



# Journées mathématiques X-UPS

Année 1999

Aspects de la théorie du contrôle

Philippe MARTIN & Pierre ROUCHON

**Systèmes plats : planification et suivi de trajectoires**

*Journées mathématiques X-UPS* (1999), p. 1-126.

<https://doi.org/10.5802/xups.1999-01>

© Les auteurs, 1999.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique  
Route de Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS,  
Institut polytechnique de Paris  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

# SYSTÈMES PLATS : PLANIFICATION ET SUIVI DE TRAJECTOIRES

*par*

Philippe Martin & Pierre Rouchon

---

## Table des matières

<b>Chapitre 1. Introduction</b> .....	3
1.1. Un exemple.....	3
1.2. Plan.....	10
1.3. Problème.....	11
1.3.a. Énoncé.....	11
1.3.b. Solution.....	12
1.3.c. Aspect global.....	14
<b>Chapitre 2. Systèmes linéaires de dimension finie</b> ..	15
2.1. Commandabilité.....	15
2.1.a. Définitions.....	15
2.1.b. Intégrale première.....	16
2.2. Commandabilité linéaire.....	19
2.2.a. Matrice de commandabilité.....	19
2.2.b. Invariance.....	21
2.2.c. Un exemple.....	23
2.2.d. Critère de Kalman et forme de Brunovsky.....	24
2.2.e. Planification et suivi de trajectoires.....	28
2.3. Linéarisation par bouclage statique.....	31
2.3.a. Équivalence statique.....	31
2.3.b. CNS de linéarisation statique.....	32
2.3.c. Bouclage dynamique.....	36

---

**Publication originale dans** Journées X-UPS 1999. Aspects de la théorie du contrôle. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1999, et Éditions de l'École polytechnique, 2008.

<b>Chapitre 3. Systèmes plats</b> .....	37
3.1. Équivalence et platitude.....	40
3.1.a. Champ de vecteurs en dimension infinie .....	40
3.1.b. Équivalence de systèmes.....	45
3.1.c. Platitude différentielle.....	49
3.1.d. Application à la planification de trajectoires....	51
3.1.e. Planification sous contraintes.....	52
3.1.f. Planification de trajectoires avec singularités....	53
3.2. Bouclage et équivalence.....	54
3.2.a. De l'équivalence au bouclage.....	54
3.2.b. Bouclages endogènes.....	58
3.2.c. Suivi de trajectoires.....	60
3.2.d. Suivi de trajectoires : singularités et échelles de temps.....	61
3.3. Caractérisation de la platitude.....	62
3.3.a. La question de base.....	62
3.3.b. Résultats connus.....	64
3.4. Commande optimale et prédictive.....	69
3.5. Symétries.....	70
3.5.a. Sortie plate invariante.....	70
3.5.b. Sortie plate, potentiel et degré de liberté de jauge	72
 <b>Chapitre 4. Systèmes plats de dimension infinie</b> ...	 73
4.1. Retards et équations des ondes.....	74
4.1.a. Exemples de base.....	74
4.1.b. Barre en torsion.....	75
4.1.c. Chaîne pesante.....	76
4.1.d. Réacteur chimique avec recyclage.....	78
4.1.e. Serpent non holonome.....	80
4.1.f. Équation de Burger sans diffusion.....	81
4.1.g. Mélange.....	83
4.2. Diffusion.....	85
4.2.a. Équation de la chaleur.....	86
4.2.b. Réacteur chimique tubulaire (convection/diffu- sion).....	88
4.2.c. Poutre en flexion (Euler-Bernoulli) .....	91
4.2.d. Flexion non linéaire.....	94
 <b>Chapitre 5. Catalogue de systèmes plats</b> .....	 95
5.1. Robots complètement commandés.....	95
5.2. Systèmes mécaniques non holonomes.....	96
5.2.a. Voiture.....	96
5.2.b. Voiture avec $n$ remorques à attaches centrées....	97

5.2.c. Voiture avec une remorque à attache déportée... 98  
 5.2.d. Systèmes mécaniques non holonomes complètement commandés.....100  
 5.3. Systèmes pendulaires.....101  
 5.3.a. Pendule inversé sur un rail.....101  
 5.3.b. Le double pendule du musée de la Villette.....102  
 5.3.c. Une infinité de pendules inversés.....103  
 5.3.d. Grues et ponts roulants.....105  
 5.3.e. Le robot  $2k\pi$ .....105  
 5.3.f. Solide plan piloté par deux forces.....106  
 5.3.g. Le câble aéro-tracté.....108  
 5.4. Divers systèmes mécaniques.....111  
 5.4.a. Avion classique.....111  
 5.4.b. Tige de forage.....111  
 5.4.c. Gamelle d'eau.....112  
 5.4.d. Problème de Stefan.....114  
 5.4.e. Extrusion.....115  
 5.5. Systèmes électro-mécaniques.....116  
 5.5.a. Le convertisseur de tensions.....116  
 5.5.b. Paliers magnétiques.....116  
 5.5.c. Moteurs à induction.....116  
 5.5.d. Ligne de transmission.....117  
 5.6. Systèmes quantiques.....118  
 5.7. Réacteurs chimiques.....119  
**Références**.....120  
**Annexe. Quelques programmes Matlab**.....126

## Chapitre 1. Introduction

### 1.1. Un exemple

Cet exemple est une illustration très élémentaire de certains problèmes fondamentaux. Il permet de se familiariser avec le langage et les notions de base en dynamique et commande des systèmes. Les calculs y sont simples et les justifications mathématiques aisées. L'exemple de la figure 1.1 est emprunté à la robotique. Il s'agit d'un bras rigide tournant dans un plan vertical autour d'un axe horizontal. Cet axe horizontal est équipé d'un moteur délivrant un couple

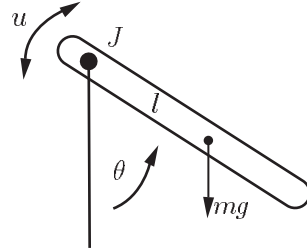


FIGURE 1.1. Un bras de robot tournant dans un plan vertical autour d'un axe horizontal motorisé.

variable  $u$ , que l'on peut choisir arbitrairement :  $u$  est la *commande* du système (on dit aussi *contrôle* ou *entrée*). La position géométrique du système est complètement décrite par un angle  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . La conservation du moment cinétique autour de l'axe horizontal permet de relier l'angle  $\theta$  à la commande en couple  $u$  par l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$(1.1) \quad J\ddot{\theta}(t) + mlg \sin \theta(t) = u(t)$$

où  $m$  est la masse du bras,  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe,  $l$  la distance du centre de gravité à l'axe et  $g$  l'accélération due à la pesanteur.

Fixons, pour un intervalle de temps  $[0, T]$  la commande  $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ . La loi horaire  $[0, T] \ni t \mapsto \theta(t)$  est alors obtenue en intégrant cette équation du second ordre à partir de conditions initiales en position  $\theta(0) = \theta_0$  et en vitesse  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ . L'ensemble des conditions initiales forme l'état du système (l'espace des phases en mécanique). Il suffit de réécrire cette équation scalaire du second ordre en deux équations scalaires du premier ordre :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= u/J - (mgl/J) \sin \theta. \end{aligned}$$

Les variables  $(\theta, \omega)$  forment alors l'état du système ; le triplet  $t \mapsto (\theta(t), \omega(t), u(t))$  sera dit *trajectoire* du système s'il vérifie, pour tout  $t$ , les deux équations différentielles (1.2).

La *planification de trajectoires* consiste à trouver une trajectoire du système  $t \mapsto (\theta(t), \omega(t), u(t))$  partant d'un état  $(\theta_i, \omega_i)$  en  $t = 0$  et arrivant en  $t = T$  à l'état final  $(\theta_f, \omega_f)$ , ces deux états étant fixés

par avance. Il s'agit du problème de base de la *commandabilité* : comment amener le système d'un endroit (d'un état) à un autre. Lorsque le système est commandable, on dispose, en général, d'une infinité de trajectoires et donc de commandes pour réaliser cette transition. Se pose alors le problème du choix entre ces diverses trajectoires : c'est en autre l'objet de la commande optimale qui sélectionne la trajectoire en minimisant un certain critère. Citons par exemple le temps minimum pour aller d'une position de repos  $(\theta_i, \omega_i = 0)$  à une autre position de repos  $(\theta_f, \omega_f = 0)$  sachant que la commande  $u$  reste bornée ( $\forall t, |u(t)| \leq u_{\max}$  où  $u_{\max}$  est le couple maximum développé par le moteur. On en déduit ainsi une trajectoire de référence du système :  $[0, T] \ni t \mapsto (\theta_r(t), \omega_r(t), u_r(t))$ .

Une autre question, directement liée à la première : étant donné que tout modèle est approximatif (les paramètres  $J$  et  $m$  et  $l$  sont connus avec une certaine précision, les frottements sont ici négligés, le bras est légèrement flexible et donc des degrés de libertés et leur dynamiques ne sont pas prises en compte, ...), il convient d'ajuster la commande  $u$  en temps réel de façon à compenser les écarts à la trajectoire de référence,  $\theta - \theta_r$  et  $\omega - \omega_r$ , qui peuvent apparaître. Il s'agit de la *stabilisation* autour d'une trajectoire (« tracking » en anglais). Lorsque cette trajectoire est un point d'équilibre du système (comme, par exemple  $(\theta, \omega, u) = 0$  ou  $(\theta, \omega, u) = (\pi, 0, 0)$ ) on parle alors de stabilisation. Une démarche très naturelle consiste à corriger la commande de référence  $u_r(t)$  par des termes du type  $\theta - \theta_r(t)$  et  $\omega - \omega_r(t)$ . L'utilisation de ce type de terme correspond à un *bouclage*, i.e., une boucle de rétro-action (« feedback » en anglais) que l'on schématise souvent par le diagramme bloc de la figure 1.2.

La mise en œuvre de ce schéma revient, avec un calculateur temps-réel, à mettre à jour très rapidement (avec une période d'échantillonnage  $T_e$  bien plus rapide que les échelles de temps naturelles du système) la commande  $u$  en fonction de la trajectoire de référence et des mesures de  $\theta$  et de  $\omega$ .

Considérons, par exemple la stabilisation autour de l'équilibre instable  $(\theta, \omega, u) = (\pi, 0, 0)$ . Pour cela, linéarisons les équations (1.2) autour de ce point : nous faisons un développement limité des seconds membres en ne retenant que les termes d'ordre 1 (ceux d'ordre 0 sont nuls, car nous sommes autour d'un point d'équilibre). En notant  $\tilde{\theta}, \tilde{\omega}$

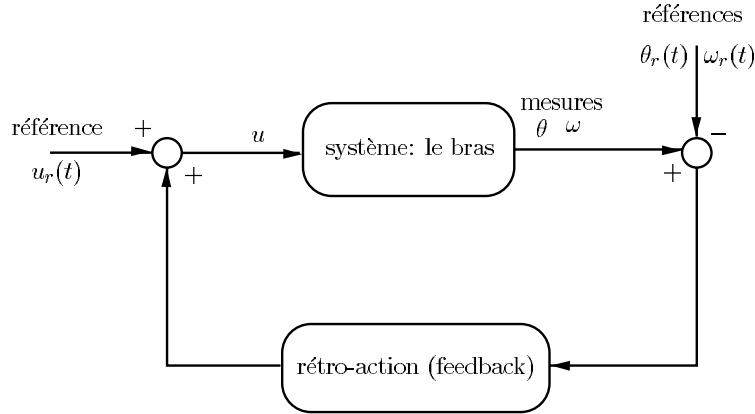


FIGURE 1.2. Schéma-bloc d'une loi de rétro-action, dit aussi retour d'état ou « feedback ».

et  $\tilde{u}$  les écarts, nous obtenons les équations du système *linéarisé tangent* :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega} &= \tilde{u}/J + (mgl/J)\tilde{\theta}. \end{aligned}$$

En remplaçant la dérivée en temps avec la multiplication par  $s$  (transformation de Laplace) on obtient la relation entre les transformées de Laplace  $\hat{\theta}$  et  $\hat{u}$  de  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{u}$  (conditions initiales nulles) :

$$(Js^2 - mgl)\hat{\theta} = \hat{u}.$$

Nous retrouvons bien la fonction de transfert  $H(s) = 1/(Js^2 - mgl)$ , fraction rationnelle en  $s$  la variable de Laplace, fréquemment utilisée par les ingénieurs pour représenter la relation entre la commande  $\hat{u}$  et la sortie  $\hat{y}$ ,  $\hat{y} = H(s)\hat{u}$ . La stabilité du système (en boucle ouverte) est fonction de la position par rapport à l'axe imaginaire des pôles de  $H$  : s'ils sont tous à partie réelle strictement négative alors le système est stable ; si l'un d'entre eux est à partie réelle strictement positive, alors le système est instable. Ici les pôles étant  $\pm\sqrt{mgl/J}$ , le système est instable en boucle ouverte (le point d'équilibre  $(\pi, 0)$  de l'espace des phases est un col). Noter qu'une telle représentation est impossible

pour  $J\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta + u$  dès que  $\theta - \pi$  n'est plus petit. Les fonctions de transfert ne peuvent pas être étendues aux systèmes non linéaires.

