Journées mathématiques X-UPS

Année 2015

Des problèmes à N corps aux Tokamaks

Yann Brenier

Mathématiques des plasmas et fluides

Journées mathématiques X-UPS (2015), p. 1-28.
https://doi.org/10.5802/xups.2015-01

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2015, p. 1–28 doi: 10.5802/xups.2015-01

MATHÉMATIQUES DES PLASMAS ET FLUIDES

par

Yann Brenier

Résumé. Les fluides et les plasmas peuvent être décrits et analysés par les mathématiques à plusieurs niveaux : comme des systèmes de particules en interaction, ce qui relève des équations différentielles ordinaires et des problèmes à N corps, ou encore comme des « milieux continus » à l'aide du concept de champs (densité, vitesse, pression, champ électro-magnétique), ce qui relève plutôt de l'analyse des fonctions. Ces différents points de vue peuvent être fructueusement unifiés à l'aide du calcul des variations et des principes de moindre action. On verra comment les modèles mathématiques d'Euler pour les fluides (XVIII[e] siècle) et de Maxwell pour l'électromagnétisme (XIX[e] siècle) ont fusionné au vingtième siècle pour aboutir à la magnéto-hydrodynamique qui a notamment permis de concevoir les « Tokamaks », tels ITER.

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 2015. Des problèmes à N corps aux Tokamaks. Éditions de l'École polytechnique, 2015.

1. Présentation

L'objectif de ce texte est de décrire, en termes mathématiques, plusieurs modèles de la physique classique qui sont mis en jeu dans la description de la matière sous ses formes de plasmas (particules chargées) et fluides. La discussion sera centrée sur l'électrodynamique classique et le point de vue sera celui du principe de moindre action. On discutera, en appendice, deux approches assez peu connues mais particulièrement originales de l'électrodynamique, dues à Richard Feynman et Max Born (en collaboration avec Leopold Infeld).

2. Du principe de moindre action à l'électrodynamique classique

2.1. Le principe de moindre action d'une particule soumise à un potentiel extérieur. Le principe de moindre action est très ancien. On peut faire remonter l'idée au moins à Fermat, puis Maupertuis. Ensuite, s'est développé le formalisme hamiltonien (dont nous ne parlerons pas dans ce texte) au détriment du principe de moindre action, devenu secondaire jusqu'à sa réapparition en mécanique quantique au travers des « intégrales de Feynman ».

Prenons, pour commencer, le modèle d'une particule de masse $m = 1$ se mouvant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ (pensons à $d = 3$, mais ce n'est pas nécessaire), sous l'action d'un potentiel extérieur ϕ supposé suffisamment lisse. On a, pour sa position $x(t) \in \mathbb{R}^d$, l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre

$$\ddot{x}(t) = -\nabla\phi(x(t))$$

où $\nabla\phi(x)$ est ici juste une notation pour le vecteur des dérivées partielles $\partial_i\phi(x)$ de ϕ, ici supposée deux fois continûment différentiable, par rapport à chaque coordonnée de $x \in \mathbb{R}^d$ pour $i = 1, \ldots, d$. On peut montrer, avec un peu d'analyse, qu'une courbe $t \mapsto x(t)$ deux fois différentiable est solution de cette équation sur un intervalle $[t_0, t_1]$ si et seulement si elle est un « point critique » de la fonctionnelle d'action

$$\mathcal{A}[x, t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 - \phi\big(x(t)\big)\Big)\, dt,$$

lorsque ses valeurs sont fixés à $t = t_0$ et $t = t_1$. (Ici on a noté $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et on notera $\cdot$ le produit scalaire associé.) Par point critique, on veut dire ici que pour toute courbe deux fois différentiable $\xi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$ telle que $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{A}[x + \varepsilon\xi, t_0, t_1] - \mathcal{A}[x, t_0, t_1]}{\varepsilon} = 0.$$

Vérifions l'assertion. Un premier calcul donne

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{A}[x + \varepsilon\xi, t_0, t_1] - \mathcal{A}[x, t_0, t_1]}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{x}(t) \cdot \dot{\xi}(t) - \nabla\phi(x(t)) \cdot \xi(t)]\, dt,$$

ce qui donne, par intégration par partie du premier terme,

$$= \dot{x}(t_1) \cdot \xi(t_1) - \dot{x}(t_0) \cdot \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [-\ddot{x}(t) - \nabla\phi(x(t))] \cdot \xi(t)\, dt.$$

Or, à l'aide d'un argument d'analyse assez simple, cette expression ne peut s'annuler pour toute courbe ξ s'annulant en t_0 et t_1 que si

$$\ddot{x}(t) = -\nabla\phi(x(t)),$$

ce qui est bien l'équation voulue. Comme on le reverra plus loin, ce principe ancien s'est révélé d'une grande actualité au XX$^{\text{e}}$ siècle en particulier au travers de l'interprétation faite de la mécanique quantique par Richard Feynman, grâce au concept de « lagrangien ». Le lagrangien n'est rien d'autre que l'intégrande de l'action, vue comme fonction des variables de position x et de vitesse v, à savoir, dans notre exemple,

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \phi(x),$$

qui se trouve ainsi défini pour $(x, v) \in \mathbb{R}^{2d}$.

2.2. Problèmes à N corps. Pour le système à N corps de la gravitation newtonienne, on peut encore facilement appliquer le principe de moindre action au niveau formel. Notons, pour $\alpha \in \{1, \ldots, N\}$, $X_\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, $m_\alpha > 0$, la position au temps t et la masse de chacun de ces N corps, qu'on suppose réduits à des points. (En fait, comme Newton l'avait déjà observé, on peut considérer aussi bien ces points comme les centres de boules homogènes sans changer du tout les équations, tant qu'il n'y a pas de collision.) En normalisant à 1 la constante de gravitation, pour alléger l'écriture, les équations découvertes par Newton sont :

$$\ddot{X}_\alpha(t) = -\sum_{\beta \neq \alpha} m_\beta \frac{X_\alpha(t) - X_\beta(t)}{\|X_\alpha(t) - X_\beta(t)\|^3}, \quad \forall \alpha \in \{1, \ldots, N\}.$$

Notons que cette écriture n'est justifiée qu'en l'absence de collisions, c'est-à-dire autant que $X_\alpha(t) = X_\beta(t)$ implique $\alpha = \beta$. (Nous ne discuterons pas le cas, important, des collisions dans ce texte.) Le principe de moindre action est relativement facile à trouver. On introduit le potentiel Φ qui, ici, n'est pas extérieur mais reflète plutôt l'interaction de toutes les particules et dépend de l'ensemble de leurs positions $\mathcal{X} = (X_\alpha)_{\alpha=1}^N \in \mathbb{R}^{3N}$:

$$\Phi(\mathcal{X}) = -\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\alpha m_\beta}{\|X_\alpha(t) - X_\beta(t)\|}.$$

Notons que ce potentiel n'est bien défini que sur l'ensemble

$$\{\mathcal{X} \mid \alpha \neq \beta \Longrightarrow X_\alpha \neq X_\beta\},$$

c'est-à-dire en dehors de « l'ensemble des collisions ». On peut alors vérifier qu'en l'absence de collisions les équations de Newton sont satisfaites sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ si et seulement si $\mathcal{X}$ est point critique de l'action

$$\mathcal{A}[\mathcal{X}, t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \textstyle\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \|\dot{X}_\alpha(t)\|^2 - \Phi(\mathcal{X}(t)) \right\} dt.$$

