité de (7.1) dans $\mathbb{R}^n$ et certaines de ses conséquences. On considère aussi d'autres contextes géométriques.

8. Une preuve dans le plan

On rappelle qu'une courbe de Jordan est l'image, notée $\mathcal{C}$, d'une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, où $I = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et γ est une fonction continue sur I et simple (au sens où, pour tous $x, y \in I$ avec $x \neq y$, si $\gamma(x) = \gamma(y)$, alors $\{x, y\} = \{a, b\}$). Le théorème de Jordan ([4, Th. 9.2.1]) affirme alors que $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathcal{C}$ a exactement deux composantes connexes, l'une bornée (appelée intérieur de $\mathcal{C}$ et notée C_{int}) et l'autre non bornée (appelée extérieur de $\mathcal{C}$ et notée C_{ext}).

On va prouver la version suivante de l'inégalité isopérimétrique :

Proposition 8.2. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de Jordan de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$. Alors*

$$\ell(\mathcal{C})^2 \geqslant 4\pi \mathcal{A}(C_{\mathrm{int}}), \tag{8.3}$$

où $\ell(\mathcal{C})$ désigne la longueur de $\mathcal{C}$. De plus, il y a égalité dans (8.3) *si, et seulement si, $\mathcal{C}$ est un cercle.*

Démonstration. On suit la présentation de [41, Ch. 4]. Il suffit de prouver la conclusion quand $\ell(\mathcal{C}) = 2\pi$ (raisonner par homothétie). Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de $\mathcal{C}$ par longueur d'arc. Si on note $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a donc

$$\big(\gamma_1'(t)\big)^2 + \big(\gamma_2'(t)\big)^2 = 1$$

pour tout $t \in [0, 2\pi]$, donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\big(\gamma_1'(t)\big)^2 + \big(\gamma_2'(t)\big)^2 \Big)\, dt = 1.$$

L'identité de Parseval montre donc que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 \left(|\widehat{\gamma_1}(n)|^2 + |\widehat{\gamma_2}(n)|^2\right) = 1. \tag{8.4}$$

Par la formule de Stokes,

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_{\text{int}}) = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} \left(\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_2(s)\gamma_1'(s)\right) ds\right|,$$

et l'identité de Parseval donne donc

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_{\text{int}}) = \pi\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\left(\widehat{\gamma_1}(n)\overline{\widehat{\gamma_2}(n)} - \widehat{\gamma_2}(n)\overline{\widehat{\gamma_1}(n)}\right)\right|,$$

où on a aussi utilisé que γ_1 et γ_2 sont à valeurs réelles, ce qui entraîne que $\widehat{\gamma_1}(n) = \overline{\widehat{\gamma_1}(-n)}$ et $\widehat{\gamma_2}(n) = \overline{\widehat{\gamma_2}(-n)}$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \left|\widehat{\gamma_1}(n)\overline{\widehat{\gamma_2}(n)} - \widehat{\gamma_2}(n)\overline{\widehat{\gamma_1}(n)}\right| &\leqslant 2\,|\widehat{\gamma_1}(n)\widehat{\gamma_2}(n)| \\ &\leqslant |\widehat{\gamma_1}(n)|^2 + |\widehat{\gamma_2}(n)|^2, \end{aligned} \tag{8.5}$$

on obtient donc, en utilisant (8.4) et le fait que $|n| \leqslant |n|^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_{\text{int}}) \leqslant \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 \left(|\widehat{\gamma_1}(n)|^2 + |\widehat{\gamma_2}(n)|^2\right) = \pi,$$

ce qui donne bien (8.3).

On suppose maintenant que $\mathcal{A}(\mathcal{C}_{\text{int}}) = \pi$. Les calculs précédents montrent que $\widehat{\gamma_1}(n) = \widehat{\gamma_2}(n) = 0$ si $n \notin \{-1, 0, 1\}$. On obtient donc qu'il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_1(t) = a_1 + b_1 e^{it} + \overline{b_1} e^{-it} \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = a_2 + b_2 e^{it} + \overline{b_2} e^{-it}.$$

L'identité (8.4) assure donc que

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 = \frac{1}{2},$$

et, comme il y a égalité dans (8.5), $|b_1| = |b_2|$, donc $|b_1| = |b_2| = 1/2$. On peut donc noter

$$b_1 = \frac{1}{2}e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{1}{2}e^{i\beta}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comme $1 = 2\left|b_1\overline{b_2} - b_2\overline{b_1}\right|$, on obtient que $\alpha - \beta = k\pi/2$, où $k \in \mathbb{Z}$ est impair. Finalement, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_1(t) = a_1 + \cos(t+\alpha) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = a_2 \pm \sin(t+\alpha),$$

ce qui montre bien que $\mathcal{C}$ est un cercle. Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est un cercle, il est immédiat que (8.3) est une égalité. $\square$

9. Une approche de l'inégalité isopérimétrique via le contenu de Minkowski

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable tel que $\mathcal{L}^n(A) < +\infty$. L'inégalité isopérimétrique cherche à comparer $\mathcal{L}^n(A)$ et la « mesure du bord de A ».

Une première façon de calculer cette mesure de bord consiste à utiliser le contenu de Minkowski, défini comme suit :

Définition 9.6. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Le *contenu de Minkowski supérieur* de dimension $n-1$ de A est défini par

$$\mathcal{M}^{*,n-1}(A) := \varlimsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x,A) < r\})}{r},$$

où $d(x,A) = \inf_{y\in A} |x-y|$ et $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne.

(2) Le *contenu de Minkowski inférieur* de dimension $n-1$ de A est défini par

$$\mathcal{M}_*^{n-1}(A) := \varliminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x,A) < r\})}{r}.$$

(3) Si les contenus de Minkowski supérieur et inférieur sont égaux, on définit le *contenu de Minkowski* de dimension $n-1$ de A par

$$\mathcal{M}^{n-1}(A) := \mathcal{M}^{*,n-1}(A) = \mathcal{M}_*^{n-1}(A).$$

Ce contenu de Minkowski n'est pas une mesure, mais il coïncide avec la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ pour les compacts $n-1$ rectifiables, c'est-à-dire les compacts $K \subset \mathbb{R}^n$ qui peuvent s'écrire comme $K = f(C)$, où $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne et $C \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est compact :

Proposition 9.7. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact $(n-1)$-rectifiable. Alors*

$$\mathcal{M}^{n-1}(K) = \mathcal{H}^{n-1}(K).$$

Pour cet énoncé, on pourra se reporter à [14, Th. 3.2.39]. On peut alors énoncer une version de l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$, dont la preuve utilise le contenu de Minkowski et l'inégalité de Brunn-Minkowski :

Théorème 9.8. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact $(n-1)$-rectifiable. Alors*

$$\mathcal{L}^n(K)^{(n-1)/n} \leqslant n^{-1}\alpha(n)^{-1/n}\mathcal{H}^{n-1}(\partial K). \tag{9.9}$$

On rappelle que $\alpha(n)$ est défini par (6.3).

On utilisera l'expression de $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A)$ donnée par la proposition 9.7, valable sous les hypothèses du théorème 9.8. Pour tout $r > 0$, l'inégalité de Brunn-Minkowski (Proposition 6.9) donne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A + B(0,r)) &\geqslant \left(\mathcal{L}^n(A)^{1/n} + \mathcal{L}^n(B(0,r))^{1/n}\right)^n \\ &= \left(\mathcal{L}^n(A)^{1/n} + \alpha(n)^{1/n}r\right)^n \\ &\geqslant \mathcal{L}^n(A) + n\mathcal{L}^n(A)^{(n-1)/n}\alpha(n)^{1/n}r,\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\mathcal{L}^n(A + B(0,r)) - \mathcal{L}^n(A)}{r} \geqslant n\mathcal{L}^n(A)^{(n-1)/n}\alpha(n)^{1/n},$$

ce qui donne donc l'inégalité (9.9) quand on fait tendre r vers 0. $\square$

10. Ensembles de périmètre fini et inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$

Cette section est consacrée à l'inégalité isopérimétrique pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ dits de périmètre fini. On commence par quelques éléments sur les espaces de Sobolev et de fonctions à variations bornées.

10.1. Un aperçu concernant les espaces de Sobolev

On donne ici un très bref aperçu de la théorie des espaces de Soboev dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$, renvoyant à [1, 6, 11, 31, 46] pour une présentation complète.

10.1.1. *Dérivée faible.* Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$ et tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a, en intégrant par parties,

$$\int_U u(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx.$$

Si la fonction u n'est pas de classe C^1, cette formule n'a pas de sens, mais on s'inspire de ce calcul pour définir une notion de dérivée faible :

Définition 10.10. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. On dira que $\partial u/\partial x_i = v$ si, et seulement si, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$,

$$\int_U u(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_U v(x)\varphi(x)dx.$$

Dans ce cas, $\partial u/\partial x_i$ est une (la) dérivée faible de u par rapport à la variable x_i.

Remarque 10.11. Si u est de classe C^1 sur U, alors ses dérivées faibles dans U coïncident avec ses dérivées au sens classique.

Si elle existe, la dérivée faible de u par rapport à la variable x_i est unique :

Lemme 10.12. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$. Si $v, w \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ sont des dérivées faibles de u par rapport à la variable x_i, alors $v = w$ presque partout dans U.*

10.1.2. *Espaces de Sobolev*

Définition 10.13. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. On appelle $W^{1,p}(U)$ l'espace des fonctions $u : U \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout i avec $1 \leqslant i \leqslant n$, la dérivée faible $\partial u/\partial x_i$ existe et appartient à $L^p(U)$. Si $u \in W^{1,p}(U)$, on définit

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_U |u(x)|^p\,dx + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int_U \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} & \\ & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty, \\ \|u\|_{L^\infty(U)} + \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \|\partial u/\partial x_i\|_{L^\infty(U)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

On vérifie que $\|\cdot\|_{W^{1,p}(U)}$ est une norme.

Exemple 10.14. Si $U = B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $u(x) = |x|^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$, la fonction $u \in W^{1,p}(U)$ si, et seulement si, $\alpha < (n-p)/p$. On a, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}}.$$

10.1.3. *Un résultat d'approximation : le théorème de Friedrichs*

Théorème 10.15 **(Théorème d'approximation de Friedrichs)**

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u \in W^{1,p}(U)$ avec $p \in [1,+\infty[$. Alors il existe une suite de fonctions $(u_j)_{j\geqslant 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :

(1) *$u_j \to u$ dans $L^p(U)$,*

(2) *pour tout ouvert $V \Subset U$ (ce qui signifie que $\overline{V}$ est un compact inclus dans U) et tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial u_j/\partial x_i \to \partial u/\partial x_i$ dans $L^p(V)$.*

Si $U = \mathbb{R}^n$ et $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, alors il existe une suite de fonctions $(u_j)_{j\geqslant 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $u_j \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 10.16. On notera que, dans le théorème 10.15, on n'obtient pas la convergence de u_j vers u dans $W^{1,p}(U)$ en général, sauf dans le cas $U = \mathbb{R}^n$. En général, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)|_U$ n'est pas dense dans $W^{1,p}(U)$, voir par exemple [31, §1.1.6].

