



# Journées mathématiques X-UPS

Année 2004

Graphes

Alexander ZVONKIN

## Cartes et dessins d'enfants

*Journées mathématiques X-UPS* (2004), p. 55-77.

<https://doi.org/10.5802/xups.2004-04>

© Les auteurs, 2004.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique  
Route de Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS,  
Institut polytechnique de Paris  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

## CARTES ET DESSINS D’ENFANTS

*par*

Alexander Zvonkin

---

**Résumé.** Les *cartes* sont des graphes munis d’un plongement spécifique dans une surface, par exemple dans la sphère. Les *dessins d’enfants* sont des représentations des cartes comme images réciproques d’un segment via une fonction méromorphe. Ainsi, la surface en question acquiert une structure complexe et devient une surface de Riemann. Une représentation combinatoire des cartes à l’aide de permutations permet de traiter ces objets topologiques d’une manière constructive, mais aussi fournit plusieurs invariants subtils des dessins d’enfants.

### Table des matières

1. Surfaces.....	56
1.1. D’abord, un peu de science-fiction.....	56
1.2. Variétés et leur classification.....	57
2. Cartes.....	59
2.1. C’est quoi une carte?.....	59
2.2. Coder les cartes à l’aide des permutations.....	62
2.3. Groupe cartographique.....	66
3. Dessins d’enfants.....	67
3.1. Comment représenter les surfaces de Riemann....	67
3.2. Exemples.....	70
3.3. Exemple d’application : une borne de Birch-Chowla- Hall-Schinzel-Davenport-Stothers-Zannier.....	75
Pour terminer : une pub.....	77
Références.....	77

## 1. Surfaces

**1.1. D’abord, un peu de science-fiction.** Supposons que nous habitons sur une planète dont la forme nous est inconnue, et que nous ne disposions pas de satellites ni d’autres outils similaires pour observer cette forme de l’extérieur (tout se passe au XV<sup>e</sup> ou au XVI<sup>e</sup> siècle). Appelons cette planète Terre. Les données empiriques nous convainquent que chaque « petit » domaine de la Terre peut être représenté, avec une fidélité raisonnable, par un plan dessiné sur une feuille de papier. En termes mathématiques cela veut dire que le voisinage de chaque point de la surface de la Terre est homéomorphe à un disque ouvert dans  $\mathbb{R}^2$ . D’où la première idée, tout à fait naturelle, que la surface de la Terre est un plan. Puis, des expériences beaucoup plus approfondies et coûteuses, dont le fameux voyage de Magellan, montrent deux faits nouveaux. Premièrement, la « taille » de la Terre est finie. Deuxièmement, si on part d’un endroit dans une direction, on peut y revenir de la direction opposée.

Maintenant, la question se pose : est-ce que tout cela suffit pour affirmer que la Terre a une forme sphérique ?

La réponse est non. Sur la figure 1, nous avons dessiné une autre forme possible ainsi que le voyage imaginaire de Magellan.

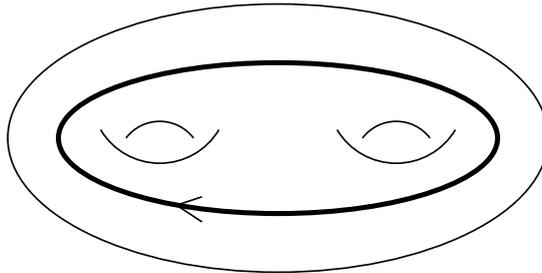


FIGURE 1. Le voyage de Magellan

Cette question un peu ludique devient tout à fait sérieuse si on la pose à propos de notre Univers. Seulement un très petit morceau de l’Univers est accessible à notre observation directe, et ce morceau ressemble à une boule ouverte dans  $\mathbb{R}^3$ . On peut raisonnablement

supposer que la même chose est vraie partout. Or, cela ne détermine aucunement la structure globale de l'Univers. Il est bien possible que deux étoiles que nous voyons aujourd'hui en deux points opposés du firmament soient en fait deux images, sous deux aspects différents, de la même étoile. Le modèle correspondant, intitulé « modèle de l'Univers chiffonné », est sérieusement discuté par des physiciens et des astronomes.

**1.2. Variétés et leur classification.** Nous venons d'introduire, d'une manière informelle, une notion mathématique très importante, celle de variété. Voici une définition plus précise :

**Définition.** Un espace topologique  $M$  est une *variété* de dimension  $d$  si tout point  $x \in M$  possède un voisinage  $U$  homéomorphe à une boule ouverte dans  $\mathbb{R}^d$ . Nous avons donc un couple  $(U, \varphi)$  où  $U$  est un voisinage dans  $M$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  un homéomorphisme entre  $U$  et une boule ouverte  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^d$ . Un ensemble de couples comme cela qui couvrent  $M$  tout entier est un *atlas*. La variété  $M$  est *compacte* si de chaque recouvrement par des ouverts  $U$  on peut extraire un sous-recouvrement fini.

La classification des variétés de dimension 3 (des « univers possibles ») est très compliquée et reste un domaine de recherche très actif. Même pour la plus simple de toutes les variétés de dimension 3 compactes, la 3-sphère, le premier algorithme qui la reconnaît n'a été publié qu'en 1995. En dimension 4 une classification est carrément impossible : déjà en 1958, A.A. Markov a démontré qu'il n'existe pas d'algorithme qui puisse comparer deux variétés de dimension 4 et dire si elles sont homéomorphes ou non. Il est même impossible de répondre, pour une variété donnée, à la question de savoir si elle est la sphère de dimension 4 ou non. La situation devient encore plus dramatique en dimension 5 : cette fois-ci nous ne pouvons même pas dire, dans le cas général, si un objet donné est une variété ou non. Pour cela, il faudrait pouvoir vérifier qu'un voisinage d'un point soit une boule de dimension 5 ; et pour cela, vérifier que sa frontière est une sphère de dimension 4 ; or, ceci est impossible.

Par contre, en dimension 2, la classification des variétés est très simple. Tout d'abord, comme dans toute autre dimension, les variétés se divisent en deux catégories, orientables et non orientables. Dans cet article, nous allons parler uniquement du cas orientable. Alors, les variétés de dimension 2 orientables se classifient selon un paramètre entier, leur *genre* (habituellement noté  $g$ ), ou « nombre de trous », voir la figure 2.

Pour ne pas toujours répéter « une variété compacte orientable de dimension 2 » nous utiliserons le terme *surface*.