Si on pose, comme loi de commande

$$(1.4) \quad \tilde{u} = -(Jk_1 + mgl)\tilde{\theta} - Jk_2\tilde{\omega},$$

où  $k_1 = (1/\tau_1 + 1/\tau_2)$  et  $k_2 = 1/\tau_1\tau_2$  ( $0 < \tau_1 < \tau_2$  sont deux constantes positives homogènes à des temps), alors les équations du système linéaire tangent bouclé (c'est à dire avec sa boucle de rétro-action) sont

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{\omega} \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -k_1\tilde{\theta} - k_2\tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Ce système est *asymptotiquement stable* : pour toutes conditions initiales, ses solutions tendent vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. La convergence est même exponentielle : toute solution est une combinaison linéaire de  $\exp(-t/\tau_1)$  et  $\exp(-t/\tau_2)$  :  $-1/\tau_1$  et  $-1/\tau_2$  sont appelés les *pôles* ou *modes* du système bouclé. Noter que le bouclage (1.4) n'est qu'un retour proportionnel en position (ressort en  $\theta$  de raideur  $(Jk_1 + mgl)$ ) et en vitesse (frottement visqueux en  $\dot{\theta} = \omega$  de coefficient  $Jk_2$ ). C'est un simple régulateur « proportionnel-dérivé » sur l'angle  $\theta$ . Par la commande, nous pouvons rajouter à volonté des forces élastiques et visqueuses pour stabiliser le système.

Ce bouclage a été réalisé sur une approximation au premier ordre du système. Se pose alors la question du comportement du système non linéaire (1.2) avec le bouclage linéaire

$$u = \tilde{u} = -(Jk_1 + mgl)(\theta - \pi) - Jk_2\omega.$$

Il est immédiat de voir que le linéarisé tangent autour de l'équilibre  $(\pi, 0)$  du système non linéaire bouclé est identique au linéaire tangent bouclé. Un résultat classique sur la stabilité structurelle des points d'équilibres hyperboliques (les valeurs propres de la matrice jacobienne sont toutes à partie réelle non nulle) d'un système dynamique garantit alors la stabilité asymptotique locale du système non linéaire bouclé : cela veut dire simplement que toute trajectoire du système (1.2) avec la commande (1.4) qui démarre assez près de  $(\pi, 0)$  tends vers  $(\pi, 0)$  lorsque  $t$  tends vers l'infini, la convergence étant exponentielle, comme pour le linéaire tangent.



Étant donné que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux constantes de temps arbitraires directement liées au taux de convergence, on aura tendance à les choisir aussi proches de zéro que possible. Cependant, il convient de ne pas les choisir trop proches de zéro. D'une part des gains trop grands vont faire saturer les actionneurs. D'autre part, le modèle sur lequel la commande est synthétisée, n'est valable que pour une certaine gamme d'échelles de temps (on parle en fréquentiel de modèle valable sur une certaine plage de fréquences). Ici la dynamique du moteur est négligée. Si le moteur est à courant continu, la commande physique est en fait la tension  $U_m$  appliquée au moteur. Elle est reliée au couple  $u$  par une équation différentielle du type :

$$(1.5) \quad L\dot{I}_m + RI_m = U_m, \quad u = K_c I_m$$

( $L$  est l'inductance,  $R$  la résistance,  $K_c$  la constante de couple du moteur). En pratique la dynamique du moteur est souvent négligeable par rapport à la dynamique inertielle de la barre. Ainsi la constante de temps du moteur  $\tau_m = L/R$  est bien inférieure au temps caractéristique du bras  $\tau_b = \sqrt{J/(mgl)}$ . Aussi, a-t-on l'approximation suivante dite quasi-statique :

$$RI_m = U_m, \quad u = K_c I_m = (K_c/R)U_m$$

qui relie directement le couple  $u$  à la tension  $U_m$ . Il convient de choisir  $\tau_1$  et  $\tau_2$  du même ordre de grandeur que  $\tau_b$ , et donc très supérieur à  $\tau_m$ , la constante de temps de la dynamique négligée.

D'autres phénomènes peuvent apparaître vers les hautes fréquences, comme la flexibilité du bras. Des résultats classique (théorie de perturbations, systèmes lents/ rapides) assurant qu'avec des gains  $k_1$  et  $k_2$  pas trop grands ( $\tau_1, \tau_2 \gg \tau_m$ ), le système non linéaire avec la dynamique du moteur (1.5) et la commande en tension

$$U_m = -(K_c/R) ((Jk_1 - mgl)(\theta + \pi) + Jk_2\omega)$$

est localement asymptotiquement stable autour de  $(\pi, 0)$ , pour toute valeur de  $L$  assez faible.

La loi de feedback précédente suppose que l'on mesure à chaque instant l'état complet du système  $\theta$  et  $\omega$ . Si nous connaissons uniquement la loi  $t \mapsto \theta(t)$ , nous obtenons  $\omega(t)$  par simple dérivation :

on dit que l'état du système est *observable* à partir de la *sortie*  $\theta$ . D'une façon plus générale, l'état  $x$  d'un système sera dit observable à partir de la *sortie*  $y$ , si l'on peut reconstruire  $x$  à partir d'un nombre fini de dérivées de  $y$ .

Pour le bras, nous pouvons dériver numériquement le signal de mesure pour en déduire  $\omega$ . Cette solution fonctionne correctement si la mesure de  $\theta$  n'est pas trop bruitée. Sinon, l'opération de dérivation est à éviter. Pour cela, nous pouvons utiliser la dynamique du système pour construire un observateur asymptotique, c'est à dire, reconstruire la vitesse  $\omega$  du système en intégrant (on peut dire aussi en filtrant) la position  $\theta$  via une équation différentielle bien choisie.

Plaçons nous autour du point  $(\pi, 0)$  et considérons le linéaire tangent (1.3) avec comme quantités connues la commande  $\tilde{u}$  et l'angle  $\tilde{\theta}$ . L'objectif est de reconstruire à terme  $\tilde{\omega}$  sans utiliser l'opération de dérivation très sensible au bruit. En revanche nous pouvons utiliser l'intégration et les changements de variables.

Nous allons montrer comment construire un *observateur asymptotique* (d'ordre réduit). Soit  $\lambda$  un paramètre que nous ajusterons plus tard. Considérons la variable composite  $\xi = \tilde{\omega} + \lambda\tilde{\theta}$ . Si l'on sait reconstruire  $\xi$ , on obtient  $\tilde{\omega}$  avec  $\tilde{\omega} = \xi - \lambda\tilde{\theta}(t)$ . Or, grâce à (1.3),  $\xi$  vérifie

$$\dot{\xi} = u/J - (mgl/J)\tilde{\theta} + \lambda\tilde{\omega} = u/J - (mgl/J + \lambda^2)\tilde{\theta} + \lambda\xi.$$

Ainsi recopiant cette équation et en remplaçant la variable  $\xi$  non mesurée par  $\hat{\xi}$ , on obtient une équation différentielle du premier ordre dépendant des quantités connues  $u$  et  $\tilde{\theta}$  (un filtre passe bas d'ordre 1 d'une combinaison linéaire de la mesure  $\tilde{\theta}$  et de la commande  $\tilde{u}$ ) :

$$(1.6) \quad \dot{\hat{\xi}} = u(t)/J - (mgl/J + \lambda^2)\tilde{\theta}(t) + \lambda\hat{\xi}$$

Par soustraction avec l'équation différentielle satisfaite par le vrai  $\xi$ , les termes sources en  $u$  et  $\tilde{\theta}$  disparaissent. On obtient alors une dynamique de l'erreur  $\hat{\xi} - \xi$  autonome

$$\frac{d}{dt}(\hat{\xi} - \xi) = \lambda(\hat{\xi} - \xi)$$

qui converge vers zéro, quelle que soit la condition initiale sur  $\widehat{\xi}$ , dès que le paramètre  $\lambda = -1/\tau_f$  est choisi négatif ( $\tau_f$  est la constante de temps de l'observateur (1.6)). Là encore, le gain  $\lambda$  de l'observateur (1.6) doit être choisi en fonction des niveaux de bruit sur  $\theta$  et surtout des échelles de temps naturelles du système (prendre, par exemple,  $\tau_f$  du même ordre de grandeur que  $\tau_b = \sqrt{J/(mgl)}$ ).

Ainsi, en combinant l'observateur (1.6) et la commande (1.4) où  $\tilde{w}$  est remplacé par  $\widehat{\xi} - \lambda\tilde{\theta}$ , nous obtenons un bouclage qui stabilise localement la position inverse du pendule. Ce bouclage est un *bouclage dynamique* sur la sortie  $y = \tilde{\theta}$  : le terme dynamique vient du fait que la commande  $u$  est une fonction de  $\tilde{\theta}$  et de  $\widehat{\xi}$  qui est en fait une sorte « d'intégrale » de  $\tilde{u}$  et  $\tilde{\theta}$  :

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \dot{\widehat{\xi}} &= \tilde{u}/J - (mgl/J + \lambda^2)\tilde{\theta} + \lambda\widehat{\xi} \\ \tilde{u} &= -(Jk_1 + mgl)\tilde{\theta} - Jk_2(\widehat{\xi} - \lambda\tilde{\theta}). \end{aligned}$$

Il s'agit d'un *observateur-contrôleur*.

## 1.2. Plan

Cet exemple permet de se faire une idée des problèmes traités par la commande des systèmes et de faire le lien avec les méthodes classiques de synthèse de régulateurs avec les fonctions de transfert (systèmes linéaires à une entrée et une sortie). Dès que le système est multivariable ou non linéaire, l'approche transfert devient alors nettement plus difficile à mettre en œuvre ou impossible. L'objectif est ici de présenter des résultats récents et en cours d'élaboration sur une classe de systèmes très souvent rencontrés en pratique, les systèmes plats. Leur commandabilité est particulièrement simple. Elle se ramène, via une paramétrisation explicite des trajectoires, à celle des systèmes linéaires de dimension finie. On en déduit alors des algorithmes fondés sur des calculs explicites de planification de trajectoires, et, pour les systèmes de dimension finie, de suivi de trajectoires (cf. le problème de la section 1.3).