10.1.4. *Plongements de Sobolev.* Les plongements de Sobolev signifient qu'une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ possède un degré d'intégrabilité plus élevé que son appartenance à L^p ne l'indique. Ces plongements prennent une forme différente selon que $p < n$, $p = n$ ou $p > n$. On ne présentera ici que le cas $p < n$.

On suppose donc que $1 \leqslant p < n$ et qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{10.17}$$

Fixons alors une fonction $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ non nulle. Pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, définissons

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$, (10.17) donne

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|u\|_q \leqslant C \frac{\lambda}{\lambda^{n/p}} \|\nabla u\|_p.$$

Cela n'est possible que si $1/q = 1/p - 1/n$. On a de fait le théorème suivant :

Théorème 10.18. *Soit $1 \leqslant p < n$. On définit p^* par*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Alors il existe $C > 0$ tel que, pour toute $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

10.2. Introduction aux fonctions à variation bornée

On ne présente ici qu'une très brève introduction aux fonctions BV, renvoyant à [12, Ch. 5] ou [46, Ch. 5] pour une présentation complète. On rappelle que, si $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la divergence de φ au point x est définie par

$$\operatorname{div} \varphi(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_i}(x).$$

On utilisera le théorème de Riesz suivant, qui concerne les formes linéaires continues sur l'espace des fonctions continues à support compact ([12, §1.8, Th. 1]) :

***Théorème 10.19* (Théorème de représentation de Riesz)**

Soit $L : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mesurable pour μ telle que

(1) *$|\sigma(x)| = 1$ pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,*
(2) *$L(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), \sigma(x) \rangle d\mu(x)$ pour toute $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.*

Définition 10.20. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On dit que f est *à variation bornée* si

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx;\ \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ et } |\varphi(x)| \leqslant 1\ \forall x \in \mathbb{R}^n \right\} < +\infty.$$

Ici et dans la suite de ce paragraphe, $|\varphi(x)|$ est la norme euclidienne de $\varphi(x)$. On note $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions à variation bornée.

Il est immédiat que $W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$. L'inclusion est stricte (par exemple, $\chi_{[0,1]} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}) \smallsetminus W^{1,1}(\mathbb{R})$).

On peut décrire $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions dont la dérivée faible est une mesure de Radon. Plus précisément :

Théorème 10.21. *Soit $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mesurable pour μ telles que $|\sigma(x)| = 1$ pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{div}\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), \sigma(x)\rangle d\mu(x)$$

pour toute $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On notera $\mu = \|Df\|$ et $\|f\|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|Df\|(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour toute $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on pose

$$L\varphi := -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{div}\,\varphi(x)dx.$$

Alors, pour toute $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on a, par définition de $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$,

$$|L\varphi| \leqslant C\,\|\varphi\|_\infty,$$

où $C > 0$ ne dépend que de f. Cela permet d'étendre L par densité en une forme linéaire continue $\widetilde{L}$ sur $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et on conclut grâce au théorème de Riesz (théorème 10.19). □

Si $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|Df\|(E) = \int_E |\nabla f(x)|\, d\mathcal{L}^n(x).$$

De plus, avec la représentation donnée par le théorème 10.21,

$$\sigma(x) = \begin{cases} \nabla f(x)/|\nabla f(x)| & \text{si } \nabla f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \nabla f(x) = 0. \end{cases}$$

Voici un résultat d'approximation, dans l'esprit du théorème de Friedrichs (théorème 10.15) pour les fonctions BV :

Théorème 10.22. *Soit $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$. Il existe une suite de fonctions $(f_k)_{k\geqslant 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :*

(1) *$f_k \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$,*
(2) *$\|Df_k\|(\mathbb{R}^n) \to \|Df\|(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 10.23. Il n'est pas possible d'obtenir $\lim_k \|D(f - f_k)\| = 0$ dans la conclusion du théorème 10.22. En effet, dans ce cas, la suite $(f_k)_{k\geqslant 1}$ serait de Cauchy dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, et devrait donc converger dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, de sorte que f devrait appartenir à $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Voici une version d'un plongement de type Sobolev pour l'espace BV :

Théorème 10.24. *Soit $n \geqslant 2$. Il existe $C > 0$ tel que, pour toute $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|f\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|Df\| (\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. Soit $(f_k)_{k\geqslant 1}$ une suite donnée par le théorème 10.22, qui vérifie aussi $f_k \to f$ presque partout dans $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \|f_k\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant C \varliminf_{k\to+\infty} \|Df_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = C \|Df\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

10.3. Meilleure constante dans un plongement de Sobolev

On peut déterminer explicitement la meilleure constante du plongement de $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$:

Théorème 10.25. *Pour toute $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|u\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant n^{-1}\alpha(n)^{-1/n} \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

et la constante $n^{-1}\alpha(n)^{-1/n}$ est la meilleure possible. On rappelle que $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B(0,1))$ (voir (6.3)).

Comme corollaire immédiat, on obtient :

Corollaire 10.26. *Pour toute $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|f\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{1}{n}\alpha(n)^{-1/n} \|Df\| (\mathbb{R}^n).$$

La preuve du théorème 10.25 présentée ici, souvent attribuée à Gromov (qui l'attribue lui-même à Knothe ([24])) utilise le lemme suivant :

Lemme 10.27. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe borné et $f \in C^1(\overline{\Omega})$ avec $f(x) > 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Alors il existe un C^1-difféomorphisme $\Phi : \Omega \to B(0, \alpha(n)^{-1/n})$ tel que :*

(1) $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1, x_2), \ldots, \Phi_n(x_1, \ldots, x_n))$,
(2) $\partial\Phi_i/\partial x_i(x) > 0$ *pour tout* $x \in \Omega$ *et, pour tout* $x \in \Omega$,

$$\det D\Phi(x) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x) = \frac{f(x)}{\int_\Omega f(y)dy}.$$

Preuve du lemme 10.27. On commence par construire un difféomorphisme Ψ de Ω sur $Q =]0,1[^n$ avec les mêmes propriétés. Il suffit de poser

$$\Psi_i(x_1, \ldots, x_i) := \frac{\int_{A_i(x)} f(z)dz_i \cdots dz_n}{\int_{B_i(x)} f(z)dz_i \cdots dz_n},$$

avec

$$A_i(x) := \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Omega;\ z_j = x_j \text{ pour tout } j < i \text{ et } z_i \leqslant x_i\}$$

et

$$B_i(x) := \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Omega;\ z_j = x_j \text{ pour tout } j < i\}.$$

On vérifie facilement que Ψ est C^1 et que Ψ_i est strictement croissante par rapport à x_i, donc Ψ_i est injective et $\partial\Psi_i/\partial x_i > 0$ dans Ω. On vérifie aussi que $\Psi(\Omega) = Q$. Enfin, $\det D\Psi > 0$ dans Ω, donc Ψ est un C^1-difféomorphisme de Ω sur Q.

De plus,

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i} = \frac{\int_{B_{i+1}} f}{\int_{B_i} f},$$

donc

$$\det D\Psi = \prod_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i} = \frac{\int_{B_{n+1}} f}{\int_{B_1} f} = \frac{f(x)}{\int_\Omega f},$$

ce qui termine la vérification pour Ψ.

Si on applique cette construction avec $\widetilde{\Omega} = B(0, \alpha(n)^{-1/n})$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$, on obtient un C^1-difféomorphisme $\widetilde{\Psi} : \widetilde{\Omega} \to Q$ avec les propriétés requises, dont le jacobien vaut 1 partout. Finalement, $\widetilde{\Psi}^{-1} \circ \Psi$ a toutes les propriétés voulues. $\square$

Preuve du théorème 10.25. Comme $|\nabla u| = |\nabla |u||$ presque partout, on peut supposer que $u \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Par convolution, on peut aussi supposer que $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, puis que le support de u est une boule $\overline{B}$ et que $u > 0$ dans B (convoler u par φ_ε où φ est à support dans $\overline{B(0,1)}$ et strictement positive dans $B(0,1)$).

On pose $f = u^{n/(n-1)}$. Soit $\Phi : B \to B(0, \alpha(n)^{-1/n})$ un C^1-difféomorphisme donné par le lemme 10.27, appliqué à f. Alors, pour tout $x \in B$,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{div}\Phi(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_i}(x) &\geqslant \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_i}(x)\right)^{1/n} \\ &= |u(x)|^{1/(n-1)}\,\|u\|_{L^{n/(n-1)}}^{-1/(n-1)}.\end{aligned}$$

Comme $u\Phi = 0$ sur ∂B, on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}0 &= \int_B \operatorname{div}(u\Phi)(x)dx \\ &= \int_B u(x)\operatorname{div}\Phi(x)dx + \int_B \langle\Phi(x), \nabla u(x)\rangle dx,\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}n\int_B |u|\,|u|^{1/(n-1)}\,\|u\|_{L^{n/(n-1)}}^{-1/(n-1)} &\leqslant \int_B |u|\operatorname{div}\Phi \leqslant \int_B |\nabla u|\,|\Phi| \\ &\leqslant \alpha(n)^{-1/n}\int_B |\nabla u|,\end{aligned}$$

ce qui donne la conclusion. Il reste à voir que $\frac{1}{n}\alpha(n)^{-1/n}$ est bien la meilleure constante, ce qui fera l'objet du paragraphe suivant. □

10.4. Ensembles à périmètre fini et inégalité isopérimétrique

Définition 10.28. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable (pour $\mathcal{L}^n$). On dit que E est à périmètre fini si, et seulement si, $\chi_E \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$.

Si E est à périmètre fini, on notera (en reprenant les notations du théorème 10.21) $D\chi_E = \|\partial E\|$ et $\nu_E := -\sigma$. On a donc, pour toute $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,

$$\int_E \operatorname{div}\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\langle\varphi(x), \nu_E(x)\rangle d\,\|\partial E\|\,(x).$$

Si E est un ouvert de classe C^1 tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap K) < +\infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ (on rappelle que $\mathcal{H}^{n-1}$ est la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$), on a aussi, pour toute $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,

$$\int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx = - \int_{\partial E} \langle \varphi(x), \nu(x) \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

ce qui montre que E est à périmètre fini, $\|\partial E\| (\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$ et $\nu_E = \nu$ $\mathcal{H}^{n-1}$ presque partout sur ∂E.