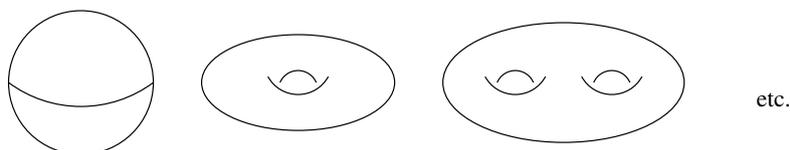


FIGURE 2. Les variétés compactes orientables de dimension 2 et de genre  $g = 0$  (la sphère),  $g = 1$  (le tore) et  $g = 2$ .

Un autre aspect peut intervenir dans le problème de classification. Soit deux voisinages  $U_1, U_2 \subset M$  avec une intersection non vide  $V = U_1 \cap U_2$ . Si deux couples  $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$  font partie de l'atlas, alors ils donnent deux « plans »  $\varphi_1(V)$  et  $\varphi_2(V)$  du même terrain  $V$ , et on peut avoir envie de les comparer. La fonction  $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  sert à cela, voir la figure 3. Les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des homéomorphismes, donc  $f$  en est un aussi. Mais, étant donné que les régions  $\varphi_1(V)$  et  $\varphi_2(V)$  sont des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^d$ , nous pouvons considérer des cas spéciaux quand  $f$  appartient, disons, à la classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , voire  $C^\infty$ . Les variétés qui vérifient cette condition supplémentaire sont *lisses*. On peut, enfin, demander encore plus que cela. Si  $d$  est pair, au lieu de  $\mathbb{R}^d$  on peut parler de  $\mathbb{C}^{d/2}$  et ne s'autoriser que les fonctions holomorphes. On obtient alors les variétés *analytiques complexes* de dimension complexe  $d/2$ .

On découvre alors un nouveau phénomène. Deux variétés lisses peuvent être isomorphes en tant que variétés topologiques (c'est-à-dire homéomorphes) mais non isomorphes en tant que variétés lisses (non difféomorphes). Par exemple, il existe exactement vingt-huit

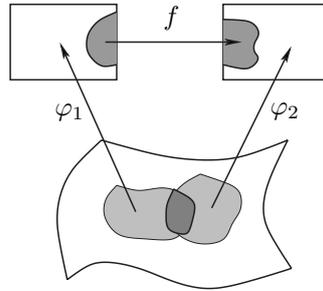


FIGURE 3. Deux plans du même terrain

« sphères » de dimension 7, toutes homéomorphes à la sphère standard (l'une des vingt-huit), mais deux à deux non difféomorphes.

Nous n'allons pas nous pencher sur des choses si compliquées car déjà en dimension 2 les classifications topologique et analytique sont très différentes. Les variétés analytiques de dimension complexe 1 s'appellent *surfaces de Riemann* et aussi *courbes complexes*. Il existe une seule surface de Riemann de genre 0, la sphère complexe de Riemann. Mais déjà pour le genre  $g = 1$  il existe une infinité de surfaces de Riemann non isomorphes, bien qu'elles soient toutes homéomorphes au tore. Pour des raisons historiques les surfaces de Riemann de genre 1 s'appellent *courbes elliptiques* (une appellation que d'aucuns trouvent surprenante car du point de vue géométrique l'objet en question n'est ni une courbe ni une ellipse).

La « structure complexe » des courbes elliptiques dépend d'un seul paramètre complexe. Pour les genres supérieurs,  $g \geq 2$ , le nombre de paramètres complexes, ou *modules*, est  $3g - 3$ . L'étude des modules des structures complexes des surfaces de Riemann est aujourd'hui un des domaines de recherche très actifs.

## 2. Cartes

**2.1. C'est quoi une carte ?** Dans la section précédente, nous avons parlé d'une approche algorithmique des variétés. Or, pour traiter de manière algorithmique une classe d'objets, il faut tout d'abord les représenter sous une forme compréhensible par les ordinateurs. Pour

cela, en dimension 2, on peut se servir des *cartes*. Il apparaît très vite qu'en tant qu'objet d'étude, les cartes sont beaucoup plus intéressantes que les variétés elles-mêmes.

Une carte est un graphe dessiné sur une surface. Plus précisément :

**Définition.** Une *carte* est un graphe « dessiné sur » (on dit aussi « plongé dans ») une surface (c'est-à-dire, une variété compacte orientable de dimension 2) de telle manière que :

- les sommets du graphe sont représentés par des points ;
- les arêtes sont représentées par des arcs de courbes qui relient les sommets entre eux et *qui ne se coupent pas* en dehors des sommets ;
- le complément du graphe dans la surface est une union disjointe de régions (*faces*), chacune homéomorphe au disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Le *genre* d'une carte est le genre de la surface sous-jacente.

Nous acceptons les graphes avec des *arêtes multiples* (qui relient entre eux la même paire de sommets) et des *boucles* (les arêtes qui vont d'un sommet à lui-même), mais n'acceptons pas les graphes non connexes.

Il faut aussi remarquer qu'un graphe en tant que tel ne possède pas de faces : il n'a que des sommets et des arêtes. Quand on travaille avec les graphes, on a l'habitude de les dessiner, et on ne se rend pas forcément compte que, ce faisant, on y ajoute une structure mathématique supplémentaire. Or, il est clair que souvent le même graphe peut donner lieu à plusieurs dessins différents. On peut voir quelques exemples sur les figures 4 et 5 (les cartes dites « planaires » sont considérées non pas sur le plan mais sur la sphère).

**Exercice.** Dessiner le graphe du cube sur le tore d'une telle manière que la carte ainsi obtenue ait quatre faces hexagonales (au lieu de six faces quadrangulaires pour le cube habituel).

