

Journées mathématiques X-UPS

Année 2012

Henri Cartan & André Weil, mathématiciens du XX^e siècle

Michèle AUDIN

Henri Cartan & André Weil. Du vingtième siècle et de la topologie

Journées mathématiques X-UPS (2012), p. 1-63.

<https://doi.org/10.5802/xups.2012-01>

© Les auteurs, 2012.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

HENRI CARTAN & ANDRÉ WEIL. DU VINGTIÈME SIÈCLE ET DE LA TOPOLOGIE

par

Michèle Audin

*Souvent, le soir, après dîner, mon père
faisait la lecture à haute voix à ma mère.
Il a lu des quantités de livres...*

*Je ne sais combien de volumes de Proust
ont été lus à haute voix par mon père.*

Henri Cartan

Résumé. La correspondance entre Henri Cartan (1904–2008) et André Weil (1906–1998) s’étendit de 1928 à 1991. À travers les événements marquants du vingtième siècle (en vrac : la naissance et la jeunesse de Bourbaki, la montée des fascismes, la genèse en prison de la démonstration par Weil de l’hypothèse de Riemann pour les corps finis, la deuxième guerre mondiale, le maccarthysme, les progrès de l’analyse complexe après l’invention des faisceaux), elle met en lumière le rôle essentiel joué par la topologie, aussi bien comme objet d’étude que comme outil technique ou source d’inspiration, dans les travaux de ces deux mathématiciens. C’est ce que nous tenterons de montrer dans ce texte, à travers des exemples (structures uniformes, filtres, homologie, degré, nombres d’intersection et invariant de Hopf, théorème de de Rham...).

Table des matières

Introduction.....	2
Pourquoi « Cartan & Weil » ?.....	3
De quoi s’agit-il ?.....	3
De l’histoire et de la mathématique.....	5
1. À la recherche de la topologie (un inventaire).....	6
La topologie générale.....	7

De la topologie « combinatoire » à la topologie algébrique.....	8
Dans la correspondance.....	8
2. Le côté de Cartan.....	8
2.1. La topologie générale et les filtres (boum!).....	9
2.2. La topologie algébrique.....	12
2.3. La géométrie analytique et les fibrés.....	16
3. Du côté de chez Weil.....	24
3.1. L'hypothèse de Riemann pour les corps finis.....	24
3.2. Le lemme de Weil et le théorème de Lefschetz....	30
3.3. Les formes différentielles : de la formule de Stokes au théorème de de Rham.....	44
4. Annexe : repères biographiques.....	50
Henri Cartan.....	51
André Weil.....	54
Remerciements et sources.....	57
Remerciements.....	57
Sources.....	58
Références.....	60

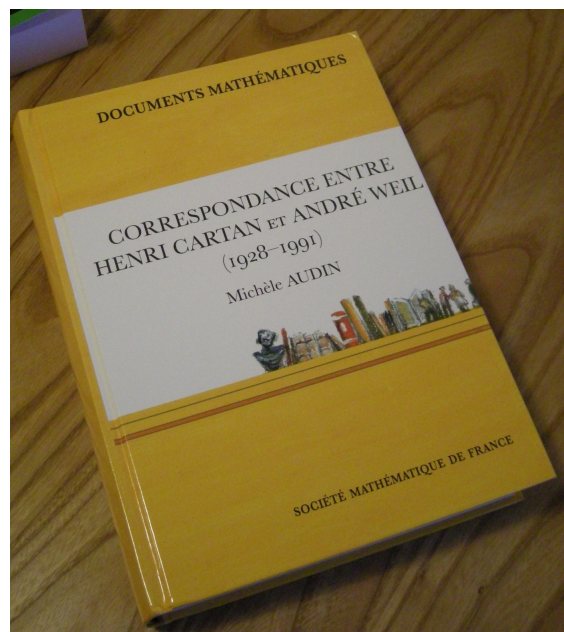
Introduction

Le titre général de ces journées, *Henri Cartan et André Weil, mathématiciens du XX^e siècle*, incite à parler de ces deux hommes, de leur vie dans le siècle, et de la place de leurs travaux dans la mathématique de ce siècle.

Henri Cartan (1904–2008) est surtout connu pour ses contributions à la géométrie analytique complexe (alias, fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes). André Weil (1906–1998) l'est pour son œuvre en arithmétique (et en histoire des mathématiques).

La section 4, à la fin de ce texte, donne des indications biographiques sur l'un et l'autre. Ce texte devrait le montrer, leurs compétences et leurs centres d'intérêt couvraient des champs beaucoup plus vastes que ce que les simples désignations, géométrie analytique, arithmétique, pourraient le laisser croire.

Pourquoi « Cartan & Weil » ? Une des actualités de « Cartan & Weil » est la publication en 2011, par la Société mathématique de France, dans sa bien nommée collection *Documents mathématiques*, de la correspondance de ces deux mathématiciens, de 1928 à 1991, présentée et commentée par l’auteur de cet article.



De quoi s’agit-il ? Début 2009, j’ai découvert avec incrédulité, stupéfaction, émerveillement, la masse (plus précisément, le volume) des papiers qu’avait conservés Henri Cartan : un appartement de sept pièces, habité de 1937 à 2008 par la famille d’Élie Cartan puis par celle de son fils Henri Cartan, soixante-dix ans de papiers — il semblait que rien n’avait été jeté. Je ferai quelque jour un inventaire, à la Prévert, ou alors à la Péric :

Je me souviens qu’Henri Cartan écrivait à la poste pour se plaindre lorsqu’une lettre mise dans une boîte à Die un jour n’avait pas été délivrée à Paris le lendemain

(et qu’il gardait une copie de sa lettre)... Mais il y avait assez à faire avec la correspondance mathématique (dont je remplis finalement une

quarantaine de cartons qui sont aujourd'hui aux archives de l'Académie des sciences) et même avec la seule correspondance d'Henri Cartan avec André Weil (il y a cinq cents pages de lettres dans le livre).

Le système de rangement qu'Henri Cartan (avec l'aide de son épouse Nicole) avait adopté, parfois thématique, parfois chronologique, fit que j'ai découvert ces lettres petit à petit, et dans le désordre. Au fil des matinées passées boulevard Jourdan, j'essayais d'anticiper la suite, de boucher les trous.



Il y avait, parmi ces lettres, dans ces lettres, ce à quoi on pouvait s'attendre. Les lettres de prison de Weil, en particulier, et ses commentaires sur le programme arithmétique qu'il mit là en chantier. La préparation du Congrès des mathématiciens de Cambridge (USA) en 1950, le premier congrès international depuis 1936, avec ses fibrés analytiques et son maccarthysme.

Ce qu'il aurait été naïf d'espérer y trouver n'y était pas. Aucune information inédite sur la fondation de Bourbaki. Non. Car en 1935, au moment où, de leur collaboration et de celle de quelques-uns de leurs amis, naissait Bourbaki, Henri Cartan et André Weil étaient tous deux en poste à l'Université de Strasbourg. Pourquoi donc se seraient-ils écrit ? Pas de détail croustillant sur Bourbaki (en tout cas dans les années 30).

Quelques surprises pourtant, mathématiques ou autres⁽¹⁾.

La surprise mathématique la plus authentique — et je me limiterai à celle-là pour ces exposés — fut l'importance, disons l'importance numérique, en nombre de pages, de la topologie dans cette correspondance.

★

⁽¹⁾Pas seulement mathématiques : profitons de ce texte pour faire un peu de publicité pour ces deux épistoliers et pour le livre...

Après réflexion, et je vais essayer de le montrer ici, la raison en est certainement l'importance du rôle joué par la topologie, comme langage et comme outil, dans la mathématique du XX^e siècle. Elle fut le lieu commun, notamment entre la géométrie analytique et l'arithmétique, peut-être simplement parce qu'elle était *la* discipline du XX^e siècle par excellence⁽²⁾.

Simultanément, la démarche, la volonté de rénovation de Bourbaki, fondées sur le credo de l'unité de la mathématique⁽³⁾, furent un moment important de l'histoire des mathématiques, et ce moment, dont les premiers chapitres du livre de Topologie générale furent une des premières manifestations publiques, restera certainement une des caractéristiques du XX^e siècle mathématique.

★

De l'histoire et de la mathématique. Cette histoire fait partie de l'histoire tout court et il serait vain d'essayer de l'en séparer. L'influence de la deuxième guerre mondiale est ici à la fois flagrante et immense. L'annonce de la démonstration de l'hypothèse de Riemann sur les corps finis est inséparable de la prison dans laquelle elle a été conçue. Cette guerre est d'ailleurs, tout simplement, la raison même de l'existence de cette correspondance : c'est parce qu'ils étaient éloignés (géographiquement) que les deux amis s'écrivirent, et cet éloignement était dû, d'abord, en 1939, au choix par André Weil de l'insoumission, puis, en 1940, à la promulgation par Vichy de ses décrets antisémites.

Plus subtil est l'effet de la première guerre mondiale. En 1918, Élie Cartan emmena son fils de quatorze ans sur les champs de bataille à la recherche de traces de son beau-frère mort, Antoine Bianconi ; l'émotion, intacte, presque quatre vingts ans plus tard, d'Henri

⁽²⁾Il n'est bien entendu pas question de faire ici une histoire de la topologie en général, mais plutôt d'évoquer les promenades des deux mathématiciens dans cette discipline.

⁽³⁾Le texte de la conférence d'Henri Cartan à Cambridge dont il sera question plus bas se termine par la phrase : « Ainsi s'affirmera, une fois de plus, l'unité de la mathématique. »

Cartan, évoquant cette recherche devant le monument aux morts de l'École normale supérieure, est un moment fort du film d'Isabelle Broué. Des pages nombreuses ont été consacrées à cette guerre et à ses effets sur les mathématiques et les mathématiciens. Concentrons-nous sur la topologie et rappelons que le déclenchement de la guerre en 1914 empêcha le tout premier manuel de topologie générale, le livre *Grundzüge der Mengenlehre* de Felix Hausdorff de parvenir dans les bibliothèques françaises, puis que le boycott des relations scientifiques avec les Allemands rendit les communications à peu près impossibles pendant des années. André Weil fut d'ailleurs un des premiers mathématiciens français à se rendre en Allemagne, en 1926.

★

Dans ce texte, je vais essayer de montrer, parfois de suggérer, tout ceci. Les commentaires contextuels, mathématiques ou historiques, ne manqueront pas. Pour des raisons pratiques, l'histoire est partagée en deux côtés : Cartan, Weil, ou géométrie analytique, arithmétique — mais aucune cloison étanche ne les sépare : le côté de Méséglie (dit côté de chez Swann) comme le côté de Guermantes sont deux buts de promenade dans le roman de Marcel Proust qui porte le titre *Du côté de chez Swann*. Pour donner un exemple : la topologie algébrique, qui fut un des sujets de prédilection d'Henri Cartan, apparaît ici plutôt du côté de chez Weil.

De même, la démarche employée n'a rien de chronologique.

Toutes les références bibliographiques se trouvent à la fin du texte (pages 58 et suivantes).

1. À la recherche de la topologie (un inventaire)

Rappelons que, sous le mot « topologie » se cachent deux sous-disciplines

- la topologie générale (ce qui s'appelait, à la suite des travaux de Cantor, la « théorie des ensembles » (de points), ou des « espaces abstraits », c'est la *Mengenlehre* de Felix Hausdorff),
- la topologie algébrique et différentielle (à l'époque *Analysis situs*, comme on l'appelait encore, en particulier au temps de Poincaré, ou « topologie combinatoire »).

Dressons une liste des items de ces deux sous-disciplines qui apparaissent dans les travaux de nos deux mathématiciens.

La topologie générale. Il faut commencer par nommer Bourbaki. Rappelons que la fondation du groupe de mathématiciens « Bourbaki » en 1935, notamment par Henri Cartan et André Weil, eut pour origine le désir d'écrire un « Traité d'analyse », que de nombreux sujets furent discutés à partir de l'année universitaire 1934–35⁽⁴⁾, en particulier à propos de la théorie de l'intégration, qui fut le sujet de la toute première publication de Bourbaki (une note aux *Comptes rendus* de 1935), mais que c'est bien la topologie générale en tant que telle qui fit l'objet des tout premiers chapitres publiés de ce qui n'était plus un traité d'analyse mais des « Éléments de mathématique », en 1940.

Les filtres et les structures uniformes. Au cours de cette période (1935–1940), nos deux auteurs ont aussi publié, sous leurs noms, des articles de topologie générale, tous liés à l'activité de Bourbaki.

Les filtres et ultrafiltres, inventés par Henri Cartan (voir ci-dessous page 9), ont fait l'objet de deux notes aux comptes rendus. Les espaces à structure uniforme et la topologie générale ont fait aussi l'objet de notes aux Comptes rendus d'Henri Cartan et sont le sujet (et le titre) d'un petit livre d'André Weil. Ces résultats emplissent les deux premiers chapitres (le premier fascicule) du livre de topologie générale de Bourbaki. Notons qu'après la guerre, ses publications sur les structures uniformes furent pendant plusieurs années le travail le plus cité d'André Weil⁽⁵⁾.

⁽⁴⁾Avec (par ordre alphabétique) Jean Delsarte, René de Possel, Jean Dieudonné, Claude Chevalley, Charles Ehresmann. Cette histoire a été beaucoup contée, répétée, sa préhistoire aussi, d'ailleurs...

⁽⁵⁾Une affirmation aussi vague demande une explication. Précisément : dans les recensions publiées par le journal d'analyses américain *Mathematical Reviews* entre 1940 et 1950.

De la topologie « combinatoire » à la topologie algébrique

Cette liste est organisée comme une suite de repères chronologiques, elle renvoie aux pages où les sujets sont évoqués.

- septembre 1935 Le congrès de Moscou (voir page 43)
- octobre 1935 Le congrès de Genève (voir page 43)
- 1936 Les exposés de Weil au séminaire Julia (voir page 43)
- années 1940 Les recensions de Weil pour *Mathematical Reviews* (voir page 14)
 - 1940–45 Le cours de Leray en captivité (voir page 13)
 - 1947 Le colloque de topologie algébrique de Paris (voir page 13)
 - 1947 La démonstration de Weil du théorème de de Rham (voir page 50)
 - 1948–64 Le séminaire Cartan, dont les sujets furent très souvent des sujets de topologie algébrique (voir page 14)
 - 1950 Le congrès de Cambridge (voir page 21)

Dans la correspondance. Il est question de topologie à peu près à toutes les époques dans la correspondance entre Henri Cartan et André Weil. On trouvera dans ce texte quelques extraits de lettres, de façon non chronologique, à propos du congrès international de Cambridge en 1950 (au § 2.3), à propos du programme de Weil pour démontrer l'hypothèse de Riemann pour les corps finis en 1940 (au § 3.1) et à propos de sa démonstration du théorème de de Rham (au § 3.3).

2. Le côté de Cartan

Une des motivations pour clarifier les fondements de la topologie générale est à rechercher dans la mise au point de rédactions, pour Bourbaki, de la théorie de l'intégration. C'est bien entendu dans la nature des choses (penser à la place des noms de Borel (Émile, celui des boréliens) et Lebesgue (Henri, celui de l'intégrale) dans la définition des espaces compacts), et l'importance de l'intégration dans la réflexion de nos deux auteurs n'échappera pas aux lecteurs de la correspondance. Mais c'est de la topologie elle-même qu'il sera question ici.

2.1. La topologie générale et les filtres (boum !)

Je me souviens des filtres.

Les filtres sont démodés. On n’enseigne plus les filtres. La limpidité de l’énoncé

Théorème. *Un espace est compact si et seulement si tous ses ultra-filtres sont convergents.*

ne fait plus partie des épiphanies (disons, des expériences illuminantes), au sens de Joyce (James, celui d’*Ulysse*), que vivent les étudiants en mathématique(s ?). Mais il serait dommage de ne pas saisir l’occasion de parler des filtres.

Histoire des filtres, une promenade. C’était au cours d’un congrès Bourbaki qui se tenait à Chançay, en Touraine et en 1937. Ce congrès est celui qui fixa, par exemple, la définition d’une topologie — celle que nous utilisons aujourd’hui et dans laquelle une intersection finie d’ouverts est un ouvert, ce qui n’était pas allé de soi.