Remarque 10.29. En réalité, *tout* ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ satisfaisant à $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) < +\infty$ est à périmètre fini (voir [2, Prop. 3.62]).

Un cas particulier important du théorème 10.24 est une forme de l'inégalité isopérimétrique :

Théorème 10.30. *Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ de périmètre fini,*

$$\mathcal{L}^n(E)^{1-1/n} \leqslant C \|\partial E\| (\mathbb{R}^n),$$

où $C > 0$ est la constante intervenant dans le théorème 10.24.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 10.24 avec $f = \chi_E$, qui est dans $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ par hypothèse. □

Corollaire 10.31. *Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ de périmètre fini,*

$$\mathcal{L}^n(E)^{1-1/n} \leqslant \frac{1}{n} \alpha(n)^{-1/n} \|\partial E\| (\mathbb{R}^n).$$

On notera que la constante $\frac{1}{n}\alpha(n)^{-1/n}$ est optimale (considérer le cas où E est une boule). Cela prouve aussi l'optimalité de cette constante dans le théorème 10.25. □

Réciproquement, on peut retrouver le plongement de Sobolev (10.18) en partant de l'inégalité isopérimétrique. On utilisera pour cela (une version de) la formule de la co-aire, qu'on rappelle ici :

Proposition 10.32. *Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \mathbb{R}^n ; \; u(x) = t\}) dt.$$

On suppose maintenant connue l'inégalité isopérimétrique. Soit alors $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on voit que, pour tout t, le bord de $\{|u| \geqslant t\}$ est inclus dans $\{|u| = t\}$ par continuité de u. Comme, pour tout $t > 0$, $\{|u| \geqslant t\}$ est compact, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{n/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} \\
&\qquad = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{|u|>t\}}(x) dt\right)^{n/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} \\
&\qquad \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|u|>t\}}(x)^{n/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} dt \\
&\qquad = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^n(\{|u| > t\})^{(n-1)/n} dt \\
&\qquad \leqslant \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^n(\{|u| \geqslant t\})^{(n-1)/n} dt \\
&\qquad \leqslant n^{-1}\alpha(n)^{-1/n} \int_0^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{|u| = t\}) dt \\
&\qquad = n^{-1}\alpha(n)^{-1/n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|\, dx,
\end{aligned}$$

ce qui redonne bien le plongement de Sobolev.

11. Inégalité isodiamétrique et inégalité isopérimétrique

On considère l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$ comme connue, et on cherche à en déduire l'inégalité isodiamétrique dans $\mathbb{R}^n$. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la conclusion est immédiate.

On suppose l'inégalité isodiamétrique connue dans $\mathbb{R}^{n-1}$ pour un $n \geqslant 2$. On considère d'abord un ensemble convexe $E \subset \mathbb{R}^n$ de diamètre 2. On montre que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \leqslant \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1)).$$

En effet, pour tout vecteur ν de norme 1, soit E_ν la projection orthogonale de E sur l'hyperplan $\nu^\perp$. Par la formule de Cauchy-Crofton ([23, §5.5]),

$$\mathcal{H}^{n-1}(F) = \frac{1}{\alpha(n-1)} \int_{\partial B(0,1)} \mathcal{L}^{n-1}(E_\nu) d\mathcal{H}^{n-1}(\nu).$$

Comme $d(E_\nu) \leqslant d(E) = 2$, l'inégalité isodiamétrique dans $\mathbb{R}^{n-1}$ montre que

$$\mathcal{L}^{n-1}(E_\nu) \leqslant \alpha(n-1),$$

ce qui donne aussitôt le résultat.

On peut maintenant prouver l'inégalité isodiamétrique en dimension n. Soient en effet $E \subset \mathbb{R}^n$ de diamètre 2 et F l'enveloppe convexe de E. Admettons pour l'instant que F est aussi de diamètre 2. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(E)^{(n-1)/n} \leqslant \mathcal{L}^n(F)^{(n-1)/n} &\leqslant n^{-1}\alpha(n)^{-1/n}\mathcal{H}^{n-1}(\partial F)\\ &\leqslant n^{-1}\alpha(n)^{-1/n}\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1))\\ &= \mathcal{L}^n(B(0,1))^{(n-1)/n},\end{aligned}$$

ce qui donne bien l'inégalité isodiamétrique en dimension n. On notera qu'on a appliqué l'inégalité isopérimétrique à l'ensemble F, qui est de périmètre fini, étant convexe et borné (voir [29, p. 124]). □

Pour terminer la preuve, on vérifie :

Lemme 11.33. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie bornée. Alors A et son enveloppe convexe ont le même diamètre.*

Démonstration. Soit B l'enveloppe convexe de A. On a clairement $d(A) \leqslant d(B)$. Soient maintenant $x, y \in B$. Il existe $p, q \geqslant 1$, des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \geqslant 0$ avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{j=1}^q \mu_j = 1$ et des points $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q \in A$ tels que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{j=1}^q \mu_j y_j$. Donc

$$\begin{aligned}|x-y| &= \left|x - \sum_{j=1}^q \mu_j y_j\right| = \left|\sum_{j=1}^q \mu_j (x-y_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^q \mu_j\,|x-y_j|\\ &\leqslant \sum_{j=1}^q \mu_j \left|\sum_{i=1}^p \lambda_i (x_i - y_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^q \mu_j \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i\,|x_i-y_j|\right) \leqslant d(A).\end{aligned}$$ □

12. Inégalité isopérimétrique-isodiamétrique

On peut obtenir une inégalité intermédiaire entre les inégalités isopérimétrique et isodiamétrique, comme suit.

Définition 12.34. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On pose

$$\mathrm{rad}(\Omega) := \inf \{r > 0;\ \text{il existe } z_0 \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \Omega \subset B(z_0, r)\}.$$

L'inégalité isopérimétrique-isodiamétrique s'énonce ainsi ([32, §2]) :

Proposition 12.35. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert lisse et borné. Alors*

$$n\mathcal{H}^n(\Omega) \leqslant \mathrm{rad}(\Omega)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $|x - x_0| \leqslant \mathrm{rad}(\Omega)$. On définit $X(x) := x - x_0$ pour tout $x \in \Omega$. Alors, comme $\mathrm{div}\, X = n$,

$$\begin{aligned} n\mathcal{L}^n(\Omega) &= \int_\Omega \mathrm{div}\, X(x) d\mathcal{L}^n(x) \\ &= -\int_{\partial\Omega} \langle X(x), \nu(x)\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ &\leqslant \mathrm{rad}(\Omega)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega). \end{aligned}$$ □

13. Une application au réarrangement de Schwarz

Cette section est consacrée à une méthode de réarrangement décroissant pour les fonctions définies sur les ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, appelé réarrangement de Schwarz. Ce réarrangement est étroitement relié à l'inégalité isopérimétrique.

On utilisera la notation suivante : si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, on désigne par Ω^* la boule euclidienne centrée en 0 de même mesure de Lebesgue que Ω. Pour toute fonction mesurable $u : \Omega \to \mathbb{R}$, on définit la distribution μ_u par

$$\mu_u(t) := \mathcal{L}^n(\{x \in \Omega;\ u(x) > t\})$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

13.1. Définition et premières propriétés du réarrangement de Schwarz

Définition 13.36. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $u : \Omega \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable.

(1) Pour tout réel c, on note

$$\Omega(c) = \{x \in \Omega;\ u(x) > c\}.$$

Les ensembles $\Omega(c)$ s'appellent ensembles de niveau de la fonction u.

(2) Pour tout $x \in \Omega^*$, on définit

$$u^*(x) = \sup\{c \in \mathbb{R};\ x \in \Omega(c)^*\}.$$

La fonction u^* est appelée réarrangement de Schwarz, ou symétrisation de Schwarz, de u.

Ce réarrangement possède les propriétés suivantes :

Proposition 13.37. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $u : \Omega \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable. Alors :*

(1) *u^* est radiale et décroissante, ce qui veut dire qu'il existe une fonction décroissante $f : [0, R] \to \mathbb{R}$ (où R désigne le rayon de Ω^*) telle que $u^*(x) = f(|x|)$ pour tout $x \in \Omega^*$,*

(2) *pour tout réel c,*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \Omega;\ u(x) > c\}) = \mathcal{L}^n(\{x \in \Omega^*;\ u^*(x) > c\}). \tag{13.38}$$

En d'autres termes, u et u^* sont équimesurables, ou encore $\mu_u = \mu_{u^*}$. En conséquence, pour tout $x \in \Omega^*$,

$$\mathcal{L}^n(\{y \in \Omega;\ u(y) > u^*(x)\}) \leqslant \alpha(n)\, |x|^n\,, \tag{13.39}$$

et, si $\{z \in \Omega^*;\ u^*(z) = u^*(x)\}$ est la sphère de centre 0 et de rayon $|x|$,

$$\mathcal{L}^n(\{y \in \Omega;\ u(y) > u^*(x)\}) = \alpha(n)\, |x|^n\,, \tag{13.40}$$

(3) *si $u \in L^\infty(\Omega)$, alors $u^* \in L^\infty(\Omega^*)$ et*

$$\sup\mathrm{ess}_{x\in\Omega}\, u(x) = \sup\mathrm{ess}_{x\in\Omega^*}\, u^*(x).$$

Démonstration. Si $x, y \in \Omega^*$ vérifient $|x| = |y|$, alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega(c)^*$ si, et seulement si, $y \in \Omega(c)^*$, car $\Omega(c)^*$ est une boule de centre 0 (éventuellement vide). Cela montre que u^* est radiale. De plus, si $|x| < |y|$ et si $y \in \Omega(c)^*$ pour un $c \in \mathbb{R}$, comme $\Omega(c)^*$ est une boule de centre 0, $x \in \Omega(c)^*$, ce qui montre immédiatement que $u^*(x) \geqslant u^*(y)$.

Pour (2),

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \Omega;\ u(x) > c\}) = \mathcal{L}^n(\Omega(c)) = \mathcal{L}^n(\Omega(c)^*),$$

et, pour tout $x \in \Omega^*$, comme l'ensemble $\{d \in \mathbb{R};\ x \in \Omega(d)^*\}$ est un intervalle de la forme $]-\infty, M]$ ou $]-\infty, M[$,

$$u^*(x) > c \Longleftrightarrow \sup\{d \in \mathbb{R};\ x \in \Omega(d)^*\} > c \Longleftrightarrow x \in \Omega(c)^*,$$

ce qui montre que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \Omega^*;\ u^*(x) > c\}) = \mathcal{L}^n(\Omega(c)^*) = \mathcal{L}^n(\Omega(c)).$$

L'identité (13.39) vient du fait que, d'après (13.38),

$$\begin{aligned}\mu_u(u^*(x)) &= \mathcal{L}^n(\{z \in \Omega^*;\ u^*(z) > u^*(x)\}) \\ &\leqslant \mathcal{L}^n(B(0,|x|)) = \alpha(n)\,|x|^n\,,\end{aligned}$$

et, si $\{z \in \Omega^*;\ u^*(z) = u^*(x)\}$ est la sphère de centre 0 et de rayon $|x|$, on a l'égalité, ce qui donne (13.40) et termine la preuve.

