



Journées mathématiques X-UPS

Année 2016

Arbres et marches aléatoires

Vincent BEFFARA

La marche auto-évitante

Journées mathématiques X-UPS (2016), p. 103-130.

<https://doi.org/10.5802/xups.2016-03>

© Les auteurs, 2016.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

LA MARCHE AUTO-ÉVITANTE

par

Vincent Beffara

Résumé. Ce texte présente quelques propriétés de la marche auto-évitante uniforme sur un réseau, ainsi qu'une preuve complète du résultat de Duminil-Copin et Smirnov calculant la constante de connectivité du réseau hexagonal.

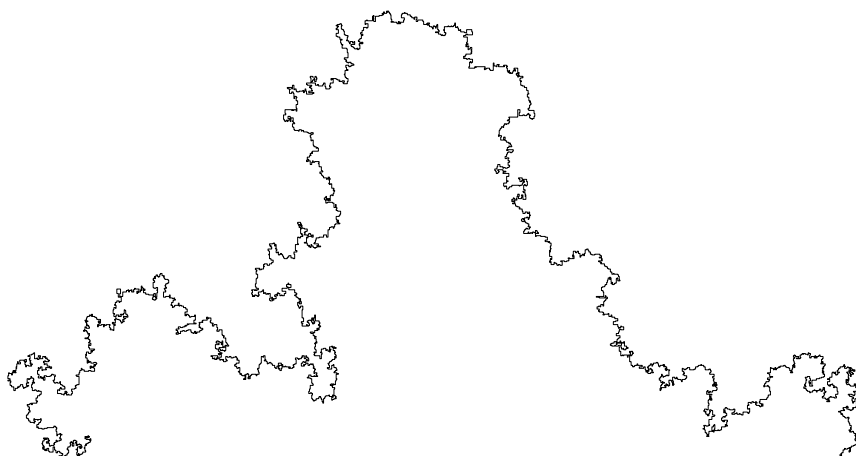


Table des matières

1. Introduction.....	104
1.1. Un petit échauffement.....	104
1.2. Le modèle.....	105
1.3. La constante de connectivité.....	106
1.4. La suite.....	107
2. Résultats un peu moins élémentaires.....	108
2.1. La suite (c_n)	108

2.2. L'algorithme du pivot.....	109
2.3. La borne de Hammersley-Welsh.....	111
2.4. Contrôle des fluctuations.....	112
3. La constante de connectivité du réseau hexagonal.....	114
3.1. Notations.....	114
3.2. L'observable de Smirnov.....	115
3.3. Une estimée dans une bande.....	117
3.4. Minoration de μ	118
3.5. Majoration de μ	120
4. Variantes du modèle.....	121
4.1. Mesure de polymère.....	121
4.2. Polymères interagissants.....	121
4.3. Marche aléatoire à boucles effacées.....	124
5. Développements en lacets.....	125
6. Quelques questions ouvertes.....	127
6.1. La marche auto-évitante de longueur infinie.....	127
6.2. Comportement en dimension 2.....	128
Références.....	129

1. Introduction

La loi de probabilité la plus élémentaire est certainement la *loi uniforme sur un ensemble fini* Ω , qui associe à chaque éventualité $\omega \in \Omega$ la même probabilité $|\Omega|^{-1}$; cette mesure devient intéressante dès qu'on donne à Ω une structure supplémentaire, et le but de ce texte est de décrire en détail ce que l'on sait (et on sait peu de choses!) sur un cas particulièrement naturel, où Ω est un ensemble de chemins sur un réseau.

1.1. Un petit échauffement

Soit n un entier positif, et notons S_n l'ensemble des chemins de longueur n dans \mathbb{Z} faisant des pas ± 1 . Plus précisément :

$$(1) \quad S_n := \{(\omega_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{Z}^{n+1} : \omega_0 = 0 \text{ et } \forall i < n, |\omega_{i+1} - \omega_i| = 1\}.$$

Il est facile de voir que le cardinal de S_n est égal à 2^n . La mesure uniforme P_n sur S_n décrit exactement les n premiers pas d'une *marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}* , autrement dit sous la loi P_n les accroissements $(\omega_{i+1} - \omega_i)$ sont indépendants et de même loi. En particulier tous les

résultats classiques sur les tirages indépendants s'appliquent : la loi de ω_n est à transformation affine près une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$, et quand $n \rightarrow \infty$ on a une loi des grands nombres, un théorème central limite, une loi du logarithme itéré, des estimées de grandes déviations...

Une propriété fondamentale des mesures P_n est leur *compatibilité* : pour $n < m$, si on regarde la loi de $(\omega_k)_{k \leq n}$ sous la mesure P_m (en oubliant les $m - n$ derniers pas) on trouve exactement P_n . Cela entraîne, par le théorème d'extension de Kolmogorov, l'existence d'un analogue de P_n pour $n = +\infty$, donc une mesure de probabilités sur les chemins infinis à valeurs dans \mathbb{Z} sous laquelle la loi des n premiers pas est P_n . Tout cela n'est bien sûr qu'une manière pompeuse de dire qu'on peut regarder la marche aléatoire simple (X_n) pour $n \in \mathbb{N}$!

1.2. Le modèle

Il est temps de définir l'objet central de ce texte. Fixons une dimension entière $d \geq 1$, et considérons l'ensemble des chemins auto-évitant de longueur n dans \mathbb{Z}^d :

$$(2) \quad \Omega_n^d := \left\{ (\omega_k)_{0 \leq k \leq n} \in (\mathbb{Z}^d)^{n+1} : \begin{array}{l} \omega_0 = 0 \\ \forall i < n, |\omega_{i+1} - \omega_i| = 1 \\ \forall i < j, \omega_i \neq \omega_j \end{array} \right\}$$

(en notant $|\cdot|$ la norme euclidienne, ce qui revient à dire que ω est un chemin par plus proches voisins dans \mathbb{Z}^d).

Définition 1. On notera P_n^d la mesure de probabilité uniforme sur Ω_n^d ; on appelle *marche auto-évitante de longueur n sur \mathbb{Z}^d* un chemin aléatoire de loi P_n^d .

En dimension $d = 1$ il ne se passe rien d'extraordinaire, Ω_n^1 a exactement deux éléments (le chemin qui marche vers la droite et celui qui marche vers la gauche), et le modèle est trivial. Dans toute la suite on supposera donc $d \geq 2$, et on l'omettra le plus souvent dans les notations (on écrira donc Ω_n pour Ω_n^d etc.).

Bien sûr le modèle peut être défini dans une généralité beaucoup plus grande, dès que l'on dispose d'un graphe infini de degré partout fini on peut définir les objets dont il est question ici. Le réseau \mathbb{Z}^d a

l'avantage d'être à la fois facile à définir et non trivial du point de vue de la marche auto-évitante. On verra dans la partie 3 que le réseau hexagonal joue aussi un rôle particulier dans la théorie.

Du point de vue de la physique, la marche auto-évitante en dimension 3 est une modélisation raisonnable du comportement d'un polymère linéaire en solution : un tel polymère est une longue chaîne de monomères identiques, chacun étant à distance fixée de ses voisins le long de la chaîne, et satisfaisant la contrainte que deux monomères ne peuvent pas occuper la même position dans l'espace. Le choix de la mesure uniforme, plutôt que de tenir compte d'interactions à plus longue portée, est une restriction dont les physiciens conjecturent qu'elle a (dans un certain régime) peu d'effet sur le comportement asymptotique qualitatif de la chaîne ; Cf. 4.2 pour plus de détails.