2.3. La notion de champ. L'équation des N corps en gravitation peut aussi s'écrire

$$\ddot{X}_\alpha(t) = -(\nabla\phi)\big(t, X_\alpha(t)\big),$$

en introduisant le potentiel

$$\phi(t,x) = -\sum_{\beta} \frac{m_\beta}{\|x - X_\beta(t)\|},$$

qui n'est défini comme fonction lisse qu'aux points de l'espace où ne se situent pas les particules. On a ainsi un point de vue, qui remonte à Laplace, fort différent du précédent. Au lieu de décrire l'interaction directe des particules, on revient au point de vue antérieur de particules individuelles soumises à un potentiel, ϕ, mais, cette fois, celui-ci varie au cours du temps et n'est plus extérieur car il dépend lui-même de la position des particules à chaque instant. L'avantage de ce nouveau point de vue est de décrire l'interaction des particules par des « champs », définis dans tout l'espace. Ce genre de description fait en général appel à des équations aux dérivées partielles. Sans vouloir entrer pleinement dans cette vaste théorie, tâchons tout de même de l'utiliser brièvement pour décrire la dynamique des N corps en termes de champs. L'observation clé est que la fonction $\|x\|^{-1}$ est, dans $\mathbb{R}^3$, solution (unique à l'addition près d'une fonction harmonique), au sens de la théorie des distributions de Laurent Schwartz[(1)], de l'équation

$$\triangle G = 4\pi\delta, \quad \triangle = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$$

où $\triangle$ est l'opérateur de Laplace (ou laplacien) et δ la « mesure de Dirac » à l'origine. (Voir quelques détails un peu plus bas.)

En utilisant la linéarité et l'invariance par translation de l'opérateur de Laplace, on voit que le potentiel ϕ peut donc être réécrit (au moins formellement, à ce stade) comme solution de l'équation

$$\triangle\phi = 4\pi\rho,$$

où l'on a introduit un autre champ, ρ, qui représente la « densité de masse » des particules dans l'espace à l'instant t :

$$\rho(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \delta\bigl(x - X_\alpha(t)\bigr),$$

cette formule ne prenant son plein sens mathématique qu'avec la théorie des distributions.

[(1)]Pour laquelle nous renvoyons par exemple au livre [Bon01].

La solution fondamentale du laplacien. En toute dimension $d \neq 2$, la fonction

$$x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \frac{\|x\|^{2-d} - 1}{(2-d)\omega_{d-1}},$$

où on note ω_{d-1} la mesure $d-1$ dimensionnelle de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, est, au sens des distributions, solution G (unique à une fonction harmonique près) de l'équation aux dérivées partielles :

$$\triangle G = \delta, \quad \triangle = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2},$$

où δ est la distribution de Dirac à l'origine.

Pour le prouver (par la théorie des distributions), il suffit de vérifier que pour toute fonction lisse f nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(x) \cdot \nabla G(x)\, dx = -f(0)$$

(ce qui exprime l'équation à résoudre après multiplication par f et intégration formelle par partie). Par définition de G, le premier membre vaut

$$\omega_{d-1}^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(x) \cdot x\|x\|^{-d} dx,$$

ce qui donne, en coordonnées polaires, en posant $f(x) = F(r, w)$, pour $r = \|x\|$, avec $w = x\|x\|^{-1}$ dans la sphère unité S^{d-1} :

$$= \omega_{d-1}^{-1} \int_{S^{d-1}} \left(\int_0^{+\infty} \partial_r F(r, w)\, dr \right) dw$$

(sachant que les dérivées de F par rapport à w forment un vecteur orthogonal à w sur la sphère et n'interviennent donc pas dans la formule)

$$= \omega_{d-1}^{-1} \int_{S^{d-1}} (0 - F(0, w))\, dw = -f(0)$$

ce qui est bien une façon d'exprimer, au sens des distributions, que $\triangle G = \delta$.

Dans le cas particulier $d = 2$, la solution est en fait $G(x) = \log \|x\|/(2\pi)$, qu'on peut d'ailleurs retrouver, curieusement, en passant à la limite (!) $d \to 2$ dans la formule donnant G pour $d \neq 2$.

2.4. Le système de Vlasov-Poisson gravitationnel. Un point de vue plus radical encore permet de tout ramener à des équations aux dérivées partielles, au moins dans le cas où toutes les masses m_α sont supposées égales et, pour simplifier, normalisées à 1. Pour cela, on introduit le champ de « densité » des particules dans l'espace des positions et vitesses. En notant la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^3$ et de vitesse $v \in \mathbb{R}^3$, on note cette densité f et on la définit par :

$$f(t,x,v) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta\big(x - X_\alpha(t)\big)\delta(v - \dot{X}_\alpha(t)),$$

encore une fois au sens des distributions. Plus précisément, on voit f comme une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions

$$(t,x,v) \in \mathbb{R}^{1+3+3} \longmapsto \zeta(t,x,v) \in \mathbb{R}$$

qui sont lisses (c'est-à-dire infiniment différentiables avec dérivées continues à tout ordre de dérivation) et s'annulent hors d'un compact de $\mathbb{R}^{1+3+3}$. On définit alors :

$$\langle f, \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \textstyle\sum_{\alpha=1}^{N} \zeta(X_\alpha(t), \dot{X}_\alpha(t))\, dt.$$

En utilisant les équations différentielles régissant les particules, on voit qu'en posant

$$\eta(t,x,v) = \partial_t \zeta(t,x,v) + v \cdot \nabla_x \zeta(t,x,v),$$

on obtient, par définition de f,

$$\begin{aligned}\langle f, \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \textstyle\sum_{\alpha=1}^{N} \Big[&(\partial_t \zeta)(t, X_\alpha(t), \dot{X}_\alpha(t)) \\ &+ \dot{X}_\alpha(t) \cdot (\nabla_x \zeta)(t, X_\alpha(t), \dot{X}_\alpha(t)) \Big]\, dt\end{aligned}$$

puis, par dérivation composée,

$$\begin{aligned}\langle f, \eta \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \textstyle\sum_{\alpha=1}^{N} \Big[\dfrac{d}{dt}\big[\zeta(t, X_\alpha(t), \dot{X}_\alpha(t))\big] \\ &\qquad - (\nabla_v \zeta)(t, X_\alpha(t), \dot{X}_\alpha(t)) \cdot \ddot{X}_\alpha(t) \Big]\, dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \textstyle\sum_{\alpha=1}^{N} (\nabla_v \zeta)(t, X_\alpha(t), \dot{X}_\alpha(t)) \cdot \ddot{X}_\alpha(t)\, dt.\end{aligned}$$

On peut alors exprimer l'accélération $\ddot{X}_\alpha$ des particules à l'aide du potentiel ϕ pour trouver :

$$\langle f, \eta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \textstyle\sum_{\alpha=1}^{N} (\nabla_v \zeta)(t, X_\alpha(t), \dot{X}_\alpha(t)) \cdot (\nabla\phi)(t, X_\alpha(t))\, dt.$$

Si ϕ était lisse, ce qui n'est pas le cas, on pourrait alors écrire le second membre comme

$$\langle f, \gamma\rangle, \quad \text{en posant : } \gamma(t,x,v) = \nabla_v\zeta(t,x,v) \cdot \nabla\phi(t,x).$$