Enfin, le point (3) résulte immédiatement de (13.38) et de la définition de la borne supérieure essentielle. □

Une conséquence immédiate de (13.38) et de la formule (4.34) est l'identité suivante :

Proposition 13.41. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $u : \Omega \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable et $p \geqslant 1$. Alors*

$$\int_\Omega u^p(x)dx = \int_{\Omega^*} (u^*)^p\,(x)dx. \tag{13.42}$$

13.2. Réarrangement de Schwarz et différentiabilité

Examinons maintenant les propriétés du réarrangement de Schwarz vis-à-vis de la différentiabilité.

Nous ferons pour cela appel à la notion de fonction absolument continue, dont on rappelle ici la définition.

Définition 13.43. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est *absolument continue* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $N \geqslant 1$ et tous intervalles $]a_1, b_1[, \ldots,]a_N, b_N[\subset [a,b]$ deux à deux disjoints,

$$\sum_{i=1}^N |b_i - a_i| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^N |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Il est facile de voir qu'une fonction lipschitzienne est absolument continue, et qu'une fonction absolument continue est uniformément continue.

Pour des fonctions monotones, on a la caractérisation suivante des fonctions absolument continues (voir [3, Th. 4.6.2]) :

Proposition 13.44. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f est absolument continue si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *f est continue,*

(2) *pour tout ensemble mesurable $E \subset [a, b]$ tel que $\mathcal{L}^1(E) = 0$, on a $\mathcal{L}^1(f(E)) = 0$.*

On rappelle aussi ([40, Th. 8.19]) que

Proposition 13.45. *Toute fonction monotone sur un intervalle est dérivable presque partout sur cet intervalle.*

Enfin, on a la proposition suivante ([40, Th. 8.18]) :

Proposition 13.46. *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$. Pour tout $x \in [a, b]$, on définit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors F est dérivable presque partout sur $[a, b]$, et $F'(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in [a, b]$.

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. La fonction μ_u est clairement décroissante, donc dérivable presque partout d'après la proposition 13.45.

Proposition 13.47. *On suppose que $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ est positive et s'annule sur $\partial\Omega$, et on note $M = \sup_\Omega u$. Si $R > 0$ est le rayon de Ω^*, notons $f : [0, R] \to [0, +\infty[$ la fonction telle que, pour tout $x \in \Omega^*$, $u^*(x) = f(|x|)$. Alors :*

(1) *μ_u est injective sur $[0, M]$,*

(2)

$$f\left((\mu_u(t)/\alpha(n))^{1/n}\right) = t \text{ pour tout } t \in]0, M]. \tag{13.48}$$

Par suite, f est continue sur $[0, R]$.

(3) *pour presque tout t,*

$$\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)=t\}} |\nabla u(x)|^{-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leqslant -\mu_u'(t),$$

(4) $\mu_u'(t) < 0$ *pour presque tout t,*

(5) *la fonction f est absolument continue sur $[0, R]$.*

(6) *la fonction u^* est lipschitzienne sur Ω^* et*

$$\|\nabla u^*\|_{L^\infty(\Omega^*)} \leqslant \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\,,$$

(7) *pour presque tout $t \in [0, M]$, si $x \in \Omega^*$ est tel que $u^*(x) = t$,*

$$\mu_u'(t) = -\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\{y \in \Omega^*;\ u^*(y) = t\})}{|\nabla u^*(x)|}, \tag{13.49}$$

Démonstration. Les arguments qui suivent sont inspirés de [7]. Pour le point (1), on suppose que μ_u n'est pas injective sur $[0, M]$. Il existe donc $0 \leqslant t < s \leqslant M$ tels que $|\{x \in \Omega;\ t < u(x) \leqslant s\}| = 0$. Par la formule de la co-aire, si $g = \chi_{\{x\in\Omega;\ t<u(x)\leqslant s\}}$,

$$0 = \int_\Omega g(x)\,|\nabla u(x)|\,dx = \int_t^s \left(\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)=\tau\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right) d\tau.$$

Pour tout $\tau \in]t, s[$, $g(x) = 1$, donc, pour presque tout $\tau \in [t, s]$, $\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega;\ u(x) = \tau\}) = 0$. Or, pour tout $\tau \in]t, s[$, $\Omega(\tau)$ est un ouvert non vide (par continuité de u et le fait que $\tau < \sup_\Omega u = M$), d'adhérence compacte, et l'inégalité isopérimétrique assure donc que

$$0 < \mathcal{L}^n(\Omega_\tau)^{(n-1)/n} \leqslant n^{-1}\alpha(n)^{-1/n}\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_\tau),$$

et la continuité de u assure que $\partial\Omega_\tau \subset \{x \in \Omega;\ u(x) = \tau\}$, ce qui permet de conclure que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega;\ u(x) = \tau\}) > 0 \tag{13.50}$$

pour tout $\tau \in]t, s[$. On obtient donc une contradiction, ce qui termine la preuve du point (1).

L'identité (13.48) est claire si $t = M$ car $u^*(0) = M$. Soient maintenant $t \in \left]0, M\right[$ et $r \in \left]0, R\right[$ tel que $\alpha(n) r^n = \mu_u(t)$. Si $\boldsymbol{e}$ est un vecteur fixé de norme 1, on cherche à prouver que

$$u^*(r\boldsymbol{e}) = t,$$

ce qui, par définition de u^*, signifie que

$$t = \sup\left\{c \in \mathbb{R};\ r\boldsymbol{e} \in \Omega(c)^*\right\}.$$

Or

$$r\boldsymbol{e} \in \Omega(c)^* \Longleftrightarrow \alpha(n) r^n < \mu_u(c) \Longleftrightarrow \mu_u(t) < \mu_u(c).$$

Ainsi, si $r\boldsymbol{e} \in \Omega(c)^*$, on a $\mu_u(t) < \mu_u(c)$, donc $c < t$. Réciproquement, si $t > c$, on a $\mu_u(t) \leqslant \mu_u(c)$, et comme μ_u est injective sur $[0, M]$, on ne peut avoir $\mu_u(t) = \mu_u(c)$ que si $c \geqslant M$ ou si $t \leqslant 0$. Mais on a supposé $t \in \left]0, M\right[$, et si $c \geqslant M$, $\Omega(c) = \varnothing$ donc aussi $\Omega(c)^* = \varnothing$, donc on ne peut avoir $r\boldsymbol{e} \in \Omega(c)^*$. Finalement,

$$r\boldsymbol{e} \in \Omega(c)^* \Longleftrightarrow c < t,$$

donc $\sup\left\{c \in \mathbb{R};\ r\boldsymbol{e} \in \Omega(c)^*\right\} = t$, ce qui termine la preuve de (13.48). Cette identité montre que $f : [0, R] \to [0, M]$ est surjective (car $f(R) = 0$) et décroissante, donc continue.

Pour (3), en appliquant la formule de la co-aire à $f\chi_A / |\nabla u|$ avec $A = \{x \in \Omega;\ \nabla u(x) \neq 0\}$, on obtient que

$$\begin{aligned} \mu_u(t) = {} & \mathcal{L}^n(\{x \in \Omega;\ t < u(x) \leqslant M \text{ et } \nabla u(x) = 0\}) \\ & + \int_t^M \int_{\{x \in \Omega;\ u(x) = s\}} \chi_A(x) \left|\nabla u(x)\right|^{-1} d\mathcal{H}^{n-1}(x) ds. \end{aligned} \tag{13.51}$$

La dérivée de μ_u est donc la somme des dérivées des deux termes de (13.51). Le premier est une fonction décroissante de t, dont la dérivée est donc négative presque partout et le deuxième a pour dérivée

$$t \longmapsto -\int_{\{x \in \Omega;\ u(x) = t\}} \chi_A(x) \left|\nabla u(x)\right|^{-1} d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mu_u'(t) &\geqslant -\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)=t\}} \chi_A(x)\,|\nabla u(x)|^{-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}(x)\\ &\geqslant -\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)=t\}} \chi_A(x)\,|\nabla u(x)|^{-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}(x).\end{aligned}$$

Pour (4), on observe que, comme u est de classe C^1 dans $\overline{\Omega}$, $|\nabla u(x)|^{-1} \geqslant c > 0$ pour tout $x \in \Omega$, et on conclut par (13.50).

On passe maintenant à la preuve du point (5). Comme f est continue et décroissante, il suffit, compte tenu du théorème 13.44, de vérifier que, pour tout $E \subset [0, R]$ de mesure de Lebesgue nulle, $f(E)$ est de mesure de Lebesgue nulle.

On peut écrire

$$[0, R] = A \cup B,$$

où $A\cap B = \varnothing$, B est une réunion dénombrable d'intervalles sur chacun desquels f est constante et f est injective sur A. Précisément,

$$A = \big\{t \in [0, R];\ f(t) \neq 0 \text{ et } f^{-1}(\{f(t)\}) \text{ est un singleton}\big\}$$

et

$$B = \big\{t \in [0, R];\ f(t) = 0 \text{ ou } f^{-1}(\{f(t)\}) \text{ n'est pas un singleton}\big\},$$

de sorte que $f(B)$ est dénombrable.

Pour tout $t \in A$,

$$(\mu_u/\alpha(n))^{1/n} \circ f(t) = t.$$

En effet, soit $t \in A$ et posons $s = (\mu_u/\alpha(n))^{1/n} \circ f(t)$. Alors, d'après (13.48), appliquée à $f(t) \in]0, M]$,

$$f(t) = f \circ (\mu_u/\alpha(n))^{1/n} \circ f(t) = f(s),$$

et comme $t \in A$, $f^{-1}(\{f(t)\})$ est réduit à t, ce qui montre que $s = t$.

Soit maintenant $E \subset [0, R]$ de mesure nulle. On a $C := f(E) = f(E \cap A) \cup f(E \cap B)$, et $f(E \cap B)$ est dénombrable. On en déduit que $(\mu_u/\alpha(n))^{1/n}\,(C)$ est la réunion d'un ensemble dénombrable et de $(\mu_u/\alpha(n))^{1/n}\,(f(E \cap A)) = E \cap A$, qui est donc de mesure nulle.

Ainsi, $\mu_u(C)$ est de mesure nulle. Or

$$|\mu_u(C)| \geqslant \int_C \left|\mu_u'(t)\right| dt,$$

et comme $\mu_u' < 0$ pour presque tout t par le point 4., on obtient bien que C est de mesure nulle.