1.3. La constante de connectivité

Soit $c_n = |\Omega_n|$ le nombre de chemins auto-évitants de longueur n . La première question naturelle qui se pose est celle du calcul de c_n . La remarque cruciale est la suivante : si on se donne un chemin $\omega \in \Omega_{m+n}$, on peut le découper en un *préfixe* de longueur m et un *suffixe* de longueur n , qui sont deux chemins auto-évitants. Ceci construit une injection de Ω_{m+n} dans $\Omega_m \times \Omega_n$, et on obtient l'inégalité

$$(3) \quad c_{m+n} \leq c_m c_n.$$

D'autre part, l'encadrement suivant est immédiat :

$$(4) \quad d^n \leq c_n \leq (2d)^n$$

(la première inégalité provient du fait que si les sauts de ω ont toutes leurs coordonnées positives, alors ω est automatiquement auto-évitant). La suite $(\log c_n)$ est par conséquent sous-additive, et bornée inférieurement et supérieurement par deux suites arithmétiques : c'est un exercice classique de montrer que cela implique l'existence de la limite de $n^{-1} \log c_n$. En reprenant l'exponentielle :

Définition 2. On appelle *constante de connectivité* du réseau \mathbb{Z}^d la limite

$$\mu_d := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{1/n} \in [d, 2d].$$

Remarque 1. La sous-additivité fournit également une borne inférieure :

$$(5) \quad \forall n, \quad c_n \geq \mu^n.$$

On ne connaît pas de bonnes bornes supérieures en toute généralité. Cf. 2.3 pour une majoration un peu brutale, la section 5 pour le cas $d \gg 1$ et 6.2 pour des conjectures en dimension 2. Une borne supérieure légèrement meilleure sur μ peut être obtenue en remarquant qu'une marche auto-évitante ne peut jamais revenir sur ses pas, ce qui implique qu'à part en 0 on a au plus $2d - 1$ continuations possibles à chaque pas, et entraîne $\mu \leq 2d - 1$. Il est possible de faire encore un peu mieux :

Exercice 1. Montrer les inégalités strictes : $d < \mu_d < 2d - 1$.

1.4. La suite

Le reste de ce texte est subdivisé en parties essentiellement indépendantes. La partie 2 est consacrée à des résultats généraux sur la marche auto-évitante, valables en assez grande généralité, avec des indications de preuves mais sans toujours de démonstration complète, on pourra se référer au livre [15] pour la plupart des détails. La partie 3 contient une preuve complète du théorème de Duminil-Copin et Smirnov, qui calcule la valeur de la constante de connectivité du réseau hexagonal. La partie 4 liste quelques variantes du modèle, qui sont plus ou moins facile à étudier. La partie 5 décrit la théorie du *développement en lacets* qui permet d'étudier le modèle en grande dimension, et donne (sans preuve) les principaux résultats. Enfin, la partie 6 fait le point sur quelques conjectures et questions ouvertes.

Pour ce qui est de la bibliographie, la référence habituelle est le livre de Madras et Slade [15], mais il ne contient pas la preuve de Duminil-Copin et Smirnov. Les notes de cours de Slade à l'école d'été de Buzios [1] constituent une excellente entrée en matière, et recouvrent une grande partie des résultats mentionnés ici.

2. Résultats un peu moins élémentaires

2.1. La suite (c_n)

On a vu que par sous-additivité, $c_n^{1/n} \rightarrow \mu$. Il est facile d'en dire un petit peu plus sur cette suite, par exemple on peut montrer que pour $n > 0$,

$$c_{n+2} > c_n.$$

L'argument est astucieux mais simple : étant donnée une marche ω de longueur n , on localise le point ω_k de la trajectoire qui est le plus grand pour l'ordre lexicographique (première coordonnée maximale, deuxième coordonnée maximale parmi les points de première coordonnée maximale, etc.) et on remplace le pas (ω_k, ω_{k+1}) par un petit chemin de longueur 3, $(\omega_k, \eta_1, \eta_2, \omega_{k+1})$ qui complète ce pas en un carré.

Le chemin que l'on obtient est de longueur $n+2$. Il est auto-évitant si on oriente le petit carré ajouté de telle sorte que le nouveau sommet maximal pour l'ordre lexicographique soit η_1 ou η_2 . Par ailleurs, sous cette condition, on obtient une injection de Ω_n dans Ω_{n+2} car il est possible d'identifier sur la nouvelle trajectoire la position de l'ajout.

Il est encore vrai que pour tout $n > 0$ on a $c_{n+1} > c_n$. La construction ci-dessus ne permet toutefois pas de changer la parité de la longueur de ω , et la preuve [18] est beaucoup plus technique. Il est aussi sans doute vrai que la suite c_{n+1}/c_n converge vers μ (la convergence de $\sqrt[n]{c_n}$ vers μ en découlerait par Césaro), mais il s'agit d'une question ouverte. On ne sait prouver que la convergence entre des termes de même parité [12, 13], *i.e.*

$$(6) \quad \frac{c_{n+2}}{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu^2.$$

On connaît par ailleurs la valeur exacte de c_n pour les « petites » valeurs de n . Le calcul nécessite des algorithmes astucieux [11], et par exemple dans le réseau \mathbb{Z}^2 on connaît le nombre de marches auto-évitantes de longueur jusqu'à la valeur $n = 71$:

$$c_{71} = 4\,190\,893\,020\,903\,935\,054\,619\,120\,005\,916.$$

La connaissance de ces valeurs permet de trouver une valeur approchée de la constante de connectivité en dimension 2 : $\mu \simeq 2.638$.

2.2. L'algorithme du pivot

Une question naturelle est de savoir comment, en pratique, tirer au hasard un élément de Ω_n de loi uniforme. On ne dispose pas d'algorithme réalisant ce tirage de manière exacte et efficace (ce qui traduit le manque de compréhension mathématique que nous avons du modèle).

Il y a une procédure qui réalise un tirage exact, et qui consiste en une application de la *méthode du rejet* : on tire au sort un chemin de longueur n dans \mathbb{Z}^d , et s'il est auto-évitant on le conserve, sinon on l'ignore et on en tire au sort un nouveau, et ainsi de suite jusqu'à tomber sur un élément de Ω_n . Cette construction s'arrête en temps fini, et fournit un élément de Ω_n dont la loi est uniforme. Mais la méthode est extrêmement mauvaise en pratique car le nombre moyen de tirages qu'il faut réaliser est égal à $(2d)^n/c_n$ qui est exponentiellement grand.

On sait toutefois fabriquer des chemins aléatoires de longueur n , auto-évitants, dont la loi est *presque* uniforme, en itérant un grand nombre de fois une transformation simple qui est définie de la manière suivante. Si $\omega \in \Omega_n$, et si on se donne une paire $(k, \theta) \in \{0, \dots, n\} \times \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, notons $\tilde{R}_{(k, \theta)}(\omega)$ le chemin obtenu à partir de ω en ne touchant pas ses k premiers pas, et en appliquant aux $n - k$ suivants la rotation d'angle θ autour de ω_k . Puis, notons

$$R_{(k, \theta)}(\omega) = \begin{cases} \tilde{R}_{(k, \theta)}(\omega) & \text{si } \tilde{R}_{(k, \theta)}(\omega) \in \Omega_n, \\ \omega & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, on essaye de déformer ω par une opération de pivot, mais on ne le fait que si le chemin obtenu est auto-évitant.