On aurait ainsi abouti à :

$$\Big\langle f(t,x,v),\ \partial_t\zeta(t,x,v) + v \cdot \nabla_x\zeta(t,x,v) - \nabla_v\zeta(t,x,v) \cdot \nabla\phi(t,x)\Big\rangle = 0$$

avec un abus de notation (consistant à expliciter les variables (t,x,v) dans le crochet de dualité) qu'on voudra bien pardonner. Cela signifierait, si ϕ était lisse, qu'au sens des distributions le couple (f,ϕ) serait solution du système d'équations :

$$\partial_t f(t,x,v) + \nabla_x \cdot (v f(t,x,v)) - \nabla_v \cdot (f(t,x,v)\nabla\phi(t,x)) = 0.$$

Comme on l'a dit, cette écriture n'est pas justifiable par le calcul des distributions, à cause des singularités de ϕ. On a néanmoins exprimé, au moins formellement, le problème à N corps, entièrement en termes des champs (f,ϕ,ρ), étant entendu que

$$\triangle\phi = 4\pi\rho, \quad \rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)\, dv,$$

la dernière équation reliant f à ρ, par leurs définitions mêmes, puisque

$$f(t,x,v) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta\big(x - X_\alpha(t)\big)\delta(v - \dot{X}_\alpha(t)), \quad \rho(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta\big(x - X_\alpha(t)\big).$$

Le système d'EDP ainsi obtenu est souvent appelé système de Vlasov-Poisson gravitationnel. Comme il ne met plus en jeu explicitement les N particules, on peut essayer de le résoudre pour des données qui ne sont pas engendrées par un nombre fini de particules mais plutôt un « continuum » de particules. Ainsi, dans les années 1990, des analystes (Pfaffelmoser, Lions et Perthame, en particulier) sont parvenus à prouver :

Théorème 2.1. *Soit $f_0 : (x,v) \in \mathbb{R}^6 \to f_0(x,v) \in [0,+\infty[$ une fonction lisse à support compact. Alors il existe une unique solution lisse*

$$(t,x,v) \in \mathbb{R}^7 \longmapsto f(t,x,v) \in [0,+\infty[$$

dont le support reste compact en (x,v) pour tous temps t, solution, au sens classique, du système de Vlasov-Poisson gravitationnel :

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) - \nabla_v \cdot (f\nabla\phi) = 0, \quad \triangle\phi = 4\pi\rho, \quad \rho = \int_{\mathbb{R}^3} f(\cdot,\cdot,v)\, dv$$

avec $f(0,x,v) = f_0(x,v)$, $\forall (x,v) \in \mathbb{R}^6$.

2.5. Le principe de moindre action en relativité restreinte pour une particule dans un potentiel extérieur. En relativité restreinte, où toute vitesse doit rester en dessous de la vitesse de la lumière, ici normalisée à la valeur 1, le principe de moindre action se généralise comme suit pour une particule de masse m, charge q et de position $X(t) \in \mathbb{R}^3$ (ici on fixe $d = 3$) soumise à un potentiel extérieur. La notion de potentiel est d'abord généralisée par celle de potentiel vecteur, qu'on peut considérer comme un (co-)vecteur espace-temps à 4 composantes Φ, A_1, A_2, A_3 agissant linéairement sur le vecteur « vitesse » espace-temps à 4 composantes $(1, \dot{X}(t))$. L'action s'écrit

$$\mathcal{A}[X,t_0,t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ -m\sqrt{1 - \|\dot{X}(t)\|^2} \\ - \big[\Phi(t,X(t)) + A(t,X(t)) \cdot \dot{X}(t)\big] q \Big\}\, dt.$$

On calcule, assez facilement, que les points critiques de cette action, quand $X(t_0)$ et $X(t_1)$ sont fixés, sont les solutions de l'équation

$$m\, \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}(t)}{\sqrt{1 - \|\dot{X}(t)\|^2}} = \big[E(t,X(t)) + \dot{X}(t) \times B(t,X(t))\big] q,$$

où on note

$$E(t,x) = -\partial_t A(t,x) - \nabla\Phi(t,x), \quad B(t,x) = \nabla \times A(t,x).$$

($\times$ étant une notation pour le « produit extérieur » dans $\mathbb{R}^3$.) C'est la fameuse expression de la « force de Lorentz » où (E,B) est le « champ électromagnétique » extérieur dérivant du « potentiel vecteur » extérieur (Φ, A_1, A_2, A_3).

Notations compactes

On a jusqu'ici utilisé les notations conventionnelles de l'électromagnétisme, mais on peut procéder de façon plus « moderne », avec les notations plus compactes et géométriques des mathématiciens et de la physique théorique contemporaine. On se place alors dans l'espace-temps de Minkowski $\mathcal{M}$ de dimension $d+1$ (il n'y a pas lieu ici de se limiter à $d=3$) où chaque point peut s'écrire $\boldsymbol{x}=(t,x)\in\mathbb{R}^{1+d}$ et où l'on définit une pseudo-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ définie par :

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathcal{M}}=\sqrt{\tau^2-\|\xi\|^2},$$

pour tout vecteur $\boldsymbol{\omega}=(\tau,\xi)\in\mathbb{R}^{1+d}$ tel que $|\tau|\geqslant\|\xi\|$. On voit alors la trajectoire d'une particule comme une courbe $\boldsymbol{X}:s\in\mathbb{R}\mapsto(t(s),x(s))\in\mathbb{R}^{1+d}$, contrainte à ne pas dépasser la vitesse de la lumière en ce sens que :

$$\|x'(s)\|\leqslant t'(s),\quad\forall s\in\mathbb{R},$$

ce qui implique la monotonie croissante de t comme fonction de s, ou, même, de façon plus générale,

$$\|x'(s)\|\leqslant|t'(s)|,\quad\forall s\in\mathbb{R},$$

en admettant des trajectoires rétrogrades en temps (on reviendra sur ce point dans la suite). La partie « cinétique » de l'action devient tout simplement

$$\int-\|d\boldsymbol{X}\|_{\mathcal{M}}=-\int\sqrt{t'(s)^2-\|x'(s)\|^2}\,ds,$$

ce qui redonne bien

$$\int-\|d\boldsymbol{X}\|_{\mathcal{M}}=-\int\sqrt{1-\|\dot{X}(t)\|^2}\,dt$$

lorsqu'on paramètre la courbe $\boldsymbol{X}$ comme un graphe $t\mapsto(t,X(t))$. Cette quantité n'est donc, au signe près, que la « longueur » de la courbe dans l'espace de Minkowski, et ne dépend pas du paramétrage de la courbe.

Le potentiel vecteur devient un $1+d$ (co-)vecteur

$$\boldsymbol{A}=(\Phi,A_1,\ldots,A_d)\in\mathbb{R}^{1+d}$$

et le terme « potentiel » de l'action devient « la circulation de $\boldsymbol{A}$ le long de la courbe $\boldsymbol{X}$ », c'est-à-dire

$$\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})d\boldsymbol{X} = \int \big[\Phi(t(s), x(s))t'(s) + A(t(s), x(s)) \cdot x'(s)\big]\, ds$$

ou encore, en paramétrant $\boldsymbol{X}$ comme un graphe $t \to (t, X(t))$,

$$\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})d\boldsymbol{X} = \int \big[\Phi(t, X(t)) + A(t, X(t)) \cdot X'(t)\big]\, dt.$$

Ainsi, l'action de la courbe devient tout simplement

$$\int -m\|d\boldsymbol{X}\|_{\mathcal{M}} - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X},$$

mais cela ne rend pas les calculs plus faciles pour autant... au moins lorsque $d = 3$.