Soit une carte de genre  $g$  ; notons  $S$  le nombre de ses sommets,  $A$  le nombre des arêtes, et  $F$  le nombre des faces. Alors, le nombre  $S - A + F$  s'appelle la *caractéristique d'Euler* de la carte et ne dépend que de la surface sous-jacente :

$$S - A + F = 2 - 2g.$$

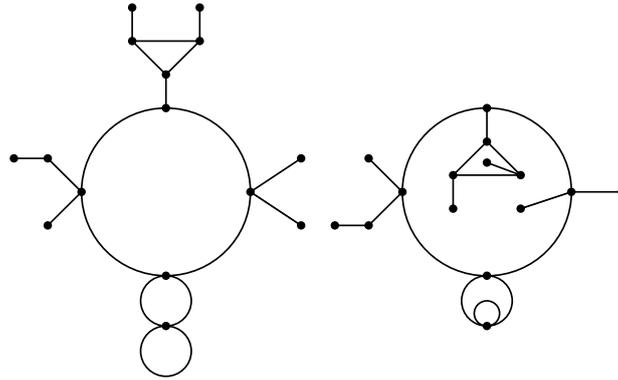


FIGURE 4. Le même graphe mais des cartes différentes

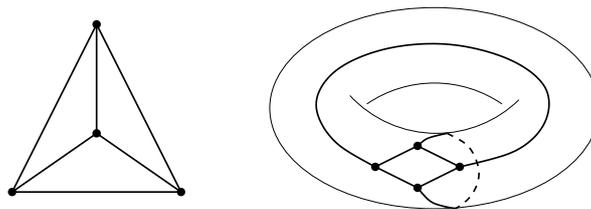


FIGURE 5. Le graphe complet  $K_4$  dessiné sur la sphère et sur le tore

Cette formule s'appelle la *formule d'Euler*, bien qu'Euler l'ait établie uniquement pour le genre 0, c'est-à-dire pour la sphère. L'article d'Euler date de 1759, et ce n'est qu'en 1812 que Simon Lhuilier a démontré la formule dans le cas général. À cette époque on considérait que les théorèmes pouvaient admettre des « exceptions ». Dans son article, Lhuilier étudie trois sortes d'exceptions au théorème d'Euler, dont la suivante :

La seconde sorte d'exception a lieu, lorsque le polyèdre est *annulaire* ; c'est-à-dire, lorsqu'étant d'ailleurs compris sous une surface unique, il a une ouverture qui le traverse de part en part.

Quant à la preuve du théorème, l'idée en est simple. On peut introduire des opérations sur les cartes, comme, par exemple : mettre un nouveau sommet au milieu d'une arête. On remarque alors qu'on

a obtenu un sommet de plus et une arête de plus ; par conséquent, l'expression  $S - A + F$  reste constante. Ou bien : prendre une face et tracer, à l'intérieur de cette face, une nouvelle arête qui relie un sommet à un autre (une arête de plus et une face de plus) ; ou bien : prendre deux sommets adjacents, éliminer l'arête qui les relie l'un à l'autre, et fusionner les sommets (une arête de moins et un sommet de moins) ; et ainsi de suite. On peut inventer de telles opérations à volonté, avec toujours le même résultat : la caractéristique d'Euler ne change pas. Il reste tout de même à démontrer que toute carte de genre  $g$  peut être ainsi obtenue à partir de n'importe quelle autre.

**2.2. Coder les cartes à l'aide des permutations.** Un graphe est déjà un objet tout prêt à être traité algorithmiquement. Mais si nous voulons encoder une carte, il nous manque toujours quelques éléments qui doivent être de nature discrète mais qui permettraient de reconstituer l'information topologique concernant le plongement du graphe dans une surface. Une étude attentive des dessins des figures 4 et 5 nous donne une idée. Dans la structure de graphe, on possède l'information sur l'incidence des arêtes aux sommets. Ce qu'il faut y ajouter, c'est une information concernant l'ordre circulaire des arêtes, ou plutôt des *brins d'arêtes*, quand on tourne autour d'un sommet, par exemple, dans le sens trigonométrique. (Il n'est pas inutile de rappeler que notre surface est orientable et donc « le sens trigonométrique » a bien un sens.) Prenons donc l'ensemble  $B$  des brins d'arêtes ; il y a bien évidemment deux fois plus de brins que d'arêtes. Soit  $\alpha$  une permutation sur  $B$  qui associe à chaque brin le brin opposé de la même arête (chaque cycle de  $\alpha$  est donc de longueur 2). Soit  $\sigma$  une permutation sur  $B$  qui associe à chaque brin le brin suivant, dans ordre trigonométrique, incident au même sommet. (Si le degré d'un sommet est 1 et il y a donc un seul brin qui lui est incident, alors le « brin suivant », c'est lui-même.)

Un petit exemple est donné sur la figure 6. Pour les deux cartes de cette figure,  $\alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$ , mais les permutations  $\sigma$  sont différentes : pour la carte de gauche,  $\sigma_1 = (1, 3, 5, 6)$  et pour celle de droite,  $\sigma_2 = (1, 5, 3, 6)$  (2 et 4 étant des points fixes de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ).

Tout cela nous mène à la définition suivante.

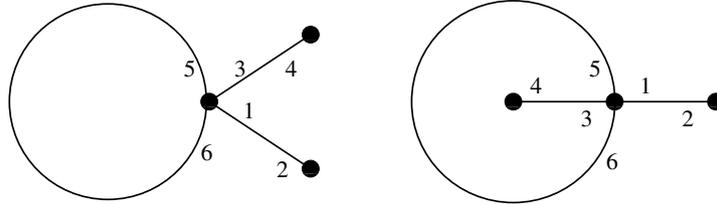


FIGURE 6. Exemple de codage de cartes par permutations

**Définition.** Une *carte combinatoire* est un triplet  $(B, \sigma, \alpha)$  où  $B$  est un ensemble fini et  $\sigma, \alpha$  deux permutations sur  $B$  telles que :

- tous les cycles de  $\alpha$  sont de longueur 2;
- le groupe  $G = \langle \sigma, \alpha \rangle$  engendré par les permutations  $\sigma, \alpha$  agit transitivement sur  $B$  (ce qui veut dire que la carte est connexe).

On peut dire, un peu formellement, que les arêtes de la carte sont les cycles de  $\alpha$  et les sommets sont les cycles de  $\sigma$ . La question qui reste est : comment, à partir de ce codage-là, reconstituer les faces ? Il se trouve que les faces correspondent aux cycles de la permutation  $\varphi = \alpha^{-1}\sigma^{-1}$ . Cette correspondance est illustrée sur la figure 7.