L'algorithme du pivot consiste à répéter l'opération $R_{(k_i, \theta_i)}$ un grand nombre de fois, pour des paires (k_i, θ_i) aléatoires, pour construire une suite de chemins $(\omega^i)_{i \geq 0}$ dans Ω_n récursivement en posant

$$\omega^i = R_{(k_i, \theta_i)}(\omega^{i-1}).$$

Il est simple de montrer que la loi de ω^i converge vers la mesure uniforme sur Ω_n : en fait (ω^i) est une chaîne de Markov sur Ω_n , et la mesure uniforme P_n est *réversible* pour cette chaîne, ce qui implique

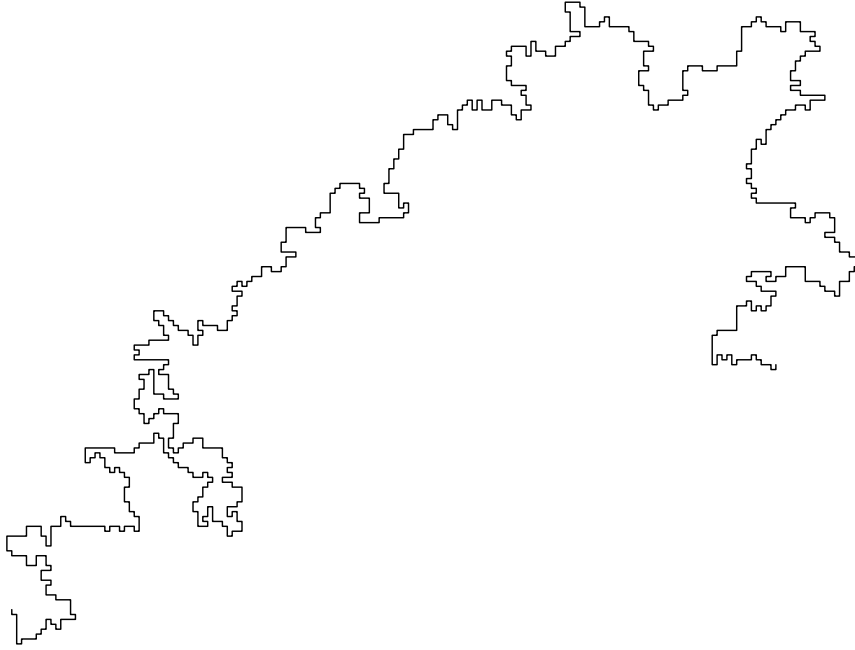


FIGURE 1. Une marche auto-évitante obtenue par l'algorithme du pivot (longueur $n = 1000$, 10^6 opérations élémentaires).

qu'elle soit invariante ; la seule étape subtile de la preuve est l'exercice suivant.

Exercice 2. Soient ω et ω' deux éléments de Ω_n : montrer que l'on peut passer de l'une à l'autre par des opérations de pivot, *i.e.* qu'il existe $(k_i, \theta_i)_{1 \leq i \leq m}$ tels que

$$\omega' = R_{(k_m, \theta_m)} \circ \cdots \circ R_{(k_1, \theta_1)}(\omega).$$

Montrer que cet énoncé devient faux si on n'autorise pas la valeur π pour les angles de rotation θ_i .

La situation n'est pas satisfaisante pour autant, car on ne sait pas précisément quelle est la vitesse de convergence de l'algorithme. Il est probable que le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour

obtenir une bonne approximation se comporte comme une puissance de n , mais il n'y a pas de conjecture sur la valeur de l'exposant.

2.3. La borne de Hammersley-Welsh

On a vu que par un argument de sous-multiplicativité, on a facilement une minoration de c_n par une suite géométrique. Trouver une borne supérieure est beaucoup plus ardu. On conjecture un majorant de la forme $\mu^n n^A$ pour une certaine puissance A dépendant de la dimension, mais une telle borne n'est connue que pour d grand (cf. section 5). Le seul résultat dans ce sens qui soit prouvé en toute généralité est beaucoup moins précis :

Théorème 1 (Hammersley, Welsh, 1962 [8]). *On a l'encadrement suivant du nombre de chemins auto-évitant :*

$$\mu^n \leq c_n \leq \mu^n e^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}.$$

L'idée de la preuve est la suivante (en dimension 2, mais l'argument se généralise facilement). Un *pont* de longueur n est une marche auto-évitante $\omega \in \Omega_n$ tel que pour tout $i > 0$, l'abscisse de ω_i soit strictement positive, prenant sa valeur maximale pour ω_n (et éventuellement d'autres); notons Λ_n l'ensemble des ponts de longueur n et $b_n = |\Lambda_n|$ leur nombre. Clairement

$$(7) \quad b_n \leq c_n.$$

D'autre part, étant donnés deux ponts de longueurs respectives m et n , il est toujours possible de les concaténer pour obtenir un pont de longueur $m + n$: cela entraîne l'inégalité

$$(8) \quad b_{m+n} \geq b_m b_n,$$

autrement dit la sous-multiplicativité de (c_n) marche dans l'autre sens pour la suite (b_n) . Il existe donc une constante de connectivité μ' pour les ponts, et on a « gratuitement » la majoration $b_n \leq (\mu')^n$. Par ailleurs, on a aussi immédiatement $\mu' \leq \mu$.

Il reste à obtenir une borne supérieure pour c_n en termes des b_n . C'est là qu'il faut être un peu astucieux ... l'idée consiste à partir d'une marche auto-évitante et à la « déplier » autour de ses pas d'abscisses maximales et minimales jusqu'à pouvoir l'écrire comme

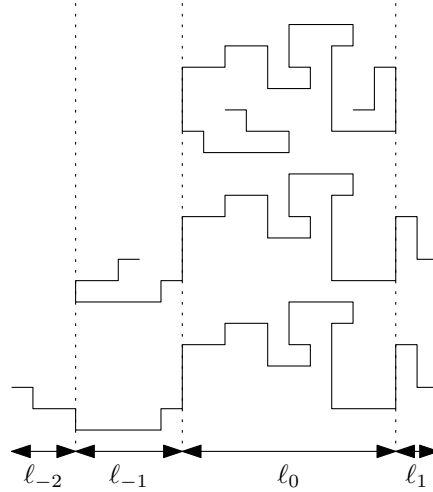


FIGURE 2. La preuve du théorème 1 : dépliage d'une marche auto-évitante de longueur $n = 46$ en ponts, et notation utilisée

concaténation de ponts (cf. Figure 2). Les largeurs (ℓ_k) des ponts obtenus forment deux suites décroissantes, une de chaque côté, et leur somme est inférieure ou égale à n : le nombre de telles paires de suites peut alors être contrôlé par le nombre de *partitions* de n en entiers, qui se comporte [10] comme $e^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$. La marche ainsi dépliée est elle-même un pont, et elle permet de retrouver la marche initiale connaissant les (ℓ_k) .

On obtient ainsi une application de Ω_n vers Λ_n , pour laquelle chaque pont a au plus $e^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$ antécédents : il s'ensuit que

$$(9) \quad c_n \leq b_n e^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}.$$

En combinant (7) et (9), on obtient bien $\mu = \mu'$ et l'encadrement du théorème 1.

2.4. Contrôle des fluctuations

Nous terminons cette partie par l'énoncé (sans preuve) de deux résultats récents sur le comportement d'une longue marche auto-évitante uniforme. Ces résultats sont loin d'être optimaux, et le fait

qu'ils ne datent que de quelques années est une indication supplémentaire de notre manque de compréhension du modèle. Dans tout le reste de cette section on suppose implicitement que $d \geq 2$ (le cas $d = 1$ étant trivial et qualitativement différent).

Le premier énoncé montre que le diamètre de la marche ne croît pas linéairement en le nombre de pas, ce qui est à comparer au comportement de la marche aléatoire simple pour laquelle le même diamètre se comporte de manière diffusive (c'est-à-dire comme \sqrt{n}) :

Théorème 2 (Duminil-Copin, Hammond, 2013 [6])

Pour tout $v > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n > 0$,

$$P_n \left[\max_{0 \leq k \leq n} \|\omega_k\| \geq vn \right] \leq e^{-\varepsilon n}.$$

Cela entraîne que $E[\|\omega_n\|^2] = o(n^2)$.

Encore une fois on sait ce qui se passe en grande dimension, et pour $d \geq 5$ la marche auto-évitante se comporte comme la marche simple. En dimension 2, on n'a que des conjectures, cf. 6.2 ; en dimension 3, on ne sait absolument rien de plus.

Terminons par deux énoncés reliés, qui indiquent d'une certaine façon que la marche auto-évitante est « vraiment aléatoire » au sens où la loi de son point final est de plus en plus dispersée quand n est grand [5] :

Théorème 3 (Duminil-Copin, Glazman, Hammond, Manolescu, 2016)

En toute dimension $d \geq 2$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$P_n[|\omega_n| = 1] \leq n^{-1/4+\varepsilon}.$$

Théorème 4 (Duminil-Copin, Glazman, Hammond, Manolescu, 2016)

En toute dimension $d \geq 2$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} P_n[w_n = x] = 0.$$

Ici encore, le cas de la grande dimension est mieux connu puisqu'on sait prouver un théorème de la limite centrale et une borne supérieure sur ces probabilités qui est de l'ordre de $n^{-d/2}$.