Dans le chapitre 2, nous abordons la commandabilité des systèmes  $\dot{x} = f(x, u)$ . Après de courtes définitions, nous étudions les systèmes linéaires stationnaires. Nous mettons l'accent sur la forme canonique

de Brunovsky, la planification de trajectoires, et la stabilisation par placement de pôles. Ce chapitre se termine avec la linéarisation par bouclage statique : il s'agit de reconnaître si un système est linéaire après changements de coordonnées (a priori non linéaires) sur l'état et sur la commande.

Dans le chapitre 3, nous abordons les systèmes plats, systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires et équivalents aux systèmes linéaires commandables. La relation d'équivalence utilisée est une correspondance entre les trajectoires, correspondance déjà suggérée en 1912 par David Hilbert et reprise peu après par Élie Cartan (équivalence absolue) pour les systèmes différentiels sous-déterminés. Avec de tels systèmes la planification et le suivi de trajectoires sont faciles à résoudre. Pour des définitions mathématiques précises et simples, nous utilisons le langage des diffiétés, une géométrie sur des variétés  $C^\infty$  de dimension infinie développée par l'école russe autour de Vinogradov. La caractérisation des systèmes plats étant un problème ouvert, nous listons les quelques résultats disponibles.

Une façon d'étendre la platitude aux systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles est la paramétrisation explicite des trajectoires. Bien que l'on soit loin d'une définition claire de la platitude en dimension infinie (une voie intéressante semble être, dans le cas linéaire, la théorie des modules et la notion de  $\pi$ -liberté), nous traitons quelques exemples significatifs. Tel est l'objet du chapitre 4. Le chapitre 5 est un catalogue non exhaustif de systèmes plats.

Cette présentation reprend pour partie [66]. Le livre récent sur les systèmes plats [118] fait aussi le lien, comme c'est le cas ici, avec les systèmes linéaires de dimension finie, et propose aussi de nombreux exemples d'intérêt pratique.

### 1.3. Problème

**1.3.a. Énoncé.** On reprend ici, sous la forme d'un problème et pour l'étendre au non linéaire, l'observateur-contrôleur que nous avons construit avec le linéaire tangent du système (1.2). L'objectif de commande est d'aller du point d'équilibre  $\theta = 0$  au point d'équilibre  $\theta = \pi$  pendant le temps  $T > 0$  en ne mesurant que  $\theta$ . Cette extension non

linéaire ne nécessite que très peu de calculs et reste à un niveau de complexité très élémentaire.

(1) Donner une trajectoire du système  $[0, t] \mapsto (\theta_r(t), \omega_r(t), u_r(t))$  qui assure cette transition.

(2) Calculer le bouclage d'état qui stabilise la dynamique de l'erreur à la trajectoire  $e = \theta - \theta_r(t)$  de la façon suivante :

$$\ddot{e} + \sigma_1 \dot{e} + \sigma_2 e = 0$$

avec  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ .

(3) On suppose que l'on ne mesure que  $\theta$ . Montrer que l'observateur non linéaire

$$\dot{\hat{\xi}} = \lambda \hat{\xi} - \lambda^2 \theta(t) + u(t)/J - (mgl/J) \sin \theta(t)$$

permet de reconstruire asymptotiquement  $\omega$  par  $\hat{\omega} = \xi - \lambda\theta$ , dès que  $\lambda < 0$ .

(4) Montrer la convergence de l'observateur-contrôleur où l'on a remplacé la mesure de vitesse  $\omega$  dans la question 2 par l'estimée  $\hat{\omega}$  de la question 3.

(5) Faire des simulations de cette manœuvre en  $T = 5$  s en prenant comme paramètres  $m = 1,0$  kg,  $l = 0,2$  m,  $J = 0,1$  kg m<sup>2</sup> et  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Tester la robustesse de cette commande dynamique de sortie par rapport à des dynamiques négligées (rajouter une dynamique pour le moteur) et par rapport à des erreurs dans le modèle (1.2) (rajouter un petit frottement au niveau de l'axe du bras).

### 1.3.b. Solution

(1) Il suffit d'utiliser l'équation de Newton à l'envers : au lieu de donner le couple  $t \mapsto u$  et d'intégrer pour avoir l'angle  $\theta$ , on se donne l'angle  $t \mapsto \theta_r(t)$  pour en déduire le couple  $u_r$  par dérivation

$$u_r(t) = J\ddot{\theta}_r(t) + mlg \sin \theta_r(t)$$

avec, par exemple,  $\theta_r(t) = \pi(3(t/T)^2 - 2(t/T)^3)$  pour  $t \in [0, T]$ . En effet la solution du problème de Cauchy

$$\dot{\theta} = \omega, \quad J\dot{\omega} = -mgl \sin \theta + u_r(t)$$

de condition initiale nulle est donnée par

$$\theta(t) = \theta_r(t), \quad \omega(t) = \omega_r(t), \quad t \in [0, T]$$

avec

$$\omega_r(t) = \frac{6\pi}{T} \left( (t/T) - (t/T)^2 \right).$$

On a ainsi comme contrôle de référence (boucle ouverte)

$$u_r(t) = \frac{6\pi J}{T^2} (1 - 2(t/T)) + mlg \sin \left( \pi(3(t/T)^2 - 2(t/T)^3) \right).$$

(2) Il suffit de considérer le bouclage non-linéaire :

$$u = J \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_r(t) - \sigma_1(\omega - \omega_r(t)) - \sigma_2(\theta - \theta_r(t)) \right) + mgl \sin \theta.$$

(3) En effet la variable composite  $\xi = \omega + \lambda\theta$  vérifie

$$\dot{\xi} = \lambda\xi - \lambda^2\theta(t) + u(t)/J - (mgl/J) \sin \theta(t).$$

Ainsi  $\frac{d}{dt}(\xi - \hat{\xi}) = \lambda(\xi - \hat{\xi})$  et donc avec  $\lambda < 0$ ,  $\hat{\xi}$  converge vers  $\xi$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

(4) Le feedback devient alors (remplacer  $\omega$  par  $\hat{\xi} - \lambda\theta$ )

$$u = J \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_r(t) - \sigma_1(\hat{\xi} - \lambda\theta - \omega_r(t)) - \sigma_2(\theta - \theta_r(t)) \right) + mgl \sin \theta.$$

En boucle fermée, on est face à un système avec 3 états  $(\theta, \omega, \hat{\xi})$ .

Le changement de variables

$$(\theta, \omega, \hat{\xi}) \mapsto \underbrace{(\theta - \theta_r(t))}_e, \underbrace{(\omega - \omega_r(t))}_e, \underbrace{(\hat{\xi} - \omega - \lambda\theta)}_{\tilde{\xi}}$$

conduit à une structure triangulaire avec  $\dot{\tilde{\xi}} = \lambda\tilde{\xi}$  qui tend vers 0. Asymptotiquement  $\tilde{\xi} = 0$  et donc, pour les deux autres états  $e$  et  $\dot{e}$ , on a un oscillateur harmonique amorti :  $\ddot{e} = -\sigma_1\dot{e} - \sigma_2e$ . On en déduit la stabilité asymptotique du système bouclé.

(5) Utiliser le logiciel libre Scilab : <http://www.scilab.org/>. Comme couple de frottement on pourra prendre  $-\gamma\dot{\theta}$  avec  $\gamma > 0$  et pouvant dépendre de  $\theta$  et/ou  $\dot{\theta}$ . L'ordre de grandeur de  $\gamma$  sera  $J/T$ . On pourra aussi modéliser la dynamique du moteur soit comme un retard pur, soit comme un premier ordre. Le retard ou la constante de temps seront de l'ordre de  $T/10$ .

**1.3.c. Aspect global.** À cause du terme en  $\theta - \theta_r$  dans le bouclage, ce dernier n'est pas défini globalement sur  $\mathbb{S}^1$ . En fait, il faut remplacer  $\theta - \theta_r$  par  $\sin(\theta - \theta_r)$  et imposer la dynamique suivante pour l'erreur de suivi  $e = \theta - \theta_r$  :  $\ddot{e} = -\sigma_1 \dot{e} - \sigma_2 \sin e$ . En effet le bouclage qui conduit à cette dynamique de suivi,

$$u = J \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_r(t) - \sigma_1 (\omega - \omega_r(t)) - \sigma_2 \sin(\theta - \theta_r(t)) \right) + mgl \sin \theta,$$

est alors globalement défini pour  $\theta, \theta_r \in \mathbb{S}^1$ . La dynamique de l'erreur  $e$  obéit ainsi à celle d'un pendule amorti :  $\ddot{e} = -\sigma_1 \dot{e} - \sigma_2 \sin e$ . La convergence vers 0 est quasi-globale mathématiquement et toujours effective en pratique.

De même, l'observateur réduit avec la variable composite  $\xi$  faisant intervenir directement  $\theta$  n'est pas défini globalement sur  $\mathbb{S}^1$ . Il convient alors d'utiliser l'observateur asymptotique (gains constants  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ )

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\omega} - \lambda_1 \sin(\hat{\theta} - \theta(t)), \quad \dot{\hat{\omega}} = \frac{u(t) - mgl \sin \theta(t)}{J} - \lambda_2 \sin(\hat{\theta} - \theta(t))$$

globalement défini et dont la convergence est quasi-globale. En effet, les erreurs d'estimation  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$  et  $\tilde{\omega} = \hat{\omega} - \omega$  vérifient le système autonome

$$\dot{\tilde{\theta}} = \tilde{\omega} - \lambda_1 \sin \tilde{\theta}, \quad \dot{\tilde{\omega}} = -\lambda_2 \sin \tilde{\theta}$$

qui admet comme fonction de Lyapounov  $V = (\tilde{\omega})^2 - \lambda_2 \cos \tilde{\theta}$  car  $\dot{V} = -\lambda_1 \lambda_2 \sin^2 \tilde{\theta} \leq 0$ . Ce système autonome admet deux équilibres :  $(0, 0)$  est un nœud exponentiellement stable et  $(\pi, 0)$  est un col. Le bassin d'attraction de  $(0, 0)$  est le cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  à l'exception de l'espace rentrant dans le col  $(\pi, 0)$ . En pratique, la convergence de l'observateur est alors globale.

L'observateur/contrôleur globalement défini sur  $\mathbb{S}^1$  est alors obtenu en remplaçant  $\theta$  et  $\omega$  par leur estimées

$$u = J \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_r(t) - \sigma_1 (\hat{\omega} - \omega_r(t)) - \sigma_2 \sin(\hat{\theta} - \theta_r(t)) \right) + mgl \sin \hat{\theta}.$$

## Chapitre 2. Systèmes linéaires de dimension finie

Après de courtes définitions, nous étudions en détail les systèmes linéaires explicites  $\dot{x} = Ax + Bu$ . Leur commandabilité est caractérisée par le critère de Kalman et la forme normale dite de Brunovsky. Cette dernière permet un paramétrage explicite de toutes les trajectoires en fonctions de  $m$  fonctions scalaires arbitraires  $t \mapsto y(t)$  et d'un nombre fini de leurs dérivées. Ces quantités  $y$ , dites sorties de Brunovsky, sont des combinaisons linéaires de  $x$ . Elles jouent d'une certaine façon le rôle d'un potentiel. Elles permettent surtout de calculer très simplement les commandes  $u$  pour aller d'un état vers un autre (planification de trajectoire). Elles donnent également le bouclage (« feedback ») qui assure le suivi asymptotique d'une trajectoire de référence arbitraire (stabilisation par placement de pôles).

### 2.1. Commandabilité

On considère le système explicite ( $f$  fonction régulière)

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt}x = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

#### 2.1.a. Définitions

**Définition 2.1 (trajectoire).** On appelle trajectoire du système (2.1) toute fonction régulière  $I \ni t \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  qui satisfait identiquement sur un intervalle d'intérieur non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$  les équations (2.1).