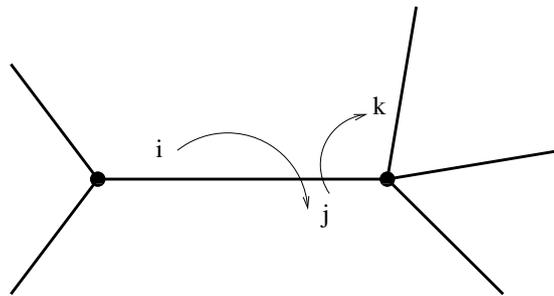


FIGURE 7. Comment « calculer » les faces d'une carte en connaissant les permutations  $\sigma$  et  $\alpha$  : pour aller autour d'une face dans le sens trigonométrique il faut répéter les permutations  $\alpha^{-1}$  et  $\sigma^{-1}$

Pour les cartes de la figure 6 on calcule  $\varphi_1 = (1, 2, 6, 3, 4)$  et  $\varphi_2 = (1, 2, 6)(3, 4, 5)$ . On peut désormais *définir* les faces comme étant les

cycles de la permutation  $\varphi = \alpha^{-1}\sigma^{-1}$ , et le degré d'une face comme étant la longueur du cycle correspondant. (Géométriquement, le degré d'une face est le nombre d'arêtes qu'on longe en faisant le tour de la face.)

Voici quelques règles mnémotechniques, conventions et petites astuces utiles. Pour les notations des permutations : on utilise « sigma » comme sommet, « alpha » comme arête, « phi » comme face. Pour le marquage : si, en se déplaçant le long d'une arête de l'un de ses sommets vers son milieu, on met l'étiquette du brin correspondant sur la rive gauche, alors toutes les étiquettes qui correspondent à une face se trouveront à l'intérieur de cette face. Il est également important de comprendre que, quel que soit l'ordre circulaire des brins autour des sommets, choisi indépendamment pour chaque sommet, cela donne lieu à une carte. Ainsi, pour un graphe donné ayant  $n$  sommets de degrés  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , le nombre des cartes peut *a priori* aller jusqu'à  $\prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$ .

Maintenant nous disposons d'un outil qui nous permet de *calculer* au lieu de *dessiner*, ce qui permet d'aborder des questions qui seraient autrement trop difficiles.

**Exercice.** Dessiner le graphe de l'icosaèdre sur une surface de genre 4 d'une telle manière qu'il y ait 12 faces de degré 5.

**Solution.** Prendre l'icosaèdre habituel, c'est-à-dire planaire, qui possède 20 faces de degré 3 ; écrire les permutations  $\sigma$  et  $\alpha$  correspondantes ; enfin, remplacer  $\sigma$  par  $\sigma^2$ . Un cycle de longueur 5 de la permutation  $\alpha^{-1}\sigma^{-2}$  est montré sur la figure 8. Les petites flèches montrent l'action de la permutation  $\sigma^{-2}$ . Quant au genre  $g = 4$ , il se calcule à l'aide de la formule d'Euler :  $S - A + F = 12 - 30 + 12 = -6 = 2 - 2g$ .

Historiquement, la représentation des cartes à l'aide des permutations a été introduite par W. Dyck (1888) et L. Heffter (1891) et peut-être même par W.R. Hamilton (1856), bien que, pour extraire cette idée du texte de Hamilton, il faut déchiffrer. Puis, la construction a été oubliée, et redécouverte par J.R. Edmonds [3] en 1960.

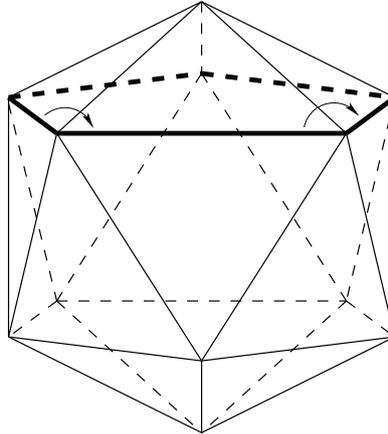


FIGURE 8. Un cycle de longueur 5 de la permutation  $\alpha^{-1}\sigma^{-2}$

Un détail mérite encore d'être mentionné. Étant donné que tous les cycles de  $\alpha$  sont de longueur 2, nous avons  $\alpha^{-1} = \alpha$ . Pourquoi alors avons-nous écrit  $\varphi = \alpha^{-1}\sigma^{-1}$  au lieu de  $\varphi = \alpha\sigma^{-1}$ ? Il y a deux réponses à cela. En 1975, Robert Cori [2] a introduit une généralisation de la notion de carte, celle d'hypercarte. Comparez cette définition avec la précédente :

**Définition.** Une *hypercarte* est un triplet  $(B, \sigma, \alpha)$  où  $B$  est un ensemble fini et  $\sigma, \alpha$  deux permutations sur  $B$  telles que le groupe  $G = \langle \sigma, \alpha \rangle$  agisse transitivement sur  $B$ .

Les représentations géométriques des hypercartes peuvent varier. Imaginons, par exemple, que nous ayons inséré au milieu de chaque arête d'une carte ordinaire un sommet supplémentaire « de couleur blanche ». Alors tous les sommets blancs seront de degré 2. Et bien, pour les hypercartes ils peuvent être de degré quelconque. Une hyperarête peut avoir un, deux ou plusieurs brins. Il se trouve que les hypercartes jouent un rôle encore plus fondamental que les cartes, surtout pour la théorie des dessins d'enfants (voir plus bas). Et voilà, les faces d'une hypercarte correspondent aux cycles de la permutation  $\varphi = \alpha^{-1}\sigma^{-1}$  et non pas à ceux de  $\alpha\sigma^{-1}$ .

Il existe aussi une deuxième raison, de nature plutôt esthétique : on obtient tout à fait naturellement une très belle formule

$$\sigma\alpha\varphi = 1.$$

Qui plus est, cette formule nous rapproche de la théorie des revêtements ramifiés et des surfaces de Riemann.

**2.3. Groupe cartographique.** La correspondance entre les cartes et les permutations marche dans les deux directions. Vous gribouillez un petit dessin sur une feuille de papier ; vous marquez ses brins et écrivez les permutations correspondantes  $\sigma$  et  $\alpha$  ; et cela vous donne un groupe de permutations  $G = \langle \sigma, \alpha \rangle$  engendré par ces deux permutations. Ce groupe s'appelle *groupe cartographique* de la carte en question. En fait, le plus souvent vous obtiendrez soit le groupe symétrique  $S_n$ , soit le groupe alterné  $A_n$ . C'est un fait plus général : si on choisit au hasard deux permutations de degré  $n$ , on obtient un de ces deux groupes avec une probabilité  $1 - 1/n + O(1/n^2)$ . Mais de temps à autre vous pouvez tomber sur quelque chose de plus intéressant ; en voici un exemple.