3. La constante de connectivité du réseau hexagonal

Dans toute cette partie, on se place au lieu de \mathbb{Z}^d sur le réseau hexagonal \mathbb{H} , qui est un réseau planaire périodique dont tous les sommets sont de degré 3 et toutes les faces sont des hexagones. Une des principales avancées récentes dans l'étude de la marche auto-évitante est le calcul de la constante de connectivité de ce réseau :

Théorème 5 (Duminil-Copin, Smirnov, 2010 [7])

La constante de connectivité du réseau hexagonal est égale à

$$\mu_{\mathbb{H}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 \cos(\pi/8).$$

Cette valeur était conjecturée par Nienhuis depuis les années 80 [16, 17] mais sa prédiction était basée sur des méthodes mathématiquement non rigoureuses ; comme on va le voir, la preuve de Duminil-Copin et Smirnov est « élémentaire », même si l'intuition qui y a mené provient de théories plus profondes.

Exercice 3. En échauffement, montrer qu'on a bien $2 \cos(\pi/8) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

3.1. Notations

Nous utiliserons les mêmes notations que l'article original [7], dont cette section est essentiellement une traduction. On considère le réseau hexagonal \mathbb{H} plongé dans le plan complexe \mathbb{C} de telle sorte que ses faces soient des hexagones réguliers, et on note H l'ensemble des milieux des arêtes de \mathbb{H} ; il sera plus agréable de considérer des chemins auto-évitant entre des points de H , et d'aligner H de telle sorte qu'il contienne l'origine du plan.

Si γ est un chemin, on notera $\ell(\gamma)$ sa longueur. Par ailleurs on reprend la notation précédente Ω_n pour l'ensemble des chemins auto-évitant γ de longueur $\ell(\gamma) = n$, leur nombre $c_n = |\Omega_n|$ et on note Ω la réunion des Ω_n . L'objet central de l'argument est la *fonction de partition* : pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(10) \quad Z(x) = \sum_{\gamma \in \Omega} x^{\ell(\gamma)} = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in [0, +\infty].$$

Il s'agit d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à $1/\mu_{\mathbb{H}}$. En notant

$$(11) \quad x_c := \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

le théorème revient donc à l'énoncé que le rayon de convergence de Z est égal à x_c .

3.2. L'observable de Smirnov

Si γ est un chemin auto-évitant et si a et b sont deux milieux d'arêtes sur γ , le nombre d'enroulements de γ entre a et b , qu'on notera $W_\gamma(a, b)$, est égal à $\pi(n_+ - n_-)/3$, où n_+ (resp. n_-) est le nombre de fois que le chemin γ tourne à gauche (resp. à droite) entre a et b . On peut le voir comme une version discrète de la variation de l'angle du vecteur unitaire tangent le long de la courbe entre les points a et b .

Définition 3. Soient Ω un domaine de \mathbb{H} , a un milieu d'arête fixé sur le bord de Ω , $\sigma = 5/8$ et $x \in \mathbb{R}_+$. L'observable parafermionique $F = F_{\Omega, a, x}$ est définie en tout milieu d'arête z par

$$F(z) := \sum_{\gamma: a \rightarrow z} x^{\ell(\gamma)} e^{-i\sigma W_\gamma(a, z)}$$

(où la somme porte sur tous les chemins auto-évitant de a à z qui sont contenus dans le domaine Ω).

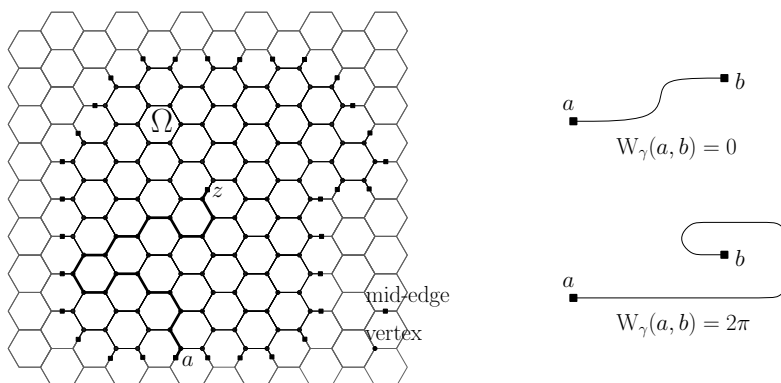
La première étape de la preuve est un énoncé d'*analyticité discrète* de F :

Lemme 1. Soit v un sommet de Ω , et p, q, r les milieux des arêtes incidentes à v (tous identifiés à leurs affixes complexes). Si $x = x_c$, alors

$$(p - v)F(p) + (q - v)F(q) + (r - v)F(r) = 0.$$

Démonstration. On prouve en fait un résultat un peu plus fort. Si γ est un chemin auto-évitant issu de a , sa contribution est

$$c(\gamma) := (\gamma_{\ell(\gamma)} - v) x_c^{\ell(\gamma)} e^{-i\sigma W_\gamma(a, \gamma_{\ell(\gamma)})}$$

FIGURE 3. Un domaine de \mathbb{H} , et la définition de l'enroulement.

(qui dépend du point final $\gamma_{\ell(\gamma)}$ du chemin γ). Le membre de gauche dans l'énoncé du lemme 1 est la somme des contributions de tous les chemins aboutissant en p , q et r ; on va grouper cette somme en paquets qui seront tous de somme nulle, de la façon suivante :

- Si γ_1 est un chemin auto-évitant arrivant en p , mais qui passe auparavant en q et r (et donc ferme presque une boucle), on peut lui associer un autre chemin γ_2 qui utilise les mêmes sommets mais parcourt la boucle dans l'autre sens (et qui arrive donc soit en q , soit en r) — cf. Figure 4, dessin de gauche. On vérifie alors que

$$c(\gamma_1) + c(\gamma_2) = 0.$$

En effet, γ_1 et γ_2 ont la même longueur, et leur enroulement diffère de $8\pi/3$ alors que les arguments des préfacteurs ($p - v$ et soit $q - v$, soit $r - v$) diffère de $2\pi/3$: par conséquent, en tenant compte de l'orientation,

$$\frac{c(\gamma_1)}{c(\gamma_2)} = e^{-2i\pi/3} e^{(5/8)(8i\pi/3)} = e^{5i\pi/3 - 2i\pi/3} = -1.$$

- Si par contre γ_1 ne visite ni q ni r , on peut le prolonger d'un pas de deux façons, en lui ajoutant soit q soit r , pour obtenir deux chemins γ_2 et γ_3 . Encore une fois on vérifie que

$$c(\gamma_1) + c(\gamma_2) + c(\gamma_3) = 0.$$

En effet, $\ell(\gamma_2) = \ell(\gamma_3) = \ell(\gamma_1) + 1$, les enroulements de γ_2 et γ_3 diffèrent de celui de γ_1 de $\pm\pi/3$ et les arguments des préfacteurs de $\mp 2i\pi/3$:

$$\begin{aligned} \frac{c(\gamma_1) + c(\gamma_2) + c(\gamma_3)}{c(\gamma_1)} &= 1 + x_c(e^{2i\pi/3+(5/8)i\pi/3} + e^{-2i\pi/3-(5/8)i\pi/3}) \\ &= 1 + 2x_c \cos(21\pi/24) = 1 - 2x_c \cos(\pi/8). \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à utiliser le fait que $\cos(\pi/8) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Tous les chemins contribuant au membre de gauche de l'énoncé apparaissent dans exactement un de ces cas, ce qui conclut la preuve du lemme. \square

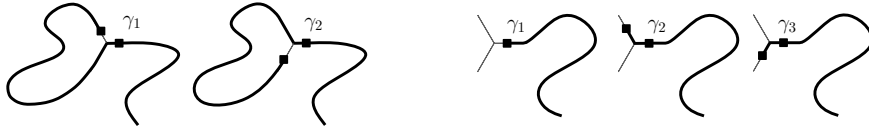


FIGURE 4. La preuve du lemme 1.

