PRÉFACE

Remontant à Euler au XVIII^e siècle (fluide parfait incompressible) et Navier puis Stokes au XIX^e siècle (fluide visqueux), la théorie mathématique de la mécanique des fluides repose en bonne partie sur les travaux de Leray débutés dans les années 1930. Les textes de ce volume en dégagent les concepts fondamentaux à travers diverses notions de solutions, donnent quelques résultats importants d'existence et d'unicité, et font comprendre la difficulté d'un des problèmes du millénaire proposés par la fondation Clay.

Nous tenons à remercier la direction de l'École polytechnique, et tout particulièrement la Direction des Études, pour l'aide matérielle importante qu'elles ont apportée à la préparation de ces journées et à la publication de ce volume. Nous remercions aussi le secrétariat du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, notamment Carole Juppin et Michèle Lavallette.

Pascale Harinck, Alain Plagne et Claude Sabbah

INTRODUCTION

Dans cette courte introduction, nous donnons un bref (et certainement incomplet) aperçu de l'histoire de l'étude mathématique de la mécanique des fluides, puis nous présentons les aspects que nous avons retenus pour ces exposés.

Un bref aperçu historique

Les équations d'Euler et de Navier-Stokes. L'étude du comportement des fluides (liquides ou gaz) remonte au moins à Archimède et à la Grèce Antique, mais c'est à partir du XVI^e siècle que la mathématisation de la Physique permet une étude systématique de la mécanique des fluides. C'est bien sûr à I. Newton que l'on doit l'essor des mathématiques en Physique, avec notamment les lois fondamentales de la dynamique qu'il introduit en 1687 (voir [6]). De nombreux phénomènes physiques peuvent ainsi être mis en équations : pour la mécanique des fluides il faut citer par exemple D. Bernoulli, qui analyse la conservation de l'énergie des fluides non visqueux dès 1738 [1]. Ce sont J. d'Alembert et L. Euler qui ont pu établir les équations fondamentales de la mécanique des fluides, appelées aujourd'hui équations d'Euler. Ces équations voient le jour suite à un Prix de Mathématiques proposé en 1748 par l'Académie des sciences de Berlin : il s'agit de « *déterminer la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide, tant par rapport à la figure et aux divers degrés de vitesse des* *corps qu'à la densité et aux divers degrés de compression du fluide* ». En d'autres termes, il s'agit d'établir une théorie permettant d'interpréter, voire d'anticiper, le mouvement des fluides (ici en présence d'un obstacle solide). J. d'Alembert soumet en 1749 un manuscrit de 137 pages [2] qui propose une nouvelle vision de l'hydrodynamique. L'académie lui refuse le prix, qui est attribué à un protégé de L. Euler : J. Adami, dont le manuscrit a aujourd'hui disparu. On doit néanmoins à d'Alembert, dans ce manuscrit, d'avoir introduit dans l'étude de la dynamique des fluides les notions fondamentales suivantes :

- les dérivées partielles
- le champ de vitesses.

Son étude est cependant incomplète, du fait qu'il ne parvient pas à dégager correctement la notion de *pression*, fondamentale pour comprendre le caractère incompressible des fluides. En 1755, L. Euler publie un traité ([3]) dans lequel apparaît pour la première fois le système complet d'équations aux dérivées partielles décrivant les fluides parfaits incompressibles. Il a incontestablement lu le manuscrit de d'Alembert et s'en est sans nul doute inspiré. Néanmoins son travail est complètement abouti, contrairement à celui de d'Alembert, et en outre il parvient à dégager la notion de gradient de pression. Si nous notons par u le champ de vitesse du fluide, qui dépend du temps t et de la position x (la formulation de ces équations est donc *eulérienne* et non *lagrangienne*, au sens où l'on ne décrit pas la trajectoire de chacune des particules du fluide, mais plutôt le champ de vitesses en chaque point et à chaque instant) et si p désigne sa pression, les équations d'Euler s'écrivent

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

La première équation représente la conservation de la quantité de mouvement, alors que la seconde correspond à la conservation de la masse (le fluide est *incompressible*). Dès 1752 cependant, d'Alembert s'aperçoit qu'un corps plongé dans un liquide satisfaisant aux principes décrits par ces équations peut se déplacer sans se voir opposer aucune résistance, ce qui est manifestement contraire à l'intuition et à l'expérience physique. C'est ce qu'on appelle le « paradoxe de d'Alembert », qu'il formule ainsi (traduction libre) : « *Il me semble que la théorie, développée avec toute la rigueur possible, donne, au moins dans plusieurs cas, une résistance nulle, paradoxe singulier que je laisse les Géomètres futurs résoudre* ». Pour comprendre pourquoi un solide plongé dans un liquide va subir en général une force de résistance, tendant à le freiner, il faut en fait prendre en compte des phénomènes de *frottement* au niveau moléculaire dans le fluide : lors de son évolution, un fluide va en effet avoir tendance à dissiper de l'énergie, sous forme de chaleur, et ce, simplement par le frottement d'une couche de fluide sur l'autre. Inclure un tel phénomène dans les équations d'Euler semble difficile puisque les équations d'Euler formulent l'écoulement de la vitesse macroscopique du fluide, alors que cette dissipation d'énergie a lieu à un niveau microscopique. On doit à C. Navier [5] l'idée, en 1820, d'introduire un terme supplémentaire à l'équation d'Euler, censé représenter cette perte d'énergie dans le fluide. En simplifiant à outrance sa démarche, on peut considérer qu'il a cherché à incorporer aux équations d'Euler précisément une équation dite de la chaleur. Cette équation s'écrit ainsi : si T est la température d'un solide, son évolution au cours du temps obéit à

$$\partial_t T - \Delta T = 0. \tag{C}$$

Ainsi C. Navier, suivi par G. Stokes en 1845 ([7]) propose le modèle suivant pour décrire l'évolution d'un fluide visqueux (ce terme rendant compte précisément de cette dissipation d'énergie sous forme de chaleur) :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \tag{NS}$$

Le paramètre $\nu > 0$, la *viscosité* du fluide, est une mesure de l'écart entre un fluide visqueux et un fluide parfait.