**Définition 2.2 (commandabilité).** Le système (2.1) est dit commandable en temps  $T > 0$ , si et seulement si, pour  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , il existe une loi horaire  $[0, T] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$ , dite commande en boucle ouverte, qui amène le système de l'état  $x(0) = p$  à l'état  $x(T) = q$ , c'est à dire, telle que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, T] \\ x(0) &= p \end{aligned}$$

vérifie  $x(T) = q$ . Le système est dit commandable lorsqu'il est commandable pour au moins un temps  $T > 0$ .



D'autres définitions sont possibles : elles correspondent toutes à des variantes plus ou moins subtiles de la définition 2.2. Nous renvoyons à [20] pour de plus amples développements.

Comme l'illustre la figure 2.1, la commandabilité est une propriété

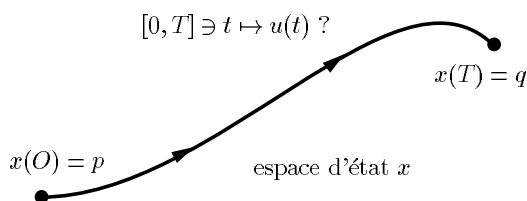


FIGURE 2.1. La planification de trajectoire

topologique très naturelle. En général, la *commande en boucle ouverte*  $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$  n'est pas unique, il en existe une infinité. Cette étape s'appelle *planification de trajectoire* : calculer  $t \mapsto u(t)$  à partir de la connaissance de  $f$ ,  $p$  et  $q$  constitue l'une des questions majeures de l'automatique. Cette question est loin d'être résolue actuellement.

Très souvent, l'absence de commandabilité est due à l'existence d'intégrales premières non triviales. Ce sont des observables qui restent constantes le long de toute trajectoire et qui ne sont pas influencées par la commande  $u$ .

**2.1.b. Intégrale première.** Considérons le réacteur exothermique de la figure 2.2. Les équations de bilan matière et énergie donnent alors les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= D(x_1^{in} - x_1) - k_0 \exp(-E/RT)x_1 \\
 (2.2) \quad \dot{x}_2 &= -Dx_2 + k_0 \exp(-E/RT)x_1 \\
 \dot{T} &= D(T^{in} - T) + \alpha \Delta H \exp(-E/RT)x_1 + u.
 \end{aligned}$$

La cinétique est linéaire du premier ordre, les constantes physiques usuelles ( $D$ ,  $x_1^{in}$ ,  $k_0$ ,  $E$ ,  $T^{in}$ ,  $\alpha$  et  $\Delta H$ ) sont toutes positives, la commande  $u$  est proportionnelle à la puissance thermique échangée avec l'extérieur.  $x_i$  est la concentration de l'espèce chimique  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ . On reconnaît l'effet non linéaire essentiel de la loi d'Arrhenius  $k = k_0 \exp(-E/RT)$  qui relie la constante de vitesse  $k$  à la

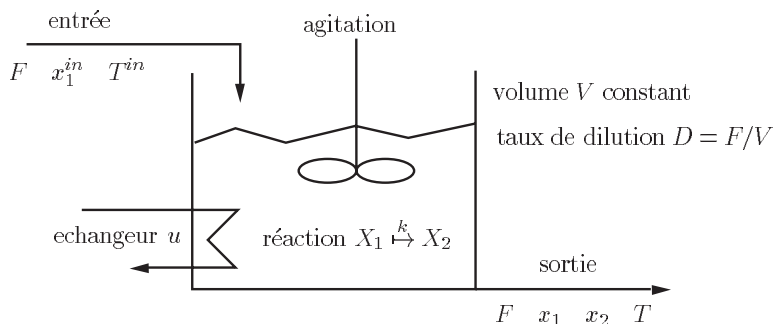


FIGURE 2.2. Un réacteur chimique exothermique où  $u$  correspond aux échanges thermiques avec l'extérieur

température  $T$ . Il est assez facile de voir que ce système n'est pas commandable. En effet, le bilan global sur  $X_1 + X_2$ , élimine le terme non linéaire pour donner

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = D(x_1^{in} - x_1 - x_2).$$

Ainsi donc la quantité  $\xi = x_1 + x_2$  vérifie une équation différentielle autonome  $\dot{\xi} = D(x_1^{in} - \xi)$ . Donc  $\xi = x_1^{in} + \xi_0 \exp(-Dt)$  où  $\xi_0$  est la valeur initiale de  $\xi$ . Si, dans la définition 2.2, on prend l'état initial  $p$  tel que  $\xi = x_1 + x_2 = x_1^{in}$  et  $q$  tel que  $\xi = x_1 + x_2 = 0$ , il n'existe pas de commande qui amène le système de  $p$  vers  $q$ . En effet, pour toute trajectoire démarrant en un tel  $p$ , la quantité  $x_1 + x_2$  reste constante et égale à  $x_1^{in}$ . Cette partie non commandable du système représentée par la variable  $\xi$  admet ici un sens physique précis. Elle est bien connue des chimistes. C'est un invariant chimique.

L'exemple ci-dessus nous indique que l'absence de commandabilité peut-être liée à l'existence d'invariants, i.e., à des combinaisons des variables du système (on pourrait les appeler des observables) et éventuellement du temps, qui sont conservées le long de toute trajectoire. Pour (2.2), il s'agit de  $(x_1 + x_2 - x_1^{in}) \exp(Dt)$  correspondant à  $\xi_0$ . Nous sommes donc conduits à prolonger la notion d'intégrale première pour les systèmes commandés.

**Définition 2.3 (intégrale première).** Une fonction régulière  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto h(t, x) \in \mathbb{R}$  est appelée intégrale première du système (2.1),

si elle est constante le long de toute trajectoire du système. Une intégrale première est dite triviale si c'est une fonction constante sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Si  $h$  est une intégrale première, sa dérivée le long d'une trajectoire arbitraire est nulle :

$$\frac{d}{dt}h = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} \equiv 0$$

pour toute trajectoire  $(t \mapsto (x(t), u(t)))$  du système.

Si (2.1) admet une intégrale première non triviale  $t \mapsto h(t, x)$ , alors (2.1) n'est pas commandable. Sinon, il existe  $T > 0$ , tel que pour tout  $p, q \in \mathbb{R}^n$  et tout instant initial  $t$ ,  $h(t, p) = h(t + T, q)$  (il existe une trajectoire reliant  $p$  à  $q$  sur  $[t, t + T]$ ). Donc  $h$  est une fonction périodique du temps et indépendante de  $x$ . Mais alors la dérivée de  $h$  le long des trajectoires du système correspond à  $\frac{\partial}{\partial t}h$ . Comme elle est nulle,  $h$  est une constante, ce qui contredit l'hypothèse. Nous avons montré la proposition suivante :

**Proposition 2.4.** *Si le système (2.1) est commandable, alors ses intégrales premières sont triviales.*

Il est possible de caractériser à partir de  $f$  et de ses dérivées partielles l'existence d'intégrale première non triviale (voir par exemple [47, 26]). L'existence de telles intégrales premières est liée à celle de sous-systèmes différentiels autonomes. D'une façon plus précise si, à  $u$  fixé, l'algèbre de Lie

$$\mathcal{L} = \text{Lie} \left\{ f, \frac{\partial^{(\alpha)} f}{\partial u^{(\alpha)}}_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \right\}$$

est de rang  $n$  alors il n'existe pas d'intégrale première non triviale ne dépendant que de  $x$ . L'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  est engendrée par tous les crochets de Lie (en  $x$ ) de n'importe quelle longueur qu'il est possible de faire à partir de  $f$  et de ses dérivées partielles en  $u$ . Si cette dernière est de dimension  $n$ , la dimension  $x$ , alors le système est dit faiblement accessible.

Si, dans l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$ , l'idéal de Lie engendré par les  $\partial^{(\alpha)} f / \partial u^{(\alpha)}$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , au moins l'un des  $\alpha_i$  non nuls, est de rang  $n$  alors il n'existe pas d'intégrale première non triviale dépendant

de  $x$  et/ou de  $t$ . Le système est alors dit fortement accessible (voir [123]). Nous renvoyons au livre de Jean-Michel Coron [20] pour des énoncés plus détaillés et en rapport direct avec la commandabilité.

## 2.2. Commandabilité linéaire

Nous considérons ici les systèmes linéaires stationnaires du type

$$(2.3) \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

où l'état  $x \in \mathbb{R}^n$ , la commande  $u \in \mathbb{R}^m$  et les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes et de tailles  $n \times n$  et  $n \times m$ , respectivement.

**2.2.a. Matrice de commandabilité.** Supposons que (2.3) admette une intégrale première  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto h(t, x) \in \mathbb{R}$ . Soit le changement de variables sur  $x$  défini par  $x = \exp(tA)z$ . Avec les variables  $(z, u)$ , (2.3) devient  $\dot{z} = \exp(-tA)Bu$  et l'intégrale première  $h(t, \exp(tA)z) = \ell(t, z)$ . Comme la valeur de  $\ell$  est constante le long de toute trajectoire nous avons, en dérivant le long d'une trajectoire arbitraire  $t \mapsto (z(t), u(t))$

$$\dot{\ell} = \frac{\partial \ell}{\partial t} + \frac{\partial \ell}{\partial z} \dot{z} = 0.$$

Comme  $\dot{z} = \exp(-tA)Bu$ , pour toute valeur de  $z$  et  $u$  on a l'identité suivante :

$$\frac{\partial \ell}{\partial t}(t, z) + \frac{\partial \ell}{\partial z}(t, z) \exp(-tA)Bu \equiv 0.$$

En prenant,  $u = 0$ ,  $z$  et  $t$  arbitraires, on en déduit (prendre, par exemple, la trajectoire du système qui passe par  $z$  à l'instant  $t$  et dont la commande  $u$  est nulle) :

$$\frac{\partial \ell}{\partial t}(t, z) \equiv 0.$$

Donc nécessairement  $\ell$  est uniquement fonction de  $z$ . Ainsi

$$\frac{\partial \ell}{\partial z}(z) \exp(-tA)B \equiv 0.$$

En dérivant cette relation par rapport à  $t$ , on a,

$$\frac{\partial \ell}{\partial z}(z) \exp(-tA)AB \equiv 0$$

car  $\frac{d}{dt}(\exp(-tA)) = -\exp(-tA)A$ . Plus généralement, une dérivation à n'importe quel ordre  $k \geq 0$  donne

$$\frac{\partial \ell}{\partial z}(z) \exp(-tA) A^k B \equiv 0.$$

En prenant  $t = 0$  on obtient

$$\frac{\partial \ell}{\partial z}(z) A^k B = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Ainsi le vecteur  $\partial \ell / \partial z(z)$  appartient à l'intersection des noyaux à gauche de la famille infinie de matrice  $(A^k B)_{k \geq 0}$ . Le noyau à gauche de  $A^k B$  n'est autre que  $\text{Im}(A^k B)^\perp$ , l'orthogonal de l'image de  $A^k B$ . Donc

$$\frac{\partial \ell}{\partial z}(z) \in \bigcap_{k \geq 0} \text{Im}(A^k B)^\perp.$$

Mais

$$\bigcap_{k \geq 0} \text{Im}(A^k B)^\perp = \left( \text{Im}(B) + \dots + \text{Im}(A^k B) + \dots \right)^\perp.$$

La suite d'espace vectoriel  $E_k = \text{Im}(B) + \dots + \text{Im}(A^k B)$  est une suite croissante pour l'inclusion,  $E_k \subset E_{k+1}$ . Si pour un certain  $k$ ,  $E_k = E_{k+1}$ , cela signifie que  $\text{Im}(A^{k+1}B) \subset E_k$ , donc  $A(E^k) \subset E_k$ . Mais  $\text{Im}(A^{k+2}B) = \text{Im}(AA^{k+1}B) \subset A(E^{k+1})$ . Ainsi  $\text{Im}(A^{k+2}B) \subset E_k$ . On voit donc que pour tout  $r > 0$ ,  $\text{Im}(A^{k+r}B) \subset E_k$ , d'où  $E_{k+r} = E_k$ . Ainsi la suite des  $E_k$  est une suite de sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  emboîtés les uns dans les autres. Cette suite stationne dès qu'elle n'est plus, pour un certain  $k$ , strictement croissante. Il suffit donc de ne considérer que ses  $n$  premiers termes soit  $E_0, \dots, E_{n-1}$ , car automatiquement  $E_{n-1} = E_{n+r}$  pour tout  $r > 0$ .