3.3. Une estimée dans une bande

Un domaine où il est instructif de considérer l'observable est la bande verticale S_T de largeur T , ou sa troncature $S_{T,L}$ de hauteur L finie (cf. Figure 5). En reprenant toujours les notations de [7], soit α le bord de gauche de S_T , β son bord de droite, et ε et $\bar{\varepsilon}$ les bords haut et bas de $S_{T,L}$ respectivement. Ici a sera pris au milieu de α . On peut regarder des sommes partielles de la fonction de partition Z dans $S_{T,L}$:

$$A_{T,L}^x := \sum_{\gamma: a \rightarrow \alpha \setminus \{a\}} x^{\ell(\gamma)}, \quad B_{T,L}^x := \sum_{\gamma: a \rightarrow \beta} x^{\ell(\gamma)}, \quad E_{T,L}^x := \sum_{\gamma: a \rightarrow \varepsilon \cup \bar{\varepsilon}} x^{\ell(\gamma)}$$

(où la notation $\gamma : a \rightarrow \beta$ par exemple signifie que l'on somme sur tous les chemins auto-évitant partant de a , contenus dans $S_{T,L}$ et dont le dernier point est dans β).

Lemme 2. Pour le paramètre x_c on a l'égalité

$$c_\alpha A_{T,K}^{x_c} + B_{T,L}^{x_c} + c_\varepsilon E_{T,L}^{x_c} = 1,$$

où l'on a posé $c_\alpha = \cos(3\pi/8)$ et $c_\varepsilon = \cos(\pi/4)$.

Démonstration. Sommons l'égalité du lemme précédent en tous les sommets dans $S_{T,L}$. Tous les termes correspondant aux milieux d'arêtes hors du bord apparaissent deux fois avec des signes différents, et disparaissent de la somme : il reste donc les termes de bord,

$$(12) \quad 0 = - \sum_{z \in \alpha} F(z) + \sum_{z \in \beta} F(z) + j \sum_{z \in \varepsilon} F(z) + \bar{j} \sum_{z \in \bar{\varepsilon}} F(z)$$

avec $j = e^{2i\pi/3}$. Évaluons chacune de ces sommes séparément, en remarquant que par symétrie on a partout $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ et que l'enroulement d'un chemin en une demi-arête du bord ne dépend que de la position de cette demi-arête (et coïncide avec l'enroulement du bord lui-même).

- La somme sur α consiste en $F(a) = 1$ et en une partie symétrique :

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \alpha} F(z) &= 1 + \sum_{z \in \alpha \setminus \{a\}} F(z) = 1 + \sum_{z \in \alpha \setminus \{a\}} \frac{F(z) + F(\bar{z})}{2} \\ &= 1 + \frac{e^{5i\pi/8} + e^{-5i\pi/8}}{2} A_{T,L}^x = 1 - \cos(3\pi/8) A_{T,L}^x. \end{aligned}$$

- La somme sur β fait intervenir des enroulements tous nuls :

$$\sum_{z \in \beta} F(z) = B_{T,L}^x.$$

- Enfin le long des bords obliques, on trouve de manière similaire

$$j \sum_{z \in \varepsilon} F(z) + \bar{j} \sum_{z \in \bar{\varepsilon}} F(z) = \cos(\pi/4) E_{T,L}^x.$$

En sommant ces trois termes on obtient bien l'identité annoncée. \square

3.4. Minoration de μ

Les sommes $A_{T,L}^x$ et $B_{T,L}^x$ sont des fonctions croissantes de L et x ; d'autre part le lemme 2 leur donne une borne supérieure uniforme pour tous les paramètres $x \leq x_c$. On peut donc définir les limites

$$A_T^x := \lim_{L \rightarrow \infty} A_{T,L}^x \quad \text{et} \quad B_T^x := \lim_{L \rightarrow \infty} B_{T,L}^x.$$

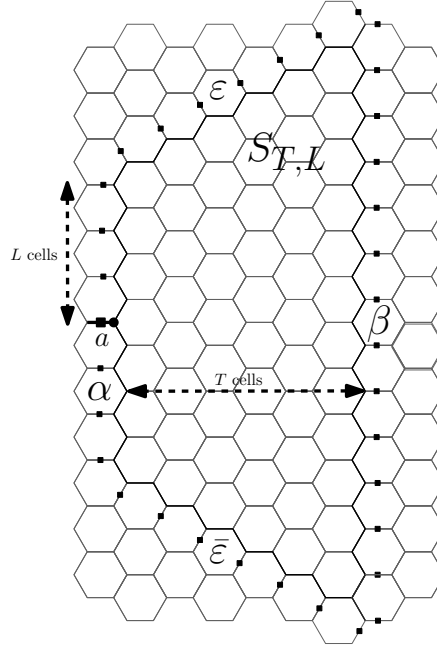


FIGURE 5. Notations du lemme 2.

Par ailleurs, toujours par le lemme 2, $E_{T,L}^{x_c}$ est une fonction décroissante de L , et on peut aussi définir sa limite $E_T^{x_c}$ quand $L \rightarrow \infty$. On obtient l'identité

$$(13) \quad c_\alpha A_T^{x_c} + B_T^{x_c} + c_\varepsilon E_T^{x_c} = 1.$$

Supposons un instant que l'on ait $E_T^{x_c} > 0$. Alors tous les $E_{T,L}^{x_c}$ sont uniformément minorés, et leur somme (pour $L > 0$) est un minorant de $Z(x_c)$. On aurait donc $Z(x_c) = +\infty$, ce qui implique que le rayon de convergence de la série qui définit Z est au plus égal à x_c . Autrement dit, on aurait la borne $\mu \geq \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Supposons à présent à l'inverse que l'on ait $E_T^{x_c} = 0$ pour tout T . Alors la conclusion du lemme 2 se réécrit $c_\alpha A_T^{x_c} + B_T^{x_c} = 1$. Faisons alors la remarque combinatoire suivante : un chemin auto-évitant γ qui est compté dans $A_{T+1}^{x_c}$ mais pas dans $A_T^{x_c}$ doit atteindre l'abscisse T , et peut donc se décomposer en deux traversées γ_1 et γ_2 de largeur $T+1$.

On obtient ainsi la borne

$$A_{T+1}^{x_c} - A_T^{x_c} \leq x_c (B_{T+1}^{x_c})^2$$

(le facteur x_c supplémentaire provient du premier pas de γ_2 , qui ne fait pas partie de γ). Par le lemme 2, on obtient alors

$$c_\alpha x_c (B_{T+1}^{x_c})^2 + B_{T+1}^{x_c} \geq B_T^{x_c}.$$

Un récurrence facile donne alors une borne inférieure pour $B_T^{x_c}$ de la forme C/T , donc la somme des $B_T^{x_c}$ est infinie, et elle minore $Z(x_c)$: à nouveau on obtient $Z(x_c) = +\infty$ et la même conclusion que précédemment.

3.5. Majoration de μ

On appelle *pont* un chemin auto-évitant qui contribue à la somme B_T^x (et on appelle T sa *largeur*). La majoration de Z , et donc de μ , est basée sur une décomposition de marches en ponts, comme dans la preuve de l'inégalité de Hammersley-Welsh. Remarquons d'abord que la longueur d'un pont de largeur T est au moins égale à T : par conséquent, pour $x < x_c$, on a

$$B_T^x \leq (x/x_c)^T B_T^{x_c} \leq (x/x_c)^T$$

(la borne $B_T^{x_c} \leq 1$ provient une fois de plus du lemme 2). En particulier, la somme des B_T^x est convergente pour $x < x_c$.

Une reformulation de l'étape principale de la démonstration de l'inégalité de Hammersley-Welsh avec nos notations actuelles est alors

$$Z(x) \leq 2 \sum \prod_{k=-i}^j B_{T_k}^x,$$

où l'on somme sur toutes les valeurs positives de i et j et sur toutes les familles de largeurs $T_0 > T_1 > \dots > T_j$ et $T_0 > T_{-1} > \dots > T_{-i}$. On reconnaît dans le terme de droite le développement du produit

$$2 \prod_{T>0} (1 + B_T^x)^2,$$

qui est convergent par l'estimée précédente : par conséquent

$$Z(x) < \infty \quad \text{dès que } x < x_c,$$

ce qui fournit bien la borne supérieure $\mu \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Le théorème 5 est prouvé.