Après une matinée de discussion et de travail, raconte Henri Cartan dans le film d’Isabelle Broué, Bourbaki était allé se promener. Et lui, Henri Cartan, était resté travailler. La discussion du matin avait porté sur l’expulsion du dénombrable, sans aboutir.

Henri Cartan eut une idée de solution. Il exposa cette idée à ses amis lorsque ceux-ci rentrèrent de leur promenade. La chose était inventée mais pas son nom.

La discussion fut ponctuée de cris « boum ! » palliant l’absence du nom. Boum n’était pas très adapté à la publication et se transforma en filtre.

La carrière du mot boum chez les amis de Nicolas Bourbaki n’était pas terminée⁽⁶⁾, comme nous le verrons plus bas (page 50), mais restons pour le moment dans les filtres.

⁽⁶⁾La carrière du mot boum tout court non plus, puisque (étrange coïncidence !) juste après Chançay, en 1938, Charles Trénet créa sa chanson *Boum* (sans même citer Bourbaki !!) et, l’année suivante (1939–40), Hergé s’en saisit à son tour dans la toute première version (publiée en feuilleton) de *Tintin au pays de l’Or noir*.

Histoire des filtres, qu'est-ce qu'un filtre ? Un filtre, c'est ce qui permet de faire des démonstrations de topologie aussi limpides que celles que l'on fait avec des suites, sans restreindre la généralité en utilisant la dénombrabilité. Je copie la très bourbachique définition dans le premier chapitre de Bourbaki :

Définition. On appelle filtre sur un ensemble E un ensemble \mathcal{F} de parties de E qui possède les propriétés suivantes :

- (F_I). Tout ensemble contenant un ensemble de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} .
- (F_{II}). Toute intersection finie d'ensembles de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} .
- (F_{III}). La partie vide de E n'appartient pas à \mathcal{F} .

... qui se complète de la non moins bourbachique remarque que (F_{II}) contient le fait que l'intersection de zéro ensemble de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} (0 est fini, n'est-ce pas ?), c'est-à-dire que E lui-même appartient à \mathcal{F} (et en particulier que \mathcal{F} n'est pas vide). La tout aussi bourbachique remarque que (F_{II}) est équivalent au fait que l'intersection de deux ensembles de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} et que E appartient à \mathcal{F} figure dans le texte.

Par exemple, dans un espace topologique, l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages d'un point x est un filtre.

Par exemple aussi, le filtre associé à une suite infinie, qui est l'ensemble des parties F de \mathcal{E} dont le complémentaire ne contient qu'un nombre fini de points de la suite.

Les filtres sont ordonnés par l'inclusion et la relation « \mathcal{F}' est plus fin que \mathcal{F} si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ». Un filtre converge vers un point x s'il est plus fin que le filtre des voisinages de x .

Et puis, il y a les ultrafiltres, qui sont les filtres plus fins que tous ceux qui leur sont comparables.



Henri Cartan

On comprend bien alors que le théorème des ultrafiltres convergents ci-dessus est une version sans dénombrabilité du théorème de Bolzano-Weierstrass. Son application, par exemple, au théorème de Tychonoff, est immédiate.

Théorème (Tychonoff). *Un produit d'espaces topologiques compacts est compact.*

Et ceci, quelle que soit la cardinalité de l'ensemble de compacts dont on fait le produit : tout simplement parce que la projection d'un ultrafiltre du produit sur chacun des facteurs est un ultrafiltre du facteur. \square

Ce qui prouve que la notion était bien adaptée. Et qui prouve en même temps qu'il ne suffit pas qu'une notion soit la mieux adaptée pour qu'elle soit retenue, à long terme.

Rapport avec les structures uniformes. Une structure uniforme est un filtre \mathcal{U} d'un espace $E \times E$, dont tous les éléments contiennent la diagonale, sont symétriques, au sens où

$$(x, y) \in U \implies (y, x) \in U$$

et qui est transitif au sens où

$$\text{si } U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U} \text{ tel que } V \circ V \subset U$$

c'est-à-dire

$$(x, y) \in V \text{ et } (y, z) \in V \implies (x, z) \in U.$$

Les structures uniformes, entourages de la diagonale de $E \times E$ sont bien adaptées à la description des espaces complets (la définition d'une suite de Cauchy fait intervenir un couple d'éléments). Mais n'insistons pas. Commentant son fascicule sur les structures uniformes en 1979, André Weil écrit

Avec le recul que donnent les quarante dernières années, on sourira sans doute du zèle que j'apportais alors à l'expulsion du dénombrable [...].

Avec ce paragraphe sur la topologie générale se clôt pour ce texte l'évocation de l'influence directe de Bourbaki sur le travail mathématique de ses amis. Notons que, dans la correspondance entre Henri Cartan et André Weil, filtres et structures uniformes apparaissent

en 1940 — comme je l’ai dit, ils ne s’écrivaient pas à l’époque où ils inventèrent ces notions — à propos de rédactions Bourbaki et du programme du cours de calcul différentiel que Cartan donnait à Clermont-Ferrand pendant que Weil attendait son procès dans la prison de Bonne Nouvelle⁽⁷⁾ et que leurs amis de Bourbaki faisaient la guerre.

2.2. La topologie algébrique

Faisceaux, suites spectrales, etc. Car il y eut la guerre. Certains effets de cette guerre apparaîtront dans la partie consacrée au côté de chez Weil (§ 3), d’autres dans l’esquisse biographique au § 4.

De ce côté-ci, un de ses effets fut la capture de Jean Leray en juin 1940. Il passa ensuite cinq ans dans un camp de prisonniers de guerre (un Oflag, car il était officier). Pendant ces cinq années, il participa à l’organisation d’une université en captivité, dont il fut recteur, et qui délivra d’authentiques diplômes universitaires français.

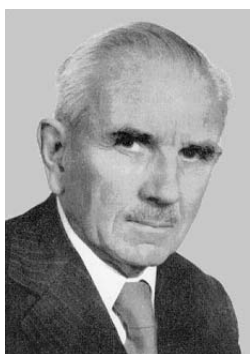
Ajoutons que son œuvre non publiée d’avant la guerre montre un intérêt certain pour la topologie algébrique, allant au-delà du célèbre théorème du point fixe de Leray-Schauder⁽⁸⁾. De théorèmes de points fixes, il sera à nouveau question ci-dessous (page 37).

Le reste de l’histoire a été maintes fois dit (et répété). Jean Leray était un spécialiste de mécanique des fluides ; il craignit que cette compétence ne l’oblige à contribuer à l’effort de guerre allemand et concentra son activité scientifique sur la topologie algébrique, une discipline de mathématiques pures, sans application militaire (pensait-on). Comme nous le verrons plus en détail du côté de chez Weil (et plus précisément page 37), Leray n’était pas vraiment un débutant en cette matière.

⁽⁷⁾L’université de Strasbourg, et Cartan avec elle, était « repliée » à Clermont-Ferrand depuis septembre 1939. Cartan utilisait en effet les structures uniformes dans son cours, comme nous l’apprend une de ses lettres. Quant à la prison de Bonne Nouvelle, il en sera encore question, par exemple page 27... Voir aussi l’annexe biographique.

⁽⁸⁾Un autre des effets de la guerre sur les mathématiques fut l’assassinat par les nazis du mathématicien polonais (et juif) Juliusz Schauder (1899–1943).

Mais revenons à la guerre. De cet Oflag sortit un cours de topologie algébrique, qui contenait les idées et les débuts de la théorie des faisceaux et des suites spectrales. Sans nous étendre sur le choix du mot faisceau, malgré son peu de rapport avec les classiques faisceaux de cercles et de coniques, malgré aussi les connotations politiques qu'il pouvait avoir à l'époque, signalons une acception un peu oubliée du mot : dans le livre de Camille Jordan sur les substitutions, en 1870, « faisceau » était une alternative à « groupe ».



Jean Leray
(1906–1998)

L'important est que de cette affaire sont sortis les faisceaux. Comme l'explique Jean-Pierre Demailly dans ses exposés, les faisceaux sont utiles en géométrie analytique et en géométrie algébrique. Les fonctions analytiques forment un faisceau. Avec beaucoup de propriétés passionnantes et utiles.

Certes. Mais Cartan là-dedans ? Eh bien, il se trouve, d'une part que les articles de Leray étaient plutôt obscurs (c'est un euphémisme) et de l'autre que Leray n'est pas parti à la recherche d'applications de ses techniques.

Mais Cartan ? Eh bien, il voulait comprendre, et il était bien entouré : même si, de 1945 à 1947, il était retourné à Strasbourg, il enseignait à l'École normale supérieure depuis 1940, ce qui veut dire qu'autour de lui et avec lui se formaient beaucoup de jeunes et brillants mathématiciens. Jean-Louis Koszul et Jean-Pierre Serre, notamment.

Le premier à comprendre ce que Leray faisait fut Henri Cartan. Lui et ses élèves s'emparèrent des travaux de Leray, les avalèrent, les digèrent, les ruminèrent, Koszul mit, dès 1947, les suites spectrales sous leur forme actuelle. Henri Cartan lui-même fit le point (dans un article publié en 1949) sur ces travaux, au moment-clef où se tint à Paris, en 1947, un colloque consacré à la topologie algébrique.

Quant aux faisceaux, leur importance en géométrie analytique et en géométrie algébrique n'est plus à démontrer (voir les exposés de Jean-Pierre Demailly, et noter, du côté algébrique, que l'article « Faisceaux algébriques cohérents » de Jean-Pierre Serre reste un des articles de mathématiques les plus cités aujourd'hui, près de soixante ans après sa publication).

Pendant la période 1945–47, André Weil était, lui, professeur à São Paulo, au Brésil. La correspondance entre les deux amis fut abondante et suivie. Elle porta (outre les questions de postes, car Weil essayait de rentrer en France (voir l'annexe biographique) et les âpres disputes sur l'emplacement des modules dans l'Algèbre de Bourbaki) sur ces questions. En France, Cartan lisait Leray, discutait avec lui, essayait de comprendre ses idées. Du Brésil, Weil l'y poussait.

Couvertures, carapaces, etc. De retour de Strasbourg à Paris en 1947, Henri Cartan organisa bientôt, à l'École normale supérieure, le « séminaire Cartan » et celui-ci porta, très souvent, sur la topologie (voir le programme ci-dessous). Henri Cartan continuait à semer ses idées dans les générations montantes. Au loin, son ami André Weil ne lui épargnait ni les commentaires, ni les références bibliographiques. La culture d'André Weil en topologie algébrique, sa connaissance des publications récentes, frappent les lecteurs de la correspondance. Dès son arrivée aux États-Unis en 1941, il s'était donné un moyen sûr d'être informé rapidement en écrivant des recensions pour le journal d'analyses *Mathematical Reviews*. Et, en déclarant ses compétences, il avait choisi la topologie. Il recevait ainsi très rapidement les nouvelles publications. La correspondance porta beaucoup sur les carapaces, une alternative, due à Cartan, aux couvertures avec lesquelles Leray définissait la structure d'anneau sur la cohomologie. Il n'en sera pas dit davantage ici (mais la cohomologie et sa structure multiplicative seront à nouveau évoquées de façon un peu plus précise page 48).

Le séminaire Cartan. Le séminaire Cartan se tint de 1948 à 1964. La plupart des exposés ont été rédigés, tapés, et diffusés. On les trouve aujourd'hui dans les bibliothèques de mathématiques⁽⁹⁾. Dès le début,

⁽⁹⁾et aussi, accessibles à tous, sur <http://www.numdam.org/actas/SHC/>

l'accent fut mis sur la topologie algébrique. Comme l'écrivit Serre à propos du séminaire Cartan de 1948–49 :

On y apprenait ce qu'est une suite exacte, et quelles belles conséquences on peut tirer de l'identité $d^2 = 0$; il y avait aussi des produits tensoriels, [...] et l'homologie singulière, [...]. Après ces préliminaires, Henri Cartan est passé à une première version de la théorie des faisceaux, que Leray venait juste de créer (et d'appliquer avec le succès que l'on sait) ; le couronnement en était la dualité de Poincaré, sans hypothèses de triangulation, mais à grands coups de « carapaces ». À vrai dire, cela nous passait un peu par-dessus la tête.

Des belles conséquences de l'identité $d \circ d = 0$, il sera question au § 3.3.

Pour montrer l'importance de la topologie dans ce séminaire et dans les centres d'intérêt d'Henri Cartan au cours des années, rappelons la liste chronologique des sujets abordés (ceux qui sont principalement topologiques sont précédés d'une étoile) :

- ★ 1948–49 Topologie algébrique
- ★ 1949–50 Espaces fibrés et homotopie
- ★ 1950–51 Cohomologie des groupes, suites spectrales, faisceaux
- 1951–52 Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes
- 1953–54 Fonctions automorphes et espaces analytiques
- ★ 1954–55 Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie
- 1955–56 Géométrie algébrique
- ★ 1956–57 Quelques questions de topologie
- 1957–58 Fonctions automorphes
- ★ 1958–59 Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires
- ★ 1959–60 Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott
- 1960–61 Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique
- ★ 1961–62 Topologie différentielle
- ★ 1962–63 Topologie différentielle
- 1963–64 Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique

2.3. La géométrie analytique et les fibrés

Le congrès de Cambridge (1950). Le 18 juillet 1936, le Congrès international des mathématiciens, réuni à Oslo, avait accepté l'invitation faite par l'*American mathematical Society* à venir aux États-Unis en 1940. « Cette invitation est acceptée par acclamations », rapporta H. Fehr, dans *L'Enseignement mathématique* en 1936. Ce congrès ne put se tenir qu'en 1950, quatorze ans et une guerre mondiale⁽¹⁰⁾ plus tard. Il se tint comme prévu aux États-Unis, et précisément à Cambridge, près de Boston, dans les locaux de l'université de Harvard. Il commença le 30 août. Henri Cartan y donna un exposé intitulé *Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*.

Sur la genèse de cet exposé, la correspondance contient des informations très précises. Le 1^{er} août, de Chicago, André Weil écrivit à Henri Cartan :

Mon cher Cartan

Voici quelques remarques dont j'espère que tu pourras tenir compte dans la préparation de ton laïus du congrès. En premier lieu, il est grand temps de réagir contre la tendance (classique en théorie des fonc. de plus.var.) de considérer tous les « domaines » comme étalés sur un espace (généralement projectif) de n var.comp. [...]

Avant de venir au sujet proprement dit de cette lettre et au contenu de l'exposé d'Henri Cartan, une petite histoire de la lettre elle-même s'impose.

Histoire de la lettre du 1^{er} août, premier éclairage, matériel. Elle se compose de deux pages dactylographiées très serrées, comme les espaces manquantes dans la citation ci-dessus en donnent une petite idée : la frappe en 1950 se ressentait encore de la pénurie de papier pendant et après la guerre — et du prix de la correspondance par avion.

⁽¹⁰⁾Il est impossible de ne pas remarquer que la date de clôture du congrès d'Oslo, le 18 juillet 1936, fut aussi celle du coup d'état militaire qui marqua le début de la guerre d'Espagne. Un prélude. Un des effets les plus microscopiques de cette guerre fut l'impossibilité pour Bourbaki de tenir son congrès de l'été 1936 à l'Escorial, comme l'avait souhaité André Weil.