En revenant à la suite des noyaux à gauche de  $A^k B$ , nous voyons que  $\partial \ell / \partial z(z)$  dans le noyau à gauche de la suite infinie de matrices  $(A^k B)_{k \geq 0}$ , est équivalent à  $\partial \ell / \partial z(z)$  dans le noyau à gauche de la *suite finie* de matrices  $(A^k B)_{0 \leq k \leq n-1}$ <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup>On pourrait aussi utiliser le théorème de Cayley-Hamilton qui donne un résultat plus précis : toute matrice carrée est racine de son polynôme caractéristique. Cela veut dire,  $A$  étant de taille  $n$ , que  $A^n$  est une combinaison linéaire des

Ainsi, pour tout  $z$ ,  $\partial\ell/\partial z(z)$  appartient au noyau à gauche de la matrice  $n \times (nm)$ ,

$$(2.4) \quad \mathcal{C} = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

dite *matrice de commandabilité* de Kalman. Si  $\mathcal{C}$  est de rang  $n$ , son noyau à gauche est nul, donc  $\ell$  ne dépend pas de  $z$  :  $\ell$  est alors une fonction constante et  $h$  également.

Réciproquement, si la matrice de commandabilité  $\mathcal{C}$  n'est pas de rang maximal, alors il existe un vecteur  $w \in \mathbb{R}^n/\{0\}$ , dans le noyau à gauche de (2.4). En remontant les calculs avec  $\ell(z, t) = w'z$  on voit que  $\dot{\lambda} = 0$  le long des trajectoires. En passant aux variables  $(x, u)$ , on obtient une intégrale première non triviale  $= h(t, x) = w' \cdot \exp(-tA)x$ . Toute trajectoire du système se situe dans un hyperplan orthogonal à  $w$ .

En résumé, nous avons démontré la

**Proposition 2.5.** *La matrice de commandabilité*

$$\mathcal{C} = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

*est de rang  $n$ , si, et seulement si, les seules intégrales premières du système (2.3) sont triviales.*

Des propositions 2.4 et 2.5, il vient : si le système (2.3) est commandable, sa matrice de commandabilité est de rang  $n$ . Nous allons voir que la réciproque est vraie. Pour cela, nous avons besoin de certaines propriétés d'invariance.

### 2.2.b. Invariance

**Définition 2.6 (changement d'état, bouclage statique régulier)**

Un changement linéaire de coordonnées  $x \mapsto \tilde{x}$  est défini par une matrice  $M$  inversible d'ordre  $n$  :  $x = M\tilde{x}$ . Un bouclage statique

---

$(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$  :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k A^k$$

où les  $p_k$  sont définis par  $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k \lambda^k$ . Nous avons préféré un argument plus simple avec la suite des  $E_k$  mais qui a l'avantage de passer au non linéaire et qui correspond au calcul de l'algèbre de Lie de commandabilité.

régulier  $u \mapsto \tilde{u}$  est défini par une matrice  $N$  inversible d'ordre  $m$  et une autre matrice  $K$ ,  $m \times n$  :  $u = K\tilde{x} + N\tilde{u}$ . C'est un changement de variables sur les commandes paramétré par l'état.

L'ensemble des transformations

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ K & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$$

forment un groupe lorsque les matrices  $M$ ,  $N$  et  $K$  varient ( $M$  et  $N$  restant inversibles).

Si  $\dot{x} = Ax + Bu$  est commandable (resp. n'admet pas d'intégrale première) alors il est évident que  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}$  obtenu avec (2.5) est commandable (resp. n'admet pas d'intégrale première).

Les notions de commandabilité et d'intégrale première sont intrinsèques, c'est-à-dire, indépendantes des coordonnées avec lesquelles les équations du système sont établies. Si la matrice de commandabilité dans les coordonnées  $(x, u)$  est de rang  $n$ , la matrice de commandabilité dans les coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{u})$  sera aussi de rang  $n$ . Cette simple remarque conduit au résultat non évident suivant :

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \iff \text{rang}(\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = n$$

où  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  s'obtiennent en écrivant  $\dot{x} = Ax + Bu$  dans les coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{u})$  :

$$\dot{\tilde{x}} = M^{-1}(AM + BK)\tilde{x} + M^{-1}BN\tilde{u}.$$

Soit  $\tilde{A} = M^{-1}(AM + BK)$  et  $\tilde{B} = M^{-1}BN$ . En fait, il est possible d'aller beaucoup plus loin et de montrer que les indices de commandabilité définis ci-dessous sont aussi invariants.

**Définition 2.7 (indices de commandabilité).** Pour tout entier  $k$ , on note  $\sigma_k$  le rang de la matrice  $(B, AB, A^2B, \dots, A^k B)$ . Les  $(\sigma_k)$  sont appelés indices de commandabilité du système linéaire (2.3),

La suite  $\sigma_k$  est croissante, majorée par  $n$ . Ainsi, l'absence d'intégrale première est équivalente à  $\sigma_{n-1} = n$ .

**Proposition 2.8 (invariance).** *Les indices de commandabilité de  $\dot{x} = Ax + Bu$  sont invariants par changement de variable sur  $x$  et bouclage statique régulier sur  $u$ .*

Nous laissons la preuve de ce résultat par récurrence sur  $k$  en exercice.

Il est important de comprendre la géométrie derrière cette invariance. Les transformations  $(x, u) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{u})$  du type (2.5) forment un groupe. Ce groupe définit une relation d'équivalence entre deux systèmes ayant même nombre d'états et même nombre de commandes. La proposition précédente signifie simplement que les indices de commandabilité sont les mêmes pour deux systèmes appartenant à la même classe d'équivalence, i.e, le même objet géométrique vu dans deux repères différents. En fait, on peut montrer que les indices de commandabilité sont les seuls invariants : il y a autant de classes d'équivalence que d'indices de commandabilité possibles. Nous ne montrerons pas directement ce résultat. Tous les éléments nécessaires à cette preuve se trouvent dans la construction de la forme de Brunovsky ci-dessous (voir aussi [49, 122]).

**2.2.c. Un exemple.** Soit le système mécanique à deux degrés de liberté et une seule commande de la figure 2.3. Il s'agit d'un système

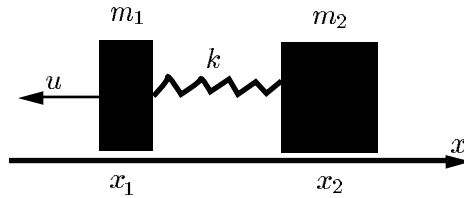


FIGURE 2.3. Deux masses couplées par un ressort, le tout piloté par une seule force  $u$

mécanique sous actionné contrairement au bras motorisé étudié dans l'introduction (un degré de liberté (l'angle  $\theta$ ) et un moteur). En négligeant les frottements et en supposant le ressort linéaire de raideur  $k$ , on est conduit au modèle suivant :

$$(2.6) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + u \\ m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2). \end{cases}$$

Montrons que ce système est commandable. Il suffit pour cela de remarquer que la quantité  $x_2$ , l'abscisse de la masse qui n'est pas



directement soumise à la force  $u$ , joue un rôle très particulier (sortie de Brunovsky). Si au lieu de donner  $t \mapsto u(t)$  et d'intégrer (2.6) à partir de positions et vitesses initiales, on fixe  $t \mapsto x_2(t) = y(t)$ . Alors  $x_1 = (m_2/k)\dot{y} + y$  et donc  $u = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = (m_1m_2/k)y^{(4)} + (m_1 + m_2)\ddot{y}$ . Ainsi on peut écrire le système en faisant jouer à  $x_2$  un rôle privilégié :

$$\begin{cases} x_1 = (m_2/k) \ddot{y} + y \\ x_2 = y \\ u = (m_1m_2/k) y^{(4)} + (m_1 + m_2)\ddot{y}. \end{cases}$$

On obtient ainsi une paramétrisation explicite de toutes les trajectoires du système. Les relations précédentes établissent une correspondance bi-univoque et régulière entre les trajectoires de (2.6) et les fonctions régulières  $t \mapsto y(t)$ .

Cela permet de calculer de la façon la plus élémentaire possible une commande  $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$  qui fait passer de l'état  $p = (x_1^p, v_1^p, x_2^p, v_2^p)$  à l'état  $q = (x_1^q, v_1^q, x_2^q, v_2^q)$  ( $v_i$  correspond à  $\dot{x}_i$ ). Comme

$$\begin{cases} x_1 = (m_2/k) \ddot{y} + y \\ v_1 = (m_2/k) y^{(3)} + \dot{y} \\ x_2 = y \\ v_2 = \dot{y} \end{cases}$$

imposer  $p$  en  $t = 0$  revient à imposer  $y$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 en 0. Il en est de même en  $t = T$ . Il suffit donc de trouver une fonction régulière  $[0, T] \ni t \mapsto y(t)$  dont les dérivées jusqu'à l'ordre 3 sont données a priori en 0 et en  $T$  : un polynôme de degré 7 en temps répond à la question mais il existe bien d'autres possibilités.

Nous allons voir, avec la forme normale de Brunovsky, qu'une telle correspondance entre  $y$  et les trajectoires du système est générale. Il suffit que (2.3) soit commandable. Tout revient donc à trouver la sortie de Brunovsky  $y$  de même dimension que la commande  $u$ .

#### 2.2.d. Critère de Kalman et forme de Brunovsky

**Théorème 2.9 (critère de Kalman).** *Le système  $\dot{x} = Ax + Bu$  est commandable si, et seulement si, la matrice de commandabilité  $\mathcal{C} = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  est de rang  $n = \dim(x)$ .*

La paire  $(A, B)$  est dite *commandable* si le rang de la matrice de commandabilité  $\mathcal{C}$  est maximum.

La preuve que nous allons donner de ce résultat n'est pas la plus courte possible. Cependant, elle permet de décrire explicitement, pour toute durée  $T > 0$  et pour  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , les trajectoires du système qui partent de  $p$  et arrivent en  $q$ . Cette preuve utilise la forme dite de Brunovsky. Cette dernière se construit grâce à une méthode d'élimination, proche de celle très classique du pivot de Gauss.

**Théorème 2.10 (forme de Brunovsky).** *Si la matrice de commandabilité  $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  du système  $\dot{x} = Ax + Bu$  est de rang  $n = \dim(x)$  et si  $B$  est de rang  $m = \dim(u)$ , alors il existe un changement d'état  $z = Mx$  ( $M$  matrice inversible  $n \times n$ ) et un bouclage statique régulier  $u = Kz + Nv$  ( $N$  matrice inversible  $m \times m$ ), tels que les équations du système dans les variables  $(z, v)$  admettent la forme suivante (écriture sous la forme de  $m$  équations différentielles d'ordre  $\geq 1$ ) :*

$$(2.7) \quad y_1^{(\alpha_1)} = v_1, \dots, \quad y_m^{(\alpha_m)} = v_m$$

avec comme état  $z = (y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m-1)})$ , les  $\alpha_i$  étant des entiers positifs.