4. Variantes du modèle

La mesure uniforme sur Ω_n est naturelle mais c'est bien sûr loin d'être la seule loi de probabilité sur des chemins auto-évitant. En voici quelques-unes.

4.1. Mesure de polymère

Au lieu de considérer des chemins de longueur fixée, il peut être plus pratique de rendre leur longueur elle-même aléatoire. Une bonne façon de faire cela est de considérer un domaine connexe borné fixé D dans \mathbb{R}^d , avec deux points marqués a et b sur son bord, et pour une maille de réseau $\delta > 0$ de regarder l'ensemble (fini) $\Omega_{D,\delta}$ des chemins auto-évitant dans $D \cap \delta\mathbb{Z}^d$ reliant le sommet le plus proche de a au sommet le plus proche de b . Pour tout $x > 0$, on peut définir une mesure $P_{D,\delta,x}$ sur $\Omega_{D,\delta}$ en posant

$$P_{D,\delta,x}[\{\omega\}] = \frac{x^{\ell(\omega)}}{Z_{D,\delta,x}} \quad \text{où} \quad Z_{D,\delta,x} = \sum_{\omega \in \Omega_{D,\delta}} x^{\ell(\omega)}$$

(et où $\ell(\omega)$ est la longueur du chemin ω).

Si x est inférieur à l'inverse $1/\mu$ de la constante de connectivité du réseau, la mesure $P_{D,\delta,x}$ a tendance à charger des chemins « plus courts que des marches auto-évitant typiques » ; quand $\delta \rightarrow 0$, toute sa masse se concentre sur le plus court chemin de a vers b dans D , et la limite d'échelle est déterministe. Si en revanche $x\mu > 1$, les chemins « plus longs que des marches auto-évitant typiques » (qui sont plus nombreux) sont favorisés, et on conjecture que quand $\delta \rightarrow 0$, la mesure $P_{D,\delta,x}$ converge vers une probabilité portée par des courbes de type Peano aléatoires (surjectives sur \overline{D}).

Enfin le cas $x = 1/\mu$ est sans doute le plus intéressant ; en dimension 2 la principale conjecture est la convergence de $P_{D,\delta,1/\mu}$ vers un processus SLE(6) chordal de a vers b dans D . Cf. [14] pour plus de détails.

4.2. Polymères interagissants

Si on cherche un modèle plus satisfaisant du point de vue de la modélisation d'un « vrai » objet physique, la condition d'être auto-évitant est pertinente mais une mesure qui ne dépend pas de la forme

du chemin ne l'est pas. En effet, des monomères qui sont spatialement proches ont tendance à interagir plus que s'ils sont lointains. Une façon de tenir compte de la physique est de définir sur Ω_n la mesure $P_{n,\beta,J}$ en posant

$$(14) \quad P_{n,\beta,J}[\{\omega\}] = \frac{1}{Z_{n,\beta,J}} \exp \left[-\beta \sum_{0 \leq i < j \leq n} J(\omega(j) - \omega(i)) \right]$$

où $Z_{n,\beta,J} > 0$ est la *fonction de partition* choisie de telle sorte que $P_{n,\beta,J}$ soit bien une mesure de probabilité :

$$(15) \quad Z_{n,\beta,J} = \sum_{\omega \in \Omega_n} \exp \left[-\beta \sum_{0 \leq i < j \leq n} J(\omega(j) - \omega(i)) \right].$$

Le coefficient $\beta > 0$ joue le rôle de l'inverse de la température, et le *potentiel d'interaction* J décrit la physique du système.

Il s'agit d'une généralisation à la fois de la marche aléatoire simple et de la marche auto-évitante : en effet,

- Pour $\beta = 0$ on retrouve la mesure uniforme sur tous les chemins ;
- Si on pose formellement $J(0) = +\infty$ la mesure se concentre sur des chemins auto-évitant — et si de plus on impose $J(r) = 0$ pour $r \neq 0$ on obtient exactement $P_{n,\beta,J} = P_n$ et $Z_{n,\beta,J} = c_n$.

On peut même s'approcher de la modélisation de protéines en donnant à chaque monomère de la chaîne un « type » $\eta(i)$ et en faisant dépendre le potentiel d'interaction de ces types.

Le « méta-théorème de la physique statistique » énonce que la fonction de partition contient toute l'information sur le modèle. On peut par exemple en extraire à quel point un chemin de loi $P_{n,\beta,J}$ est auto-évitant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_{n,\beta,J}}{\partial J(0)} &= \sum_{\omega \in \Omega_n} \frac{\partial}{\partial J(0)} \exp \left[-\beta \sum_{0 \leq i < j \leq n} J(\omega(j) - \omega(i)) \right] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_n} \sum_{\substack{i < j: \\ \omega(i) = \omega(j)}} (-\beta) \exp \left[-\beta \sum_{0 \leq i < j \leq n} J(\omega(j) - \omega(i)) \right] \\ &= -\beta \sum_{\omega \in \Omega_n} |\{i < j : \omega(i) = \omega(j)\}| Z_{n,\beta,J} P_{n,\beta,J}[\{\omega\}] \end{aligned}$$

d'où en reconnaissant à droite l'expression d'une espérance :

$$(16) \quad E[|\{i < j : \omega(i) = \omega(j)\}|] = \frac{-1}{\beta Z_{n,\beta,J}} \frac{\partial Z_{n,\beta,J}}{\partial J(0)} \\ = \frac{-1}{\beta} \frac{\partial \log Z_{n,\beta,J}}{\partial J(0)}.$$

De plus, si toutes les valeurs de J sont positives, on retrouve la sous-multiplicativité que l'on avait pour la marche auto-évitante uniforme dans la fonction de partition :

$$(17) \quad Z_{m+n,\beta,J} \leq Z_{m,\beta,J} Z_{n,\beta,J}$$

par le même argument que précédemment. On peut alors définir l'énergie libre du modèle,

$$(18) \quad H(\beta, J) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,J}$$

qui contient à nouveau « toute l'information sur le modèle » dans ses dérivées. Ainsi, la proportion moyenne d'auto-intersection peut se voir comme la dérivée de H par rapport au coefficient $J(0)$.

La littérature sur ces modèles est vaste et la décrire même partiellement dépasserait le cadre de ces notes. Caricaturalement, le comportement « typique » est similaire d'un cas sur l'autre : pour une interaction J fixée, on observe le plus souvent une transition de phase selon la valeur du paramètre β , et ω ressemble à une marche sans interaction pour β petit et à une marche fortement interagissante pour β grand.

Il faut se méfier du cas où J prend des valeurs négatives (ce qui correspond à des interactions *attractives* entre monomères, qui sont omniprésentes pour des molécules organiques par exemple), puisqu'alors on peut dans certains cas obtenir une borne inférieure sur $Z_{n,\beta,J}$ qui est de l'ordre de $\exp(-\Theta(n^2))$, et par conséquent une énergie libre infinie. Pour obtenir un modèle non trivial il faut alors considérer une température inverse β de l'ordre de $1/n$ (et perdre alors la sous-multiplicativité). On peut alors obtenir des *transitions de dénaturation* entre un polymère replié et localisé à basse température, et une chaîne désordonnée et délocalisée au-dessus d'une température critique.

4.3. Marche aléatoire à boucles effacées

Au lieu de compliquer le modèle, il peut être tentant de le simplifier, non pas au niveau de sa définition (aucune mesure ne sera plus simple à décrire que la mesure uniforme) mais en choisissant des lois de probabilités sur Ω_n pour lesquelles on dispose de plus d'outils.