Résolution de l'équation de Navier-Stokes. Le premier réflexe que l'on peut avoir à la vue de cette équation est de chercher à obtenir des solutions analytiques explicites. Malheureusement, hormis quelques configurations particulières extrêmement simplifiées, les chercheurs de l'époque de C. Navier et de G. Stokes se sont rapidement convaincus que cette démarche était vouée à l'échec. L'étape suivante a alors consisté à chercher à construire des solutions approchées, par exemple sous forme de série de fonctions trigonométriques ou polynomiales, à la manière de J. Fourier ou de A. Cauchy. Cela a conduit à développer une théorie de *résolution d'équations aux dérivées partielles.* Pour développer une telle théorie, il faut tout d'abord s'entendre sur ce que l'on appelle résolution de l'équation, dès lors que l'on abandonne l'idée d'en trouver des solutions explicites. En suivant J. Hadamard nous dirons qu'une équation aux dérivées partielles est *bien posée* si les trois conditions suivantes sont satisfaites, (existence, unicité, stabilité) :

- l'état du fluide étant supposé connu à un instant donné (initialisons ce temps à $t = 0$), il existe une solution à l'équation aux instants futurs, coïncidant avec cet état initial à l'instant $t = 0$;
- il n'existe qu'une seule solution à l'équation coïncidant avec cet état initial à l'instant $t = 0$;
- cette solution est stable sous perturbations, du moins pendant un certain temps.

D'un point de vue physique, ces trois principes correspondent au fait que

- il est effectivement possible de réaliser une expérience correspondant à l'évolution décrite par les équations ;
- si l'on réalise l'expérience deux fois, on trouvera deux fois le même résultat ;
- si l'on fait de petites erreurs de mesure, cela ne modifiera pas trop violemment la solution (pendant un temps fixé).

Ce dernier point est particulièrement important si l'on songe par exemple à des applications numériques : il est impossible d'implémenter l'équation exacte dans un ordinateur, on est obligé de la remplacer par une approximation (un ordinateur ne reconnaît que des quantités discrètes, et pas continues comme les variables x et t qu'il faut donc discrétiser au préalable par exemple) et il est bon de vérifier tout d'abord que la solution ne sera pas trop sensible à ce type de procédé.

Sait-on mener à bien ce programme ? La réponse est malheureusement en général non... Si l'écoulement a une direction invariante (ce qui n'est pas souvent réaliste, mais aide beaucoup mathématiquement) alors on sait depuis les travaux fondamentaux de J. Leray ([4]) en 1934 que les équations sont bien posées au sens précédent. En trois dimensions d'espace en revanche la situation est beaucoup moins claire, et pour résumer l'état de nos connaissances sur la question (qui remontent presque toutes d'ailleurs aux travaux de J. Leray, du moins pour les idées fondamentales sous-jacentes) on peut dire que l'on ne sait résoudre ces équations, au sens précédent, que si l'état du fluide à l'instant initial est suffisamment proche du repos. Dans le cas contraire (une mer un peu agitée par exemple) on n'est pas capable de décider si la solution de l'équation correspondant à cet état initial va exister éternellement ou exploser en temps fini. Cette dernière notion signifie qu'à un certain instant ultérieur, une des composantes de la vitesse va devenir plus grande que n'importe quel nombre donné à l'avance (on parle de singularité du champ de vitesse). Cela peut paraître physiquement peu concevable... la signification physique de ce fait est simplement qu'à partir d'un certain instant, la vitesse du fluide devient très grande et en particulier dépasse la vitesse du son. Mais alors l'hypothèse d'incompressibilité du fluide ne peut plus être satisfaite, et il faut simplement changer de modèle à cet instant. D'un point de vue physique, de telles solutions « explosives » sont donc une indication que le modèle mathématique choisi cesse d'être valable.

Notons que la résolution des équations de Navier-Stokes fait partie de l'un des sept *Problèmes du Millénaire* proposés par la Fondation Clay. Pour gagner le million de dollars à la clef, il s'agit soit de démontrer que les équations de Navier-Stokes sont bien posées au sens rappelé au-dessus, pour toute donnée initiale « suffisamment régulière » (mais arbitrairement loin du repos), soit de démontrer qu'il existe un état initial du fluide tel qu'à un certain instant ultérieur, il « explose en temps fini » comme expliqué ci-dessus.

Jean-Yves Chemin, Isabelle Gallagher et David Gérard-Varet

Références

[1] D. Bernoulli – « Hydrodynamica », 1738, version numérisée accessible sur `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k15177430`.

[2] J. d'Alembert – « Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides », 1752, version numérisée accessible sur `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k206036b`.

[3] L. Euler – « Principles of the motion of fluids », *Physica D* **237** (2008), p. 1840–1854, Traduction anglaise de l'article original de 1756/57.

[4] J. Leray – « Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace », *Acta Math.* **63** (1933), p. 193–248.

[5] C. Navier – « Mémoire sur les lois du mouvement des fluides », *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France* **6** (1822), p. 375–394.

[6] I. Newton – « Philosophiae naturalis principia mathematica », 1687, version numérisée accessible sur `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3363w`.

[7] G. Stokes – « On the theories of internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids », *Trans. Camb. Phil. Soc.* **8** (1845), p. 287–319.