Passons au point (6). Comme u est continue et s'annule sur $\partial\Omega$, pour tout $t \in]0, M]$, l'ensemble $\{x \in \Omega;\ u(x) \geqslant t\}$ est compact et

$$\partial\left(\{x \in \Omega;\ u(x) \geqslant t\}\right) \subset \{x \in \Omega;\ u(x) = t\}.$$

L'inégalité isopérimétrique (9.9) appliquée à $\{x \in \Omega;\ u(x) \geqslant t\}$ permet donc d'écrire

$$(\mu_u(t))^{1-1/n} \leqslant n^{-1}\alpha(n)^{-1/n}\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega;\ u(x) = t\}). \tag{13.52}$$

On en déduit que u^* est lipschitzienne sur Ω^*, de constante de Lipschitz inférieure ou égale à celle de u. En effet, notons $L = \left\|\left|\nabla u\right|\right\|_\infty$. Pour tout t, par la formule de la co-aire,

$$\int_{\{x\in\Omega;\ t-h<u(x)\leqslant t\}} |\nabla u(x)|\, dx = \int_{t-h}^{t} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega;\ u(x) = s\})ds.$$

En utilisant la décroissance de μ_u et (13.52), on obtient donc que

$$L\left(\mu_u(t-h) - \mu_u(t)\right) \geqslant n\alpha(n)^{1/n}\mu_u(t)^{1-1/n}h. \tag{13.53}$$

On va en déduire que la fonction f est lipschitzienne. Comme la fonction f est absolument continue, il suffit de montrer que $|f'(r)| \leqslant L$ pour tout r où f est dérivable. Soit donc un tel r. Si $f'(r) = 0$, il n'y a rien à prouver. Supposons donc $f'(r) < 0$, de sorte qu'il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, h_0[$, $f(r + h) < f(r)$ et, pour tout $h \in]-h_0, 0[$, $f(r + h) > f(r)$. Prenons alors $h \in]0, h_0[$ et $x, y \in \Omega^*$ tels que $|x| = r$ et $|y| = r + h$. D'après (13.53), (13.39) appliquée à y

et (13.40) appliquée à x, on voit que

$$\begin{aligned}
f(r)-f(r+h) &= u^*(x) - u^*(y) \\
&\leqslant n^{-1}\alpha(n)^{-1/n} L\left(\mu_u(u^*(y)) - \mu_u(u^*(x))\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \left(\mu_u(u^*(x))\right)^{(1/n)-1} \\
&= n^{-1}\alpha(n)^{-1/n} L\alpha(n)^{1/n}\left((r+h)^n - r^n\right) r^{1-n} \qquad (13.54)\\
&= \frac{1}{n} L \frac{(r+h)^n - r^n}{r^{n-1}} \\
&\leqslant Lh\left(1 + h/r\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on obtient que

$$\left|f'(r)\right| \leqslant L,$$

ce qui montre bien que f est L-lipschitzienne.

Prouvons enfin 7. Si $N = \{r \in [0,R];\ f \text{ n'est pas dérivable en } r\}$, alors l'ensemble

$$\left\{t \in [0,M];\ (\mu_u(t)/\alpha(n))^{1/n} \in N\right\}$$

est de mesure nulle. En effet, si t est dans cet ensemble et si $t \neq 0$, on a, d'après (13.48), $t \in f(N)$, qui est de mesure nulle car f est lipschitzienne, donc absolument continue. En dérivant (13.48) par rapport à r, on obtient donc, pour presque tout $t \in]0, M[$,

$$1 = \frac{1}{n} f'(r)\, \frac{\mu_u'(t)}{\alpha(n)}\, r^{1-n}, \qquad (13.55)$$

si $r = (\alpha(n)^{-1}\mu_u(t))^{1/n}$, ou encore

$$\mu_u'(t) = \frac{n\alpha(n) r^{n-1}}{f'(r)}.$$

Soit t tel que (13.55) soit satisfaite. L'ensemble $\{x \in \Omega^*;\ u^*(x) > t\}$ est une boule ouverte de mesure $\mu_u(t) = \alpha(n) r^n$, c'est donc la boule ouverte de centre 0 et de rayon r. On a donc $u^* = t$ sur la sphère de centre 0 et de rayon r. De plus, (13.55) montre que $f'(r) \neq 0$, donc $f(r+h) \neq f(r)$ pour h assez petit, ce qui montre que l'ensemble des points de Ω^* en lesquels u^* vaut t est exactement la sphère de centre 0 et de rayon r, dont la mesure $\mathcal{H}^{n-1}$ vaut $n\alpha(n) r^{n-1}$. Si $|x| = r$, on a $|\nabla u^*(x)| = |f'(r)|$, de sorte que

$$\mu_u'(t) = -\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\{y \in \Omega^*;\ u^*(y) = t\})}{|\nabla u^*(x)|},$$

comme annoncé. □

Une propriété essentielle du réarrangement de Schwarz est de diminuer la norme L^p du gradient d'une fonction différentiable et nulle au bord du domaine considéré. Plus précisément :

Théorème 13.56. *On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et que $u : \overline{\Omega} \to [0, +\infty[$ est C^1 sur $\overline{\Omega}$ et s'annule sur $\partial\Omega$. Alors u^* est lipschitzienne sur Ω^*, s'annule sur $\partial\Omega^*$ et, pour tout $p \in]1, +\infty]$,*

$$\| |\nabla u| \|_{L^p(\Omega)} \geqslant \| |\nabla u^*| \|_{L^p(\Omega^*)} . \tag{13.57}$$

Preuve du théorème 13.56. On a déjà vu dans le lemme 13.47 que u^* est lipschitzienne (et cette fonction s'annule sur $\partial\Omega^*$ par définition) et que (13.57) est vraie pour $p = +\infty$. Il reste à établir (13.57) pour $1 < p < +\infty$.

Notons encore $M = \max_\Omega u$. On montre d'abord que, pour presque tout $t \in [0, M]$,

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)=t\}} |\nabla u(x)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ \geqslant \left(-\mu_u'(t)\right)^{1-p} \left(\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega;\ u(x) = t\})\right)^p.\end{aligned} \tag{13.58}$$

Par l'inégalité de Hölder, pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_{\{x\in\Omega;\ t<u(x)\leqslant t+h\}} |\nabla u(x)|\, dx \\ &\leqslant \left(\frac{1}{h}\int_{\{x\in\Omega;\ t<u(x)\leqslant t+h\}} |\nabla u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\frac{\mu_u(t) - \mu_u(t+h)}{h}\right)^{1-1/p}.\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0, on obtient, pour presque tout $t \in [0, M]$,

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)>t\}} |\nabla u(x)|\, dx \\ \leqslant \left(-\mu_u'(t)\right)^{1-1/p} \left(-\frac{d}{dt}\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)>t\}} |\nabla u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{13.59}$$

Par ailleurs, d'après la formule de la co-aire,

$$\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)>t\}} |\nabla u(x)|\, dx = \int_t^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{x\in\Omega;\ u(x)=s\})ds,$$

si bien que, pour presque tout t (proposition 13.46),

$$-\frac{d}{dt}\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)>t\}} |\nabla u(x)|\, dx = \mathcal{H}^{n-1}(\{x\in\Omega;\ u(x)=t\}). \tag{13.60}$$

De même,

$$\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)>t\}} |\nabla u(x)|^p\, dx = \int_t^{+\infty}\left(\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)=s\}} |\nabla u(x)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right)ds,$$

ce qui donne

$$-\frac{d}{dt}\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)>t\}} |\nabla u(x)|^p\, dx = \int_{\{x\in\Omega;\ u(x)=t\}} |\nabla u(x)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x). \tag{13.61}$$

La combinaison de (13.59), (13.60) et (13.61) donne bien (13.58).

En appliquant encore la formule de la co-aire, (13.58) et (13.52), on obtient donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx &= \int_0^M \left(\int_{\{x\in\Omega;\ u(x)=t\}} |\nabla u(x)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right)dt\\ &\geqslant \int_0^M \left(-\mu_u'(t)\right)^{1-p}\left(\mathcal{H}^{n-1}(\{x\in\Omega;\ u(x)=t\})\right)^p dt\\ &\geqslant n^p\alpha(n)^{p/n}\int_0^M \left(-\mu_u'(t)\right)^{1-p}(\mu_u(t))^{p(1-1/n)}\, dt.\end{aligned} \tag{13.62}$$

La formule de la co-aire appliquée, cette fois, à u^*, donne

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^p \, dx = \int_0^M \left(\int_{\{x\in\Omega^*;\ u^*(x)=t\}} |\nabla u^*(x)|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dt. \tag{13.63}$$

D'après (13.49), pour presque tout $t \in [0, M]$, comme $|\nabla u^*|$ est constant sur $\{x \in \Omega^*;\ u^*(x) = t\}$,

$$\int_{\{x\in\Omega^*;\ u^*(x)=t\}} |\nabla u^*(x)|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \left(-\mu_u'(t)\right)^{1-p} \left(\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega^*;\ u(x) = t\})\right)^p. \tag{13.64}$$

Pour un tel t, comme $\Omega^*(t)$ est une boule, il y a égalité dans l'inégalité isopérimétrique, de sorte que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega^*;\ u^*(x) = t\}) = n\alpha(n)^{1/n} \mu_u(t)^{1-1/n}.$$

On déduit donc de (13.63) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^p dx &= \int_0^M \left(-\mu_u'(t)\right)^{1-p} \left(\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega^*;\ u^*(x) = t\})\right)^p \\ &= n^p \alpha(n)^{p/n} \int_0^M \left(-\mu_u'(t)\right)^{1-p} \left(\mu_u(t)\right)^{p(1-1/n)} dt. \end{aligned} \tag{13.65}$$

En comparant (13.62) et (13.65), on obtient bien l'inégalité (13.57). □

13.3. Réarrangement de Schwarz et inégalité isopérimétrique

On vient de voir que (13.57) résulte de l'inégalité isopérimétrique via la formule de la co-aire.

On peut montrer que (13.57) est aussi vraie pour $p = 1$ ([7]). Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de périmètre fini, en appliquant (13.57) à une approximation convenable de la fonction indicatrice de E, on obtient que

$$\|\partial E\| (\mathbb{R}^n) \leqslant \|\partial \Omega^*\| (\mathbb{R}^n),$$

où Ω^* est la boule (centrée en 0) de même mesure de Lebesgue que E, ce qui redonne bien l'inégalité isopérimétrique.

13.4. Inégalité de Faber-Krahn pour la valeur propre principale du Laplacien Dirichlet

Considérons un tambour, modélisé par un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Quelle forme faut-il donner au tambour Ω pour que sa fréquence fondamentale soit la plus basse possible ? En 1894, Lord Rayleigh ([38]) conjecture que la réponse à cette question est analogue à celle du problème isopérimétrique, i.e., Ω doit être un disque.