Les  $m$  quantités  $y_j$ , qui sont des combinaisons linéaires de l'état  $x$ , sont appelées *sorties de Brunovsky*.

Pour une paire  $(A, B)$  commandable, les indices de commandabilité  $\sigma_k$  sont directement reliés aux  $m$  entiers  $\alpha_i$  de la forme de Brunovsky. Il est facile de voir que, dans le cas commandable, se donner les  $\sigma_k$  revient à ce donner les  $\alpha_i$ . Ainsi, deux systèmes commandables ayant les mêmes indices de commandabilité admettent la même forme de Brunovsky, ils sont donc équivalents. Ce n'est plus vrai si ces deux systèmes ne sont plus commandables avec les mêmes indices de commandabilité. Il n'y aura équivalence que de la partie commandable. L'équivalence sera complète, si les parties non commandables sont équivalents, i.e., si les matrices définissant les dynamiques autonomes des parties non commandables sont semblables et donc admettent la même forme normale de Jordan.

*Démonstration du théorème 2.10.* Elle repose sur

- (1) une mise sous forme triangulaire des équations d'état et l'élimination de  $u$  ;
- (2) l'invariance du rang de  $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  par rapport aux transformations (2.5) ;
- (3) une récurrence sur la dimension de l'état.

*Mise sous forme triangulaire.* On suppose que  $B$  est de rang  $m = \dim(u)$  (sinon, faire un regroupement des commandes en un nombre plus petit que  $m$  de façon à se ramener à ce cas). Alors, il existe une partition de l'état  $x = (x_r, x_u)$  avec  $\dim(x_r) = n - m$  et  $\dim(x_u) = m$  telle que les équations (2.3) admettent la structure bloc suivante

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_{rr}x_r + A_{ru}x_u + B_ru \\ \dot{x}_u &= A_{ur}x_r + A_{uu}x_u + B_uu\end{aligned}$$

où  $B_u$  est une matrice carrée inversible. Cette partition n'est pas unique, bien sûr. En tirant  $u$  de la seconde équation et en reportant dans la première, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_{rr}x_r + A_{ru}x_u + B_rB_u^{-1}(\dot{x}_u - A_{ur}x_r - A_{uu}x_u) \\ \dot{x}_u &= A_{ur}x_r + A_{uu}x_u + B_uu.\end{aligned}$$

En regroupant les dérivées dans la première équation, on a

$$\begin{aligned}\dot{x}_r - B_rB_u^{-1}\dot{x}_u &= (A_{rr} - B_rB_u^{-1}A_{ur})x_r + (A_{ru} - B_rB_u^{-1}A_{uu})x_u \\ \dot{x}_u &= A_{ur}x_r + A_{uu}x_u + B_uu.\end{aligned}$$

Avec une transformation (2.5) définie par

$$\tilde{x}_r = x_r - B_rB_u^{-1}x_u, \quad \tilde{x}_u = x_u, \quad \tilde{u} = A_{ur}x_r + A_{uu}x_u + B_uu,$$

les équations  $\dot{x} = Ax + Bu$  deviennent

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_r &= \tilde{A}_r\tilde{x}_r + \tilde{A}_u\tilde{x}_u \\ \dot{\tilde{x}}_u &= \tilde{u}\end{aligned}$$

où  $\tilde{A}_r = (A_{rr} - B_rB_u^{-1}A_{ur})$  et  $\tilde{A}_u = (A_{rr} - B_rB_u^{-1}A_{ur})B_rB_u^{-1} + (A_{ru} - B_rB_u^{-1}A_{uu})$ . Dans cette structure triangulaire où la commande  $\tilde{u}$  n'intervient pas dans la première équation, nous voyons apparaître un système plus petit d'état  $\tilde{x}_r$  et de commande  $\tilde{x}_u$ . Cela nous permet de réduire la dimension de  $x$  et de raisonner par récurrence.

*Invariance.* Un simple calcul par blocs nous montre que si la matrice  $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  est de rang  $n$  alors  $(A_u, A_r A_u, \dots, A_r^{n-m-1} A_u)$  est de rang  $n-m$ . Du système de taille  $n$  on passe ainsi au système de taille réduite  $n-m$ ,  $\dot{\tilde{x}}_r = \tilde{A}_r \tilde{x}_r + \tilde{A}_u \tilde{x}_u$  ( $\tilde{x}_r$  l'état,  $\tilde{x}_u$  la commande).

*Réurrence sur le nombre d'états.* Supposons donc, le résultat vrai pour toutes les dimensions d'état inférieures ou égales à  $n-1$ . Considérons un système  $\dot{x} = Ax + Bu$  avec  $n = \dim(x)$ , sa matrice de commandabilité de rang  $n$ , et  $B$  de rang  $m = \dim(u) > 0$ . L'élimination de  $u$  donne, après une transformation de type (2.5),

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r x_r + A_u x_u \\ \dot{x}_u &= u\end{aligned}$$

avec  $(A_u, A_r A_u, \dots, A_r^{n-m-1} A_u)$  de rang  $n-m < n$ , où  $\dim(u) = \dim(x_u) = m$  et  $\dim(x_r) = n-m$  (les  $\sim$  ont été enlevés pour alléger les notations). Notons  $\bar{m}$  le rang de  $A_u$ . Comme  $\bar{m} \leq m$ , un changement de variable sur  $x_u$ ,  $(\bar{x}_u, \tilde{x}_u) = P x_u$  avec  $P$  inversible, permet d'écrire le système sous la forme

$$(2.8) \quad \begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r x_r + \bar{A}_u \bar{x}_u \\ \dot{\bar{x}}_u &= \bar{u} \\ \dot{\tilde{x}}_u &= \tilde{u}\end{aligned}$$

avec  $(\bar{u}, \tilde{u}) = P u$ ,  $\dim(\bar{x}_u) = \bar{m}$  et  $\bar{A}_u$  de rang  $\bar{m}$ . Comme le rang de la matrice de commandabilité de  $\dot{x}_r = A_r x_r + \bar{A}_u \bar{x}_u$  ( $x_r$  est l'état et  $\bar{x}_u$  la commande) est égal à  $n-m = \dim(x_r)$ , l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'un changement de variable  $x_r = Mz$  et d'un bouclage statique régulier  $\bar{x}_u = Kz + N\bar{v}$  ( $\bar{v}$  est la nouvelle commande ici) mettant ce sous système sous forme de Brunovsky. Alors le changement d'état  $(x_r, \bar{x}_u, \tilde{x}_u)$  défini par

$$\begin{pmatrix} x_r \\ \bar{x}_u \\ \tilde{x}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ K & N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{v} \\ \tilde{x}_u \end{pmatrix}$$

et le bouclage statique régulier sur  $(\bar{u}, \tilde{u})$

$$\bar{u} = KM^{-1}(A_r x_r + \bar{A}_u \bar{x}_u) + N\bar{v}, \quad \tilde{u} = \tilde{v}$$

transforme alors le système (2.8) sous forme de Brunovsky avec  $v = (\bar{v}, \tilde{v})$  comme nouvelle commande.  $\square$

*Démonstration du théorème 2.9.* La commandabilité est indépendante du choix des variables sur  $x$  et d'un bouclage statique régulier sur  $u$ . On peut donc supposer le système sous sa forme de Brunovsky. Dans ces coordonnées, aller d'un état à un autre est élémentaire. On se ramène à étudier la commandabilité du système scalaire  $y^{(\alpha)} = v$ . L'état initial  $(y_a, \dots, y_a^{(\alpha-1)})$  et l'état final  $(y_b, \dots, y_b^{(\alpha-1)})$  ainsi que la durée  $T$  étant donnés, les lois horaires  $t \mapsto v(t)$  assurant le passage entre ces deux états pendant la durée  $T$  correspondent alors à la dérivée  $\alpha$ -ième de fonctions  $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}$ , dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $\alpha - 1$  en 0 et  $T$  sont imposées par

$$\varphi^{(r)}(0) = y_a^{(r)}, \quad \varphi^{(r)}(T) = y_b^{(r)}, \quad r = 0, \dots, \alpha - 1.$$

Il existe bien sûr une infinité de telles fonctions  $\varphi$  (on peut prendre pour  $\varphi$  un polynôme de degré  $2\alpha - 1$ , par exemple).  $\square$

**2.2.e. Planification et suivi de trajectoires.** De la preuve des deux théorèmes précédents, il est important de retenir deux choses :

- Dire que le système  $\dot{x} = Ax + Bu$  est commandable, est équivalent à l'existence d'un bouclage statique régulier  $u = Kz + Nv$  et d'un changement d'état  $x = Mz$  se ramenant à la forme de Brunovsky  $y^{(\alpha)} = v$  et  $z = (y, \dots, y^{(\alpha-1)})$  (par abus de notation  $y = (y_1, \dots, y_m)$  et  $y^{(\alpha)} = (y_1^{(\alpha_1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m)})$ ). Ainsi

$$x = M(y, \dots, y^{(\alpha-1)}), \quad u = L(y, \dots, y^{(\alpha)})$$

où la matrice  $L$  est construite avec  $K$ ,  $N$  et  $M$ . Lorsque l'on considère une fonction régulière arbitraire du temps  $t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^m$  et que l'on calcule  $x(t)$  et  $u(t)$  par les relations

$$x(t) = M(\varphi(t), \dots, \varphi^{(\alpha-1)}(t)), \quad u(t) = L(\varphi(t), \dots, \varphi^{(\alpha)}(t))$$

alors  $t \mapsto (x(t), u(t))$  est une trajectoire du système : on a identiquement  $\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t) = 0$ . Réciproquement, toutes les trajectoires régulières du système se paramétrisent de cette façon, grâce à  $m$  fonctions scalaires arbitraires  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$  et un nombre fini de leurs dérivées par les formules ci-dessus.

• La commandabilité de  $\dot{x} = Ax + Bu$  implique la stabilisation par retour d'état. En effet, il suffit de considérer la forme de Brunovsky et dans la forme de Brunovsky, chacun des  $m$  sous-systèmes indépendants  $y_i^{(\alpha_i)} = v_i$ . Soient  $\alpha_i$  valeurs propres,  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha_i}$ , correspondant au spectre d'une matrice réelle de dimension  $\alpha_i$ . Notons  $s_k$  les fonctions symétriques des  $\lambda_i$  (des quantités réelles donc) homogènes de degré  $k$ ,

$$\prod_{k=1}^{\alpha_i} (X - \lambda_k) = X^{\alpha_i} - s_1 X^{\alpha_i-1} + s_2 X^{\alpha_i-2} + \dots + (-1)^{\alpha_i} s_{\alpha_i}$$

Alors, dès que les  $\lambda_k$  sont à partie réelle strictement négative, le bouclage

$$v_i = s_1 y_i^{(\alpha_i-1)} - s_2 y_i^{(\alpha_i-2)} + \dots + (-1)^{\alpha_i-1} s_{\alpha_i} y_i$$

assure la stabilité de  $y_i^{(\alpha_i)} = v_i$  : en effet, les exposants caractéristiques (on dit aussi les *pôles*) du système bouclé sont les  $\lambda_k$ .