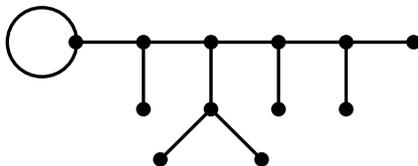


FIGURE 9. Une carte représentant le groupe de Mathieu  $M_{24}$  : elle possède 12 arêtes, donc 24 brins ; les permutations  $\sigma$  et  $\alpha$  correspondantes agissent sur 24 éléments et engendrent le groupe  $M_{24}$

Le groupe de Mathieu  $M_{24}$ , découvert par Émile Mathieu en 1861, est, selon John H. Conway, « le plus remarquable de tous les groupes finis ». Il est membre « aîné » d'une famille de 5 groupes de Mathieu, et aussi membre d'une plus grande famille de 26 *groupes simples sporadiques*. La classification des groupes simples sporadiques est le résultat « record » des mathématiques modernes dont la preuve complète est estimée à 15 mille pages. Le groupe  $M_{24}$  « participe » à la

construction de plusieurs autres groupes sporadiques. Imaginez que vous vous trouviez au milieu d'un désert, et vous ayez oublié les générateurs de  $M_{24}$ . Que faire ? Rappelez-vous alors le petit dessin de la figure 9. Il suffit d'écrire les permutations  $\sigma$  et  $\alpha$  correspondantes, et ces deux permutations engendrent le groupe voulu. Se souvenir d'une image est plus facile que d'une paire de permutations, trop impersonnelles pour notre esprit ; dessiner c'est plus agréable que calculer, n'est-ce pas ?

### 3. Dessins d'enfants

Jusqu'à maintenant notre aperçu du sujet était un peu succinct et « en pointillé ». À partir de ce maintenant, bon gré, mal gré, il devient encore plus superficiel.

**3.1. Comment représenter les surfaces de Riemann.** Deux méthodes sont les plus répandues. La première consiste à représenter une surface comme une courbe algébrique complexe, c'est-à-dire, comme l'ensemble des solutions d'une équation  $F(x, y) = 0$ , où  $F \in \mathbb{C}[x, y]$  est un polynôme à coefficients complexes. En fait, si on veut être plus exact, il faut considérer un polynôme *homogène*  $F(x, y, z)$ , et considérer les solutions non pas dans  $\mathbb{C}^2$  mais dans le *plan projectif*  $\mathbb{CP}^2$  ; mais ce sont déjà des détails techniques. On peut aussi considérer des systèmes de  $k$  équations à  $k + 1$  variables. Sauf quelques cas particuliers, il n'y a aucune canonicité dans cette représentation, ni de méthodes standardisées de vérification d'isomorphisme de deux surfaces.

La deuxième manière est d'utiliser les revêtements ramifiés de la sphère complexe de Riemann  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , qui est aussi la droite projective complexe  $\mathbb{CP}^1$ . On peut trouver les détails de cette construction dans pratiquement tous les manuels sur les surfaces de Riemann. Un revêtement est une paire  $(X, f)$ , où  $X$  est une surface de Riemann et  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  une fonction méromorphe non constante. Il se trouve que, à part un nombre fini de points  $z_1, \dots, z_k \in \overline{\mathbb{C}}$ , l'image réciproque  $f^{-1}(z)$  contient toujours le même nombre  $n$  d'éléments, appelé le *degré* du revêtement. Les points  $z_1, \dots, z_k$  sont les *points de ramification*, c'est-à-dire les *valeurs critiques* de la fonction  $f$ .

Pour représenter un revêtement d'une manière unique il faut fournir comme données les  $k$  points de ramification, et aussi  $k$  permutations  $g_1, \dots, g_k \in S_n$  telles que  $g_1 g_2 \cdots g_k = 1$  et que le groupe  $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$  agisse transitivement sur  $n$  éléments. Les permutations décrivent l'information suivante. On fixe  $z_0 \in \mathbb{C}$ , et on considère l'ensemble des  $n$  points  $f^{-1}(z_0) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ . Alors la permutation  $g_i$  montre comment les points  $x_1, \dots, x_n$  sont permutés quand  $z$  décrit une boucle partant de  $z_0$ , contournant  $z_i$  et revenant à  $z_0$ . Le *théorème d'existence de Riemann* affirme que, quels que soient les points  $z_1, \dots, z_k$ , et quelles que soient les permutations  $g_1, \dots, g_k$  vérifiant les propriétés ci-dessus, un revêtement ramifié correspondant existe et est unique.

Encore une fois, il n'y a aucune canonicité dans la construction ; par exemple, deux fonctions méromorphes  $f_1, f_2$  définies sur la même surface  $X$  peuvent donner lieu à des revêtements très différents et « incomparables ». On peut tout de même apporter quelques retouches à un revêtement donné. Par exemple, le revêtement reste isomorphe à lui-même si on fait une homographie dans  $\overline{\mathbb{C}}$ . Et, en faisant une homographie, on peut ramener n'importe quel triplet de points dans une position fixée d'avance. Par exemple, on peut convenir de ramener toujours les trois derniers points de ramification  $z_{k-2}, z_{k-1}, z_k$  aux positions  $0, 1, \infty$ . Ceci réduit de  $k$  à  $k-3$  le nombre de paramètres continus à fixer pour représenter le revêtement.

C'est à ce moment-là que la question principale se pose :

et si  $k = 3$ ?

Tous les paramètres continus disparaissent totalement en laissant la place à une information de nature combinatoire uniquement. Cette information est incarnée par un triplet de permutations  $g_1, g_2, g_3$  dont le produit vaut 1. Désormais, nous préférons noter ces permutations non pas  $g_1, g_2, g_3$  mais  $\sigma, \alpha, \varphi$ . Bref, il s'agit d'une hypercarte. Et cet objet, discret et fini, en représente un autre, très sophistiqué, qui est une surface de Riemann, avec sa structure complexe, et une fonction méromorphe définie sur cette surface qui possède trois valeurs critiques  $0, 1$  et  $\infty$ .

En fait, il y a encore plus que cela. Toutes les surfaces de Riemann ne peuvent pas être représentées de cette manière-là (comme

revêtements avec trois points de ramification). Mais ce n'est pas une mauvaise nouvelle, c'est une bonne nouvelle. Car la classe des surfaces représentables est la plus intéressante qui soit.