2.6. Le problème à N corps de l'électrodynamique classique

Comme pour la gravitation de Newton, on va ici considérer N particules de position $X_\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, pour $\alpha = 1, \dots, N$, de masse $m_\alpha > 0$ et de charge $q_\alpha \in \mathbb{R}$. Comme dans la section précédente, chacune de ces particules est soumise à la force de Lorentz (pondérée par masse et charge) :

$$m_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_\alpha(t)}{\sqrt{1 - \|\dot{X}(t)\|^2}} = \Big(E\big(t, X_\alpha(t)\big) + \dot{X}_\alpha(t) \times B\big(t, X_\alpha(t)\big)\Big) q_\alpha$$

où

$$E(t, x) = -\partial_t A(t, x) - \nabla\Phi(t, x), \quad B(t, x) = \nabla \times A(t, x).$$

La nouveauté est ici que (Φ, A) n'est plus un potentiel-vecteur extérieur imposé : il dépend dorénavant lui-même des positions et vitesses de l'ensemble des particules. Plus précisément, on introduit d'abord la charge et le courant des particules :

$$\rho(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta\big(x - X_\alpha(t)\big), \quad j(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta\big(x - X_\alpha(t)\big) \dot{X}_\alpha(t).$$

et on impose aux champs E et B d'être solutions des fameuses équations de Maxwell

$$\partial_t E - \nabla \times B = -j, \quad \nabla \cdot E = \rho,$$

qui doivent être complétées par :

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0, \quad \nabla \cdot B = 0,$$

qui sont les « conditions de compatibilité » (locales en espace-temps) pour que (E, B) dérive d'un potentiel (Φ, A) au sens que :

$$E(t, x) = -\partial_t A(t, x) - \nabla\Phi(t, x), \quad B(t, x) = \nabla \times A(t, x).$$

Le choix de Φ et A n'est d'ailleurs pas unique et on peut même faire en sorte que

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\Big)\Phi = \rho, \quad \Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\Big)A = j,$$

ce qui réduit les équations de Maxwell à quatre équations des ondes scalaires découplées (mais la situation se complique dès qu'on doit imposer des « conditions aux limites » et le retour aux équations de Maxwell s'impose le plus souvent). Couplées aux équations exprimant le déplacement des particules sous l'action de la force de Lorentz, les équations de Maxwell fournissent ainsi un système cohérent d'équations qui définissent complètement l'électrodynamique classique.

3. De l'électrodynamique à l'hydrodynamique

Deux simplifications sont souvent apportées aux équations de l'électrodynamique à N corps. Elles ne sont pas sans rapport l'une avec l'autre car elles correspondent à des régimes où les effets relativistes sont partiellement négligés. On simplifie d'abord l'équation dynamique

$$m_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_\alpha(t)}{\sqrt{1 - \|\dot{X}(t)\|^2}} = \Big(E\big(t, X_\alpha(t)\big) + \dot{X}_\alpha(t) \times B\big(t, X_\alpha(t)\big)\Big) q_\alpha$$

en négligeant le terme de correction relativiste $\sqrt{1 - \|\dot{X}_\alpha(t)\|^2}$, ce qui donne.

$$m_\alpha \ddot{X}_\alpha(t) = \Big(E\big(t, X_\alpha(t)\big) + \dot{X}_\alpha(t) \times B\big(t, X_\alpha(t)\big)\Big) q_\alpha$$

et on réduit les équations de Maxwell à « l'électrostatique », c'est-à-dire :

$$\nabla \times E = 0, \quad \nabla \cdot E = \rho,$$

ou, de manière équivalente,

$$E = -\nabla\Phi, \quad -\triangle\Phi = \rho,$$

avec, rappelons-le,

$$\rho(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta\big(x - X_\alpha(t)\big),$$

le courant j n'intervenant plus. Quant au champ magnétique B, il peut être maintenu dans le modèle, mais au lieu d'être couplé aux mouvements des particules, il est simplement imposé de l'extérieur. Ce modèle simplifié est proche, sinon identique, de ceux qu'on utilise pour les problèmes de tokamaks, en particulier pour le futur réacteur ITER, qui sont traités dans le texte de Jacques Blum (ce volume, [Blu15]). Il a deux liens structurels assez directs, d'une part avec la gravitation newtonienne, dans le cas où il n'y a pas de champ magnétique, et d'autre part avec l'hydrodynamique bidimensionnelle, dans le cas où le champ magnétique est intense.

3.1. Lien avec la gravitation newtonienne. Sans champ magnétique externe, on trouve :

$$m_\alpha \ddot{X}_\alpha(t) = -q_\alpha \nabla\Phi(t,, X_\alpha(t)),$$

avec

$$\Phi(t,x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{q_\alpha}{\|x - X_\alpha(t)\|},$$

ce qui est presqu'identique au système à N corps de la gravitation newtonienne, avec toutefois une différence de signe essentiel dans les équations. En effet, dans le cas d'électrons de masse m et de charge $-e$, par exemple, on trouve

$$m\ddot{X}_\alpha(t) = \frac{e^2}{4\pi}\sum_{\alpha\neq\beta} \frac{X_\alpha(t) - X_\beta(t)}{\|X_\alpha(t) - X_\beta(t)\|^3},$$

ce qui donne le signe contraire à celui de la gravitation. (Les électrons se repoussent quand les corps en gravitation s'attirent.)

3.2. Lien avec l'hydrodynamique. Voyons maintenant le lien avec l'hydrodynamique, en supposant cette fois le champ magnétique constant et de direction verticale

$$B = (0, 0, 1).$$

On voit que pour un vecteur $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$v \times B = (v_2, -v_1, 0).$$

Supposons les masses m_α négligeables dans les équations dynamiques

$$m_\alpha \ddot{X}_\alpha(t) = \Big(E\big(t, X_\alpha(t)\big) + \dot{X}_\alpha(t) \times B\Big) q_\alpha,$$

ce qui réduit formellement celles-ci à

$$E_1\big(t, X_\alpha(t)\big) + \dot{X}_{2,\alpha}(t) = 0, \quad E_2\big(t, X_\alpha(t)\big) - \dot{X}_{1,\alpha}(t) = 0,$$
$$E_3\big(t, X_\alpha(t)\big) = 0.$$

Cela suggère un modèle réduit, purement bidimensionnel, où $E_3 = 0$ et seules comptent les positions horizontales $(X_{1,\alpha}(t), X_{2,\alpha}(t))$ des particules. Le système résultant devient

$$\dot{X}_{1,\alpha}(t) = E_2\big(t, X_{1,\alpha}(t), X_{2,\alpha}(t)\big), \quad \dot{X}_{2,\alpha}(t) = -E_1\big(t, X_{1,\alpha}(t), X_{2,\alpha}(t)\big)$$
$$E_1 = -\partial_1 \Phi, \quad E_2 = -\partial_2 \Phi, \quad - \triangle \Phi = \rho,$$
$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta\big(x_1 - X_{1,\alpha}(t)\big)\, \delta(x_2 - X_{2,\alpha}(t)).$$

On trouve là le système des tourbillons ponctuels qui décrit, de façon simplifiée, les fluides bidimensionnels, aussi bien à l'échelle plutôt microscopique des superfluides qu'à l'échelle très macroscopique des mouvements atmosphériques et océaniques. C'est l'objectif du texte d'Évelyne Miot (ce volume, [Mio15]). Comme dans le cas de l'équation de Vlasov-Poisson, on peut entièrement se passer de la description avec des particules. On obtient en effet, en introduisant $v_1 = E_2$, $v_2 = -E_1$, au moins formellement, une équation d'évolution pour le champ ρ :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

On obtient alors un système cohérent d'EDP pour (ρ, v_1, v_2, Φ) avec

$$v_1 = -\partial_2 \Phi, \quad v_2 = \partial_1 \Phi, \quad - \triangle \Phi = \rho.$$

Ce système est équivalent, dans le cas plan (en formulation « tourbillon »), aux fameuses équations qu'Euler a introduites dès 1755 [AK98, Lio96] pour décrire les « fluides parfaits incompressibles ». Un résultat analogue à celui déjà mentionné pour le système de Vlasov-Poisson a été obtenu par des analystes dès les années 1930 et considérablement amélioré par Yudovich dans les années 1960.