Aussi de la forme de Brunovsky l'on déduit directement le résultat suivant :

**Théorème 2.11 (placement de pôles).** *Si la paire  $(A, B)$  est commandable alors, pour toute matrice réelle  $F$   $n \times n$ , il existe une matrice  $m \times n$ ,  $K$  (non nécessairement unique), telle que le spectre de  $A+BK$  coïncide avec celui de  $F$ .*

De retour dans les coordonnées de modélisation,  $\dot{x} = Ax + Bu$ , la planification de trajectoire nous donne une trajectoire du système (par exemple la trajectoire que doit suivre une fusée au décollage, la manœuvre d'atterrissage d'un avion...). Nous la notons  $t \mapsto (x_r(t), u_r(t))$  avec l'indice  $r$  pour référence. En pratique, et à cause des aléas de l'existence, il convient, comme l'illustre la figure 2.4, de corriger en fonction de l'écart  $\Delta x$ , la commande de référence  $u_r$  (il est rare de piloter un système en aveugle, uniquement en sachant d'où l'on part et où l'on veut aller). Le problème est donc de calculer la correction  $\Delta u$  à partir de  $\Delta x$  de façon à revenir sur la trajectoire de référence. On peut alors utiliser un bouclage stabilisant en plaçant les pôles sur la forme de Brunovsky.

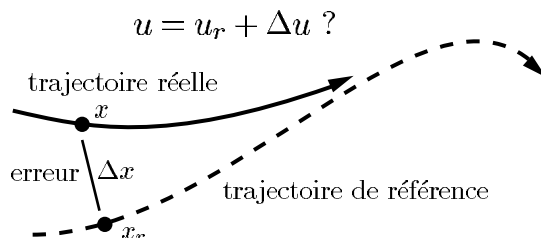


FIGURE 2.4. Le suivi de trajectoire

D'une façon plus précise : comme  $\dot{x}_r = Ax_r + Bu_r$ , on obtient, par différence avec  $\dot{x} = Ax + Bu$  l'équation d'erreur suivante

$$\frac{d}{dt}(\Delta x) = A \Delta x + B \Delta u$$

où  $\Delta x = x - x_r$  et  $\Delta u = u - u_r$  ; le système étant commandable, il existe  $K$ , matrice  $m \times n$ , telle que les valeurs propres de  $A + BK$  soient à parties réelles strictement négatives (placement de pôles). Ainsi la correction

$$\Delta u = K \Delta x$$

assure le suivi asymptotique de la trajectoire de référence  $t \mapsto x_r(t)$ . La stabilité structurelle des points d'équilibres hyperboliques garantie que toute erreur assez faible (petite incertitude sur  $A$  et  $B$ , effets non linéaires faibles, erreurs de mesure, erreurs de troncature dues à la discrétisation de la loi de contrôle obtenue, ...) ne sera pas amplifiée au cours du temps :  $x$  restera ainsi proche de  $x_r$ .

Nous terminerons par une constatation d'ordre expérimental : lorsque le modèle dynamique  $\dot{x} = Ax + Bu$  est d'origine physique, il n'est pas rare que sa partie non commandable, i.e., ses intégrales premières, ait une signification physique immédiate, tout comme les grandeurs  $y$ , fonction de  $x$  et intervenant dans la forme de Brunovsky (cf. théorème 2.10) de sa partie commandable. Cet état de fait n'est vraisemblablement pas dû entièrement au hasard : en physique, les grandeurs qui admettent une signification intrinsèque, i.e., les grandeurs physiques, sont celles qui ne dépendent pas du repère de l'observateur. En automatique, le passage d'un repère à un autre correspond, entre autre, à une transformation de type (2.5). Il est alors

clair que le « sous-espace » engendré par les sorties de Brunovsky est un invariant. Il a donc toutes les chances d'avoir un sens physique immédiat. De plus les sorties de Brunovsky admettent un équivalent non linéaire pour de nombreux systèmes physiques. On les appelle alors sorties plates (voir le chapitre 3).

**Exercice 2.12.** Pour le système (2.6) calculer explicitement un bouclage d'état qui place les pôles. Connaissant les paramètres  $m_1$ ,  $m_2$  et  $k$ , que choisir comme pôles pour assurer la stabilité asymptotique du système bouclé ainsi que la robustesse par rapport à des dynamiques négligées ?

**Exercice 2.13.** Soit le système de la figure 2.3. On rajoute un amortisseur linéaire entre les deux masses. Ainsi (2.6) devient ( $a > 0$  est le coefficient de frottement)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + a(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + u \\ m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + a(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases}$$

Montrer que le système reste commandable et calculer sa sortie de Brunovsky.

### 2.3. Linéarisation par bouclage statique

**2.3.a. Équivalence statique.** La relation d'équivalence qui permet de mettre un système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  commandable sous forme de Brunovsky peut être prolongée de la manière suivante. Au lieu de considérer des transformations du type

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} Mx \\ Kx + Nu \end{bmatrix}$$

avec  $M$  et  $N$  matrices inversibles, considérons des transformations inversibles plus générales et non linéaires suivantes

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z = \phi(x) \\ v = k(x, u) \end{bmatrix}$$

où  $\phi$  est un difféomorphisme et à  $x$  bloqué,  $u \mapsto k(x, u)$  également. Il est donc logique de considérer maintenant les systèmes non linéaires de la forme  $\dot{x} = f(x, u)$  et leur classification modulo le groupe de



transformations ci-dessus. La relation d'équivalence qui en résulte est appelée équivalence par bouclage statique régulier et changement de coordonnées (d'une façon plus abrégée équivalence statique). Décider si deux systèmes avec les mêmes nombres d'états et des commandes,  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $\dot{z} = g(z, v)$ , ( $f, g$  régulières) sont équivalents, est un problème de géométrie très compliquée et largement ouvert. En revanche, il existe une caractérisation explicite des systèmes non linéaires équivalents aux systèmes linéaires commandables : ces systèmes sont dits *linéarisables par bouclage statique régulier*.

**2.3.b. CNS de linéarisation statique.** L'intérêt pratique est le suivant. Les équations issues de la physique  $\dot{x} = f(x, u)$  sont en général non linéaires dans les coordonnées de modélisation  $x$  et  $u$ . La question « Existe-t-il des coordonnées,  $z = \phi(x)$  et  $v = k(x, u)$ , qui rendent les équations linéaires,  $\dot{z} = Az + Bv$  avec  $(A, B)$  commandable ? » est alors d'importance. En effet, une réponse positive signifie que le système est faussement non linéaire. Il suffit de changer de « repère » pour que tout devienne linéaire.

À partir de maintenant, nous considérons le système

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

avec  $f$  régulière et  $f(0, 0) = 0$ . Notre point de vue sera local autour de l'équilibre  $(x, u) = (0, 0)$ . Il peut être élargi à l'espace tout entier sans difficulté importante.

**Lemme 2.14.** *Les deux propositions suivantes sont équivalentes*

(1) *Le système étendu*

$$(2.9) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{u} = \bar{u} \end{cases}$$

*est linéarisable par bouclage statique ( $\bar{u}$  est ici la commande)*

(2) *Le système*

$$(2.10) \quad \dot{x} = f(x, u)$$

*est linéarisable par bouclage statique.*

*Démonstration.* Si  $x = \phi(z)$  et  $u = k(z, v)$  transforment (2.10) en un système linéaire commandable  $\dot{z} = Az + Bv$ , alors

$$(x, u) = (\phi(z), k(z, v)) \quad \text{et} \quad \bar{u} = \frac{\partial k}{\partial z}(Az + Bv) + \frac{\partial k}{\partial v}\bar{v}$$

transforme (2.9) en

$$(2.11) \quad \dot{z} = Az + Bv, \quad \dot{v} = \bar{v}$$

système linéaire commandable. Ainsi la seconde proposition implique la première.

Supposons maintenant la première proposition vraie. Comme tout système linéaire commandable peut s'écrire sous la forme (2.11) avec  $(A, B)$  commandable, (cf. forme de Brunovsky) il existe une transformation  $(x, u) = (\phi(z, v), \psi(z, v))$  et  $\bar{u} = k(z, v, \bar{v})$  qui transforme (2.9) en (2.11) avec  $\dim(z) = \dim(x)$ . Cela veut dire que pour tout  $(z, v, \bar{v})$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z, v)(Az + Bv) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\bar{v} = f(\phi(z, v), \psi(z, v)).$$

Donc  $\phi$  ne dépend pas de  $v$  et la transformation inversible  $x = \phi(z)$ ,  $u = \psi(z, v)$  transforme (2.10) en  $\dot{z} = Az + Bv$ .  $\square$

Ainsi, quitte à étendre l'état en posant  $\dot{u} = \bar{u}$  et en prenant comme entrée  $\bar{u}$ , on peut toujours supposer que  $f$  est affine en  $u$ , i.e., que le système admet les équations

$$(2.12) \quad \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + \cdots + g_m(x)u_m$$

où  $f$  et les  $g_i$  sont des champs de vecteurs. Il est alors facile de voir que les transformations  $x = \phi(z)$  et  $u = k(z, v)$  qui rendent le système linéaire sont nécessairement affines en  $v$ , i.e.,  $k(x, v) = \alpha(x) + \beta(x)v$  avec  $\beta$  inversible pour tout  $x$ .

À partir des champs de vecteurs définissant (2.12), on définit une suite de distributions croissantes par la récurrence suivante

$$E_0 = \{g_1, \dots, g_m\}, \quad E_i = \{E_{i-1}, [f, E_{i-1}]\} \quad i \geq 1$$

où  $[f, g]$  est le crochet de Lie de deux champs de vecteurs. Ces distributions et le crochet sont invariants par changement de coordonnées.

Le résultat suivant est issu de [48].

**Théorème 2.15 (CNS de linéarisation statique).** *Autour de l'équilibre  $(x, u) = (0, 0)$ , le système (2.12) est linéarisable par bouclage statique régulier si, et seulement si, les distributions  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , définies ci-dessus sont involutives (stable par le crochet de Lie), de rang constant autour de  $x = 0$  et le rang de  $E_{n-1}$  vaut  $n$ , la dimension de  $x$ .*

*Démonstration.* Il est évident que les distributions  $E_i$ , qui sont des objets intrinsèques par rapport aux coordonnées  $x$ , restent également inchangées par bouclage statique  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  avec  $\beta(x)$  inversible. Comme pour un système linéaire commandable  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $E_i$  correspondent à l'image de  $(B, AB, \dots, A^i B)$ , les conditions sur les  $E_i$  sont donc nécessaires. Leur côté suffisant repose essentiellement sur le théorème de Frobenius [39]. Si les  $E_i$  vérifient les conditions du théorème, alors il existe un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  autour de 0 tel que

$$E_i = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{\sigma_i}} \right\},$$

où  $\sigma_i$  est le rang de  $E_i$ . Dans ces coordonnées locales,  $\dot{x}_i$  pour  $i > \sigma_0$  ne dépend pas de la commande  $u$ . Ainsi, en remplaçant  $u$  par  $\alpha(x) + \beta(x)u$  avec une matrice inversible  $\beta$  bien choisie, la dynamique (2.12) s'écrit nécessairement ainsi

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, & i &= 1, \dots, \sigma_0 \\ \dot{x}_i &= f_i(x), & i &= \sigma_0 + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Un raisonnement simple montre que, pour  $i > \sigma_1$ ,  $f_i$  ne dépend pas de  $(x_1, \dots, x_{\sigma_0})$  car  $E_1$  involutive. Ainsi nous avons la structure suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, & i &= 1, \dots, \sigma_0 \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_n), & i &= \sigma_0 + 1, \dots, \sigma_1 \\ \dot{x}_i &= f_i(x_{\sigma_0+1}, \dots, x_n), & i &= \sigma_1 + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