**Théorème de Belyi ([1]).** *Une surface de Riemann  $X$  est définie sur le corps des nombres algébriques  $\overline{\mathbb{Q}}$  si et seulement si il existe une fonction méromorphe  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  avec au plus trois valeurs critiques  $0, 1$  et  $\infty$ . Dans ce cas-là, la fonction  $f$  elle-même (la fonction de Belyi) est elle aussi définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ .*

Il est un peu difficile d'expliquer le sens exact de la notion d'« être défini » sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Cela veut dire, *grosso modo*, que la surface  $X$  peut être représentée, par exemple, par une équation  $F(x, y) = 0$  où tous les coefficients du polynôme  $F$  sont des nombres algébriques. Quant à la fonction  $f$ , elle peut être représentée comme une fonction rationnelle des variables  $x, y$  avec des coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ , et définie, bien sûr, modulo la relation  $F = 0$ .

Tout un nouvel univers s'ouvre devant nous. Soit  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$  le groupe de Galois absolu, c'est-à-dire, le groupe d'automorphismes du corps  $\overline{\mathbb{Q}}$ . En agissant sur les coefficients de  $F$  et de  $f$  le groupe  $\Gamma$  transforme un revêtement en un autre, mais préserve la propriété d'être « de Belyi ». Par conséquent, il transforme une hypercarte en une autre. Le groupe de Galois agit sur les hypercartes !

Il convient de citer à ce propos les mots très émouvants d'un des plus grands mathématiciens du XX<sup>e</sup> siècle, Alexandre Grothendieck, voir [4]. En mentionnant le théorème de Belyi il écrit :

Prenant maintenant comme sphère de référence la sphère de Riemann, ou droite projective complexe, rigidifiée par les trois points  $0, 1$  et  $\infty$  [ ... ], et se rappelant que tout revêtement ramifié fini d'une courbe algébrique complexe hérite lui-même d'une structure de courbe algébrique complexe, on aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire : *toute carte orientée « finie » se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe !* Mieux encore, comme la droite projective complexe est définie sur le corps de base  $\mathbb{Q}$ , ainsi que les points de ramification admis, les courbes algébriques obtenues sont définies non seulement sur  $\mathbb{C}$ , mais sur la clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{C}$ . Quant à la carte de départ,

elle se retrouve sur la courbe algébrique, comme image inverse du segment réel  $[0, 1]$  [ ... ].

Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait un impact psychologique comparable<sup>1</sup>. Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. À un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus.

---

<sup>1</sup> Je puis faire exception pourtant d'un autre « fait », du temps où, vers l'âge de douze ans, j'étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C'est là que j'ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m'avait impressionnée par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de « rotondité parfaite » du cercle m'apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au delà des mots. [ ... ]

Après ces mots-là il est peu étonnant que la théorie en question ait été baptisée « la théorie des dessins d'enfants » (voir par exemple [7]). Il est amusant que le théorème de Belyi, qui a immortalisé le nom de Belyi et qui est devenu un résultat très populaire dans les années 1990, est une remarque d'un tiers de page à la fin de son article [1] dédié à un autre sujet.

**3.2. Exemples.** Pour l'auteur, cette section est, une fois commencée, la plus difficile à finir, tant le nombre de beaux exemples est grand. On peut au moins se limiter au cas planaire, quand  $X = \overline{\mathbb{C}}$  est elle-même la sphère. Dans ce cas-là, une fonction méromorphe  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  est tout simplement une fonction rationnelle. Un point de ramification, ou une valeur critique de  $f$ , est la valeur de  $f$  en un zéro de la dérivée  $f'$  (avec des modifications nécessaires pour les points à l'infini). Comme l'a déjà expliqué Grothendieck, l'hypercarte

en question s'obtient comme image réciproque du segment  $[0, 1]$ . Il est conseillé de colorier son extrémité en  $z = 0$  en noir, et celle en  $z = 1$ , en blanc. Ainsi, tous les sommets de l'hypercarte sont les points de  $f^{-1}(0)$ , le degré d'un sommet étant la multiplicité de la racine correspondante. Les points de  $f^{-1}(1)$  sont les « sommets blancs », ou bien les « milieux » où se ramifient les hyper-arêtes. Si tous les sommets blancs sont de degré 2, on peut, si on veut, ne pas les montrer en dessinant les arêtes conventionnelles des cartes. Enfin, à l'intérieur de chaque face se trouve un pôle dont le degré est égal au degré de la face.

Un polynôme est un cas particulier de fonction rationnelle. Un polynôme est de Belyi si ses seules valeurs critiques *finies* sont 0 et 1. De plus, chaque polynôme de degré  $n$  possède un seul pôle de degré  $n$  à l'infini. Par conséquent, l'hypercarte correspondante possède une seule face ; c'est donc un arbre. Remarquons que les sommets d'un arbre se colorient très naturellement en noir et blanc en intermittence.

Maintenant nous sommes prêts à aborder quelques exemples.

**Exemple 1.** Soit  $f(x) = x^n$ . À part l'infini, le seul point critique est 0, avec la valeur critique correspondante égale aussi à 0. La multiplicité de ce point critique est  $n$ . L'image réciproque  $f^{-1}(1)$  se compose de  $n$  racines de l'unité, qui sont des points « simples » (non critiques). Il est clair que  $f^{-1}([0, 1])$  est l'arbre-étoile montré sur la figure 10 à gauche.

**Exemple 2.** Le polynôme de Chebyshev de première espèce  $T_n(x)$  possède deux valeurs critiques finies  $\pm 1$ . On peut donc le transformer facilement en polynôme de Belyi  $f(x) = \frac{1}{2}(T_n(x) + 1)$ . Ce polynôme correspond à l'arbre-chaîne montré sur la figure 10 à droite.

**Exemple 3.** La figure 11 montre une orbite de Galois qui se compose de trois arbres. On remarque que tous les arbres de l'orbite ont les sommets noirs de degrés 3, 2, 1 et les sommets blancs de degrés 2, 2, 1, 1. Le calcul, qui n'est pas banal même dans le cas aussi simple que celui-ci, montre que les polynômes correspondants ont la forme

$$f(x) = -\frac{1500}{a^2 + 52a - 32} x^3(x - 1)^2(x - a),$$

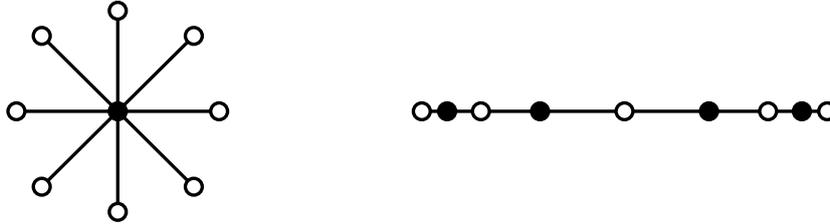


FIGURE 10. L'arbre-étoile et l'arbre-chaîne

où  $a$  est une racine de l'équation cubique

$$25a^3 - 12a^2 - 24a - 16 = 0$$

(chaque racine correspond à un arbre). Le corps de nombres correspondant est le même que celui engendré par les racines cubiques de 2. C'est de ces « invariants arithmétiques subtils » qu'a parlé Grothendieck.