Théorème 3.1. *Soit* $\rho_0 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \rho_0(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ *une fonction lisse à support compact. Alors il existe une unique solution lisse*

$$(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \rho(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}$$

dont le support reste compact en (x, v) *pour tous temps* t*, solution, au sens classique, du système d'Euler (en formulation tourbillon)*

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad v_1 = -\partial_2 \Phi, \quad v_2 = \partial_1 \Phi, \quad - \triangle \Phi = \rho,$$

avec $\rho(0, x_1, x_2) = \rho_0(x_1, x_2)$*,* $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*.*

4. Appendice 1 : Interprétation de l'électrodynamique classique dans la conférence Nobel de Feynman

Dans sa première époque, la mécanique quantique a tâché de traduire les modèles de la physique classique en modèles quantiques en transformant les « hamiltoniens » de la mécanique classique en opérateurs linéaires agissant sur des « fonctions d'ondes ». Cela s'avérait très délicat dans le cas de l'électrodynamique. Richard Feynman a changé la donne en restaurant un point de vue plus ancien en mécanique classique, celui de trajectoires de particules soumises à un principe de moindre action. Cela lui a d'abord permis, dans sa thèse, d'écrire les solutions de l'équation de Schrödinger d'une particule soumise à un potentiel extérieur comme des intégrales oscillantes portant sur l'ensemble des trajectoires possibles et impliquant leur « action ». Ce sont les fameuses intégrales de Feynman qui redonnent, à la limite, le principe de moindre action selon le schéma des « interférences constructives » déjà bien connu en optique depuis Fresnel. Après cette première étape, Feynman s'est penché sur le problème beaucoup plus épineux de l'électrodynamique en formulant celle-ci en termes de trajectoires et de principe de moindre action. Il a même pensé à une formulation, d'un réductionnisme radical, comme on va le voir, ne nécessitant qu'un seul électron (dans tout l'espace-temps !) et avec une action tellement élémentaire que n'y figure même pas de terme d'énergie cinétique, ce qui semble impensable pour un modèle classique ! Feynman n'a pas retenu, pour de nombreuses raisons, cette version extrême dans ses travaux finalisés qui lui ont valu le prix Nobel. Néanmoins, il a tenu à la présenter lors de sa conférence Nobel de décembre 1965 (il y aura bientôt 50 ans), pour expliquer le cheminement de ses idées. L'idée est tellement élégante qu'elle est de nature à séduire un esprit mathématicien, facilement enclin au réductionnisme, plus encore qu'un esprit physicien, toujours astreint à la confrontation avec l'expérience. On a donc pris le risque de la faire figurer dans ce premier appendice, en tâchant de respecter au mieux le texte de la conférence de Feynman qu'on peut se procurer assez facilement et dont on peut recommander la lecture à toute personne intéressée par les liens entre physique et mathématiques.

Le modèle de l'électron unique

On se place dans l'espace-temps de la relativité restreinte, celui de Minkowski. La propriété essentielle dans cet espace est qu'en deux « points » $\boldsymbol{X} = (t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}$ (ici $d = 3$) et $\widetilde{\boldsymbol{X}} = (\widetilde{t}, \widetilde{x}) \in \mathbb{R}^{1+d}$ il ne peut y avoir d'interactions entre deux particules que si ces deux points appartiennent au même « cône de lumière », c'est-à-dire si $|t - \widetilde{t}| = \|x - \widetilde{x}\|$ (où, ici, on normalise la vitesse lumière à 1). Dans sa version la plus radicale, Feynman mentionne l'idée (qu'il attribue à Wheeler) d'un unique électron se déplaçant dans l'espace-temps de Minkowski, soit en avançant dans le temps soit en le remontant ! (C'est une manière élégante d'expliquer que tous les électrons ont la même charge et la même masse et qu'il existe des positrons de charge opposée !) Notons sa trajectoire, qu'on suppose close pour simplifier (c'est donc une boucle dans l'espace-temps !)

$$s \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longmapsto \boldsymbol{X}(s) = (T(s), X(s)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

et nous supposons $\|X'(s)\| \leqslant |t'(s)|$, mais pas $t'(s) \geqslant 0$ ce qui permet le rebroussement temporel. Ainsi, à un temps t^* fixé, on peut « voir » de multiples occurrences du même électron, forcément en nombre pair (dépendant de t^*), avec n^* occurrences progressant en temps et n^* occurrences remontant le temps, ce qu'on peut assimiler à n^* électrons et n^* positrons (ou anti-électrons). Passons à la définition de l'action de cet unique électron. La formule indiquée par Feynman est l'une des plus simples qu'on puisse imaginer

$$\mathcal{A} = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \delta_\varepsilon(\|\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{X}(s')\|^2)\, \langle \boldsymbol{X'}(s), \boldsymbol{X'}(s') \rangle \, ds \, ds',$$

ou, même, de façon encore plus élégante (quoique plus obscure)

$$\mathcal{A} = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \delta_\varepsilon(\|\boldsymbol{X} - \widetilde{\boldsymbol{X}}\|^2)\, \langle d\boldsymbol{X}, d\widetilde{\boldsymbol{X}} \rangle.$$

On a utilisé ici les notations

$$\langle \boldsymbol{X}, \widetilde{\boldsymbol{X}} \rangle = tt' - x \cdot x', \quad \|\boldsymbol{X}\|^2 = t^2 - \|x\|^2, \quad \boldsymbol{X} = (t, x), \quad \widetilde{\boldsymbol{X}} = (\widetilde{t}, \widetilde{x}),$$

pour le pseudo-produit scalaire et la pseudo-norme de l'espace de Minkowski. Quant à δ_ε, la définition est :

$$\delta_\varepsilon(r) = \varepsilon^{-2} \delta_1(r\varepsilon^{-2}), \quad r \in \mathbb{R},$$

où δ_1 est une fonction lisse sur la droite réelle, d'intégrale 1, de sorte que δ_ε converge vers la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$ (au sens des distributions) lorsque la « longueur de coupure » ε tend vers zéro. Ainsi l'action est (presque) concentrée sur les paires de positions espace-temps de l'électron qui se trouvent sur un cône de lumière commun, une légère déviation étant possible, limitée par ε (ce qui pourrait avoir une interprétation d'incertitude quantique, mais cela Feynman ne le mentionne pas dans son exposé). L'idée de Feynman est que *toute* l'électrodynamique classique est implicitement traduite par le principe de moindre action pour cette action si élémentaire !

Pour retrouver le problème à $2n$ corps (n électrons, n positrons), il y a deux étapes à franchir. La première est très simple. On considère une plage de temps $[t_0, t_1]$ où il n'y a ni collision ni changement de direction temporelle dans l'évolution de l'unique électron. On se retrouve alors avec la vision conventionnelle de n électrons et n positrons qui ne rentrent jamais en collision.