Les fréquences de Ω sont données par les *valeurs propres du laplacien avec condition de Dirichlet sur* Ω, c'est-à-dire les nombres $\lambda > 0$ pour lesquels il existe une fonction (propre) φ sur Ω, non identiquement nulle mais s'annulant sur $\partial\Omega$ et telle que

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \tag{13.66}$$

où $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ est le laplacien. La fréquence fondamentale de Ω est la plus petite valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet sur Ω, que nous noterons $\lambda_1(\Omega)$. Le problème mentionné plus haut revient donc à minimiser $\lambda_1(\Omega)$ parmi les domaines Ω d'aire fixée.

Pour résoudre ce problème, on va donner une formulation *variationnelle* de $\lambda_1(\Omega)$. Pour en donner l'idée, considérons un endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E. Comme u est diagonalisable dans une base orthonormée, on vérifie facilement que, si $\lambda_1(u)$ est la plus petite valeur propre de u,

$$\lambda_1(u) = \min_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Soit donc $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné et φ solution de (13.66) avec $\lambda_1(\Omega)$ au lieu de λ. Alors, en multipliant par φ les deux membres de (13.66), en intégrant par parties et en utilisant le fait que $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient que

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,dx}{\int_\Omega \varphi(x)^2 dx}. \tag{13.67}$$

Si φ^* désigne le réarrangement de Schwarz de φ, (13.42) et (13.57) montrent que

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi^*(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega \varphi^*(x)^2 dx}.$$

Notons que φ^* est nulle sur $\partial\Omega^*$. Des arguments d'analyse hilbertienne analogues à ceux mentionnés plus haut en dimension finie permettent alors de prouver que

$$\frac{\int_\Omega |\nabla\varphi^*(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega \varphi^*(x)^2 dx} \geqslant \lambda_1(\Omega^*),$$

ce qui montre finalement que

$$\lambda_1(\Omega) \geqslant \lambda_1(\Omega^*), \tag{13.68}$$

comme annoncé par Rayleigh.

La quantité intervenant dans le membre de droite de (13.67) est appelée quotient de Rayleigh. Les premières preuves de (13.68) ont été obtenues par Faber et Krahn dans les années 1920 ([13, 25, 26]). Les mêmes arguments sont valables en toute dimension $n \geqslant 2$. On renvoie à [22] pour les questions de minimisation des valeurs propres du laplacien sur Ω sous diverses conditions au bord.

14. Stabilité de l'inégalité isopérimétrique

Il s'agit de la question suivante : soient $R > 0$ et $E \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B(0,R))$ et $\mathcal{H}^{n-1}(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,R)) + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Peut-on dire alors que E est « proche d'une boule », et ce de manière quantifiée en termes de ε ?

La première réponse à cette question a été donnée pour des ensembles convexes en dimension 2 ([5]) :

Théorème 14.69. *Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un convexe tel que $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{L}^2(B(0,1))$. Alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r_1 < r_2 \in]0, +\infty[$ tels que*

$$\begin{gathered} B(x_0, r_1) \subset E \subset B(x_0, r_2), \\ (r_2 - r_1)^2 \leqslant \frac{(\mathcal{H}^1(E))^2 - (\mathcal{H}^1(B(0,1)))^2}{4\pi}. \end{gathered} \tag{14.70}$$

Comment généraliser ce théorème en dimension n ? On remarque que, si $\mathcal{H}^1(E) - \mathcal{H}^1(B(0,1)) \leqslant 1$, alors (14.70) montre qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$d_H^2(E, B(x_0,1)) \leqslant C\left(\mathcal{H}^1(E) - \mathcal{H}^1(B(0,1))\right), \tag{14.71}$$

où, pour tous $E, F \subset \mathbb{R}^2$ non vides, $d_H(E,F)$ est la distance de Hausdorff entre E et F, définie par

$$d_H(E,F) := \inf\left\{\varepsilon > 0;\ E \subset F + B(0,\varepsilon) \text{ et } F \subset E + B(0,\varepsilon)\right\}.$$

La généralisation de (14.70) en dimension n fait intervenir des quantités analogues aux membres de gauche et de droite de (14.71) :

Définition 14.72. Soient $n \geqslant 1$ et $E \subset \mathbb{R}^n$ un convexe tel que $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B(0,1))$. On définit le trou isopérimétrique de E, noté $\mathcal{D}(E)$, et l'indice asymétrique de E, noté $\mathcal{A}(E)$, par

$$\mathcal{D}(E) := \mathcal{H}^{n-1}(E) - \mathcal{H}^{n-1}(B(0,1))$$

et

$$\mathcal{A}(E) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} d_H^2(E, B(x,1)).$$

L'extension du théorème 14.69 en dimension n s'énonce alors comme suit ([17]) :

Théorème 14.73. *Soit $n \geqslant 2$. Il existe $C, \delta > 0$ tels que, pour tout convexe $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B(0,1))$ et $\mathcal{D}(E) < \delta$,*

$$\mathcal{A}(E) \leqslant \begin{cases} C\sqrt{\mathcal{D}(E)} & \text{si } n = 2, \\ C\sqrt{\mathcal{D}(E)\ln\left(1/\mathcal{D}(E)\right)} & \text{si } n = 3, \\ C\mathcal{D}(E)^{2/(n+1)} & \text{si } n \geqslant 4. \end{cases} \tag{14.74}$$

Pour $n = 2$ et $n \geqslant 4$, les exposants qui apparaissent dans (14.74) *sont optimaux.*

Il existe aussi une version du théorème 14.73 pour des ensembles de périmètre fini généraux. L'absence de convexité[(2)] et l'irrégularité des ensembles considérés implique que la distance de Hausdorff n'est

[(2)] Considérer, en dimension 2, l'union d'un disque de grand rayon et d'un disque éloigné de petit rayon.

plus adaptée à la description de l'asymétrie dans ce cas. On utilisera la version suivante de l'asymétrie :

Définition 14.75. Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et $R > 0$ tel que $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B(0,R))$. On définit le trou isopérimétrique de E, noté $\mathcal{D}(E)$, et l'indice asymétrique de Fraenkel de E, noté $\alpha(E)$, par

$$\mathcal{D}(E) := \frac{\mathcal{H}^{n-1}(E) - \mathcal{H}^{n-1}(B(0,R))}{R^{n-1}}$$

et

$$\alpha(E) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{L}^n(E \Delta B(x,R))}{R^n},$$

où $A\Delta B$ a été défini dans (6.16).

L'extension du théorème 14.73 se formule comme une majoration de $\alpha(E)$ par une expression faisant intervenir $\mathcal{D}(E)$. Un premier résultat en ce sens est dû à Hall ([21]) :

Théorème 14.76. *Pour tout $n \geqslant 2$, il existe $C_n > 0$ tel que, pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{L}^n(E) < +\infty$,*

$$\alpha(E) \leqslant C_n \mathcal{D}(E)^{1/4}.$$

Ce résultat a été amélioré plus récemment par Fusco, Maggi et Pratelli, avec l'exposant optimal ([18]) :

Théorème 14.77. *Pour tout $n \geqslant 2$, il existe $C_n > 0$ tel que, pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{L}^n(E) < +\infty$, on ait*(3)

$$\alpha(E) \leqslant C_n \mathcal{D}(E)^{1/2}.$$

En d'autres termes, pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$ et tout $R > 0$ tel que $\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{H}^n(B(0,R))$,

$$\mathcal{H}^{n-1}(E) \geqslant \mathcal{H}^{n-1}(B(0,R))\left(1 + \frac{\alpha(E)^2}{n\alpha(n)C_n}\right).$$

(3)L'exposant $1/2$ est optimal, comme le montre l'exemple d'un ellipsoïde dont $n-1$ demi-axes sont le longueur 1 et le dernier de longueur strictement supérieure à 1.

15. Isopérimétrie et noyau de la chaleur

Dans $\mathbb{R}^n$, le noyau de la chaleur est la fonction

$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\bigl(-|x|^2/4t\bigr),$$

pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il intervient dans la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{pour tous } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \lim_{t\to 0^+} u(t,x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ donnée. Une solution est donnée par $u(x,t) = h_t * f(x)$. Le laplacien engendre un semi-groupe[(4)], noté $e^{t\Delta}$, et qui vérifie

$$e^{t\Delta} f(x) = h_t * f(x).$$

Ce semi-groupe est une contraction sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$, ce qui signifie que, pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $t > 0$,

$$\|e^{t\Delta} f\|_p \leqslant \|f\|_p \,.$$

Soit maintenant M une variété riemannienne complète non compacte et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. On peut montrer ([20, Ch. 4]) que l'opérateur Δ engendre un semi-groupe continu sur $L^2(M)$ (où M est munie de la mesure riemannienne μ), appelé semi-groupe de la chaleur, qui possède un noyau p_t, appelé noyau de la chaleur, et qui vérifie

$$e^{-t\Delta} f(x) = \int_M p_t(x,y) f(y) d\mu(y)$$

pour toute fonction $f \in L^2(M)$, tout $t > 0$ et tout $x \in M$. Le semi-groupe de la chaleur se prolonge en une contraction sur $L^p(M)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Il existe des connexions entre inégalité isopérimétrique dans M et comportement du noyau de la chaleur, dont nous donnons ici un aperçu, suivant les idées de [42, 44, 43] et la présentation de [8].

---

(4) au sens où, si $T_t f := h_t * f$, on a $T_{s+t} = T_s T_t$ pour tous $s, t > 0$.

On note d la distance riemannienne. Pour tout $x \in M$ et tout $r > 0$, $B(x,r)$ est la boule géodésique ouverte de centre x et de rayon r, et $V(x,r) := \mu(B(x,r))$. Enfin, ∇ désigne le gradient riemannien.