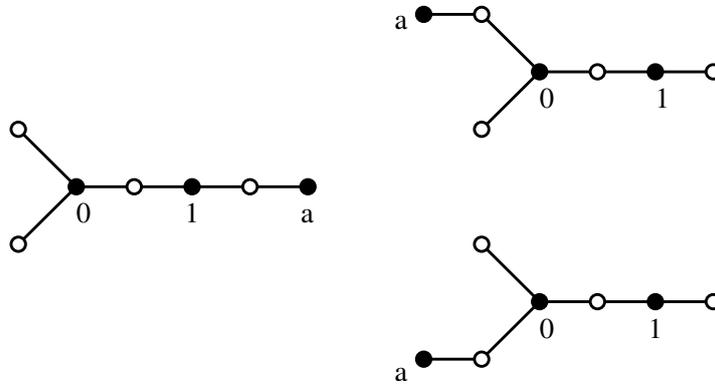


FIGURE 11. Une orbite cubique de l'action du groupe de Galois; le corps de nombres associé à cette orbite est l'extension de  $\mathbb{Q}$  par les racines cubiques de 2

**Exemple 4.** Donnons ici la fonction de Belyi de l'icosaèdre :

$$f(x) = 1728 \frac{(x^{10} - 11x^5 - 1)^5 x^5}{(x^{20} + 228x^{15} + 494x^{10} - 228x^5 + 1)^3}.$$

Le numérateur de cette fonction possède 11 racines de multiplicité 5 ; elles correspondent à 11 sommets de l'icosaèdre. Le douzième sommet se trouve à l'infini : le degré du numérateur est 55, et celui du dénominateur est 60 ; par conséquent,  $f$  possède une racine supplémentaire de multiplicité 5 à l'infini. Le dénominateur a, quant à lui, 20 racines triples. Cela signifie que le dessin correspondant a 20 faces de degré 3. Considérons enfin la fonction

$$f(x) - 1 = -\frac{(x^{10} + 1)^2 (x^{20} - 522x^{15} - 10006x^{10} + 522x^5 + 1)^2}{(x^{20} + 228x^{15} + 494x^{10} - 228x^5 + 1)^3}.$$

Nous voyons que l'image réciproque de 1 se compose de 30 racines doubles. Elles correspondent aux « milieux » des 30 arêtes.

Le dessin est montré sur la figure 12 ; pour éviter un sommet à l'infini on lui a fait subir une homographie.

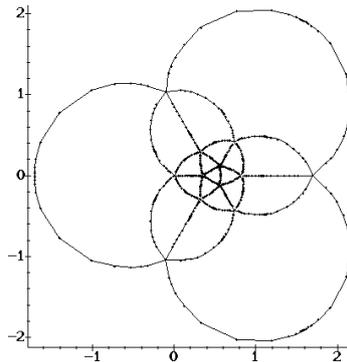


FIGURE 12. Le « dessin d'enfant » de l'icosaèdre

Il serait intéressant de « voir » aussi l'« icosaèdre de genre 4 ». Cet exercice est beaucoup plus dur, car il faut tout d'abord représenter une surface de Riemann de genre 4 ; plus exactement, la surface qui correspond au dessin. Elle s'appelle la *courbe de Bring*. Et puis, comment représenter le dessin lui-même ?

Cette histoire est longue...

**Exemple 5.** Juste pour amuser le lecteur nous donnons ici le dessin d'enfant correspondant à un solide d'Archimède portant un joli nom

de pseudorhombicuboctaèdre. Le corps de nombres associé à ce dessin est engendré par les racines  $\sqrt[4]{12}$ . L'orbite de Galois doit donc se composer de 4 éléments. À part le vrai rhombicuboctaèdre (sans « pseudo ») qui forme sa propre orbite d'un seul élément, il existe encore 3 cartes ayant le même assortiment des degrés des sommets et des faces ; elles sont *conjuguées* au pseudorhombicuboctaèdre.

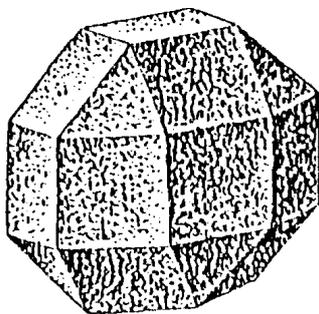


FIGURE 13. Le pseudorhombicuboctaèdre

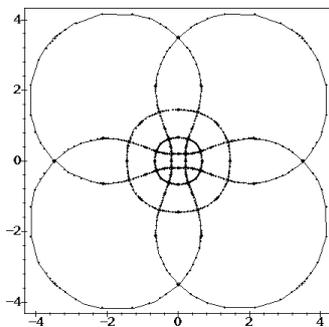


FIGURE 14. Le « dessin d'enfant » du pseudorhombicuboctaèdre

Un sujet passionnant est la recherche des invariants combinatoires de l'action de Galois. Il y a des invariants relativement simples, comme l'assortiment des degrés des sommets, des hyper-arêtes et des faces, ou encore le groupe d'automorphismes. Parmi les invariants plus sophistiqués mentionnons le groupe cartographique. Par

exemple, il existe exactement 42 cartes avec le même assortiment de degrés que pour la carte de la figure 9. Mais seulement deux d'entre elles ont le groupe cartographique  $M_{24}$ , celle de la figure et son image miroir ; pour toutes les autres le groupe en question est  $A_{24}$ . On peut conclure que cette famille de 42 cartes se partage en au moins deux orbites, de tailles 40 et 2. On peut même prédire que le corps de nombres associé à notre carte est  $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$  : pour cela il faut regarder dans le tableau des caractères du groupe  $M_{24}$ , et dans ce tableau, dans la colonne qui correspond à une classe de conjugaison des permutations ayant un cycle de longueur 23 et un point fixe (l'assortiment de degrés des faces). Mais nous nous arrêtons là, surtout que dans la section suivante il y a encore un exemple...