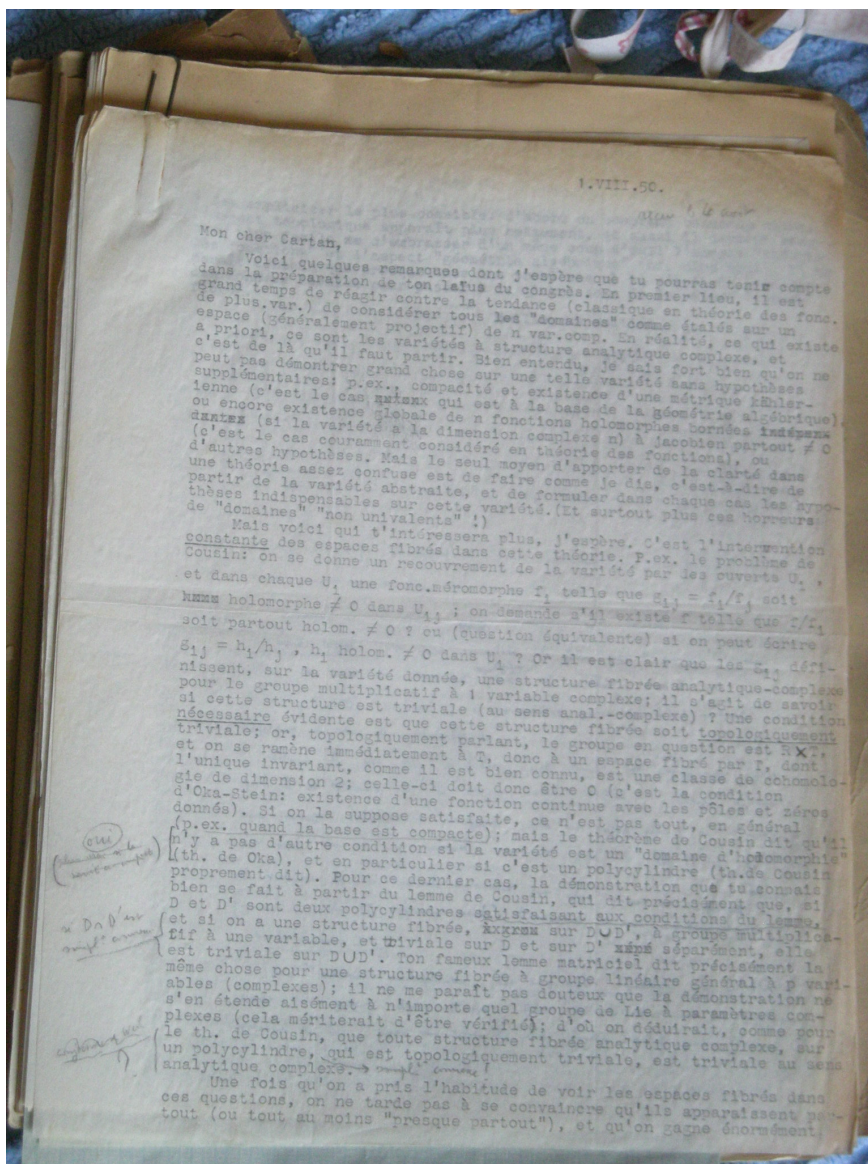


FIGURE 1. La lettre dans le dossier « Vieilles archives fonctions analytiques »

André Weil utilisait une machine à écrire depuis 1927. Il conservait souvent une copie carbone. Ce fut le cas pour cette lettre, sauf que, beaucoup moins systématiquement conservateur qu'Henri Cartan, il en avait égaré la deuxième page. Deux mois après la mort d'André Weil, en octobre 1998, préparant un exposé pour un petit colloque à sa mémoire qui devait avoir lieu en janvier 1999 à Princeton, Armand Borel⁽¹¹⁾ écrivit à Henri Cartan pour lui demander s'il avait conservé la lettre entière. Cartan, qui conservait, classait et rangeait, avait un dossier « Congrès de Cambridge », dans lequel il alla donc chercher. Il répondit, le 1^{er} novembre :

c'est d'une lettre datée du 1^{er} août 1950 que tu me parles [écrivit-il à Borel]. Elle se placerait donc juste avant le Congrès de Harvard. J'ai de cette époque une collection de lettres relatives à l'organisation du Congrès (il y avait la question du visa d'Hadamard, et j'étais président de la Soc. Math. de France). J'ai retrouvé (avec l'aide de Nicole et de ma fille Suzanne⁽¹²⁾) une lettre d'une page de Weil datée du 31 juillet 1950 (juste la veille du 1^{er} août), qui parle à la fois de problèmes d'organisation et de questions de math. Cela rend bien improbable qu'il m'ait écrit longuement le lendemain.

Et pourtant... Weil avait bien récrit le lendemain, et la lettre était bien chez Cartan... mais rangée dans un autre dossier, intitulé « vieilles archives fonctions analytiques », où Cartan finit par la retrouver, avec l'aide de Serre (et l'y remit). Elle est citée, en effet, dans l'exposé de Borel, tel qu'il est paru dans les *Notices* de l'AMS et dans la *Gazette des mathématiciens*.

Histoire de la lettre du 1^{er} août, deuxième éclairage, contexte. Ce qui nous incite à nous demander pourquoi il y avait un dossier « Congrès de Cambridge » chez Cartan. Il a lui-même donné la réponse dans la citation ci-dessus, en deux propositions, que nous examinons en deux temps :

⁽¹¹⁾Il est question ici du mathématicien suisse Armand Borel (1923–2003), qui était à Princeton (et n'a rien à voir avec les boréliens).

⁽¹²⁾Le rôle joué par Nicole Cartan, l'épouse d'Henri Cartan, dans le rangement de ses papiers, n'est pas à négliger. Rappelons aux lectrices n'ayant pas effectué la soustraction qu'en 1998, Henri Cartan était âgé de quatre vingt quatorze ans.



Jacques Hadamard
(1865–1963)

– « il y avait la question du visa d'Hadamard ».

Arrêtons-nous sur Jacques Hadamard, qui a toute sa place dans ce texte (voir aussi pages 24 et 43).

Jacques Hadamard, qui était âgé de quatre vingt-cinq ans, devait être l'un des présidents honoraires du Congrès. Il avait passé une bonne partie de la période de l'Occupation aux États-Unis, fuyant le nazisme et ses complices antisémites de Vichy, sans penser à assassiner le président des États-Unis.

Pourtant, par la vertu de l'hystérie maccarthyste, ce charmant vieux monsieur était désormais considéré comme un dangereux communiste (brièvement : il était un doux et inoffensif « compagnon de route » du Parti communiste), et on refusait de lui donner un visa d'entrée pour assister au Congrès.

– « et j'étais président de la Soc. Math. de France ». En tant que tel, Cartan avait organisé un chantage-au-boycott, une grande partie des participants français au Congrès lui avaient confié leurs billets de bateau, la menace était : donnez le visa, sinon nous ne venons pas. André Weil, professeur à Chicago, était aux premières loges pour aider, sur place. Le dossier « Congrès de Cambridge » de Cartan contenait donc une abondante correspondance avec Weil à ce sujet.

Comme l'écrivait Cartan dans sa lettre à Borel, il y avait eu une lettre de Weil datée du 31 juillet et, comme il ne l'écrivait pas, il y avait eu, datée du même jour, aussi une lettre de lui, Cartan. Dans celle-ci, en vacances dans sa maison de Die, l'affaire du visa enfin réglée, il écrivit :

Mon cher Weil

Les détails rocambolesques que m'apporte ta lettre du 27 m'expliquent pourquoi le câble de Kline avait été envoyé de Philadelphie [... il discute quelques détails des péripéties ...]

Et maintenant, je songe à ma conférence sur les fonctions analytiques, dans la mesure où l'atmosphère des vacances et la chaleur sont compatibles avec un travail sérieux.

Meilleures amitiés.

La lettre que Weil avait envoyée ce même jour portait encore sur l'affaire administrative, avec un paragraphe consacré, pas vraiment aux mathématiques, mais, assez superficiellement, au contenu d'une note d'un de ses étudiants. Pourtant lui aussi pensait aux mathématiques⁽¹³⁾, ce qui motiva la lettre — finalement pas si improbable que ça — dont nous avons lu ci-dessus le début abrupt.

Mais revenons au contenu des lettres, au congrès, et à l'exposé de Cartan. Dans celui-ci, il fit le point sur ce qui était connu, globalement, sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. La théorie des idéaux de fonctions, leur cohérence (résultats d'Oka⁽¹⁴⁾ et de Cartan lui-même) font l'objet des exposés de Jean-Pierre Demailly. Je me concentrerai ici sur la partie de l'exposé qui est liée au contenu de la lettre de Weil et qui, justement, apparaît dans l'exposé sous le titre *Relations avec la topologie*.

Il y est question d'un problème classique sur les fonctions analytiques, dit « problème de Cousin », qui est interprété ainsi. Une variété analytique complexe E , de dimension $n + 1$, est munie d'une opération du groupe multiplicatif \mathbf{C}^* des nombres complexes non nuls, dont l'espace d'orbites est une variété analytique complexe B de dimension n :

$$p : E \longrightarrow E/\mathbf{C}^* = B$$

et le problème de Cousin demande (dans ce langage) si l'on peut trouver une application analytique $s : B \rightarrow E$ telle que $p(s(b)) = b$ pour tout $b \in B$, ce que l'on appelle une section (ici analytique) de la

⁽¹³⁾Le plus intéressant, dans le travail d'édition de lettres de mathématiciens, c'est de voir avec quelle constance, quelles que soient les circonstances, le désir de discuter de mathématiques l'emporte sur tout le reste. C'est le cas, pour celles rencontrées par l'auteur de ce texte, pour des mathématiciens aux personnalités aussi diverses que Sophie Kowalevski, Pierre Fatou ou, bien sûr, Henri Cartan et André Weil.

⁽¹⁴⁾Il s'agit du mathématicien japonais Kiyoshi Oka (1901–1978).

projection p . Comme Cartan le signale dans son exposé, c'est André Weil qui a attiré son attention sur cette question. Reprenons en effet la lettre du 1^{er} août :

Mais voici qui t'intéressera plus, j'espère. C'est l'intervention *constante* des espaces fibrés dans cette théorie. P.ex. le problème de Cousin : on se donne un recouvrement de la variété par des ouverts U_i , et dans chaque U_i une fonc.méromorphe f_i telle que $g_{ij} = f_i/f_j$ soit holomorphe $\neq 0$ dans U_{ij} ; on demande s'il existe f telle que f/f_i soit partout holom. $\neq 0$? ou (question équivalente) si on peut écrire $g_{ij} = h_i/h_j$, h_i holom. $\neq 0$ dans U_i ? Or il est clair que les g_{ij} définissent, sur la variété donnée, une structure fibrée analytique-complexe pour le groupe multiplicatif à 1 variable complexe ; il s'agit de savoir si cette structure est triviale (au sens anal.-complexe)? Une condition *nécessaire* évidente est que cette structure fibrée soit *topologiquement* triviale [...]

Ce dont parle André Weil dans sa lettre, c'est de fibrés. Oublions pour un instant le monde analytique et concentrons-nous sur la notion topologique.

Espaces fibrés. La notion d'espace fibré, de fibration, s'est développée et affinée, de façon assez cosmopolite, au cours des années 1930. En 1939, la notion de fibration localement triviale était acquise, fixée⁽¹⁵⁾.

Un fibré est, depuis lors, la donnée de trois espaces topologiques E , F et B et d'une application continue $p : E \rightarrow B$ tels que tout point b de B possède un voisinage U avec un homéomorphisme φ qui rend le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

commutatif. C'est ce qu'on appelle une trivialisat[i]on locale. On nomme E l'espace total et B la base de la fibration. Quant à F , il est

⁽¹⁵⁾Les tout premiers fibrés, ceux de Seifert en 1933, n'étaient pas localement triviaux.

appelé « la » fibre : on voit qu'il est homéomorphe à $p^{-1}(b)$ (« une » fibre), pour tout b .

Exemples. Rien ne vaut un tableau noir pour expliquer des mathématiques. Les deux figures au tableau (figure 2) montrent deux exemples.

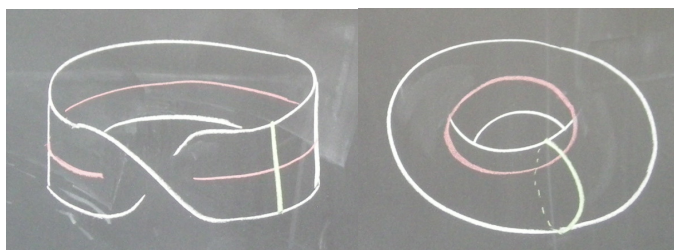


FIGURE 2. Fibrés, au tableau

À gauche, E est une bande de Möbius et B son cercle central, p la projection évidente, la fibre F est un intervalle, une des fibres est indiquée sur le dessin. À droite, l'espace E est le tore et B est le cercle qui fait le tour du trou, les fibres (dont l'une est également indiquée sur le dessin) sont des cercles.

Lorsqu'il existe un homéomorphisme (global) de E sur $B \times F$, on dit que le fibré est trivial (ou trivialisable). La fibration du tore sur le cercle à droite est trivialisable. Par contre, comme la bande de Möbius n'est pas homéomorphe au produit d'un cercle et d'un intervalle, la fibration de gauche n'est pas trivialisable.

Je ne résiste pas au plaisir de présenter une image high-tech (due à mon collègue Benoît Kloeckner, avec le logiciel POV-RAY) d'une autre fibration, sur la figure 3. C'est la « fibration de Hopf » : à un vecteur unitaire de \mathbf{C}^2 , on associe la droite vectorielle complexe qu'il engendre ; c'est une application

$$\begin{aligned} \text{sphère unité } S^3 \text{ de } \mathbf{C}^2 &\longrightarrow \text{droite projective } \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \\ &\text{alias } \mathbf{C} \cup \{\infty\} \text{ ou } S^2. \end{aligned}$$

Ce que montre cette image, c'est l'espace \mathbf{R}^3 (alias, la sphère S^3 moins un point) avec quelques-uns des cercles dont chacun est envoyé sur un point de S^2 . Nous y reviendrons.

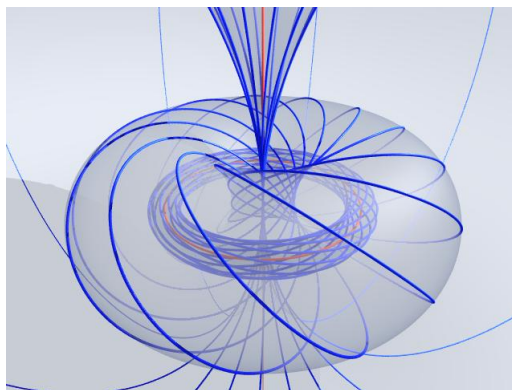


FIGURE 3. La fibration de Hopf

Henri Cartan comme André Weil, tous deux s'intéressaient aux espaces fibrés depuis longtemps. Ils étaient en contact avec un des fondateurs de cette théorie, Charles Ehresmann, qui participait comme eux aux réunions Bourbaki. Ils avaient par exemple suivi les premiers travaux de Jacques Feldbau à Strasbourg⁽¹⁶⁾. Feldbau avait montré un des résultats de base de la théorie, à savoir que si l'espace de base B est contractile (c'est-à-dire si on peut le « contracter », le déformer continûment sur un point), alors la fibration doit être triviale.

Mais revenons à Cambridge, à 1950, et à l'application d'orbites, la fibration

$$p : E \longrightarrow E/\mathbf{C}^*$$

de fibre \mathbf{C}^* . Ce que faisait remarquer Weil, c'est que ce fibré pouvait être trivial comme fibré topologique (en d'autres termes, E pouvait être globalement homéomorphe à $B \times \mathbf{C}^*$), sans être trivial comme fibré analytique (c'est-à-dire, sans qu'il existe un isomorphisme analytique de E sur $B \times \mathbf{C}^*$). Dans son exposé, Cartan signala notamment que, pour certains types d'ouverts B (dits domaines d'holomorphic), le fibré est analytiquement trivial, un théorème qu'Oka avait démontré dès 1939.

⁽¹⁶⁾Encore un des effets de cette guerre, l'interdiction de publier faite à certains mathématiciens dont Jacques Feldbau, parce qu'il était juif, et la mort de ce dernier en déportation, pour la même raison.