Soit $D > 2$ un paramètre. Considérons l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$\mu(\Omega)^{1-1/D} \leqslant C\sigma(\partial\Omega) \text{ pour tout ouvert } \Omega \Subset M, \tag{15.78}$$

où σ désigne la mesure de surface (la notation $\Omega \Subset M$ signifie que Ω est relativement compact et lisse). En utilisant la formule de la coaire, on obtient l'inégalité de Sobolev suivante :

$$\|f\|_{L^{D/(D-1)}} \leqslant C\,\|\nabla f\|_{L^1} \tag{15.79}$$

pour toute $f \in C_c^\infty(M)$. L'inégalité (15.79), appliquée à $f^{2(D-1)/(D-2)}$, donne une nouvelle inégalité de Sobolev :

$$\|f\|_{L^{2D/(D-2)}} \leqslant C\,\|\nabla f\|_{L^2}\,. \tag{15.80}$$

Soient $x_0 \in M$ et $r > 0$. Appliquée à (une régularisation C^∞ de) la fonction $f(x) = (r - d(x,x_0))_+$, où on rappelle que d est la distance riemannienne, (15.80) donne

$$\frac{r}{2}\,V(x_0, r/2)^{(D-2)/2D} \leqslant CV(x_0,r),$$

ce qui, par itération, donne

$$V(x_0,r) \geqslant cr^D. \tag{15.81}$$

Par ailleurs, reprenons l'inégalité (15.80). Comme $\|\nabla f\|_2^2 = \langle \Delta f, f\rangle$, elle se réécrit

$$\|f\|^2_{L^{2D/(D-2)}} \leqslant C\langle \Delta f, f\rangle.$$

Appliquant cette dernière inégalité à $e^{-s\Delta}f$, on obtient, pour tout $s > 0$,

$$\|e^{-s\Delta}f\|^2_{L^{2D/(D-2)}} \leqslant -\frac{C}{2}\frac{d}{ds}\|e^{-s\Delta}f\|^2_{L^2}.$$

Comme $e^{-s\Delta}$ est une contraction sur L^p pour tout p, on a donc

$$\begin{aligned} t\|e^{-t\Delta}f\|^2_{L^{2D/(D-2)}} &\leqslant \int_0^t \|e^{-s\Delta}f\|^2_{L^{2D/(D-2)}}ds \\ &\leqslant \frac{C_2}{2}\big(\|f\|^2_{L^2} - \|e^{-t\Delta}f\|^2_{L^2}\big), \end{aligned}$$

ce qui donne, pour tout $t > 0$,

$$\|e^{-t\Delta} f\|_{L^{2D/(D-2)}} \leqslant Ct^{-1/2} \|f\|_{L^2} .$$

Des arguments « abstraits »[(5)] utilisant des semi-groupes permettent d'en déduire que, pour tout $t > 0$,

$$\|e^{-t\Delta}\|_{L^1 \to L^\infty} \leqslant Ct^{-D/2},$$

ou, en d'autres termes,

$$\sup_{x \in M} p_t(x,x) \leqslant Ct^{-D/2}. \tag{15.82}$$

Si on part maintenant de (15.82), et si on écrit

$$\Delta^{-1/2} = c \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t\Delta} dt,$$

les estimations de $\left\|e^{-t\Delta}\right\|_{L^p \to L^q}$ montrent que $\Delta^{-1/2}$ est continu de L^2 dans $L^{2D/(D-2)}$, ce qui redonne (15.80).

Les inégalités (15.80) et (15.82) sont donc équivalentes, et impliquées par l'inégalité isopérimétrique. Elles impliquent (15.81). Par contre, (15.81) n'implique pas (15.82) ([45]), et (15.82) n'implique pas l'inégalité isopérimétrique ([9]).

16. Isopérimétrie dans les groupes

Cette section est consacrée aux inégalités isopérimétriques dans des groupes discrets et dans le groupe de Heisenberg.

16.1. Le cas des groupes discrets

Nous allons présenter d'abord le cas des groupes discrets, suivant [10]. Soit G un groupe discret infini, engendré par un ensemble fini $\{g_1, \ldots, g_k\}$. Pour tout $\Omega \subset G$, on définit le bord de Ω par

$$\partial\Omega := \{x \in \Omega;\ \text{il existe } i \in [\![1,k]\!] \text{ et } \varepsilon \in \{-1,1\} \text{ tels que } xg_i^\varepsilon \notin \Omega\} .$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la boule $B(n)$ est définie par

$$B(n) := \left\{x \in G;\ x = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots g_{i_n}^{\varepsilon_n};\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant k \text{ et } \varepsilon_i \in \{-1,1\}\right\} .$$

(5) i.e., non spécifiques au cadre riemannien considéré ici

Pour tout ensemble fini $\Omega \subset G$, on pose $|\Omega| = \#\Omega$ (on rappelle que $\#$ désigne le cardinal). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $V(n) := |B(n)|$. Pour tout $\lambda > 0$, on définit

$$\varphi(\lambda) := \inf \{n \geqslant 1;\ V(n) > \lambda\}.$$

On peut alors énoncer l'inégalité isopérimétrique suivante ([10, Th. 1]) :

Théorème 16.83. *Pour tout ensemble* $\Omega \subset G$*,*

$$|\Omega| \leqslant 8k\varphi(2|\Omega|)\,|\partial\Omega|. \tag{16.84}$$

La preuve utilisera la notion de gradient discret sur G : si f est une fonction sur G, on définit, pour tout $x \in G$,

$$\nabla f(x) := \sum_{y \sim x} |f(y) - f(x)|,$$

où la notation $y \sim x$ signifie qu'il existe $i \in [\![1, k]\!]$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $y = xg_i^{\varepsilon}$.

Pour toute fonction f sur G et tout $x \in G$, on définit

$$f_n(x) := \frac{1}{V(n)} \sum_{y \in B(n)} f(xy).$$

On commence par :

Lemme 16.85. *Pour tout* $n \geqslant 1$ *et toute fonction* f *sur* G *à support fini,*

$$\|f - f_n\|_{L^1(G)} \leqslant n \|\nabla f\|_{L^1(G)}.$$

Preuve du lemme 16.85. Pour tout $y \in G$, on définit la fonction f^y par $f^y(x) := f(xy)$. On vérifie facilement que, pour tout $y \in B(n)$,

$$\|f - f^y\|_{L^1(G)} \leqslant n \|\nabla f\|_{L^1(G)}$$

(il suffit de le voir quand $y = g_i$ puis d'appliquer l'inégalité triangulaire). On en déduit que

$$\begin{aligned}\|f - f_n\|_{L^1(G)} &\leqslant \frac{1}{V(n)} \sum_{x\in G} \sum_{y\in B(n)} |f(x) - f(xy)| \\ &= \frac{1}{V(n)} \sum_{y\in B(n)} \|f - f^y\|_{L^1(G)} \\ &\leqslant n \|\nabla f\|_{L^1(G)} . \end{aligned}$$

□

On en déduit :

Proposition 16.86. *Pour tout $\lambda > 0$ et toute fonction f à support fini sur G,*

$$|\{x \in G;\ |f(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{2}{\lambda} \varphi\left(\tfrac{2}{\lambda} \|f\|_{L^1(G)}\right) \|\nabla f\|_{L^1(G)} .$$

Preuve de la proposition 16.86. Soit $n \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}&|\{x \in G;\ |f(x)| > \lambda\}| \\ &\qquad \leqslant |\{x \in G;\ |f - f_n(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in G;\ |f_n(x)| > \lambda/2\}| .\end{aligned}$$

On choisit $n = \varphi\left(\tfrac{2}{\lambda} \|f\|_{L^1(G)}\right)$, de sorte que $V(n)^{-1} \|f\|_{L^1(G)} < \lambda/2$, donc

$$\|f_n\|_{L^\infty(G)} \leqslant \frac{1}{V(n)} \|f\|_{L^1(G)} < \frac{\lambda}{2},$$

ce qui montre que

$$|\{x \in G;\ |f_n(x)| > \lambda/2\}| = 0.$$

Ainsi,

$$|\{x \in G;\ |f(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{2}{\lambda} \|f - f_n\|_{L^1(G)} ,$$

et on conclut grâce au lemme 16.85. □

On déduit le théorème 16.83 de la proposition 16.86 appliquée à $f = \mathbf{1}_\Omega$ et $\lambda = 1$. □

Si par exemple il existe $c, D > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $V(n) \geqslant cn^D$, (16.84) implique

$$|\Omega|^{1-1/D} \leqslant C |\partial\Omega| .$$

Le théorème 16.83 couvre aussi d'autres situations. Par exemple, si $V(n) \geqslant Ce^{cn}$, on obtient

$$|\Omega| \leqslant C\,|\partial\Omega|\ln|\Omega|\,.$$

16.2. Le groupe de Heisenberg

Revenons maintenant au cas du groupe de Heisenberg. On définit les ensembles de périmètre fini comme suit : soit $F \subset \mathbb{H}$. On dit que F est à périmètre fini si, et seulement si,

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(F) := \sup\left\{\int_F \operatorname{div}_{\mathbb{H}}\varphi\, d\mathcal{L}^3;\ \varphi \in C^1_c(\mathbb{H},\mathbb{R}^2),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} < +\infty.$$

Ici, la divergence est définie par

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}}\varphi = X\varphi_1 + Y\varphi_2$$

(on renvoie à la section 7 de la partie II pour ces notations). L'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{H}$ s'énonce alors ainsi ([19]) : il existe $C > 0$ tel que, pour tout $F \subset \mathbb{H}$ de périmètre fini,

$$\mathcal{L}^3(F)^{3/4} \leqslant C\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(F).$$

Le *problème* isopérimétrique est la question suivante : parmi les ensembles $F \subset \mathbb{H}$ vérifiant $\mathcal{L}^3(F) = 1$, en existe-t-il de périmètre minimal, et le cas échéant, quelle description géométrique peut-on en donner ?

Le premier résultat dans ce sens affirme ([28]) qu'il existe bien des ensembles isopérimétriques, i.e., des ensembles de périmètre minimal parmi tous ceux de mesure 1. Ces ensembles sont en particulier bornés et connexes.

Toutefois, on ne sait pas à l'heure actuelle caractériser les ensembles d'isopérimétrie pour $\mathbb{H}$. Il est connu ([34]) que les boules pour la métrique de Carnot-Carathéodory ne sont pas des ensembles d'isopérimétrie.

Une conjecture, formulée par Pansu en 1982 ([37]) et toujours ouverte à l'heure actuelle, affirme que les ensembles isopérimétriques pour $\mathbb{H}$ sont, à translation à gauche et dilatation près, les ensembles de révolution obtenus par rotation autour de l'axe des z des géodésiques joignant les points $(0, 0, \pi R^2/8)$ et $(0, 0, -\pi R^2/8)$. De façon explicite, ces géodésiques sont les courbes $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{H}$ données par

$$\gamma(s) = \Big(\frac{R}{2}(\cos s + 1), \frac{R}{2}\sin s, \frac{R^2}{8}(\sin s + s)\Big).$$

On peut aussi les décrire comme étant les ensembles

$$\Big\{(x, y, t) \in \mathbb{H};\ |t| < \arccos\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2+y^2 < 1\Big\}. \tag{16.87}$$

Des simulations numériques effectuées à partir de polyèdres (justifiées par le fait que des ensembles de périmètre fini peuvent être approchés par des polyèdres en un sens convenable, voir [33]) mettent en évidence des « bulles » donnant une solution approchée au problème isopérimétrique. Ces bulles sont effectivement solution de ce problème lorsqu'il est restreint à des ensembles lisses possédant une symétrie cylindrique ([27]).