On les numérote par $\alpha \in \{1, \ldots, 2n\}$ avec charges $q_\alpha = e(-1)^\alpha$ (où e est la charge de l'électron) et positions $(t \in [t_0, t_1] \to \big(t, X_\alpha(t)\big)$.

L'action, sur un tel intervalle de temps, se décompose en deux termes, un terme d'interaction

$$e^2 \sum_{\alpha \neq \beta} (-1)^{\alpha+\beta} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta_\varepsilon((t-s)^2 - \|X_\alpha(t) - X_\beta(s)\|^2) \cdot (1 - X'_\alpha(t) \cdot X'_\beta(s))\, dt\, ds$$

et un terme d'auto-interaction

$$e^2 \sum_{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta_\varepsilon((t-s)^2 - |X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|^2)(1 - X'_\alpha(t) \cdot X'_\alpha(s))\, dt\, ds.$$

Lorsque ε tend vers zéro, le premier terme redonne à la limite l'énergie potentielle de l'électrodynamique classique de deux groupes, de charges opposées, de n particules. De façon beaucoup moins conventionnelle, le second terme redonne (asymptotiquement) le terme d'énergie cinétique (voir les détails plus bas)

$$-m \sum_{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \|X'_\alpha(t)\|^2}\, dt,$$

où la masse m est reliée à q et la fonction δ_1 par la relation

$$m\varepsilon = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(r^2)\, dr$$

(qui n'est malheureusement qu'asymptotique). Il est remarquable que cette approche fournisse le terme d'énergie cinétique sans l'avoir introduit au départ. Cela permet de voir l'approche de Feynman comme purement électromagnétique alors qu'elle contient (de façon cachée), en fait, toute l'électrodynamique classique. On va maintenant voir, dans le second appendice de cet exposé, une autre théorie, l'électromagnétisme non-linéaire de Born et Infeld, qui a une propriété similaire et permet de retrouver des modèles (idéalisés) de magnétohydrodynamique.

Dérivation asymptotique du terme d'énergie cinétique

Dans l'intégrale

$$e^2 \sum_{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta_\varepsilon((t-s)^2 - \|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)\|^2)(1 - X'_\alpha(t) \cdot X'_\alpha(s))\, dt\, ds,$$

on procède au changement de variable :

$$t = \tau - \varepsilon u/2, \quad s = \tau + \varepsilon u/2.$$

avec $dsdt = \varepsilon d\tau du$,

$$1 - X'_\alpha(t) \cdot X'_\alpha(s) = 1 - \|X'_\alpha(t)\|^2 + O(\varepsilon^2),$$
$$(t-s)^2 - \|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)\|^2 = \varepsilon^2 u^2 (1 - \|X'_\alpha(t)\|^2) + O(\varepsilon^4),$$

et donc,

$$\delta_\varepsilon((t-s)^2 - \|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)\|^2) = \varepsilon^{-2}\delta_1(u^2(1 - \|X'_\alpha(t)\|^2)) + O(\varepsilon^2),$$

ce qui conduit à l'asymptotique suivante du terme d'auto-interaction :

$$m \sum_\alpha \int_{t_0}^{t_1} -\sqrt{1 - \|X'_\alpha(t)\|^2}\, dt + O(\varepsilon), \quad m = \frac{e^2}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(u^2)\, du.$$

5. Appendice 2 : De l'électromagnétique non-linéaire de Born-Infeld à la magnéto-hydrodynamique

La théorie de Born-Infeld est la formalisation d'une idée de Max Born, consistant à corriger de façon non-linéaire les équations de l'électrostatique, de sorte que le champ électrostatique généré par une charge ponctuelle (l'électron) reste inconditionnellement borné par une constante absolue E_0 à déterminer (ce que calcule Born en fonction de la masse de l'électron supposée d'origine purement électrostatique).

Born propose comme « lagrangien » de sa théorie non-linéaire l'expression

$$L = -\sqrt{E_0^2 - \|\nabla\phi\|^2}$$

pour le potentiel électrique $x \in \mathbb{R}^3 \to \phi(x) \in \mathbb{R}$, avec le champ électrique correspondant $E(x) = \nabla\phi(x)$. En cela, Born s'inspire ouvertement de la relativité restreinte (où toutes les vitesses sont supposées bornées par celle de la lumière) en postulant l'existence d'une telle constante physique E_0.

Un petit calcul rapide permet de trouver le champ électrostatique correspondant à une charge ponctuelle. On trouve une solution radiale

$$E = E(r) = E_0 \frac{r_0^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}},$$

où r_0 doit être ajusté en fonction de la charge et de E_0. Avec son choix de E_0, Born voit que cette valeur est atteinte par le champ électrostatique classique (de Coulomb) à une distance de l'ordre de 10^{-15} mètres. Autrement dit, le champ de Born et celui de Coulomb ne diffèrent vraiment qu'à l'échelle sub-atomique. Dans le travail avec Infeld [BI34], Born passe à l'électromagnétisme, corrige les équations de Maxwell en proposant le lagrangien

$$L = -\sqrt{E_0^2 - E^2 + B^2 - E_0^{-2}(E \cdot B)^2}$$

pour le champ électromagnétique (E, B), sujet aux contraintes différentielles :

$$\nabla \cdot B = 0, \quad \partial_t B + \nabla \times E = 0. \tag{5.1}$$

Dorénavant, nous poserons $E_0 = 1$ (quitte à modifier les unités).

Quelques mots sur les théories électromagnétiques non-linéaires

L'idée générale est de se donner un « lagrangien », c'est-à-dire une fonction

$$(E, B) \in \mathbb{R}^{3+3} \longmapsto L(E, B) \in \mathbb{R}$$

et de rechercher des champs

$$(t, x) \in U \longmapsto (E, B)(t, x) \in \mathbb{R}^{3+3},$$

où U est un ouvert fixé de l'espace-temps $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, qui sont point critiques, relativement à toute perturbation à support compact dans U, de l'action

$$\int L(E, B)\, dx\, dt,$$

sous contraintes (5.1), c'est-à-dire

$$\partial_t B + \nabla \times E = 0, \quad \nabla \cdot B = 0.$$

(Par là, on veut dire plus précisément que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_U \{L(E + \varepsilon \widetilde{E}, B + \varepsilon \widetilde{B}) - L(E, B)\}\, dt\, dx = 0,$$

pour toute paire de champs $(\widetilde{E}, \widetilde{B})$ à support compact dans U satisfaisant aux contraintes différentielles (5.1).) Selon la méthodes des multiplicateurs de Lagrange, cela revient à chercher les points critiques (E, B, ϕ, A) de l'intégrale

$$\int \{L(E,B) - (\partial_t A + \nabla\phi) \cdot B + \nabla \times A \cdot E\}\, dt\, dx$$

où le « multiplicateur de Lagrange » (ϕ, A) est un champ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, prenant en compte les contraintes (5.1). La différentiation en A et ϕ redonne naturellement ces contraintes sur (E, B) (moyennant intégration par partie). C'est l'objectif même du multiplicateur. Celle en E et B donne (au moins formellement, on néglige ici tout problème d'analyse !) :

$$\frac{\partial L}{\partial E}(E,B) = \nabla \times A, \quad \frac{\partial L}{\partial B}(E,B) = \partial_t A + \nabla\phi.$$