3. Du côté de chez Weil

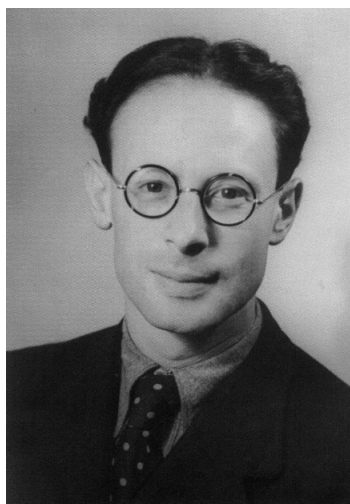
André Weil était un mathématicien universel. On dit souvent que Jacques Hadamard (mort presque centenaire en 1963) fut le dernier mathématicien à avoir compris, embrassé, l'ensemble des mathématiques de son temps.

André Weil, qui a souvent proclamé son admiration pour Hadamard et sa dette à son égard, fut peut-être l'un des derniers à avoir essayé.

Il est donc prudent de fixer des limites à notre étude.

Nous nous concentrons ici sur les thèmes liés à la démonstration de l'hypothèse de Riemann pour les corps finis (en entier, pour l'anneau des fonctions des courbes sur les corps finis).

Nous n'y insisterons pas, mais les résultats de Weil dont il va être question ici englobent toute une classe de résultats dont l'hypothèse de Riemann n'est que le représentant le plus célèbre.



André Weil

3.1. L'hypothèse de Riemann pour les corps finis. En arithmétique, une question intéressante mais souvent difficile est de compter les solutions d'une équation algébrique. Ici l'équation sera

$$f(X, Y) = 0 \quad f \in \mathbf{F}_q[X, Y]$$

donnée par un polynôme f à deux variables à coefficients dans un corps fini \mathbf{F}_q (q est une puissance d'un nombre premier). On cherche les solutions $(X, Y) \in \mathbf{F}_q \times \mathbf{F}_q$. Il se peut qu'il y ait davantage de solutions dans un corps plus gros, une extension de \mathbf{F}_q : penser (en raisonnant par analogie...) à l'équation $X^2 + Y^2 + 1 = 0$, qui a plus de solutions dans \mathbf{C}^2 que dans \mathbf{R}^2 . Il se trouve que l'on peut obtenir des renseignements sur le nombre de ces points dans les extensions de \mathbf{F}_q (qui sont les \mathbf{F}_{q^m}) grâce à l'étude d'une « fonction zêta ».

Comme l'explique Marc Hindry dans ses exposés, il s'agit de la fonction

$$\zeta_A(s) = \prod_{\mathfrak{M} \text{ idéal maximal}} \left(1 - \#(A/\mathfrak{M})^{-s}\right)^{-1}$$

associée à l'anneau quotient $A = \mathbf{F}_q[X, Y]/(f)$. On considère A comme l'anneau des fonctions sur la courbe d'équation $f(X, Y) = 0$. La formule a un sens pour tout anneau A ... dès que les quotients A/\mathfrak{M} sont finis. Pour $A = \mathbf{Z}$, les idéaux maximaux \mathfrak{M} sont les $p\mathbf{Z}$ pour p premier, et la formule est la forme dite « produit eulérien »,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

de la fonction ζ de Riemann

$$\zeta(s) = \zeta_{\mathbf{Z}}(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Mais revenons au cas où A est l'anneau $\mathbf{F}_q[X, Y]/(f)$ des fonctions sur la courbe $f(X, Y) = 0$. On démontre que

$$\zeta_A(s) = Z(C, q^{-s}) \text{ avec } Z(C, T) = \exp \left(\sum_m \#C(\mathbf{F}_{q^m}) \frac{T^m}{m} \right)$$

où $\#C(\mathbf{F}_{q^m})$ désigne justement le nombre de points de la courbe C sur le corps \mathbf{F}_{q^m} , extension de \mathbf{F}_q : ce sont les nombres qui nous intéressent. La fonction ζ_A contient donc des informations sur ces nombres de points. En utilisant un théorème plus difficile (une version adéquate du théorème de Riemann-Roch), on montre aussi que $Z(C, T)$ est une fraction rationnelle en T , plus précisément (modulo quelques subtilités (la courbe telle que nous l'avons décrite est affine

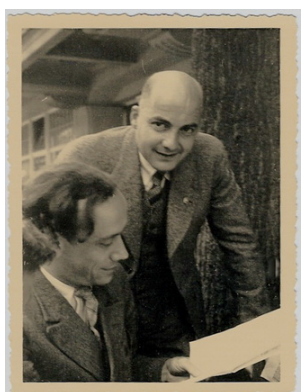
et pas projective, notamment), pour lesquelles nous renvoyons aux exposés de Marc Hindry) :

$$Z(C, T) = \frac{\prod(1 - \alpha_i T)}{(1 - T)(1 - qT)}.$$

Dans cette expression, le numérateur est un polynôme de degré $2g$. Ici, g désigne le genre de la courbe C . Arrêtons-nous un instant sur le genre, renvoyant à la figure 6 ci-dessous et surtout au bel article de Patrick Popescu-Pampu, dans cette même série.

De même que l'hypothèse de Riemann classique, la généralisation dont nous parlons ici postule que les zéros de la fonction ζ_A se trouvent sur la droite $\text{Ré}(s) = 1/2$. Ici les zéros de Z sont les $1/\alpha_i$; en termes de ceux de ζ , l'« hypothèse » (en bon français, la conjecture) dit ici que $|\alpha_i| = q^{\text{Ré}(s)} = q^{1/2}$. C'est un plaisir renouvelé de renvoyer au volume de cette série sur la fonction ζ , et en particulier à l'article de Pierre Colmez ; outre ce « produit-maison », la référence au livre d'arithmétique de Marc Hindry s'impose elle aussi.

Les algébristes allemands. Pour raconter l'histoire brièvement... Les fonctions ζ , les fonctions L , des séries de Dirichlet rendant compte de la structure de l'anneau A et donc de l'arithmétique de la courbe, ont été décrites et étudiées par Emil Artin et d'autres, en Allemagne, dès les années 1920.



Emil Artin (1898–1962) et Helmut Hasse (1898–1979)

En 1933, Helmut Hasse démontra l'hypothèse de Riemann dans le cas des courbes de genre 1. Une courbe de genre 1 a la qualité, étant une courbe elliptique, d'être un groupe. Ce qui fait qu'elle possède beaucoup d'endomorphismes, une propriété que Hasse avait utilisée.

Pour démontrer le théorème en genre quelconque, il fallait pallier l'absence d'endomorphismes. Max Deuring (1907–1984), avait eu l'idée d'utiliser les correspondances.

Une correspondance entre deux courbes V_1 et V_2 est simplement une courbe dans le produit $V_1 \times V_2$. Par exemple, si f est une application de V_1 dans V_2 , son graphe est une correspondance. Ainsi, les correspondances généralisent les applications. La figure 4 montre une correspondance (qui n'est pas un graphe!).

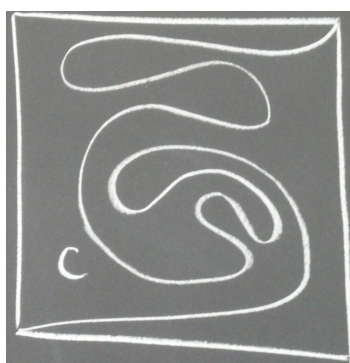


FIGURE 4. Correspondance

Bonne nouvelle! Mais revenons à André Weil. Dans la prison de Bonne Nouvelle, André Weil, qui après tout était là parce que son karma n'était pas d'être soldat mais de faire des mathématiques⁽¹⁷⁾, muni d'une extrême volonté de travailler, alimenté en livres et références mathématiques par sa famille et par ses amis, eut donc une idée, dont il était très content, pour démontrer ce théorème. Pas seulement ce théorème, d'ailleurs, mais les « principaux problèmes de la théorie des fonctions algébriques à corps de constantes fini », comme il l'écrivit dans une note que le père de son ami Henri, Élie Cartan présenta à l'Académie des sciences et qui parut le 22 avril 1940.

Différentes guerres se pressaient autour du berceau de ce théorème. La guerre entre l'Allemagne et la France, celle des deux personnalités de Hasse et Weil, celle du sérieux contre l'ironie, celle des nazis et de leurs amis français contre les juifs, celle des deux positions de ces deux

⁽¹⁷⁾On trouvera page 56, dans les repères biographiques, quelques informations sur le chemin qui mena ce mathématicien jusqu'à une prison de Rouen.

mathématiciens, l'un à son poste dans la Wehrmacht l'autre insoumis et prisonnier, mais aussi, et nous nous concentrerons sur celle-ci ici, une guerre entre l'algèbre pure et la géométrie algébrique (nous aurions pu aussi mentionner une « guerre des recensions », à propos de cette note).

L'idée, utiliser la théorie des correspondances, était due à Max Deuring, comme nous l'avons dit. Mais, comme le dit Weil au début de sa note :

[...] la théorie algébrique des correspondances, qui est due à Severi, n'y suffit point, et il faut étendre à ces fonctions la théorie transcendante de Hurwitz.

(transcendante, parce que formulée pour les surfaces de Riemann, c'est-à-dire sur \mathbf{C}). Ce que fit Weil. Il énonça un lemme, duquel il faisait tout découler. Ce lemme a une histoire qu'il serait dommage de ne pas raconter. C'était le point fondamental de la note, mais Weil ne réussit pas à le démontrer. Il envoya la note quand même :

en avril 1940, pouvait-on se croire assuré du lendemain ? Il me sembla que mes idées contenaient assez de substance pour ne pas mériter d'être en danger de se perdre,

écrivit-il plus tard. Arrêtons-nous une seconde pour évoquer la brutale réalité d'avril 1940 : André Weil attendait son procès pour insoumission⁽¹⁸⁾, qui eut lieu deux semaines plus tard, le 3 mai, et au cours duquel il fut condamné. Entre les cinq ans de prison et la mobilisation comme simple soldat dans une unité combattante il choisit la deuxième option... au moment-même où la guerre devint la plus meurtrière. Qui pouvait se croire assuré du lendemain ?

Donc, confiant dans son approche, il envoya la note, malgré le lemme dont il était parfaitement conscient qu'il ne savait pas le démontrer⁽¹⁹⁾. Mais revenons à nos moutons et à ce lemme. La figure 5 montre le paragraphe qui le contient. On admirera la concision.

L'énoncé du lemme se termine sur la positivité d'une trace. Sans même aller à la ligne, il suit que le nombre des points fixes de la

⁽¹⁸⁾N'ayant pas obéi à l'ordre de mobilisation, André Weil était un insoumis — mais pas un déserteur (il n'avait pas *quitté* l'armée).

⁽¹⁹⁾S'il ne le dit pas dans la note, il l'écrivit à ses amis.

Voici un lemme important : si $m_1 = g$, on a en général (c'est-à-dire à des conditions qu'il est inutile de préciser ici) $2m_2 = \text{Tr}(LL')$, Tr désignant la trace. Comme toute correspondance C est équivalente à une correspondance C_1 pour laquelle il en est ainsi (c'est-à-dire a même matrice L que C_1), on voit que $\text{Tr}(LL')$ est toujours un entier rationnel > 0 . Du lemme suit aussi que le nombre des points coïncidents de C est $m_1 + m_2 - \text{Tr}(L)$. En particulier, écrivant $K = k(x, y)$, notant $K' = k(x', y')$ un corps isomorphe à K , et notant $\bar{k}(x, y, x', y')$ la variété des couples de points sur \bar{K} , soit Σ la correspondance $(1, q)$ définie par $x' = x^q, y' = y^q$; la matrice L qu'elle définit n'est autre que la matrice I définie plus haut; les points coïncidents de Σ sont les points sur \bar{K} , rationnels par rapport à k , ils sont au nombre de $q + 1 - \text{Tr}(I)$. On en déduit que le polynôme caractéristique de $I, P(u) = |E - uI|$, n'est autre que le polynôme défini par $P(q^{-s}) = (1 - q^{-s})(1 - q^{1-s})\zeta_K(s)$, où ζ_K est la fonction ζ de K . De plus Σ' , réciproque de Σ , a pour matrice qI^{-1} : appliquant alors à la correspondance $C = a_0 + a_1\Sigma + a_2\Sigma^2 + \dots + a_{2g-1}\Sigma^{2g-1}$, où les a_i sont des entiers rationnels, l'inégalité $\text{Tr}(LL') > 0$, on démontre l'hypothèse de Riemann pour ζ_K .

FIGURE 5. Le lemme important et ses suites

correspondance est $m_1 + m_2 - \text{tr}(L)$. Plus bas, on voit encore un décompte de points fixes qui fait intervenir une trace, ils sont au nombre de $q + 1 - \text{tr}(I)$...

Je renvoie au texte de Marc Hindry dans ce volume pour des explications de l'arithmétique sous-jacente. Il n'en sera pas dit beaucoup plus ici sur l'histoire de la fin de la démonstration de tous ces résultats. En deux mots : pour la terminer, Weil dut écrire son livre *Foundations of algebraic geometry* qui parut en 1946, et, finalement, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent* (en 1948), « après huit années et plus de 500 pages⁽²⁰⁾ », sa note était complètement démontrée, ainsi que la puissance de son approche. Parmi toutes les guerres cachées derrière cette note, il reste là une victoire de la géométrie algébrique sur l'algèbre pure. Je vais expliquer ici les aspects les plus topologiques de l'idée de base — et les sources, en topologie, de ces idées, revenant très brièvement sur l'arithmétique page 41.

⁽²⁰⁾Écrit Serre.

3.2. Le lemme de Weil et le théorème de Lefschetz. On a vu que la fonction zêta fait intervenir, dans la série Z , des $\#C(\mathbf{F}_{q^m})$, nombres de points de la courbe sur les extensions \mathbf{F}_{q^m} du corps de base \mathbf{F}_q . L'idée est de lier ces points aux points fixes d'une correspondance (une correspondance est une notion un peu plus générale qu'une application, comme nous l'avons dit page 27), puis de compter ces points fixes à l'aide de la trace d'une matrice.

Dès 1897, Adolf Hurwitz avait étudié les correspondances (entre courbes sur \mathbf{C}) et montré que leurs points coïncidents s'expriment à l'aide de la trace d'une matrice. C'est le $m_1 + m_2 - \text{tr}(L)$ que l'on voit sur la figure 5. Il est question d'une « correspondance » C , c'est-à-dire d'une surface de Riemann contenue dans $V \times V$, où V est aussi une surface de Riemann. Les nombres entiers m_1 et m_2 sont les degrés des projections

$$C \subset V \times V \longrightarrow V$$

sur les deux facteurs. Les points coïncidents de C sont les points d'intersection de C avec la diagonale $\Delta \subset V \times V$. La formule contient la trace d'une matrice $2g \times 2g$, dont la suite devrait donner une idée.

Ce résultat avait été « actualisé » et généralisé dans le « théorème du point fixe » de Lefschetz. En voici l'énoncé — que l'on ne s'effraie pas et que l'on considère ceci comme un exemple de la beauté des formules.

Théorème (Le théorème du point fixe de Lefschetz)

Soit V une variété topologique compacte et connexe, et soit $f : V \rightarrow V$ une application continue. Alors le nombre algébrique de points fixes de f est

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr} [f_* : H_k(V) \rightarrow H_k(V)].$$

Il y aurait beaucoup à dire sur l'énoncé de ce théorème dont il faudrait, en particulier, définir tous les termes qu'il contient.

Pour commencer, retenons que, comme dans la note de Weil,

- il est question de points fixes (ici d'une application),
- le nombre de ces points fixes (ou leur nombre « algébrique », une version appropriée de ce nombre) s'exprime à l'aide de la trace d'une application linéaire (des traces d'applications linéaires).

Venons-en aux définitions. La variété topologique compacte V est simplement un espace topologique compact localement homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^n (d'un espace \mathbf{R}^n , où n est la dimension de V).



Solomon Lefschetz
(1884–1972)

L'homologie ne sera pas absolument nécessaire⁽²¹⁾ ici : nous ne considérerons que des surfaces topologiques ($n = 2$) orientables pour lesquels les groupes d'homologie (à coefficients dans \mathbf{R}) sont

- $H_0(V) = \mathbf{R}$
- $H_1(V) = \mathbf{R}^{2g}$ (c'est une définition du genre g de la surface)
- $H_2(V) = \mathbf{R}$

et les autres sont nuls.