La solution du problème isopérimétrique restreint aux sous-ensembles convexes de $\mathbb{H}$ est également donnée par l'ensemble (16.87) ([35, Th. 1.1]). Des inégalités isopérimétriques quantitatives dans $\mathbb{H}$ pour certaines classes de sous-ensembles ont été obtenues dans [16, Th. 1.1].

Appendice : sur la somme de Minkowski

Cet appendice est consacré à la construction de deux ensembles mesurables $A, B \subset \mathbb{R}$ tels que $A + B$ ne soit pas mesurable. Dans tout ce qui suit, on considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Lemme 16.88. *Il existe une partie mesurable $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ qui forme une base de $\mathbb{R}$.*

Preuve du lemme 16.88. Soit $X \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des réels x de la forme

$$x = N + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n 2^{-2n-1},$$

avec $N \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon_n \in \{0,1\}$ et les ε_n ne valent pas tous 1 à partir d'un certain rang. De même, soit $Y \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des réels y de la forme
$$y = N + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n 2^{-2n},$$
avec $\varepsilon_n \in \{0,1\}$ et les ε_n ne valent pas tous 1 à partir d'un certain rang.

La famille $X \cup Y$ est génératrice de $\mathbb{R}$, et il est facile de vérifier que X et Y sont de mesure nulle, donc c'est aussi le cas de $X \cup Y$. Une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ incluse dans $X \cup Y$ répond donc à la question (puisqu'une telle base est de mesure nulle, donc mesurable). $\square$

On utilisera aussi :

Lemme 16.89.

(1) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ mesurable avec $\mathcal{L}^1(A) > 0$. Alors il existe $x, y \in A$ tels que $x - y \in \mathbb{Q}$.*

(2) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ mesurable avec $\mathcal{L}^1(A) > 0$. Alors A est une partie génératrice de $\mathbb{R}$.*

Preuve du lemme 16.89. Pour (1), il existe un intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}^1(A \cap I) > 0$. Les ensembles $(A \cap I) + 1/n$ pour $n \geqslant 1$ sont tous de même mesure strictement positive et inclus dans un même intervalle borné, donc ne peuvent pas être deux à deux disjoints. Il existe donc $x, y \in A \cap I$ et $m, n \geqslant 1$ tels que $x + 1/n = y + 1/m$, ce qui donne la conclusion de (1).

Pour (2), soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, x appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par A. Si $x \neq 0$, $\mathcal{L}^1\left(\frac{1}{x}A\right) > 0$. Il existe donc $y, z \in A$ tels que $y \neq z$ et $(y - z)/x \in \mathbb{Q}$. Alors $x = (x/(y-z))y - (x/(y-z))z$ appartient encore au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par A. $\square$

Proposition 16.90. *Il existe $A, B \subset \mathbb{R}$ mesurables tels que $A + B$ ne soit pas mesurable.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde, en supposant donc que, pour tous $A, B \subset \mathbb{R}$ mesurables, $A + B$ est mesurable. Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ une base de $\mathbb{R}$ mesurable (donnée par le lemme 16.88). Soit $b \in \mathcal{B}$ et $V \subset \mathbb{R}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par $\mathcal{B} \setminus \{b\}$. Pour tout

$n \in \mathbb{N}$, on définit A_n comme l'ensemble des réels x qui ont au plus n coordonnées non nulles dans la base $\mathcal{B}$.

Les A_n sont tous mesurables. En effet, c'est vrai pour $A_0 = \{0\}$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n soit mesurable. Alors $A_{n+1} = A_n + \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} q\mathcal{B}$ est donc aussi mesurable.

Comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}^1(A_n) > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$ le plus petit entier possédant cette propriété (on note que $k \geqslant 1$).

Soit alors $q \in \mathbb{Q}$ avec $q \neq 0$. Alors

$$A_k \cap (V + qb) \subset (A_{k-1} \cap V) + qb,$$

ce qui montre que $\mathcal{L}^1(A_k \cap (V + qb)) = 0$.

Comme

$$A_k \cap V = A_k \smallsetminus \bigcup_{q \neq 0} (A_k \cap (V + qb)),$$

on en déduit que $\mathcal{L}^1(A_k \cap V) = \mathcal{L}^1(A_k) > 0$. Par le lemme 16.89, on obtient que $A_k \cap V$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}$, ce qui est impossible, car le sous-espace de $\mathbb{R}$ engendré par $A_k \cap V$ est inclus dans $V \subsetneq \mathbb{R}$. □

Références

[1] R. A. Adams & J. J. F. Fournier – *Sobolev spaces*, 2e éd., Pure and Applied Math., vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara – *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, 2000.

[3] J. Benedetto & W. Czaja – *Integration and modern analysis*, Birkhäuser, Basel, 2009.

[4] M. Berger & B. Gostiaux – *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, P.U.F., 1992.

[5] T. Bonnesen – « Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren », *Math. Ann.* **91** (1924), p. 252–268.

[6] H. Brezis – *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Dunod, Paris, 1994.

[7] J. E. Brothers & W. P. Ziemer – « Minimal rearrangements of Sobolev functions », *J. reine angew. Math.* **384** (1988), no. 1, p. 153–179.

[8] T. Coulhon – « Heat kernels on non-compact Riemannian manifolds : a partial survey », in *Séminaire de théorie spectrale et géométrie (1996/97)*, Institut Fourier (Grenoble), 1997, p. 167–187.

[9] T. Coulhon & M. Ledoux – « Isopérimétrie, décroissance du noyau de la chaleur et transformations de Riesz : Un contre-exemple », *Ark. Mat.* **32** (1994), no. 1, p. 63–77.

[10] T. Coulhon & L. Saloff-Coste – « Isopérimétrie pour les groupes et les variétés », *Rev. Mat. Iberoamericana* **9** (1993), no. 2, p. 293–314.

[11] L. Evans – *Partial differential equations*, Graduate Texts in Math., vol. 119, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[12] L. Evans & R. Gariepy – *Measure theory and fine properties of functions*, Textbooks in Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.

[13] G. Faber – « Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt », *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bauerischen Akademie der Wissenschaften zu München Jahrgang* (1923), p. 169–172.

[14] H. Federer – *Geometric measure theory*, Springer, 1969.

[15] G. B. Folland – *Real analysis : modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, 2013.

[16] V. Franceschi, G. P. Leonardi & R. Monti – « Quantitative isoperimetric inequalities in $\mathbb{H}^n$ », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **54** (2015), no. 3, p. 3229–3239.

[17] B. Fuglede – « Stability in the isoperimetric problem for convex or nearly spherical domains in $\mathbb{R}^n$ », *Trans. Amer. Math. Soc.* **314** (1989), no. 2, p. 619–638.

[18] N. Fusco, F. Maggi & A. Pratelli – « The sharp quantitative isoperimetric inequality », *Ann. of Math. (2)* **168** (2008), no. 3, p. 941–980.

[19] N. Garofalo & D.-M. Nhieu – « Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces », *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), no. 10, p. 1081–1144.

[20] A. Grigoryan – *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Math., vol. 47, American Mathematical Society, 2009.

[21] R. R. Hall – « A quantitative isoperimetric inequality in n-dimensional space », *J. reine angew. Math.* **428** (1992), p. 161–175.

[22] A. Henrot – *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Birkhäuser, 2006.

[23] D. A. Klain & G.-C. Rota – *Introduction to geometric probability*, Cambridge : Cambridge University Press ; Rome : Accademia Nazionale dei Lincei, 1997.

[24] H. Knothe – « Contributions to the theory of convex bodies. », *Michigan Math. J.* **4** (1957), no. 1, p. 39–52.

[25] E. Krahn – « Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises », *Math. Ann.* **94** (1925), no. 1, p. 97–100.

[26] ———, « Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen », *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* **9** (1926), p. 1–44.

[27] G. P. Leonardi & S. Masnou – « On the isoperimetric problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$ », *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **184** (2005), no. 4, p. 533–553.

[28] G. P. Leonardi & S. Rigot – « Isoperimetric sets on Carnot groups », *Houston J. Math.* **29** (2003), no. 3, p. 609–637.

[29] F. Maggi – *Sets of finite perimeter and geometric variational problems : an introduction to geometric measure theory*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 135, Cambridge University Press, 2012.

[30] F. Maggi, M. Ponsiglione & A. Pratelli – « Quantitative stability in the isodiametric inequality via the isoperimetric inequality », *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), no. 3, p. 1141–1160.

[31] V. Maz'ya – *Sobolev spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 342, Springer Verlag, 2011.

[32] A. Mondino & E. Spadaro – « On an isoperimetric-isodiametric inequality », *Anal. PDE* **10** (2017), no. 1, p. 95–126.

[33] F. Montefalcone – « Sets of finite perimeter associated with vector fields and polyhedral approximation », *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **14** (2003), no. 4, p. 279–295.

[34] R. Monti – « Some properties of Carnot-Carathéodory balls in the Heisenberg group », *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **11** (2000), no. 3, p. 155–167.

[35] R. Monti & M. Rickly – « Convex isoperimetric sets in the Heisenberg group », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)* **8** (2009), no. 2, p. 391–415.

[36] H. Pajot & E. Russ – *Analyse dans les espaces métriques*, Savoirs Actuels, EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2018.

[37] P. Pansu – « Une inégalité isoperimetrique sur le groupe de Heisenberg », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **295** (1982), p. 127–130.

[38] J. Rayleigh – *The theory of sound*, Dover Publications, New York, 1945, vols. 1 and 2.

[39] S. Rigot – « Isodiametric inequality in Carnot groups », *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **36** (2011), p. 245–260.

[40] W. Rudin – *Real and complex analysis*, 3e éd., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[41] E. M. Stein & R. Shakarchi – *Fourier analysis, an introduction*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.

[42] N. T. Varopoulos – « Une généralisation du théoreme de Hardy-Littlewood-Sobolev pour les espaces de Dirichlet », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **299** (1984), no. 14, p. 651–654.

[43] ———, « Hardy-Littlewood theory for semigroups », *J. Funct. Anal.* **63** (1985), no. 2, p. 240–260.

[44] ———, « Isoperimetric inequalities and Markov chains », *J. Funct. Anal.* **63** (1985), no. 2, p. 215–239.

[45] ———, « Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels. I : The semigroup technique », *Bull. Sci. Math. (2)* **113** (1989), no. 3, p. 253–277.

[46] W. P. Ziemers – *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Math., vol. 120, Springer Verlag, 1989.

Emmanuel Russ, Université Grenoble Alpes, CNRS UMR 5582, 100 rue des mathématiques, 38610 Gières, France
E-mail : emmanuel.russ@univ-grenoble-alpes.fr
Url : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/content/emmanuel-russ