**3.3. Exemple d'application : une borne de Birch-Chowla-Hall-Schinzel-Davenport-Stothers-Zannier.** L'application des fonctions de Belyi expliquée dans cette section n'est pas la seule qui existe ; mais elle est, à mon avis, la plus frappante.

Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes complexes. En 1965, B. Birch, S. Chowla, M. Hall et A. Schinzel ont posé la question suivante : quel est le degré minimum de la différence  $P^3 - Q^2$  ? Bien sûr, on peut supposer que les premiers coefficients des deux polynômes sont égaux à 1, et que  $\deg P = 2m$ ,  $\deg Q = 3m$ . Alors  $\deg P^3 = \deg Q^2 = 6m$ , et au moins le coefficient de  $x^{6m}$  dans la différence  $P^3 - Q^2$  s'annule. Les quatre auteurs sus-cités ont conjecturé que si  $P^3 \neq Q^2$ , alors  $\deg(P^3 - Q^2) \geq m + 1$ , et que l'égalité est atteinte pour une infinité de valeurs de  $m$ .

L'inégalité elle-même a été démontrée par H. Davenport la même année 1965. Par contre, la deuxième proposition, le fait que cette inégalité ne peut pas être améliorée, s'est avérée beaucoup plus dure. Elle n'a été démontrée que 16 ans plus tard par W. Stothers, puis, en 1995, redémontrée et généralisée par U. Zannier. Il se trouve que l'égalité est atteinte pour tout  $m$ .

Quel rapport avec les cartes ? Le voilà. Soit  $P^3 - Q^2 = R$ . Considérons la fonction rationnelle

$$f = \frac{P^3}{R}$$

et supposons qu'elle soit une fonction de Belyi. Notre premier objectif est de traduire les propriétés des polynômes en des propriétés des cartes correspondantes.

(i) Le numérateur de la fonction  $f$ , le polynôme  $P^3$ , ne possède que des racines triples ; par conséquent, tous les sommets de la carte sont de degré 3. Le nombre des sommets est égal au nombre des racines, soit à  $\deg P = 2m$ .

(ii) Le numérateur de la fonction

$$f - 1 = \frac{P^3 - R}{R} = \frac{Q^2}{R},$$

le polynôme  $Q^2$ , ne possède que des racines doubles. Par conséquent, toutes les arêtes de la carte sont de degré 2. En d'autres termes, notre dessin est une vraie carte et non pas une hypercarte. Le nombre d'arêtes est  $\deg Q = 3m$ .

(iii) Les faces de la carte correspondent aux pôles de la fonction  $f$ , c'est-à-dire, aux racines du polynôme  $R$  ; un pôle supplémentaire se trouve à l'infini : il correspond à la face extérieure. Le degré de  $R$  est donc égal à la somme des degrés de toutes les faces de la carte, sans compter la face extérieure.

Récapitulons : il faut trouver une carte plane avec  $3m$  arêtes,  $2m$  sommets de degré 3 et avec la somme des degrés des faces non extérieures la plus petite possible, en espérant parvenir à la valeur  $m + 1$ . La formule d'Euler nous indique par ailleurs qu'une carte plane ayant  $3m$  arêtes et  $2m$  sommets doit avoir  $m + 2$  faces. Sans compter la face extérieure, il en reste exactement  $m + 1$ . Le seul espoir d'obtenir la somme de ses degrés égale à  $m + 1$  est de faire en sorte que toutes ces faces soient de degré 1.

Une fois la « traduction » bien comprise, la preuve devient un jeu d'enfant. La construction du dessin en question est illustrée sur la figure 15. Ce dessin, répétons-le, résout un problème qui restait ouvert pendant 16 ans. Il est vrai que, restant dans le monde des polynômes, on ne voit pas comment s'y prendre. Décidément, notre intuition géométrique, quand nous sommes capables de la mettre en branle, peut faire un tabac !

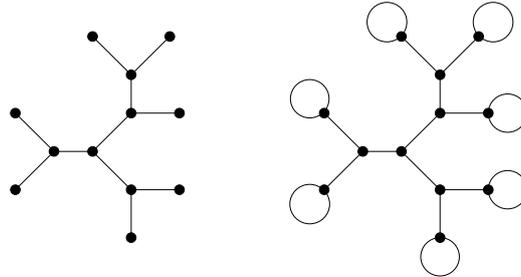


FIGURE 15. Le dessin se construit en deux étapes : (a) on dessine un arbre dont tous les sommets internes sont de degré 3 ; (b) on attache une boucle à chaque feuille

**Pour terminer : une pub.** Tout ce que je connais sur le sujet, ou presque, est décrit dans le livre récent [5] rédigé par mon collègue Sergei Lando, de l'Université Indépendante de Moscou, et par moi-même. À mon avis, c'est la meilleure suggestion pour la lecture à celui ou celle qui veut continuer.

### Références

- [1] G.V. BELYI – « On Galois extensions of a maximal cyclotomic field », *Math. USSR Izvestija* **14** (1980), no. 2, p. 247–256, original en russe : *Izvestiya Akademii Nauk SSSR* **14** (1979), no. 2, p. 269–276.
- [2] R. CORI – *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, Astérisque, vol. 27, Société Mathématique de France, Paris, 1975.
- [3] J.R. EDMONDS – « A combinatorial representation for polyhedral surfaces », *Notices Amer. Math. Soc.* **7** (1960), p. 646.
- [4] A. GROTHENDIECK – « Esquisse d'un programme », in *Geometric Galois action, vol. 1, "Around Grothendieck's Esquisse d'un programme"* (L. Schneps & P. Lochak, éd.), London Math. Soc. Lect. Notes Series, vol. 242, Cambridge University Press, 1997, connu sous forme d'un manuscrit non publié depuis 1984, p. 5–48.
- [5] S.K. LANDO & A.K. ZVONKIN – *Graphs on surfaces and their applications*, Springer-Verlag, 2004.
- [6] S.A.J. LHUILIER – « Mémoire sur la polyédrométrie ; contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujéti », *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées (Annales de Gergonnes)* **3** (1812–1813), p. 169–189.
- [7] L. SCHNEPS (éd.) – *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, London Math. Soc. Lect. Notes Series, vol. 200, Cambridge University Press, 1994.

Alexander Zvonkin, LaBRI, Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex, France  
 E-mail : [zvonkin@labri.fr](mailto:zvonkin@labri.fr)  
 Url : <https://www.labri.fr/perso/zvonkin/>