Il restera à expliquer ce que sont les f_* . Ajoutons que le cadre est topologique (comme l'indiquent les mots « variétés topologiques » et « application continue ») et que le théorème, dû au mathématicien américain Solomon Lefschetz, date de 1926. Une démonstration de Hopf parut en 1928.

André Weil avait sans doute bu ce théorème à la source de Heinz Hopf, dont il avait suivi le cours à Berlin en 1927. Il l'avait déjà appliqué pour démontrer un théorème sur les groupes de Lie, qu'il

⁽²¹⁾Je répugne à introduire le formalisme des complexes de chaînes, pour ne pas vraiment l'utiliser. Mais il y aura un complexe et de la cohomologie, plus bas.

n'est pas indispensable d'énoncer ici mais qui est à ce cadre ce que le théorème de Sylow (tout p -sous-groupe est conjugué à un sous-groupe d'un p -Sylow) est au cadre des groupes finis.

Le paradigme du mathématicien qui fait faire un bond à sa sous-discipline parce qu'il a su utiliser des idées venues d'autres branches des mathématiques se présente ici de façon exemplaire. Ajoutons-lui la belle image, utilisée par André Weil lui-même, de la pierre de Rosette — la traduction géométrique permettant de déchiffrer l'algèbre...

Autour du théorème de Lefschetz. Je vais essayer d'expliquer ce dont il s'agit, dans un cas proche de celui considéré par Weil dans sa note — proche, au sens de « analogue », analogue, au sens où l'analogie avec ce cas topologique a pu être une de ses sources d'inspiration.

Points fixes, surfaces. Considérons le cas où V est une surface, compacte et orientable, c'est-à-dire un objet semblable à ceux représentés sur la figure 6, le nombre de trous (d'anses, plutôt) est le genre g de la surface. Revenons au tableau noir. La figure 6 représente ainsi des surfaces de genre 1, 2 et 4.

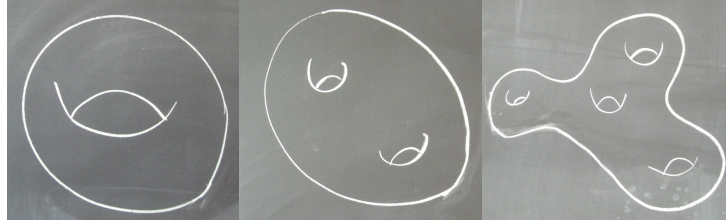


FIGURE 6. Surfaces, au tableau

Exemples.

(1) La surface est une sphère ($g = 0$) et f est l'application de $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ dans lui-même obtenue en prolongeant

$$z \longmapsto z^d \quad \text{par} \quad \infty \longmapsto \infty$$

(ici d est un entier ≥ 2)⁽²²⁾. Les points fixes de cette application sont les $d+1$ solutions de l'équation $z^d = z$, c'est-à-dire 0, ∞ et les racines

⁽²²⁾Le cas de l'application identique ($d = 1$) sera traité page 39.

$(d - 1)$ -èmes de 1. La figure 7 illustre le cas où $d = 5$. L'équateur est le cercle unité $|z| = 1$, l'axe réel est le grand cercle (méridien) passant par 0, 1, ∞ et -1 .

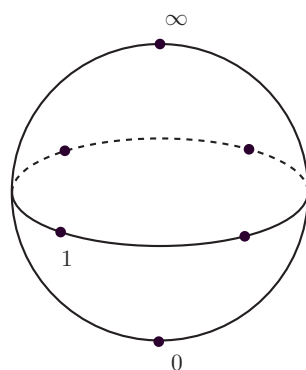


FIGURE 7.

(2) La surface est un tore ($g = 1$), que nous voyons comme $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et l'application est celle définie sur \mathbf{R}^2 par

$$(x, y) \mapsto (2x + y, x + y).$$

La figure 8 représente (en grisé) l'image dans \mathbf{R}^2 du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ par cette application. Son seul point fixe dans le quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ est l'image dans $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ de $(0, 0)$.

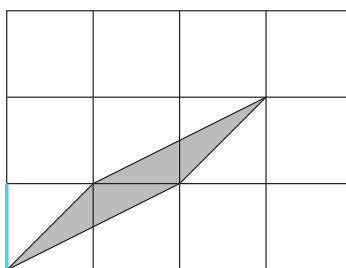


FIGURE 8.

(3) Considérons l'application du cercle dans lui-même schématisée sur la partie gauche de la figure 9 : le demi-cercle supérieur est couvert

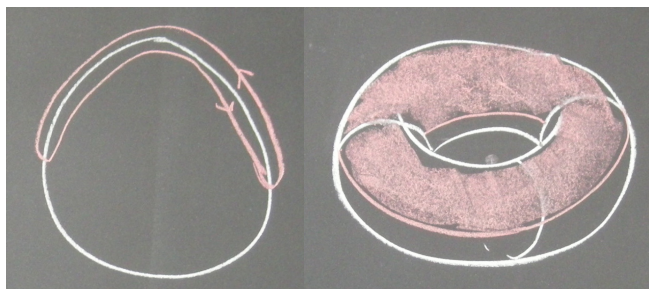


FIGURE 9.

deux fois, mais il y a des points du demi-cercle inférieur qui ne sont pas atteints⁽²³⁾. On en fait le produit avec l'application identique du cercle dans lui-même, pour obtenir une application du tore dans lui-même, schématisée sur la partie droite de la même figure : la partie hachurée est atteinte (deux fois), l'autre pas.

Points coïncidents. On peut énoncer le théorème de Lefschetz sous une forme un peu plus générale, avec deux applications $f, g : V \rightarrow V$ dont on recherche, non pas les points fixes de l'une, mais les points coïncidents des deux, c'est-à-dire des points x tels que $f(x) = g(x)$ (le cas d'une application est inclus : l'autre est alors l'identité). Trouver les points où $f(x) = g(x)$ revient à trouver

$$\{x \in V \mid \exists y \in V, (f(x), g(x)) = (y, y)\}$$

c'est-à-dire les points d'intersection de l'image de V par (f, g) avec la diagonale de $V \times V$.

Retenons que ces points sont des points d'intersection.

Correspondances, courbes. Le fameux lemme de Weil concerne une correspondance, c'est-à-dire une courbe... Ah ! C'est qu'il faut dire ici que les surfaces V considérées peuvent aussi être des courbes

⁽²³⁾Les lectrices qui aiment les formules pourront utiliser

$$(x, y) \mapsto \frac{(-y, 2x^2 - 1)}{\sqrt{y^2 + (2x^2 - 1)^2}}.$$

complexes (des surfaces de Riemann). À ce détail près, comme nous l'avons dit, une correspondance ressemble fort à l'image d'un produit $f \times g$ comme ci-dessus. C'est une courbe C contenue dans le produit (de deux courbes) $V \times V$ (renvoyons à la figure 4). Par exemple, le graphe d'une application. Ses points coïncidents sont ceux de son intersection avec la diagonale.

Degré d'une application. Revenons au cas simple d'une application $f : C \rightarrow V$, que nous supposons toujours envoyer une surface (orientable) dans une autre (nous voulons l'utiliser dans le cas d'une application $f : V \rightarrow V$, mais aussi dans celui des projections $C \subset V \times V \rightarrow V$ d'une correspondance sur un des facteurs). En général (c'est-à-dire à des conditions qu'il est inutile de préciser ici — comme disait Weil dans son énoncé du lemme fondamental) — si $v \in V$, $f^{-1}(v)$, qui est une partie compacte de C , est un ensemble fini de points

$$f^{-1}(v) = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

La figure 10 représente des exemples de ceci, très schématiquement,

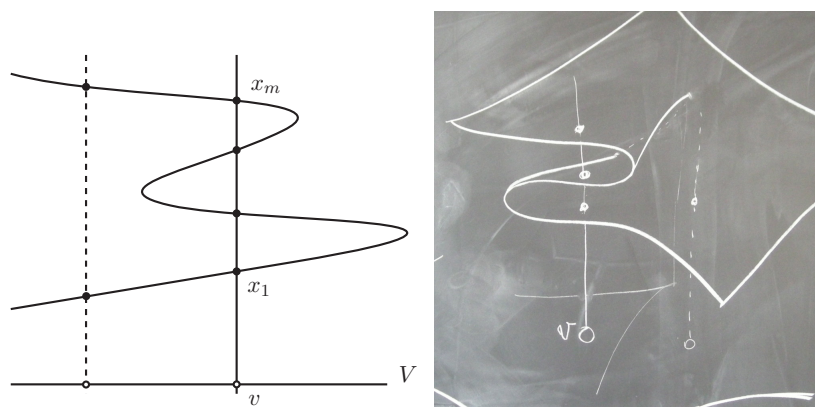


FIGURE 10. L'image inverse d'un point général

en dimension 1 (à gauche), et en dimension 2 (à droite), au tableau : l'application f est la projection verticale. La contemplation de cette figure devrait donner une idée de ce que « en général » peut bien vouloir dire.

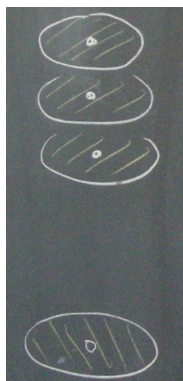


FIGURE 11.

Toujours si v est « assez général », il est facile de munir chacun des points x_i d'un signe. Au voisinage de x_j , la surface ressemble à un disque, comme on le voit sur la figure 11 (où de petits disques autour des points de $f^{-1}(v)$ de la figure précédente ont été isolés), et l'application f est un homéomorphisme de ce disque sur un voisinage de y . Le point x_j est muni du signe $+$ (ou $-$) si f préserve (ou pas) l'orientation. On démontre que la somme de ces signes ne dépend pas du choix⁽²⁴⁾ de y . Ce nombre entier est le degré de f .

Exemples.

(1) Dans le cas de l'application de la sphère dans elle-même, un point général a d pré-images (puisque un nombre complexe général a d racines d -èmes), le signe est $+$ pour chacun des points (parce qu'une application holomorphe, comme $z \mapsto z^d$, préserve l'orientation), ce qui fait que le degré est d . Et ce qui justifie la terminologie.

(2) L'application du tore dans lui-même schématisée sur la figure 8 est bijective, donc de degré ± 1 . L'image du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ est le parallélogramme représenté sur cette figure, dont la figure 12 montre

⁽²⁴⁾Attention ! Le nombre m de points de $f^{-1}(v)$ dépend, lui, du point v choisi, comme le suggère la figure 10, dans laquelle deux des points de $f^{-1}(v)$ comptent visiblement avec des signes opposés.

qu'il reproduit exactement le carré (le déterminant de la transformation linéaire utilisée vaut 1).

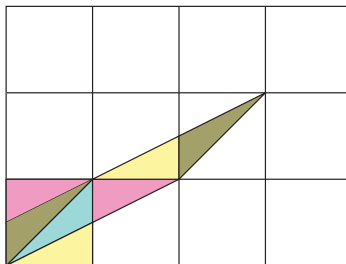


FIGURE 12. Une application de degré 1

(3) L'application représentée sur la figure 9 est de degré 0, simplement parce qu'elle n'est pas surjective : un point de la partie inférieure du tore est l'image de zéro point. On vérifie sans mal que les deux points qui sont envoyés sur un point donné de la partie supérieure comptent, l'un pour $+1$ et l'autre pour -1 .

La théorie du degré, ou « degré topologique », a été inventée par le mathématicien néerlandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), au tout début du xx^e siècle. Une des applications en fut le théorème du point fixe (de Brouwer) qui affirme qu'une application continue d'une boule dans elle-même doit avoir un point fixe — déjà les points fixes. C'est d'ailleurs sur les travaux de Brouwer que portait le cours de Hopf que le jeune Weil avait suivi à Berlin en 1927.



Heinz Hopf
(1894–1971)

La théorie du degré s'est révélée très utile pour montrer l'existence de points fixes, y compris en dimension infinie, comme le théorème de Leray-Schauder, démontré et utilisé dans les années 1930 pour montrer l'existence de solutions de certaines équations aux dérivées partielles et dont il a été question page 12.

Matrice $2g \times 2g$. Identifions d'abord le nombre $2g$: c'est le nombre de courbes dessinées *autour des trous* et *à travers eux*, pour utiliser la belle terminologie de Patrick Popescu-Pampu. Sur notre tableau noir (figure 13), les courbes « α » font le tour des trous et les courbes « β » passent dans, à travers les trous. En référence à l'énoncé du théorème de Lefschetz, $2g$ est la dimension de $H_1(V)$ comme espace vectoriel sur \mathbf{R} , le « premier nombre de Betti »⁽²⁵⁾ de la surface V . Il se trouve que toute courbe fermée dessinée sur V peut se déformer continûment en une combinaison linéaire de ces $2g$ courbes. La figure 13 montre un exemple de cette situation⁽²⁶⁾ : la courbe γ dessinée sur le tore se déforme sur $\alpha - \beta$. Soit maintenant γ une des $2g$ courbes, son image $f(\gamma)$ est une courbe fermée, on peut donc l'écrire comme combinaison linéaire, et voilà la matrice.

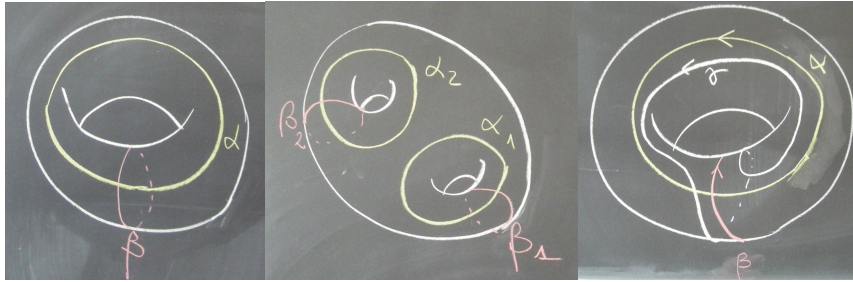


FIGURE 13. Courbes sur les surfaces, au tableau

Exemples.

(1) L'exemple de la sphère ne donne rien de très passionnant puisque $g = 0$ dans ce cas.

⁽²⁵⁾En cette année Poincaré, on ne manquera pas de lire ici ou là que c'est Poincaré qui a nommé ces dimensions « nombres de Betti » — mais André Weil, qui avait lu Riemann dès son plus jeune âge, faisait remonter l'invention de ces nombres à Riemann.

⁽²⁶⁾Un autre exemple est visible sur la figure 3 : les cercles que l'on y voit dessinés sur un tore font une fois le tour du trou (comme ici α) et une fois celle de l'anse (comme β), ils se déforiment en $\pm\alpha \pm \beta$.

(2) L'application considérée sur le tore envoie les deux courbes rouge et bleues images des deux vecteurs de base sur les courbes représentées par les côtés du parallélogramme (figure 14). La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

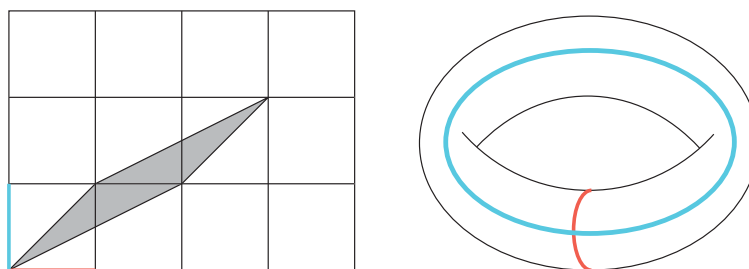


FIGURE 14.

(3) L'application de degré 0 représentée sur la figure 9 envoie la courbe autour du trou sur elle-même. La courbe à travers le trou est envoyée sur une courbe que l'on peut déformer sur un point (donc 0). La matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous avons maintenant (dans le cas des surfaces) tout le nécessaire à la description des trois termes dans le membre de droite de la formule de Lefschetz — sauf que nous n'avons pas expliqué ce qu'était f_* en degrés 0 et 2 :

(1) $f_* : H_0(V) \rightarrow H_0(V)$ est l'identité de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , donc sa trace vaut 1,

(2) $f_* : H_1(V) \rightarrow H_1(V)$ est l'application linéaire $\mathbf{R}^{2g} \rightarrow \mathbf{R}^{2g}$ dont la matrice vient d'être décrite.