On a alors intérêt à faire intervenir le champ « dual » de E :

$$D = \frac{\partial L}{\partial E}(E,B) = \nabla \times A,$$

pour lequel on trouve aussitôt l'équation d'évolution

$$\partial_t D = \nabla \times (\frac{\partial L}{\partial B}(E,B)).$$

On trouve donc un système d'évolution pour le couple (B, D) en incluant les contraintes (5.1). Cela dit, le système implique encore le champ E qu'on souhaite dorénavant éliminer pour obtenir un système clos. Cela est possible en introduisant le« hamiltonien »

$$h(D,B) = \sup_E \big(E \cdot D - L(E,B)\big),$$

qu'on peut bien définir, moyennant une hypothèse de (stricte) convexité partielle du lagrangien $L(E, B)$ par rapport à la variable E à B fixé. On élimine alors E en posant

$$E = \frac{\partial h}{\partial D}(D,B),$$

et en remarquant que, du même coup, pour ce triplet (E, D, B) on a aussi

$$\frac{\partial L}{\partial B}(E,B) = -\frac{\partial h}{\partial B}(D,B).$$

Ainsi, on a obtenu la formulation « hamiltonienne » de nos équations d'électromagnétisme non-linéaire :

$$\partial_t B + \nabla \times \left(\frac{\partial h}{\partial D}(D,B)\right) = 0, \quad \partial_t D - \nabla \times \left(\frac{\partial h}{\partial B}(D,B)\right) = 0.$$

qui forment un système cohérent d'équations d'évolution pour les champs B et D.

Évidemment, les équations de Maxwell, homogènes (c'est-à-dire sans charge et sans courant), correspondent au lagrangien le plus simple.

$$L(E,B) = \frac{E^2 - B^2}{2}, \quad h(D,B) = \frac{B^2 + D^2}{2}.$$

Le cas des équations de Born-Infeld est plus complexe, avec :

$$L(E,B) = -\sqrt{1 + B^2 - E^2 - (E \cdot B)^2},$$
$$h(D,B) = \sqrt{1 + B^2 + D^2 + \|D \times B\|^2}.$$

On trouve, explicitement,

$$\partial_t B + \nabla \times \frac{B \times V + D}{h} = 0, \quad \partial_t D + \nabla \times \frac{D \times V - B}{h} = 0,$$

avec

$$h = \sqrt{1 + B^2 + D^2 + \|D \times B\|^2}, \quad V = D \times B. \tag{5.2}$$

Propriétés remarquables de l'électromagnétisme de Born-Infeld

Sur le caractère apparemment arbitraire de la théorie non-linéaire de Born-Infeld, il est bon de faire quelques observations. (On se convaincra assez rapidement que les équations de Born-Infeld sont dotées de propriétés tout à fait exceptionnelles.) Notons que les contraintes différentielles (5.1) ne font qu'exprimer la propriété que le champ électromagnétique (E,B) dérive (en tant que 2-forme différentielle sur l'espace temps), au moins localement, d'un potentiel vecteur (c'est-à-dire une 1-forme) $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. Ainsi on a :

$$E_i = \partial_t A_i + \partial_i A_0, \quad i = 1,2,3, \quad B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \quad \text{etc.}$$

Le lagrangien de Born-Infeld se réécrit simplement

$$L = -\sqrt{-\det(g + F)}$$

où $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ et g est la métrique de l'espace-temps, qui, ici, est celle de l'espace plat $g = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$. (La métrique g peut, bien entendu, être une métrique de Minkowski quelconque, et même varier selon les équations d'Einstein.) Notons aussi que $\sqrt{-\det g}$ est, en géométrie de Lorentz, l'élément de volume de la variété. Le lagrangien de Born-Infeld est donc une sorte de volume généralisé incluant une composante électromagnétique. On retrouve là l'idée assez commune dans les années 30, d'un tenseur $g + F$ unifiant, avec sa partie symétrique, la gravité et, avec sa partie antisymétrique, l'électromagnétisme.

Dès sa parution, le travail de Born-Infeld [BI34] attire l'attention (voir [Sch35] par exemple), mais l'intérêt qui lui est porté s'étiole rapidement avec l'émergence de l'électrodynamique quantique (qui a valu le prix Nobel à Feynman). Revivifiée dans les années 50, la théorie de Born-Infeld réapparaît en physique des hautes énergies, dans les années 90, en connexion avec le concept de D-branes [Pol05, GH01] de la théorie des cordes. Ceci n'est pas surprenant, puisque le lagrangien de base de la théorie des cordes, celui de Nambu-Goto, qui décrit les surfaces extrémales de dimension 2 dans l'espace-temps quadridimensionnel de Minkowski, n'est rien d'autre que le lagrangien de Born-Infeld, lorsque le champ (E, B) ne dépend que d'une seule coordonnée spatiale.

Le système de Born-Infeld augmenté

L'analyse des équations de Born-Infeld est considérablement modifiée par l'approche suivante [Bre04, BY05] :

(1) On augmente les équations de Born-Infeld proprement dites en leur ajoutant quatre lois de conservation supplémentaires obtenues « gratuitement » grâce au théorème de symétrie de Noether (en conséquence du fait que le lagrangien $L(E, B)$ ne dépend pas explicitement des variables d'espace-temps (t, x)).

(2) Crucialement, on découple les variables h, V des variables (B, D), en oubliant les contraintes algébriques (5.2). (Cette idée a été développée dans une direction un peu différente, pour des modèles généraux d'électromagnétisme non-linéaire, dans [Ser04].)

(3) On écrit les équations augmentées, un système de 10 lois de conservations à 10 inconnues, sous forme non-divergentielle, ce qui permet de complètement désingulariser les états correspondant aux champs intenses et de rendre les équations complètement symétriques (en un certain sens [Daf10]).

Comme déjà vu, les champs de vecteur B et D du système de Born-Infeld sont solutions de

$$\begin{aligned} &\partial_t B + \nabla \times \Big(\frac{B \times V + D}{h}\Big) = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \\ &\partial_t D + \nabla \times \Big(\frac{D \times V - B}{h}\Big) = 0, \quad \nabla \cdot D = 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

où

$$h = \sqrt{1 + B^2 + D^2 + \|D \times B\|^2}, \qquad V = D \times B. \tag{5.4}$$

On voit tout de suite que les équations classiques de Maxwell dans le vide

$$\begin{aligned} &\partial_t B + \nabla \times D = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \\ &\partial_t D - \nabla \times B = 0, \quad \nabla \cdot D = 0, \end{aligned} \tag{5.5}$$

peuvent s'interpréter comme limites des équations de BI, pour des champs de faible amplitude $B, D \ll 1$.

Comme le lagrangien de la théorie BI n'implique explicitement ni le temps ni l'espace, il en découle, par le théorème de Noether, des lois de conservation supplémentaires (de l'énergie et de l'impulsion, selon la terminologie des physiciens) pour les variables h (énergie) et V (impulsion ou vecteur de Poynting). L'idée de [Bre04] est d'ajouter au système BI ces lois de conservation supplémentaires.