Une façon simple d'obtenir un chemin auto-évitant de longueur n est la suivante : on part d'un chemin infini quelconque, on en efface les boucles dès qu'elles apparaissent, et on s'arrête quand le chemin obtenu est de la bonne longueur. En dimension $d \geq 3$ (où la marche aléatoire est transiente), on peut formaliser la construction en partant d'une marche aléatoire simple $(X_n)_{n \geq 0}$ et en définissant par récurrence les temps (τ_k) par $\tau_0 = 0$ et

$$(19) \quad \tau_{k+1} = \max \{n : X_n = X_{\tau_{k+1}}\} < \infty.$$

On obtient alors un chemin $\omega(k) = X_{\tau_k}$ qui est automatiquement auto-évitant, et la loi de ses n premiers pas fournit une mesure de probabilité sur Ω_n .

La mesure qu'on obtient ainsi s'appelle la *marche à boucles effacées*. La construction peut se généraliser à la dimension 2 en prenant quelques précautions dues au fait que comme la marche aléatoire est récurrente, la définition (19) donnerait $\tau_k = +\infty$ pour tout $k > 0$. On peut par exemple regarder la marche aléatoire jusqu'à ce qu'elle sorte d'une région fixée.

La mesure qu'on obtient sur Ω_n n'est *pas* la mesure uniforme, et on la connaît beaucoup mieux parce qu'elle est intimement liée à la marche aléatoire simple, qui est extrêmement bien comprise. Par exemple, en dimension 2 on sait que $E[|\omega_n(n)|]$ se comporte comme $n^{8/5}$: en comparant cela aux conjectures sur la marche auto-évitante (cf. 6.2), l'inégalité $8/5 > 3/2$ signifie que la marche à boucles effacées va plus loin en n pas, et est donc d'une certaine façon « plus lisse ».

Historiquement la marche à boucles effacées est le premier pour laquelle une limite d'échelle de type SLE a été démontrée, dans l'article [19] où Schramm donne la première définition du processus qui depuis porte son nom.

5. Développements en lacets

En grande dimension ($d > 4$), la marche aléatoire simple est transiente et il lui devient plus facile d'être déjà auto-évitante à grande échelle, et de n'avoir que des auto-intersections locales. Il est alors naturel de conjecturer que la marche simple et la marche auto-évitante ont le même comportement asymptotique, et c'est en effet le cas :

Théorème 6 (Hara, Slade [20, 9]). *En toute dimension supérieure ou égale à 5, on a $E[\|\omega_n(n)\|^2] \asymp n$. De plus, $\omega_n(n)$ satisfait un théorème central limite : il existe $\sigma_d \in (0, 1)$ tel que*

$$n^{-1/2}\omega_n(n) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma_d I_d).$$

La preuve de ce théorème est extrêmement technique, et repose sur la technique connue sous le nom de *développement en lacets*. Nous donnons juste ici le point de départ de la construction, dû à Brydges et Spencer [4]. Considérons la *marche faiblement auto-évitante* de paramètre $\lambda \in [0, 1]$ ($\lambda = 0$ correspondra à la marche aléatoire simple, et $\lambda = 1$ à la marche auto-évitante) et de longueur n , définie par sa fonction de partition

$$C(n) := \sum_{\omega \in S_n} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (1 - \lambda 1_{\omega(i)=\omega(j)}).$$

(On somme bien sur toutes les marches par plus proches voisins, et pas seulement sur les marches auto-évitanes, mais la somme se restreint à Ω_n pour $\lambda = 1$.) Posons

$$U_{ij} = -\lambda 1_{\omega(i)=\omega(j)}, \quad E_n = \{(i, j) : 0 \leq i < j \leq n\}$$

et développons le produit : on obtient

$$C(n) = \sum_{\omega \in S_n} \prod_{(i,j) \in E_n} (1 + U_{ij}) = \sum_{\omega \in S_n} \sum_{E \subset E_n} \prod_{(i,j) \in E} U_{ij}.$$

Un peu de terminologie : on appellera *graphe* une partie $E \subset E_n$ (et *arêtes* de E ses éléments); *temps de renouvellement* de E un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel qu'aucune arête $(i, j) \in E$ ne satisfasse aux inégalités $i < k < j$; graphe *primitif* un graphe sans temps de renouvellement et dont une arête contient 0; et *laçage* un graphe primitif minimal pour l'inclusion.

Exercice 4. Pourquoi utilise-t-on le mot « laçage » ? (Réponse : voir [4, p. 129].)

On notera \overline{E}_n l'ensemble des graphes primitifs, L_n l'ensemble des laçages et $\overline{C}(x, n)$ la somme précédente restreinte aux graphes primitifs. Comme tout graphe se décompose en union de graphes primitifs mis bout à bout, on voit facilement que

$$C(n) = \sum_{k \leq n} \overline{C}(k) C(n - k)$$

ce qui permet d'estimer C à partir d'estimées pour \overline{C} (par exemple par des méthodes de séries génératrices). On se restreindra par la suite à l'étude de la fonction $\overline{C}(n)$. Si E est un graphe primitif, on notera $L(E)$ le laçage contenu dans E qui contient le moins d'arêtes :

$$\begin{aligned} \sum_{E \subset \overline{E}_n} \prod_{(i,j) \in E} U_{ij} &= \sum_{\ell \in L_n} \sum_{E: L(E)=\ell} \prod_{(i,j) \in E} U_{ij} \\ &= \sum_{\ell \in L_n} \prod_{(i,j) \in \ell} U_{ij} \sum_{E: L(E)=\ell} \prod_{(i,j) \in E} U_{ij}. \end{aligned}$$

En refactorisant la dernière somme de l'expression en sens inverse de la première étape du développement de $\overline{C}(n)$, on obtient

$$\sum_{E \subset \overline{E}_n} \prod_{(i,j) \in E} U_{ij} = \sum_{\ell \in L_n} \prod_{(i,j) \in \ell} U_{ij} \prod_{(i,j) \prec \ell} (1 + U_{ij}),$$

où la notation $(i, j) \prec \ell$ signifie que $L(\ell \cup \{(i, j)\}) = \ell$ (on dit que (i, j) est *compatible avec* ℓ). En resommant sur $\omega \in S_n$:

$$\overline{C}(n) = \sum_{\ell \in L_n} \overline{C}(n, \ell) \quad \text{avec} \quad \overline{C}(n, \ell) = \sum_{\omega \in S_n} \prod_{(i,j) \in \ell} U_{ij} \prod_{(i,j) \prec \ell} (1 + U_{ij}).$$

La somme définissant $\overline{C}(n, \ell)$ ne porte que sur des trajectoires rendant le produit des U_{ij} non nul, autrement dit sur des marches qui passent au même sommet aux temps i et j , pour chaque $(i, j) \in \ell$, et elle porte un facteur $\lambda^{|\ell|}$. Par ailleurs, le dernier produit, si on le restreint aux paires (i, j) qui sont « sous » une arête $(i_0, j_0) \in \ell$, est du même type que $C(j_0 - i_0)$. On peut voir la dernière égalité comme une équation permettant un calcul de $\overline{C}(n)$ par récurrence, et qui au

moins en principe contient toute l'information dont on a besoin sur le modèle.

Si λ est assez petit et d assez grand, seuls les premiers termes contribuent ; en rapprochant ce développement de celui obtenu pour la marche simple (le cas $\lambda \rightarrow 0$), au bout d'une cinquantaine de pages on obtient le résultat annoncé. Pour tous les détails, on pourra se reporter à [4, 9, 15] ; pour des approches plus « modernes », [3, 2].

6. Quelques questions ouvertes

6.1. La marche auto-évitante de longueur infinie

Comme on l'a mentionné au début de ce texte, il est facile de définir une marche aléatoire simple de longueur infinie, et cela permet d'énoncer les théorèmes limites de manière plus agréable (quand on dit que ω_n/n tend vers 0, il n'y a qu'une suite (ω_n)).