(3) $f_* : H_2(V) \rightarrow H_2(V)$ est la multiplication par le degré, de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , sa trace est donc précisément le degré de f .

Nombre « algébrique » de points fixes, nombre d'intersection

Il reste à comprendre le premier membre, « nombre algébrique de points fixes ». Il est clair qu'il ne s'agit pas vraiment de compter les points fixes. Par exemple, dans le cas de l'application

$$\text{Id} : V \longrightarrow V,$$

le second membre de la formule de Lefschetz est un nombre entier fini (la caractéristique d'Euler de V), alors que tous les points de V sont fixes.

Le plus simple ici est de décrire ce nombre « algébrique » comme un « nombre d'intersection⁽²⁷⁾ » (celui du graphe de f avec la diagonale). Considérons un peu plus généralement le cas de deux surfaces orientées C_1 et C_2 dans $V \times V$. Supposons (toujours des conditions qu'il est inutile de préciser ici⁽²⁸⁾) qu'elles se coupent en des points isolés et qu'au voisinage de chacun de ces points, la situation ressemble beaucoup à celle de deux plans P_1 et P_2 dans \mathbf{R}^4 , en position générale au sens où $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ (ou, si l'on préfère, que $P_1 + P_2 = \mathbf{R}^4$). Ici P_1 et P_2 jouent le rôle de C_1 et C_2 près d'un point d'intersection, et \mathbf{R}^4 joue le rôle de la variété $V \times V$ au voisinage de ce point.

Alors chacun de ces points compte, dans l'intersection, pour $+1$ ou pour -1 selon que l'orientation de C_1 , suivie de l'orientation de C_2 coïncide ou ne coïncide pas avec l'orientation de $V \times V$. La figure 15 montre, toujours au tableau, la situation analogue en dimension $1 + 1 = 2$.

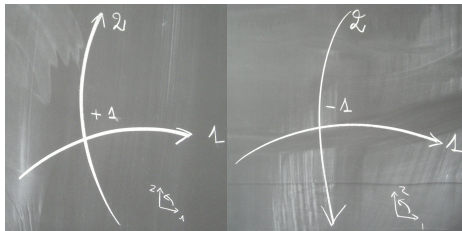


FIGURE 15. Nombre d'intersection local, au tableau

⁽²⁷⁾Les nombres d'intersection étaient déjà connus de Poincaré. Au cours des années 1920, Georges de Rham, dont nous reparlerons, avait réalisé leur importance :

j'ai vu que la théorie des enlacements et des intersections allait plus loin que l'homologie et donnait d'autres résultats, qui semblaient nouveaux.

⁽²⁸⁾... et qui ne sont pas satisfaites par l'application identique, dont le graphe coïncide avec la diagonale

Par exemple, pour l'application du tore dans lui-même représentée sur les figures 8, 12 et 14, un simple calcul de déterminant montre que le nombre d'intersection de son graphe avec la diagonale est -1 .

Regardons ce que donne la formule de Lefschetz dans les exemples considérés ci-dessus :

(1) Dans le cas de l'application de la sphère dans elle-même, on trouve $1 - 0 + d = d + 1$, qui est précisément le nombre de points fixes de f (qui sont 0 , ∞ , et les racines $(d - 1)$ -èmes de l'unité, comme nous l'avons dit).

(2) Dans le cas de l'application du tore,

$$1 - (2 + 1) + 1 = -1,$$

en accord avec le fait que l'application a un unique point fixe et que le nombre d'intersection en ce point vaut -1 , comme nous l'avons dit ci-dessus.

(3) Dans l'exemple de la figure 9, la formule donne

$$1 - (1 + 0) + 0 = 0.$$

Le nombre « algébrique » de points fixes de l'application considérée est nul.

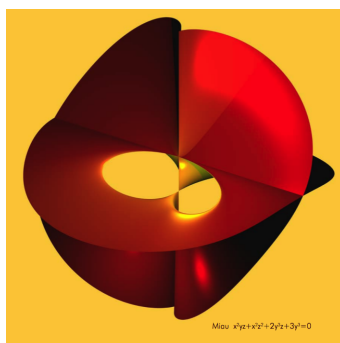


FIGURE 16. Une singularité

Et en géométrie algébrique ? Dans le cadre des variétés topologiques, ou même différentielles, où nous nous sommes placés ici, la vie est très simple : chacune des deux sous-variétés dont on veut calculer l'intersection est, localement, homéomorphe à un espace affine (une

droite sur la figure 15, un plan dans l'exemple des deux surfaces considéré au-dessus). En les déformant légèrement, on peut même supposer qu'en chacun de leurs points d'intersection, elles sont transversales.

La situation est autrement plus délicate avec des variétés algébriques, c'est-à-dire définies par des équations polynomiales : d'abord, elles peuvent être singulières, ne pas ressembler à un plan (voir la figure 16, due à Herwig Hauser) ; ensuite, les perturber légèrement pour les rendre transversales n'est plus forcément possible en restant dans le cadre algébrique, beaucoup plus rigide que le cadre topologique. Il faut inventer des définitions algébriques.

En lisant les lignes précédentes, on a peut-être pensé à des courbes réelles ou complexes. Il faut maintenant nous souvenir que c'est à des courbes algébriques sur des corps finis qu'André Weil souhaitait appliquer ces idées. Il lui fallait donc construire les fondations d'une nouvelle théorie, et c'est ce qu'il fit en 1946 dans son livre *Foundations of algebraic geometry* — les cinq cents pages dont il avait besoin pour achever sa démonstration.

Vers les conjectures de Weil. Ces réflexions et cet énorme travail devaient le mener aux célèbres « conjectures de Weil », formulées en 1949 dans un article intitulé « nombre de solutions d'équations dans les corps finis » : après être passé des courbes de genre 1 à celles de genre quelconque, il s'agissait de passer à des dimensions supérieures. Cette question ne fut résolue (par Pierre Deligne) que dans les années 1970 — et cette résolution avait été rendue possible par la création, par Alexandre Grothendieck, d'encore de nouvelles techniques en géométrie algébrique (mais ce serait le sujet d'une autre histoire).

Weil, la topologie, et le séminaire de mathématique en 1936

En février 1936, André Weil avait donné, à Paris, deux exposés sur la topologie combinatoire, dont

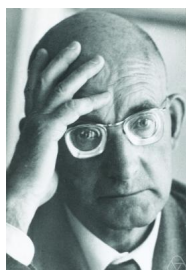
[...] un exposé sur les nombres d'intersection et le degré topologique, basé avant tout sur le chapitre XI d'Alexandrov-Hopf ; j'y indiquais la possibilité d'une définition axiomatique des notions en question, préluant peut-être par là, sans m'en douter, à mes futurs travaux de géométrie algébrique.

Dans le même séminaire, Leray avait donné un autre exposé sur le degré. C'est peut-être difficile à imaginer aujourd'hui, mais il n'y avait à Paris en 1936 que deux séminaires de mathématiques, un général et un thématique. Le séminaire général avait lieu au Collège de France et s'appelait « analyses de mémoires », ce qui se prononçait « séminaire Hadamard ». Il était, depuis 1920, le centre de la vie mathématique parisienne. Le séminaire thématique existait depuis 1933, avait lieu à l'Institut Henri Poincaré et s'appelait « séminaire de mathématiques », ce qui se prononçait « séminaire Julia ». Il n'y avait pas de concurrence, au sens où beaucoup de mathématiciens assistaient aux deux. Pour ce qui nous concerne, notons en particulier qu'André Weil, Henri Cartan et leurs amis étaient à la fois des assidus du séminaire Hadamard et les principaux animateurs du séminaire Julia.

Revenons donc à 1936. Le début de l'année 1935–36, troisième année du séminaire Julia, avait été précédé, pour André Weil, par le Congrès international de topologie, à Moscou, du 4 au 10 septembre, puis par la conférence consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*, à Genève, du 21 au 25 octobre.

C'est quelques jours après la fin du congrès de Moscou et dans la station criméenne et balnéaire de Yalta, dont le nom n'était pas aussi célèbre qu'il l'est aujourd'hui, qu'Alexandroff et Hopf terminèrent (et écrivirent la préface de) leur livre *Topologie* qui devint, pour longtemps, une bible de la topologie...

... et qu'André Weil attendait pour faire ses exposés de séminaire.



Pavel Alexandroff
(1896–1982)

Le congrès de Moscou fut exceptionnel à plus d'un titre, et pas seulement parce qu'il fut la dernière conférence de mathématiques vraiment internationale à se tenir en Russie : les grands procès staliniens se préparaient — le premier eut lieu moins d'un an plus tard, en août 1936. Hassler Whitney et André Weil ont parlé dans leurs souvenirs de la richesse de la matière abordée.

Mais revenons au séminaire Julia.

De l'exposé de Weil sur degré topologique et nombre d'intersection, il a été question. Il fut suivi, le 17 février, d'un autre exposé, dans lequel il rendit compte de la fibration de Hopf, que nous avons mentionnée, et montrée, page 23. Sur la figure 3, on remarque que les cercles sont entrelacés de façon telle qu'on ne peut pas les séparer, ce qui montre que l'on ne peut déformer cette application en une application constante. La question était posée (par Hopf) de savoir si d'autres applications d'une sphère dans une autre avaient des propriétés analogues à celle-ci. La résolution de ce problème (par Adams en 1959) occupa les topologues pendant une trentaine d'années et mena à la mise en place d'outils topologiques nettement plus sophistiqués que ceux évoqués dans ce texte. Comme nous l'avons vu (page 15), elle fut le sujet du séminaire Cartan en 1958–59.

La question intéressait André Weil, sans doute, puisqu'il écrivit même à Élie Cartan à ce sujet pendant qu'il préparait ses exposés de février 1936 au séminaire Julia. Mais moins, semble-t-il, que la relation entre les formes différentielles et la topologie, dont il va être question maintenant — il annonça d'ailleurs un exposé sur ce sujet, qu'il donna en effet au début de l'année universitaire suivante⁽²⁹⁾, le 16 novembre 1936. Dans le commentaire de la note de 1940 dans ses Œuvres complètes, c'est d'ailleurs davantage à l'analogie avec les travaux de de Rham et les formes différentielles qu'au théorème de Lefschetz que Weil se réfère, pour son lemme fondamental.

3.3. Les formes différentielles : de la formule de Stokes au théorème de de Rham

Je me souviens des boums.

Dans le film d'Isabelle Broué, pour justifier le besoin du « Traité d'analyse » (besoin qui mena à la naissance de Bourbaki), Henri Cartan donne l'exemple de la formule de Stokes, et des questions qu'il se posait sur la façon de l'enseigner. Le souvenir d'André Weil dans

⁽²⁹⁾Rappelons qu'à cette époque l'année universitaire commençait en novembre.

le commentaire de ses Œuvres est analogue. Les archives de Bourbaki confirment l'importance de cette formule dans la réflexion de ses fondateurs⁽³⁰⁾.

Le cours de Goursat, dont on utilise volontiers le nom comme repoussoir (après moult répétitions, déformations, amplifications et exagérations), sans même avoir pensé à l'ouvrir, n'a certainement pas mérité une telle indignité. L'énoncé et la démonstration qui y sont données de la formule de Stokes posent, en effet, des questions de fond (les mêmes qu'elles posaient encore, dans l'enseignement en classes préparatoires, quarante ans plus tard). L'édition présente à la bibliothèque de l'IRMA de Strasbourg, qui est celle que j'ai consultée, a été imprimée en 1933, mais préfacée en 1923, sans grand changement par rapport aux éditions précédentes (est-il dit dans cette préface). Il s'agit bien du texte que nos mathématiciens ont utilisé (ou subi) lorsqu'ils étaient étudiants. Il s'agit peut-être d'ailleurs de l'exemplaire-même qu'Henri Cartan consultait pour préparer son cours à Strasbourg...

Mais venons-en au contenu. La « formule générale de Stokes », que voici

$$\begin{aligned} (\dagger) \quad & \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ & = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \end{aligned}$$

y est obtenue comme conséquence de la « formule de Green », que voilà

$$(\ddagger) \quad \int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

... la différence entre les deux étant que l'une est dans le plan et l'autre pas. Ce qui n'est absolument pas clair, c'est ce que sont Γ et S . Les relations entre l'orientation de l'une et de l'autre sont discutées assez longuement, mais leurs définitions et donc le champ d'application de la formule ne sont pas clairs : S est « une surface régulière à deux côtés distincts, limitée par une courbe fermée Γ ». Sur la figure apparaît,

⁽³⁰⁾La formule de Stokes ne figura pourtant pas dans les *Éléments de mathématique*, sauf dans un fascicule de résultats paru très tardivement.

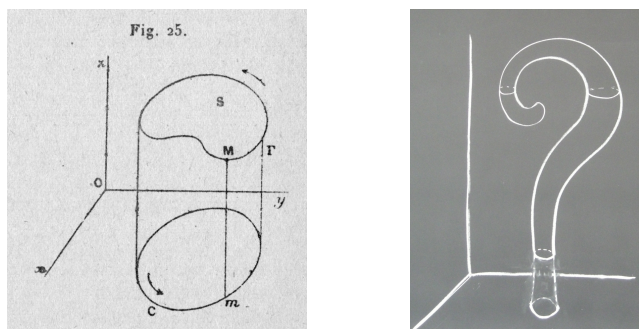
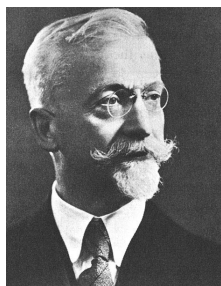


FIGURE 17. Interrogation sur la validité de la formule de Stokes

et dans la démonstration est utilisé, le fait que la surface S est le graphe d'une application définie sur un domaine D du plan (celui auquel sera appliquée la formule de Green). La figure du « Goursat » est reproduite ici (à gauche, sur la figure 17) à côté d'une autre surface régulière avec deux côtés distincts limitée par une courbe fermée. On remarquera qu'il n'existe aucun plan de l'espace au-dessus duquel on puisse représenter cette surface (celle de droite) comme le graphe d'une fonction. La formule de Stokes s'applique-t-elle aussi à cette situation ?

En conclusion, il semble que, au moins, la question de la localité ou de la globalité de la formule de Stokes n'est pas résolue (ni même posée) dans le livre de Goursat. Il reste à signaler que le premier mathématicien qui a signalé la généralité de la formule de Stokes, en 1915, fut... Édouard Goursat.

Élie Cartan
(1869–1951)

Plaçons cette discussion sous la protection d'Élie Cartan, déjà mentionné dans l'exergue de ce texte, et qui s'intéressait lui aussi à la topologie, sous son nom ancien d'analysis situs.

Élie Cartan, le père d'Henri Cartan, était aussi une figure paternelle pour André Weil, qui revendiqua souvent son héritage mathématique. Nous avons mentionné la lettre qu'il lui écrivit à propos de la question de Hopf.

Car il y avait Élie Cartan, qui avait bien compris que l'on intégrait des formes différentielles

$$\alpha = P dx + Q dy + R dz,$$

$$\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

et même qu'il y avait un rapport entre ces deux-là, puisqu'il avait inventé la différentielle extérieure, et que, justement ω était la différentielle extérieure de α , ce que nous écrivons aujourd'hui $\omega = d\alpha$ (mais qu'il écrivait $\omega = \alpha'$). La notation d , dont les qualités devraient apparaître dans la suite, est due au mathématicien allemand Erich Kähler⁽³¹⁾. La propriété la plus importante de cette application d , c'est le fait que $d \circ d = 0$.

Une forme différentielle de degré 1, comme α , s'intègre sur quelque chose dont la dimension est 1 — comme la courbe Γ . C'est une notion familière : $P(x) dx$ s'intègre sur un segment $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $f(z) dz$ sur un chemin dans \mathbf{C} (car intégrer dans le plan complexe, comme l'avait compris Cauchy, c'est se promener le long d'un chemin).