En notant

$$v = V/h, \qquad b = B/h, \qquad d = D/h,$$

on obtient alors un système de 10 lois de conservation (toujours en dimension 3 d'espace), que nous appelons système ABI (augmented

Born-Infeld) :

$$
\begin{aligned}
&\partial_t h + \nabla \cdot (hv) = 0,\\
&\partial_t (hv) + \nabla \cdot (hv \otimes v - hb \otimes b - hd \otimes d) = \nabla (h^{-1}),\\
&\partial_t (hb) + \nabla \cdot (hb \otimes v - hv \otimes b) + \nabla \times d = 0,\\
&\partial_t (hd) + \nabla \cdot (hd \otimes v - hv \otimes d) - \nabla \times b = 0
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

avec les contraintes différentielles :

$$
\nabla \cdot (hb) = \nabla \cdot (hd) = 0. \tag{5.7}
$$

L'idée principale de [Bre04] est de substituer le système ABI au système BI après avoir noté que ce dernier n'est rien d'autre que le premier restreint à la variété algébrique, que nous appellerons variété BI, définie par :

$$
V = D \times B, \quad h = \sqrt{1 + D^2 + B^2 + V^2}.
$$

Plus précisément, toute solution régulière du système ABI à valeurs dans la variété BI au temps initial le restera pour tous les autres temps. L'écriture du système ABI sous forme non conservative, en utilisant comme variables d, b, v et $\tau = h^{-1}$, est encore plus frappante :

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \tau + (v \cdot \nabla)\tau - \tau \nabla \cdot v = 0,\\
&\partial_t v + (v \cdot \nabla) v - (b \cdot \nabla) b - (d \cdot \nabla) d - \tau \nabla \tau = 0,\\
&\partial_t b + (v \cdot \nabla) b - (b \cdot \nabla) v + \tau \nabla \times d = 0,\\
&\partial_t d + (v \cdot \nabla) d - (d \cdot \nabla) v - \tau \nabla \times b = 0,
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

où on omet les contraintes différentielles (5.7). On est en présence d'un système symétrique (donc forcément hyperbolique, voir [Daf10]) dont les non-linéarités sont quadratiques homogènes. Ce système, que nous appellerons NCABI (non-conservative augmented Born-Infeld equations), possède une série de propriétés remarquables que nous allons examiner.

Domaine de définition. Le système NCABI est bien défini pour *tout* état $(\tau, v, d, b) \in \mathbb{R}^{10}$. En particulier, les états pour lesquels $\tau = 0$ et même $\tau < 0$ sont acceptables, mathématiquement.

Conservation de la variété BI. La variété BI s'écrit très élégamment sous la forme

$$\tau > 0, \quad \tau^2 + b^2 + d^2 + v^2 = 1, \quad \tau v = d \times b. \tag{5.9}$$

Cette variété est conservée par les solutions régulières du système NCABI.

Conservation des contraintes différentielles. Les contraintes différentielles (5.7) sont également conservées par les solutions régulières du système NCABI.

Invariance galiléenne classique. Le système NCABI est invariant selon les transformations galiléennes classiques suivantes :

$$(t, x) \longmapsto (t, x + tc), \quad (\tau, v, d, b) \longmapsto (\tau, v - c, d, b),$$

pour toute « vitesse » constante c. Cette propriété est paradoxale, puisque le système BI est relativiste. Le mystère s'éclaircit une fois que l'on a observé que la variété BI (5.9) n'est pas compatible avec de telles transformations.

Du système de Born-Infeld augmenté à la MHD

Pour le système NCABI (5.8), l'état $\tau = 0$ n'est en rien singulier. Or il correspond au cas de champs infiniment intenses (puisque $\tau = h^{-1}$). Le système réduit, obtenu en annulant τ dans les équations s'écrit :

$$\begin{aligned} &\partial_t v + v \cdot \nabla v - b \cdot \nabla b - d \cdot \nabla d = 0, \\ &\partial_t b + v \cdot \nabla b - b \cdot \nabla v = 0, \\ &\partial_t d + v \cdot \nabla d - d \cdot \nabla v = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

On peut encore réduire le système de façon cohérente en annulant la variable d à son tour :

$$\begin{aligned} &\partial_t v + v \cdot \nabla v - b \cdot \nabla b = 0, \\ &\partial_t b + v \cdot \nabla b - b \cdot \nabla v = 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Finalement, $\tau = 0$, $b = d = 0$, réduit le système NCABI (5.8) à la simple équation :

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v = 0. \tag{5.12}$$

parallèlement, la variété de Born-Infeld (5.9) devient successivement :

$$b^2 + d^2 + v^2 = 1, \quad d \times b = 0, \quad v \cdot b = v \cdot d = 0, \tag{5.13}$$

$$b^2 + v^2 = 1, \quad v \cdot b = 0, \tag{5.14}$$

$$v^2 = 1, \tag{5.15}$$

en association respective avec les systèmes réduits (5.10), (5.11) et (5.12). C'est la seconde réduction qui est la plus pertinente pour notre exposé, puisqu'on retrouve dans (5.11) une version simplifiée et idéalisée de la MHD [ST83] qui est considérée dans le texte de Jacques Blum (ce volume, [Blu15]). Il est tout à fait frappant que l'électromagnétisme de Born-Infeld, qui à première vue ne prend pas en compte l'interaction avec la matière et ne relève pas de l'électrodynamique, contienne en fait un modèle, certes simplifié, de MHD, qui, lui, peut être dérivé de l'électrodynamique ! En ce sens, on a obtenu une sorte de réduction de l'électrodynamique (sous forme de MHD simplifiée) à un modèle purement électromagnétique, sans termes d'interaction avec la matière. On n'est ainsi pas si loin de la réduction par Feynman de l'électrodynamique classique, évoquée dans notre premier appendice.

Références

[AK98] V. I. Arnold & B. A. Khesin – *Topological methods in hydrodynamics*, Applied Math. Sciences, vol. 125, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Blu15] J. Blum – « Modélisation fluide des plasmas dans les Tokamaks », in *Des problèmes à N corps aux Tokamaks*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2015, ce volume.

[Bon01] J.-M. Bony – *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

[BI34] M. Born & L. Infeld – « Foundations of a new field theory », *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **144** (1934), p. 425–451.

[Bre04] Y. Brenier – « Hydrodynamic structure of the augmented Born-Infeld equations », *Arch. Rational Mech. Anal.* **172** (2004), no. 1, p. 65–91.

[BY05] Y. Brenier & W.-A. Yong – « Derivation of particle, string, and membrane motions from the Born-Infeld electromagnetism », *J. Math. Phys.* **46** (2005), no. 6, article no. 062305 (17 pages).

[Daf10] C. M. Dafermos – *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, 3e éd., Grundlehren Math. Wissen., vol. 325, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[GH01] G. W. Gibbons & C. A. R. Herdeiro – « Born-Infeld theory and stringy causality », *Phys. Rev. D (3)* **63** (2001), no. 6, article no. 064006 (18 pages).

[Lio96] P.-L. Lions – *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, Oxford Lecture Series in Math. and its Applications, vol. 3, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.

[Mio15] É. Miot – « Le système dynamique de N tourbillons ponctuels », in *Des problèmes à N corps aux Tokamaks*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2015, ce volume.

[Pol05] J. Polchinski – *String theory. Vol. I*, Cambridge Monographs on Math. Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[Sch35] E. Schrödinger – « Contributions to Born's new theory of the electromagnetic field », *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **150** (1935), p. 465–477.

[ST83] M. Sermange & R. Temam – « Some mathematical questions related to the MHD equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), no. 5, p. 635–664.

[Ser04] D. Serre – « Hyperbolicity of the nonlinear models of Maxwell's equations », *Arch. Rational Mech. Anal.* **172** (2004), no. 3, p. 309–331.

Yann Brenier, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, CNRS UMR 7640, École Polytechnique, Palaiseau, France

E-mail : `yann.brenier@ens.fr`