La situation est beaucoup moins claire dans le cas de la marche auto-évitante : en effet, si $\omega \in \Omega_n$ est choisi avec la loi uniforme, et si on note $\omega^{[m]} = (\omega_k)_{0 \leq k \leq m}$ le préfixe de longueur m de ω (pour $m < n$), on a bien $\omega^{[m]} \in \Omega_m$ mais sa loi n'est pas du tout la loi uniforme. Cela n'est pas difficile à voir, par exemple parce qu'il existe dans Ω_m des chemins qui n'ont pas d'extension de longueur n (qui sont « piégés »).

Si on se restreint à des marches auto-évitantes en dimension 2 et contenues dans le demi-plan supérieur, la construction suivante est due à Kesten [12, 13]. Notons \tilde{P}_n la mesure uniforme sur les chemins auto-évitants de longueur n contenus dans le demi-plan, et pour $m < n$, notons $\tilde{P}_{m,n}$ la loi de $\omega^{[m]}$ pour ω de loi \tilde{P}_n . Comme on vient de le voir $\tilde{P}_{m,n} \neq \tilde{P}_m$; mais quand $n \rightarrow \infty$ la loi $\tilde{P}_{m,n}$ converge vers une mesure de probabilité Q_m et il est alors facile de voir que si ω est de loi Q_m et si $m' < m$ alors $\omega^{[m']}$ est bien de loi $Q_{m'}$, on dit que la famille de mesures $(Q_n)_{n \geq 0}$ est *compatible*. La convergence elle-même est difficile à prouver, et repose sur une description précise des chemins en termes de « ponts irréductibles ».

Le théorème d'extension de Kolmogorov entraîne alors l'existence d'une mesure de probabilité Q sur l'ensemble des chemins auto-évitants de longueur infinie dans le demi-plan, qui vérifie la propriété

suivante : pour tout $n > 0$, si ω est de loi Q , son préfixe $\omega^{[n]}$ est de loi Q_n .

Si on ne se restreint pas au demi-plan, ou à la dimension 2, on ne sait pas en général prouver la convergence de $\tilde{P}_{m,n}$ quand $n \rightarrow \infty$.

6.2. Comportement en dimension 2

Un des avantages de l'existence de la marche auto-évitante de longueur infinie dans le demi-plan est qu'elle permet de poser la question de l'existence d'une *limite d'échelle*, qui est la suivante. Pour tout $\delta > 0$ on peut définir la mesure $Q^{(\delta)}$ sur le réseau $\delta\mathbb{Z}^2$ dont les arêtes sont de longueur δ . On peut voir un chemin sur $\delta\mathbb{Z}^2$ comme un chemin continu dans le demi-plan supérieur et se demander ce qui se passe quand $\delta \rightarrow 0$. Dans le cas de la marche aléatoire simple, on obtiendrait le *mouvement brownien*, qui est un objet très bien compris.

Si on ne disposait que des mesures en longueur finie, il faudrait faire tendre cette longueur vers l'infini en même temps que δ tend vers 0, pour ne pas obtenir une limite qui soit simplement le point $\{0\}$, et comme on l'a vu la façon dont le diamètre de ω_n croît avec n n'est pas bien connue.

L'existence de la limite d'échelle de $Q^{(\delta)}$ est une des questions ouvertes majeures du domaine. D'une certaine façon on sait à quoi s'attendre, au sens où si on suppose l'existence de cette limite et sa propriété d'*invariance conforme*, alors il doit s'agir du processus de Schramm-Loewner SLE(κ) pour $\kappa = 8/3$. Le problème est que l'on ne dispose essentiellement d'aucun outil adapté au problème ; essentiellement aucun progrès n'a été fait sur la question depuis l'introduction du processus SLE, et le panorama [14] est toujours d'actualité pour plus de détails.

Si on savait prouver la convergence de la marche auto-évitante quand $\delta \rightarrow 0$, on obtiendrait des informations précises sur le comportement des mesures P_n quand $n \rightarrow \infty$. Pour en citer deux :

- On aurait une meilleure asymptotique pour le nombre de marches auto-évitantes :

$$(20) \quad c_n \sim Cn^{11/32}\mu^n$$

pour une certaine constante $C > 0$ inconnue et dépendant du choix particulier du réseau. L'exposant $11/32$ qui apparaît est en revanche *universel* et ne dépend que du fait que la question soit posée en dimension 2. En particulier on obtiendrait une majoration bien plus précise que celle de Hammerley et Welsh (9).

• On en saurait beaucoup plus sur la géométrie de ω_n : en particulier, on obtiendrait pour le dernier point du chemin

$$(21) \quad E[\|\omega_n(n)\|^2] = n^{3/2+o(1)}$$

avec à nouveau un exposant qui ne dépendrait que de la dimension.

Références

- [1] R. BAUERSCHMIDT, H. DUMINIL-COPIN, J. GOODMAN & G. SLADE – « Lectures on self-avoiding walks », in *Probability and statistical physics in two and more dimensions*, Clay Math. Proc., vol. 15, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, p. 395–467.
- [2] E. BOLTHAUSEN, R. VAN DER HOFSTAD & G. KOZMA – « Lace expansion for dummies », *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **54** (2018), no. 1, p. 141–153.
- [3] E. BOLTHAUSEN & C. RITZMANN – « A central limit theorem for convolution equations and weakly self-avoiding walks », 2001, [arXiv:math/0103218](https://arxiv.org/abs/math/0103218).
- [4] D. C. BRYDGES & T. SPENCER – « Self-avoiding walk in 5 or more dimensions », *Comm. Math. Phys.* **97** (1985), no. 1-2, p. 125–148.
- [5] H. DUMINIL-COPIN, A. GLAZMAN, A. HAMMOND & I. MANOLESCU – « On the probability that self-avoiding walk ends at a given point », *Ann. Probability* **44** (2016), no. 2, p. 955–983.
- [6] H. DUMINIL-COPIN & A. HAMMOND – « Self-avoiding walk is sub-ballistic », *Comm. Math. Phys.* **324** (2013), no. 2, p. 401–423.
- [7] H. DUMINIL-COPIN & S. SMIRNOV – « The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ », *Ann. of Math. (2)* **175** (2010), no. 3, p. 1653–1665.
- [8] J. M. HAMMERSLEY & D. J. A. WELSH – « Further results on the rate of convergence to the connective constant of the hypercubical lattice », *Q. J. Math.* **13** (1962), no. 1, p. 108–110.
- [9] T. HARA & G. SLADE – « Self-avoiding walk in five or more dimensions I. The critical behaviour », *Comm. Math. Phys.* **147** (1992), no. 1, p. 101–136.
- [10] G. H. HARDY & S. RAMANUJAN – « Asymptotic formula for the distribution of integers of various types », *Proc. London Math. Soc.* **16** (1916), p. 112–132.
- [11] I. JENSEN – « Enumeration of self-avoiding walks on the square lattice », *J. Phys. A* **37** (2004), no. 21, p. 5503–5524.
- [12] H. KESTEN – « On the number of self-avoiding walks », *J. Math. Phys.* **4** (1963), no. 7, p. 960.
- [13] ———, « On the number of self-avoiding walks. II », *J. Math. Phys.* **5** (1964), no. 8, p. 1128.
- [14] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM & W. WERNER – « On the scaling limit of planar self-avoiding walk », in *Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004, p. 339–364.

- [15] N. MADRAS & G. SLADE – *The self-avoiding walk*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, New York, 2013, Reprint of the 1993 original.
- [16] B. NIENHUIS – « Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions », *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982), no. 15, p. 1062–1065.
- [17] ———, « Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas », *J. Statist. Phys.* **34** (1984), no. 5-6, p. 731–761.
- [18] G. L. O'BRIEN – « Monotonicity of the number of self-avoiding walks », *J. Statist. Phys.* **59** (1990), no. 3-4, p. 969–979.
- [19] O. SCHRAMM – « Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees », *Israel J. Math.* **118** (1999), p. 221–288.
- [20] G. SLADE – « The diffusion of self-avoiding random walk in high dimensions », *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), no. 4, p. 661–683.

Vincent Beffara, Université Grenoble Alpes, CNRS, Institut Fourier
E-mail : vincent.beffara@ujf-grenoble.fr
Url : <http://vbeffara.perso.math.cnrs.fr/>