Plus généralement, une forme différentielle de degré 2 (comme ω) s'intègre sur une surface, et ainsi de suite : la promenade prend de l'épaisseur. Ceci rend l'accumulation de signes

$$\int \quad (\text{voire } \oint) \quad \iint \quad \iiint \quad \iiiii$$

(jolis, mais encombrants) inutile. À quoi bon, en effet, indiquer k intégrations puisque le degré de la forme intégrée, comme la dimension du champ d'intégration, disent qui est k ? Il reste à inclure dans la notation la relation entre les deux objets sur lesquels on intègre, ici le fait que la surface S est limitée par la courbe Γ , ce que nous écrivons $\Gamma = \partial S$ (et prononcerons⁽³²⁾ « Γ est le bord de S »). À petits coups

⁽³¹⁾Erich Kähler (1906–2000) passa, lui aussi, après la guerre, par un camp de prisonniers de guerre, près du Mans, et par la citadelle de Saint-Martin de Ré, où il bénéficia de l'aide scientifique d'Henri Cartan.

⁽³²⁾Dans cette démonstration de l'importance d'utiliser des notations adéquates, il faut signaler ici un petit miracle : d est pour différentielle, aucun doute, mais pour quoi est ∂ ? Ni bord ni frontière, ni en allemand ni en français (ni même

de changements de notations, la formule (†) s'écrit

$$(\star) \quad \int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha.$$

Élégant, non ? Et dont la validité semble plus universelle que celle de (†), par exemple parce que notre formule (★) est aussi... la formule (‡) — sans compter qu'elle est aussi...

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

puisque le bord du segment $[a, b]$ est $\{a, b\}$, avec des signes adéquats, et que la 0-forme f a pour différentielle extérieure $f'(x) dx$.

Cette élégance et cette simplicité révèlent une vérité profonde, une « dualité »

$$(V, \omega) \longmapsto \int_V \omega \in \mathbf{R}$$

entre formes différentielles et objets sur lesquels on les intègre. Avec ces objets (courbes dessinées sur les surfaces et leurs généralisations en dimensions supérieures), c'est l'homologie $H_k(V)$ que nous avons évoquée, dans laquelle le bord ∂ joue son rôle (implicitement ici, puisque nous n'avons dessiné que des courbes « sans bord »). Avec les formes différentielle et grâce à la propriété $d \circ d = 0$ de la différentielle d , on peut fabriquer la cohomologie (« co », en référence à la dualité). C'est Élie Cartan, dans une note de 1928, qui avait pressenti et conjecturé cette dualité.

Si V est une variété différentielle, on appelle $\Omega^k(V)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré k sur V (k -formes), puis

$$Z^k(V) = \{\alpha \in \Omega^k(V) \mid d\alpha = 0\}$$

l'espace des formes *fermées*. Comme $d \circ d = 0$, l'espace

$$B^k(V) = \{\alpha \in \Omega^k(V) \mid \exists \beta \in \Omega^{k-1}(V) \alpha = d\beta\}$$

des formes *exactes* en est un sous-espace vectoriel.

en anglais), alors ? eh bien, *Rand*, en allemand, écrit en gothique et abrégé \mathfrak{Rd} , puis \mathfrak{d} (deux lettres, c'était trop), puis ∂ !

On peut ainsi définir le k -ème groupe de cohomologie de de Rham de V comme le quotient

$$H^k(V) = Z^k(V)/B^k(V)$$

ou, si l'on préfère, comme l'homologie du complexe de de Rham

$$\dots \longrightarrow \Omega^{k-1} \xrightarrow{d} \Omega^k(V) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(V) \longrightarrow \dots$$

Les courbes dessinées sur les surfaces et le fait qu'on peut les ajouter, les soustraire, ce que nous avons accepté dans les commentaires autour de la figure 13 — ce qu'on appelle, plus généralement, les groupes d'homologie, ceci était acquis dans les années 1930. La question suivante était celle d'une structure d'anneau, comment multiplier ces objets ? La réponse est décevante, en gros, on ne peut pas. Mais les formes différentielles se multiplient, elles, par l'opération \wedge , qui est apparue dans le glissement de notation de $dx dy$ à $dx \wedge dy$.

On a donc un anneau, celui de la cohomologie de de Rham, du nom du mathématicien suisse Georges de Rham, qui a inventé cet objet, d'une part et qui a montré, d'autre part, que cette cohomologie dépend bien uniquement de la topologie de V et qu'elle est duale à son homologie, comme l'avait conjecturé Élie Cartan. C'est ce que l'on appelle le théorème de de Rham.



Georges de Rham
(1903–1990)

Bien que n'ayant pas à proprement parler défini l'homologie ici, énonçons quand même le théorème.

Théorème (de de Rham). *L'application bilinéaire d'intégration*

$$\begin{aligned} H_k(V) \times H^k(V) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (C, \omega) &\longmapsto \int_C \omega \end{aligned}$$

est non dégénérée.

C'est la formule de Stokes qui garantit que l'application d'intégration, définie a priori sur les formes, l'est sur la cohomologie : l'intégrale d'une forme exacte $d\alpha$ sur un C de bord nul est nulle.

Weil s'est intéressé à ce théorème dès les années 1930. En janvier 1947, à São Paulo, il en écrivit une démonstration lumineuse, qu'il envoya à son ami Henri Cartan. Voici le début de cette lettre :

Ayant commencé à réfléchir à un projet de rapport [pour Bourbaki] sur les espaces fibrés et questions connexes, j'ai obtenu une démonstration des théorèmes de de Rham (préliminaire indispensable à ces questions) que je te communique, dans l'espoir que ça t'engagera à te remettre toi-même au projet de topologie combinatoire dont tu nous as déjà fourni une première esquisse [toujours Bourbaki].

Ce n'est pas le lieu d'entrer dans les détails de la démonstration. Cette lettre, que l'on trouve dans les archives d'Henri Cartan, avait déjà été publiée, et même reproduite en fac simile dans les Œuvres de Weil, à la suite d'un article un peu plus tardif. Henri Cartan a utilisé cette démonstration dans le cours qu'il a donné à Harvard en 1948 et dans son séminaire (en particulier en 1948–49 et 1950–51). Les annotations marginales montrent qu'il a beaucoup travaillé avec cette lettre. De ce contenu je ne citerai que le post-scriptum manuscrit :

P.S. Peux-tu me faire savoir de suite comment tu définis l'*anneau* de cohomologie (i.e. l'opération de produit) ?

(auquel Cartan répondit par l'invention des carapaces) et, pour revenir au début de ce texte, une définition centrale

Disons qu'on aura défini un boum λ d'ordre m et de degré p chaque fois qu'à tout système d'indices i_1, \dots, i_n on aura attaché un élément $\lambda_{(i)} = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_m}$ de $G_p(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m})$.

Dans la version publiée, les boums d'ordre m et de degré p sont devenus des « coéléments différentiels de bidegré (m, p) »...

4. Annexe : repères biographiques

Filer la métaphore Swann-Guermantes serait lourd et inadapté. Il y a peu de place dans Proust pour la famille d'un maréchal-ferrant (ce qu'était le père d'Élie Cartan) et l'ascenseur social qu'a constitué l'école de la troisième République. Remarquons avant de développer quelques rapides repères biographiques que les deux mathématiciens, issus de milieux socio-culturels un peu différents, sont arrivés dans la vie professionnelle avec un bagage et une culture commune, ceux



La famille Bourbaki en 1938

Simone Weil, Charles Pisot, le front d'André Weil, Jean Dieudonné,
Claude Chabauty, Charles Ehresmann, Jean Delsarte
(sans Cartan, peut-être parce qu'il prenait la photo)

acquis dans les thurnes de l'ENS. Leurs vies ont été finalement assez dissemblables, séparées par la tourmente de la guerre, mais ils ont conservé un langage, une passion et une grande aventure communes, la mathématique et Bourbaki.

Henri Cartan. Henri Cartan est né le 8 juillet 1904 à Nancy où son père était professeur à l'université⁽³³⁾. Il fut l'aîné des quatre enfants d'Élie Cartan et Marie-Louise Bianconi (les autres sont Jean, Louis et Hélène)⁽³⁴⁾.

⁽³³⁾L'institut de mathématiques de l'Université de Nancy porte le nom d'Élie Cartan.

⁽³⁴⁾Le compositeur Jean Cartan (1906–1932) est mort de la tuberculose à l'âge de vingt-cinq ans, le physicien Louis Cartan (1909–1943) a été arrêté comme

Il est entré à l'École normale supérieure en 1923 et a été reçu à l'agrégation de mathématiques en 1926. Il a soutenu le 8 décembre 1928 une thèse intitulée *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*.

Comme c'était souvent le cas à cette époque, il a commencé par enseigner dans un lycée (le lycée Malherbe de Caen, d'octobre 1928 à avril 1929). Il a ensuite été nommé chargé de cours à l'Université de Strasbourg (d'avril à septembre 1929), puis à l'université de Lille (d'octobre 1929 à septembre 1931), ensuite à nouveau à Strasbourg, comme chargé de cours puis maître de conférences, de 1931 à décembre 1935, puis comme professeur du 1^{er} janvier 1936 à octobre 1940.

Pendant les années 1930, il a participé à la création du groupe Bourbaki.

Il s'est marié avec Nicole Weiss, la fille du physicien Pierre Weiss, en 1935 (le couple a eu cinq enfants).

En 1939, il est parti à Clermont-Ferrand avec l'université de Strasbourg, qui y fut repliée dès septembre. En 1940, il a été nommé à l'université de Paris, avec son service à l'ENS. Il avait promis de revenir pour aider à la remise en route de l'université de Strasbourg quand la guerre serait terminée et il l'a fait. À part ces deux années (1945–47), il a passé vingt-cinq ans (1940–1965) à l'ENS à Paris.

Il a ensuite été professeur à la Faculté des sciences de Paris de 1965 à 1969, et enfin à Orsay jusqu'en 1975, date où un grand colloque a été donné pour le fêter, à l'occasion de son départ à la retraite.

Il n'est pas question de mentionner ici tous les honneurs reçus au cours de sa carrière.

Il a exercé une influence considérable sur des générations de jeunes mathématiciens. Outre l'influence de ses cours, à l'ENS ou à Orsay⁽³⁵⁾,

résistant et décapité pendant la deuxième guerre mondiale, la mathématicienne Hélène Cartan (1917–1952) est morte tuberculeuse elle aussi.

⁽³⁵⁾Révétons aux lecteurs que, lorsqu'ils entendent (ou donnent) un cours sur les revêtements dans lequel la trivialité locale est décrite en termes d'une pile d'assiettes (comme sur le dessin de gauche de la figure 11), c'est un héritage d'Henri Cartan qu'ils reçoivent (ou transmettent).



© Famille Cartan



À gauche, la famille Cartan en 1928
(Élie, Henri, Marie-Louise, Louis, Hélène, Jean)
à droite Henri et Nicole Cartan en 1935

et de son séminaire, il reste celle de ses livres d'enseignement. Malgré ses plus de cinquante ans, son livre sur les fonctions holomorphes d'une variable reste la référence inégalée pour les cours de licence.

Parmi ses nombreuses activités autres que mathématiques, signalons qu'il était un très bon musicien (et un pianiste de niveau professionnel), mentionnons son engagement politique pour l'Europe et pour la paix (il fut un des premiers mathématiciens français à se rendre en Allemagne après la deuxième guerre mondiale), et rappelons son action pour les droits de l'homme, notamment dans le Comité des mathématiciens, avec Laurent Schwartz et Michel Broué.

Henri Cartan est mort à Paris le 13 août 2008.

André Weil. André Weil est né le 6 mai 1906 à Paris, suivi le 3 février 1909 de sa sœur Simone⁽³⁶⁾. Il est entré à l'ENS en 1922 (à l'âge de seize ans) et a été reçu à l'agrégation de mathématiques en 1925.



André et Simone Weil

Grand voyageur, il a passé l'année 1925–26 à Rome avec une bourse de la Fondation Commercy, la suivante à Göttingen, Berlin et Stockholm avec une bourse de la Fondation Rockefeller. Il a soutenu sa thèse, *L'arithmétique sur les courbes algébriques*, le 21 décembre 1928. Il a fait son service militaire en 1928–29.

Il est parti pour l'Inde en 1930 où il a été professeur à l'université d'Aligarh de 1930 à 1932.

De retour en France, il a été nommé à l'université de Marseille le 1^{er} décembre 1932, puis maître de conférences à l'université de Strasbourg le 1^{er} décembre 1933. Il est allé aux États-Unis (à Princeton) de janvier à mai 1937.

⁽³⁶⁾La philosophe Simone Weil est morte en 1943, en Angleterre.

Pendant les années 1930, il a participé à la création du groupe Bourbaki.



Éveline et André Weil, années 1950

Il s'est marié avec Éveline Gillet (qui avait divorcé d'avec René de Possel) en 1937. Ils ont eu deux filles⁽³⁷⁾.

Au printemps 1939, il a quitté la France, en mission pour l'Angleterre et la Scandinavie et, conformément à son intention déclarée de ne pas porter les armes pendant la guerre qui s'annonçait, n'est pas rentré en France lorsque l'ordre de mobilisation a été donné. Il a été

⁽³⁷⁾Leur fille aînée, Sylvie Weil, née en 1942, est écrivaine et notamment l'auteur du beau livre *Chez les Weil*. Lire ce livre comme une biographie d'André (et même de Simone) Weil serait commettre un contre-sens.

arrêté en Finlande, a passé plusieurs mois dans diverses prisons en Finlande et en Suède, avant d'être renvoyé en France⁽³⁸⁾.

De février à avril 1940, il était incarcéré à la prison de Bonne Nouvelle, à Rouen.



Éveline, Sylvie, André et Nicolette Weil,
quittant le Brésil en 1947

Il a été jugé pour insoumission le 3 mai 1940, condamné à cinq ans de prison ou à s'engager dans une unité active, ce qu'il a choisi. Il a donc participé à la fin de la guerre. Son insoumission avait entraîné sa révocation comme professeur. Les lois antisémites de Vichy l'auraient de toute façon empêché d'occuper son poste.

Il a réussi à quitter la France en janvier 1941, a occupé différents postes aux États-Unis (Haverford, Lehigh, Swarthmore) pendant la guerre.

Il a ensuite été professeur à São Paulo (Brésil) de 1945 à 1947.

Il a essayé de rentrer en France, notamment sur un poste au Collège de France⁽³⁹⁾, mais, dans l'ambiance de la France après la guerre, ses choix de 1939 ont rendu la chose impossible. Il a accepté un poste à Chicago où il est resté jusqu'en 1958, puis à l'Institute for Advanced Study, à Princeton jusqu'à la fin de sa vie, le 6 août 1998.

⁽³⁸⁾Renvoyons à ses *Souvenirs d'apprentissage*, déjà cités plusieurs fois dans ce texte.

⁽³⁹⁾C'est Jean Leray qui a obtenu le poste.

Remerciements et sources

Remerciements. C'est Sigurdur Helgason, spécialiste islandais et américain de géométrie différentielle et de théorie des groupes de Lie, qui m'a, sans le savoir, donné l'idée du titre de ce texte, lorsqu'il m'a raconté à propos du français utilisé par Weil dans une des lettres :

Le texte de Weil est assez difficile, parce qu'il utilise des phrases longues et compliquées. Ça me rappelle une de nos nombreuses promenades dans les bois, à l'Institute for Advanced Study [à Princeton, aux États-Unis]. Il se plaignait des éditeurs et des assistants de publication qui se mêlaient de modifier son texte. L'un d'eux s'était plaint de ses phrases trop longues. Je tentai de dire qu'en effet, il écrivait souvent des phrases très longues. « Oui. C'est ce que faisait Proust », me répondit-il.

L'image du petit Henri entendant Élie Cartan lire du Proust à voix haute à sa mère (utilisée en exergue de ce texte) a confirmé la nécessaire présence de cet auteur dans ce texte — des deux côtés. On aurait pu rêver que la maman dont le petit Marcel attendait le baiser du soir avec tant d'émotion, que cette maman dont le nom de naissance était Weil et l'origine alsacienne, ait été une cousine du grand-père d'André Weil, mais non :

car presque tous les juifs alsaciens s'appellent Weil ou Weill, et les Proust s'appelaient déjà Weil alors que nous nous appelions encore Weill

m'écrivit Sylvie Weil (la fille aînée d'André Weil).

Du côté de chez Proust, je remercie donc Sigurdur Helgason et Sylvie Weil.

Je remercie aussi Sylvie Weil pour les photographies qu'elle m'a prêtées et autorisée à reproduire.

Je remercie les auteurs des figures 3 et 16 (respectivement Benoît Kloeckner et Herwig Hauser) pour les avoir dessinées et autorisé leur utilisation⁽⁴⁰⁾.

⁽⁴⁰⁾Je renvoie à leurs galeries sur <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~bkloekn/images.html> et <http://www.freigeist.cc/gallery.html>.

Toutes les autres figures ont été dessinées (avec de la craie ou un logiciel graphique) par moi.

Je remercie Marc Hindry pour les explications qu'il m'a données, à moi aussi, sur la fonction ζ .

Je remercie les participants des journées X-UPS pour leur intérêt, leurs questions et leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer une version préliminaire de ce texte.

Finalement, je remercie les organisateurs de ces journées pour l'invitation à y parler et les conseils qu'ils m'ont donnés sur la façon d'écrire ce texte. En particulier, je remercie Claude Sabbah pour son soutien pendant la période où je l'écrivais et pour ses suggestions de fluidification.

Sources. À la suggestion de Claude Sabbah, et pour ne pas entraver la lecture d'un texte dont je suis consciente qu'il n'est peut-être pas très facile à lire (mais ni la mathématique ni la vie ne sont toujours très faciles non plus), j'ai repoussé jusqu'à cette partie finale du texte toutes les références bibliographiques précises. Les numéros tels que [Bra03] renvoient à la liste de références ci-dessous.

- La source principale est le livre [Aud11], qui contient, non seulement toute la correspondance entre Henri Cartan et André Weil, mais aussi, parmi les commentaires contextuels, d'autres lettres citées ici (d'André Weil à Élie Cartan, d'Henri Cartan à Armand Borel, notamment). Mais j'ai aussi utilisé bien d'autres textes...

- ... à commencer par un film, celui [Bro95] d'Isabelle Broué, d'où viennent la référence à Proust (en exergue) et l'histoire des bous

- sur les idées mathématiques évoquées, l'article de Patrick Popescu-Pampu [PP12], celui [Col03] de Pierre Colmez, le livre [Hin08] de Marc Hindry

- sur la préhistoire de Bourbaki, l'article [Bea93], sur son histoire la source autorisée [Wei91, Chap. Strasbourg et Bourbaki]

- sur l'histoire de la topologie, en commençant à Riemann [Bou84, p. 177] et [Wei79d]; jusqu'au début du XX^e siècle, l'excellent livre [Pon74] de Jean-Claude Pont; dans les années 1920 à Paris, [Aud12a]

- sur la topologie avant Bourbaki, l’*Analysis situs* de Poincaré [Poi53], le livre [Hau14] de Felix Hausdorff, l’article [Car28] et le livre [Car30] d’Élie Cartan, l’article [Wei35] d’André Weil, le séminaire de mathématiques [Aud14]
- les filtres et les structures uniformes, par Henri Cartan et André Weil, les notes [Car37a, Car37b], le fascicule [Wei37].
- les publications de Bourbaki : la première note [Bou35], les premiers chapitres [Bou40] (et le tardif fascicule de résultats [Bou71], à propos de la formule de Stokes)
- les contributions d’Henri Cartan et André Weil aux mathématiques évoquées dans ce texte
 - les articles (hors filtres) d’Henri Cartan [Car49] et [Car52] (son exposé à Cambridge), mais aussi son cours [Car48] à Harvard, son livre [Car61]
 - la note [Wei40] d’André Weil, ses livres [Wei46] et [Wei48], les conjectures de Weil dans [Wei49], la démonstration du théorème de de Rham dans [Wei52]⁽⁴¹⁾
- d’autres théorèmes ou livres cités dans ce texte : le livre [Jor70] de Jordan ; les correspondances de Hurwitz [Hur87] ; le degré de Brouwer dans [Bro11] ; le traité de Goursat [Gou33] ; le théorème de Lefschetz [Lef26] et sa démonstration par Hopf [Hop28] ; le théorème de Tychonoff [Tyc29] ; les fibrés de Seifert [Sei33] ; le livre de topologie [AH35] d’Alexandroff et Hopf ; le théorème de Feldbau [Fel39] ; l’article [Ser55] de Jean-Pierre Serre ; la résolution du problème de l’invariant de Hopf par Adams [Ada60]
- sur l’histoire des mathématiciens
 - à propos des correspondances, [Aud08, Chap. VI] (une lettre de Kovalevskaya à Mittag-Leffler), [Aud09b, Appendice] (les lettres de Pierre Fatou à Fréchet et Montel),
 - les textes biographiques et/ou autobiographiques (par ordre alphabétique) sur
 - Henri Cartan et sa famille [Aud09a]

⁽⁴¹⁾Les lectrices un peu averties liront une description efficace et plus complète des contributions d’André Weil à la topologie algébrique dans l’article [Bor99].

- Georges de Rham [CO10] et [dR80]⁽⁴²⁾
- Jacques Feldbau [Wei91, p. 117], [Aud10]
- Jacques Hadamard [MS05],
- Jean Leray [SS00]
- André Weil [Wei91] ainsi que les commentaires dans [Wei79a, Wei79b, Wei79c] et le très éclairant article [Ser99] de Jean-Pierre Serre (voir aussi [Wei09]... et la note 37)
- mais aussi, sur les effets de la première guerre mondiale [Aud09b]; sur l'année 1936 en général [Sch08]; sur le congrès de Moscou [Wei91, Whi88]; sur les publications et Feldbau [Aud09c, AB11] (voir la note 16); sur la guerre des recensions (autour de la note [Wei40]) [Aud12b]
- l'histoire des mathématiques pendant ces périodes, à travers [Mil00] (sur Leray), [Ser75] (les souvenirs de Jean-Pierre Serre sur le séminaire Cartan)
- quelques références littéraires, dont la plupart n'auront pas échappé aux lecteurs attentifs, je me contente de préciser celles à Proust [Pro13], à Prévert [Pré46] et à Perec [Per78] (voir aussi [Bra03]).

Références

- [Ada60] J. F. ADAMS – « On the non-existence of elements of Hopf invariant one », *Ann. Math.* **72** (1960), p. 20–104.
- [AH35] P. ALEXANDROFF & H. HOFF – *Topologie*, Grundlehren Math. Wissen., vol. 45, Springer-Verlag, Berlin, 1935.
- [Aud08] M. AUDIN – *Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya*, Orizzonti, Calvage & Mounet, 2008.
- [Aud09a] ———, « Dans la famille Cartan, je demande... la sœur », *Gaz. Math.* **122** (2009), p. 45–51.
- [Aud09b] ———, *Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après*, Springer, 2009.
- [Aud09c] ———, « Publier sous l'Occupation I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences », *Rev. Hist. Math.* **15** (2009), p. 5–57.
- [Aud10] ———, *Une histoire de Jacques Feldbau*, Collection T, Société Mathématique de France, Paris, 2010.

⁽⁴²⁾Cet article est disponible, grâce à Numdam, sur http://archive.numdam.org/item/CSHM_1980__1__19_0/.

- [Aud11] ———, *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil*, Documents mathématiques, Société Mathématique de France, Paris, 2011.
- [Aud12a] ———, « Cartan, Lebesgue, de Rham et l'analysis situs dans les années 1920, scènes de la vie parisienne », *Gaz. Math.* **134** (2012), p. 49–75.
- [Aud12b] ———, « La guerre des recensions (autour d'une note d'André Weil en 1940) », *Math. Semesterber.* **59** (2012), p. 243–260.
- [Aud14] ———, *Le séminaire Julia*, Centre Mersenne, 2014, en ligne <https://proceedings.centre-mersenne.org/books/>.
- [AB11] M. AUDIN & R. BRASSEUR – « Publier sous l'Occupation I. Addendum », *Rev. Hist. Math.* **17** (2011), p. 5–7, Addendum à [Aud09c].
- [Bea93] L. BEAULIEU – « A Parisian café and ten proto-Bourbaki meetings (1934–1935) », *Math. Intelligencer* **15** (1993), no. 1, p. 27–35.
- [Bor99] A. BOREL – « André Weil and algebraic topology », *Gaz. Math.* (1999), no. 80, suppl., p. 63–74, André Weil (1906–1998).
- [Bou35] N. BOURBAKI – « Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **201** (1935), p. 1309–1311.
- [Bou40] ———, *Éléments de mathématique. Les structures fondamentales de l'analyse. 3. Topologie générale. 1. Structures topologiques. 2. Structures uniformes*, Hermann, Paris, 1940.
- [Bou71] ———, *Éléments de mathématique. Variétés différentielles et analytiques, chapitres 8 à 15, fascicule de résultats*, Hermann, Paris, 1971.
- [Bou84] ———, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Masson, Paris, 1984.
- [Bra03] R. BRASSEUR – *Je me souviens encore mieux de Je me souviens*, 3^e éd., Le Castor astral, 2003.
- [Bro95] I. BROUÉ – « Henri Cartan, une vie de mathématicien », DVD, CNRS Images, 1995, visible en ligne sur <http://videotheque.cnrs.fr/doc=199>.
- [Bro11] L. BROUWER – « Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten », *Math. Ann.* **71** (1911), p. 97–115.
- [Car28] É. CARTAN – « Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos », *C. R. Acad. Sci. Paris* **187** (1928), p. 196–198.
- [Car30] ———, *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*, Mémorial des sciences mathématiques, vol. 42, Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- [Car37a] H. CARTAN – « Théorie des filtres », *C. R. Acad. Sci., Paris* **205** (1937), p. 595–598.
- [Car37b] ———, « Filtres et ultrafiltres », *C. R. Acad. Sci., Paris* **205** (1937), p. 777–779.
- [Car48] ———, *Algebraic Topology*, Published by the editors, 223 Pierce Hall, Harvard University, Cambridge, Ma, 1948, Lectures edited by George Springer and Henry Pollak.
- [Car49] ———, « Sur la notion de carapace en topologie algébrique », in *Topologie algébrique*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, vol. 12, Centre de la Recherche Scientifique, Paris, 1949, p. 1–2.
- [Car52] ———, « Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1* (Providence, RI), American Mathematical Society, 1952, p. 152–164.
- [Car61] ———, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.

- [CO10] S. CHATTERJI & M. OJANGUREN – « A glimpse on the de Rham era », in *Schweizerische Mathematische Gesellschaft 1910*, European Mathematical Society, Zürich, 2010.
- [Col03] P. COLMEZ – « Arithmétique de la fonction zêta », in *La fonction zêta*, Journées X-UPS, vol. 2002, Les Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2003, p. 37–164.
- [Fel39] J. FELDBAU – « Sur la classification des espaces fibrés », *C. R. Acad. Sci. Paris* **208** (1939), p. 1621–1623.
- [Gou33] É. GOURSAT – *Cours d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.
- [Hau14] F. HAUSDORFF – *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp, Leipzig, 1914.
- [Hin08] M. HINDRY – *Arithmétique*, Calvage et Mounet, Paris, 2008.
- [Hop28] H. HOPF – « A new proof of the Lefschetz formula on invariant points », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **14** (1928), p. 149–153.
- [Hur87] A. HURWITZ – « Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip », *Math. Ann.* **28** (1887), p. 561–585.
- [Jor70] C. JORDAN – *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870.
- [Lef26] S. LEFSCHETZ – « Intersections and transformations of complexes and manifolds. », *Trans. Amer. Math. Soc.* **28** (1926), p. 1–49.
- [MS05] V. MAZ'YA & T. SHAPOSHNIKOVA – *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, EDP-Sciences, Les Ulis, 2005, traduit de l'anglais par Gérard Tronel.
- [Mil00] H. MILLER – « Leray in Oflag XVIII A : the origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences », *Gaz. Math.* (2000), no. 84, suppl., p. 17–34, Jean Leray (1906–1998).
- [Per78] G. PEREC – *Je me souviens*, P.O.L., Hachette, Paris, 1978.
- [Poi53] H. POINCARÉ – *Œuvres, Volume VI*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [Pon74] J.-C. PONT – *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses Universitaires de France, Paris, 1974.
- [PP12] P. POPESCU-PAMPU – « Qu'est-ce que le genre ? », in *Histoires de mathématiques*, Journées X-UPS, vol. 2011, Les Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2012, p. 55–195.
- [Pré46] J. PRÉVERT – *Paroles*, Gallimard, Paris, 1946.
- [Pro13] M. PROUST – *Du côté de chez Swann*, Gallimard, Paris, 1913.
- [dR80] G. DE RHAM – « Quelques souvenirs des années 1925-1950 », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **1** (1980), p. 19–36.
- [Sch08] N. SCHAPPACHER – « Seventy years ago : The Bourbaki congress at El Escorial and other mathematical (non)events of 1936 », *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **11** (2008), no. 4, p. 721–735, Reprinted from *Math. Intelligencer* **2006**, 8–15.
- [Sei33] H. SEIFERT – « Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume », *Acta Math.* **60** (1933), p. 147–238.
- [Ser55] J.-P. SERRE – « Faisceaux algébriques cohérents », *Ann. of Math. (2)* **61** (1955), p. 197–278.
- [Ser75] ———, « Les séminaires Cartan », 1975, in [Ser86].
- [Ser86] ———, *Collected papers, Volume III*, Springer, 1986.
- [Ser99] ———, « La vie et l'œuvre d'André Weil », *Enseign. Math.* **45** (1999), p. 5–16.
- [SS00] R. SIEGMUND-SCHULTZE – « An autobiographical document (1953) by Jean Leray on his time as rector of the “université en captivité” and prisoner of war in Austria 1940–1945 », *Gaz. Math.* (2000), no. 84, suppl., p. 11–15, Jean Leray (1906–1998).

- [Tyc29] A. TYCHONOFF – « Über die topologische Erweiterung von Räumen », *Math. Ann.* **102** (1929), p. 544–561.
- [Wei35] A. WEIL – « Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan », *C. R. Acad. Sci. Paris* **200** (1935), p. 518–520.
- [Wei37] ———, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Publications de l'Institut de mathématiques de l'université de Strasbourg, Hermann, Paris, 1937.
- [Wei40] ———, « Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini », *C. R. Acad. Sci. Paris* **210** (1940), p. 592–594.
- [Wei46] ———, *Foundations of Algebraic Geometry*, Ame. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. 29, American Mathematical Society, New York, 1946.
- [Wei48] ———, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Actualités Sci. Ind., vol. 1041, Hermann et Cie., Paris, 1948, Aussi : Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **7** (1945).
- [Wei49] ———, « Numbers of solutions of equations in finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 497–508.
- [Wei52] ———, « Sur les théorèmes de de Rham », *Comment. Math. Helv.* **26** (1952), p. 119–145.
- [Wei79a] ———, *Œuvres scientifiques, Volume I*, Springer, 1979.
- [Wei79b] ———, *Œuvres scientifiques, Volume II*, Springer, 1979.
- [Wei79c] ———, *Œuvres scientifiques, Volume III*, Springer, 1979.
- [Wei79d] ———, « Riemann, Betti and the birth of topology », *Arch. Hist. Exact Sci.* **20** (1979), p. 91–96.
- [Wei91] ———, *Souvenirs d'apprentissage*, Vita Mathematica, vol. 6, Birkhäuser, Basel, 1991.
- [Wei09] S. WEIL – *Chez les Weil*, Buchet–Chastel, Paris, 2009.
- [Whi88] H. WHITNEY – « Moscow 1935 : topology moving toward America », in *A century of mathematics in America, Part I*, Hist. Math., vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988, p. 97–117.

Michèle Audin, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
E-mail : michele.audin@math.unistra.fr