De plus le rang de  $(f_{\sigma_0+1}, \dots, f_{\sigma_1})$  par rapport à  $(x_1, \dots, x_{\sigma_0})$  vaut  $\sigma_1 - \sigma_0$ . Donc  $\sigma_0 \leq \sigma_1 - \sigma_0$ . Quitte à faire des permutations sur les  $\sigma_0$  premières composantes de  $x$ , on peut supposer que  $(x_1, \dots, x_{\sigma_1 - \sigma_0}) \mapsto (f_{\sigma_0+1}, \dots, f_{\sigma_1})$  est inversible. Cela permet de définir un nouveau

système de coordonnées en remplaçant les  $\sigma_1 - \sigma_0$  premières composantes de  $x$  par  $(f_{\sigma_0+1}, \dots, f_{\sigma_1})$ . Dans ces nouvelles coordonnées et après bouclage statique régulier  $u \mapsto \beta(x)u$  avec  $\beta(x)$  inversible bien choisi, nous avons la structure suivante (les notations avec  $u$ ,  $x$  et  $f$  sont conservées) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= u_i, & i &= 1, \dots, \sigma_0 \\ \dot{x}_i &= x_{i-\sigma_0}, & i &= \sigma_0 + 1, \dots, \sigma_1 \\ \dot{x}_i &= f_i(x_{\sigma_0+1}, \dots, x_n), & i &= \sigma_1 + 1, \dots, n.\end{aligned}$$

On sait que ce système est linéarisable si, et seulement si, le système réduit

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i-\sigma_0}, & i &= \sigma_0 + 1, \dots, \sigma_1 \\ \dot{x}_i &= f_i(x_{\sigma_0+1}, \dots, x_n), & i &= \sigma_1 + 1, \dots, n\end{aligned}$$

avec  $(x_1, \dots, x_{\sigma_1-\sigma_0})$  comme commande. Comme les distributions  $E_i$  associées à ce système réduit se déduisent simplement de celles du système étendu en éliminant les champs de vecteurs  $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{\sigma_0}$ , on voit qu'elles vérifient, elles aussi, les conditions du théorème. Ainsi il est possible de réduire encore le système. À chaque étape, la linéarisation du système étendu est équivalente à celle du système réduit. Au bout de cette élimination (en au plus de  $n - 1$  étapes), la linéarisation du système de départ est alors équivalent à celle d'un système réduit de la forme

$$\dot{x} = f(x, u)$$

où le rang de  $f$  par rapport à  $u$  est égale à la dimension de  $x$ , linéarisation qui est alors triviale.  $\square$

**Exercice 2.16.** Soit le système de la figure 2.3. On suppose que le ressort est non linéaire. Dans (2.6) la raideur  $k$  est fonction de  $x_1 - x_2$  :  $k = k_0 + a(x_1 - x_2)^2$  avec  $k_0$  et  $a > 0$ . Montrer que ce système est linéarisable. Quelle est la sortie de Brunovsky du système linéaire équivalent ? Que se passe-t-il si on rajoute du frottement ?

**Exercice 2.17.** Prenons l'exemple (2.2) en ne considérant que les deux équations différentielles relatives à  $x_1$  et  $T$  (nous ne considérons que la partie commandable). Montrer que ce sous-système à deux états

et une commande est linéarisable. Calculer le bouclage statique qui linéarise le système.

**2.3.c. Bouclage dynamique.** Le lemme 2.14 est trompeur. Il semble suggérer que le fait d'étendre un système en rajoutant des dérivées de la commande dans l'état ne rajoute rien pour la linéarisation. Ceci est vrai si on rajoute le même nombre d'intégrateurs sur toutes les commandes (« prolongation totale »). Par contre, des nombres différents peuvent permettre de gagner quelque chose. Par exemple, le système

$$\ddot{x} = -u_1 \sin \theta, \quad \ddot{z} = u_1 \cos \theta - 1, \quad \ddot{\theta} = u_2$$

n'est pas linéarisable par bouclage statique bien que le système étendu

$$\ddot{x} = -u_1 \sin \theta, \quad \ddot{z} = u_1 \cos \theta - 1, \quad \ddot{u}_1 = \bar{u}_1, \quad \ddot{\theta} = u_2$$

de commande  $(\bar{u}_1, u_2)$  le soit. Ce fait n'est nullement contraire au lemme 2.14 puisque seule l'entrée  $u_1$  a été prolongée deux fois. Pour un système à une seule commande, on ne gagne évidemment rien [15].

Cette remarque est à l'origine de la linéarisation par bouclage dynamique tel qu'elle a été posée dans [15]. Un système  $\dot{x} = f(x, u)$  est dit linéarisable par bouclage dynamique régulier, si, et seulement si, il existe un compensateur dynamique régulier

$$\dot{\xi} = a(x, \xi, v), \quad u = k(x, \xi, v),$$

tel que le système bouclé

$$\dot{x} = f(x, k(x, \xi, v)), \quad \dot{\xi} = a(x, \xi, v)$$

soit linéarisable par bouclage statique régulier. Noter que la dimension de  $\xi$  est libre. La dimension de l'espace dans lequel on doit travailler peut a priori être arbitrairement grande. Noter également que les compensateurs dynamiques qui consistent à ne prolonger que les entrées, sont des compensateurs particuliers. Ils ne permettent pas de linéariser certains systèmes comme celui ci (voir l'exemple 3.17) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -u_1 \sin \theta + \varepsilon u_2 \cos \theta \\ \ddot{z} &= u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - 1 \\ \ddot{\theta} &= u_2. \end{aligned}$$

En effet, on peut montrer que, quelque soit le compensateur dynamique de la forme  $u_1^{(\alpha_1)} = \bar{u}_1$ ,  $u_2^{(\alpha_2)} = \bar{u}_2$  ( $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  entiers arbitraires), le système étendu n'est pas linéarisable par bouclage statique. En revanche il est linéarisable par le bouclage dynamique endogène construit en 3.17.

Cette question est à l'origine des systèmes plats, les systèmes linéarisables par des bouclages dynamiques dits endogènes et auxquels est associée une relation d'équivalence (i.e., une géométrie). Nous ne savons pas s'il existe des systèmes non linéarisables par bouclage dynamique endogène et cependant linéarisable par des bouclages dynamiques réguliers encore plus généraux dit exogènes. Tous les exemples que nous connaissons et qui sont linéarisables par bouclage dynamique, le sont par bouclage dynamique endogène.

### Chapitre 3. Systèmes plats

Un système  $\dot{x} = f(x, u)$  est ici vu comme un système sous-déterminé d'équations différentielles. Les variables  $(x, u)$  sont soumises aux contraintes  $\dot{x} - f(x, u) = 0$ . Les systèmes plats forment une classe pour lesquels nous disposons d'une paramétrisation explicite de toutes leurs solutions. Par explicite, nous signifions ici sans intégration, uniquement à partir d'opérations de nature statique (combinaison algébrique, ...) et d'un nombre fini de dérivation en temps.

Les solutions  $t \mapsto (\theta(t), u(t))$  du bras de robot (1.1) sont soumises aux lois de la mécanique, la contrainte qui est ici

$$J\ddot{\theta} + mgl \sin \theta - u = 0.$$

Il est évident que l'on peut paramétrer explicitement toutes les solutions à l'aide d'une fonction scalaire arbitraire du temps  $t \mapsto y(t)$  supposée assez régulière ( $C^2$  par morceaux suffit) grâce aux formules explicites suivantes

$$\theta = y, \quad u = J\ddot{y} + mgl \sin y.$$

Ces formules sont celles du « couple calculé ». Elles consistent à utiliser les équations de la mécanique à l'envers. Au lieu de fixer les lois horaires des forces et les configurations/vitesses initiales, pour

en déduire le mouvement en intégrant des équations différentielles du second ordre (opération en général délicate explicitement), il suffit d'imposer la loi horaire sur les configurations et d'en déduire les forces simplement en dérivant deux fois. Pour le bras de robot, la force est notre commande en couple, et la configuration est donnée par l'angle  $\theta$ . Nous dirons que ce système mécanique est plat avec comme sortie plate  $\theta$ .

À l'origine, la platitude a été définie [27, 30] dans le cadre de l'algèbre différentielle. Un système est alors vu comme une extension différentielle de degré fini de transcendance différentielle. Le degré de transcendance différentielle correspond alors au degré de sous-détermination, i.e., au nombre de commandes indépendantes. Un système est alors plat s'il est une extension différentielle transcendante pure. Les générateurs d'une telle extension forment alors la sortie plate. L'avantage d'une telle approche est sa capacité à traiter les systèmes mixtes, d'équations différentielles et d'équations algébriques, ainsi que les systèmes différentiels implicites.

En langage plus ordinaire, nous avons la définition suivante. Un système d'état  $x \in \mathbb{R}^n$ , de commande  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $\dot{x} = f(x, u)$  ( $f$  régulière) est plat s'il existe  $y \in \mathbb{R}^m$  de la forme

$$y = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)})$$

tel que

$$x = \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)})$$

$$u = \alpha(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)})$$

(les fonctions  $h$ ,  $\varphi$  et  $\alpha$  sont régulières). D'un point de vue formel, le passage de  $\dot{x} = f(x, u)$  à

$$x = \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)})$$

$$u = \alpha(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)})$$

revient à rajouter  $m$  variables supplémentaires formant la sortie plate

$$y = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)})$$

et à tout exprimer en fonction de cette dernière. Le passage inverse s'obtient en éliminant  $y$ . Au cours de cette élimination, nous obtenons

au passage la fonction  $h$  donnant  $y$  en fonction de  $x$  et  $u$ . Ainsi, il est équivalent de se donner  $(f, h)$  ou  $(\varphi, \alpha)$ . Le problème fondamental est alors le suivant : étant donnée la fonction  $f$ , i.e. les équations issues de la physique du système, existe-t-il  $h$  tel que le système déterminé implicite

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u, \dots, u^{(r)})$$

avec  $y$  fonction régulière du temps supposée donnée et  $(x, u)$  fonctions régulières du temps supposées inconnues, puisse être résolu sans intégration par des formules générales du type :

$$x = \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)}), \quad u = \alpha(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)}).$$

Ce problème est un problème ouvert. Il a été posé par David Hilbert en 1912 [45], pour l'équation de Monge du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right),$$

un système différentiel sous-déterminé (une équation différentielle ordinaire en  $x$  reliant deux fonctions de  $x$ ,  $y(x)$  et  $z(x)$ ). Hilbert parle alors de « solution sans intégrale » (« integrallos Auflösung »). Hilbert montre aussi que cette question est liée à la classification des systèmes différentiels sous-déterminés via un groupe de transformations, dites « inversibles sans intégrale » (« umkehrbar integrallos »). Hilbert note une analogie suggestive avec les transformations birationnelles et la classification des variétés algébriques.

Peu après, Élie Cartan [13] reprend la question posée par Hilbert et montre comment des calculs sur les systèmes de Pfaff (le drapeau) permettent de caractériser les équations de Monge du second ordre qui admettent une solution générale sans intégrale. Il en déduit une description explicite de toutes les courbes de l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^3$  dont le rapport de la courbure et la torsion est constant. Les résultats d'Élie Cartan sont complets pour les systèmes de Pfaff de codimension 2, c'est à dire les systèmes différentiels sous-déterminés de codimension 1, i.e., ne faisant intervenir qu'une seule fonction arbitraire (pour nous ne faisant intervenir essentiellement qu'une seule commande). Élie Cartan [12] suggère aussi la notion d'équivalence



absolue mais ne la définit pas avec précision. Il note que pour les systèmes de Pfaff de codimension supérieure à 2 (faisant intervenir au moins 2 commandes) la question se complique notablement. À notre connaissance, elle reste aujourd'hui très largement ouverte.

Nous allons maintenant donner un cadre formel pour définir l'analogie en théorie de la commande, des systèmes différentiels ordinaires sous-déterminés résolubles sans intégration. Ce cadre a été pour la première fois proposé en 1993 dans [28]. Il est relié à [3, 96]. D'autres approches reprenant plus directement les systèmes de Pfaff et l'équivalence absolue sont également possibles [86, 120].

Il est intéressant de noter qu'à l'origine, dans le mémoire de Monge [75], ce dernier parle de systèmes intégrables, bien qu'étudiant les systèmes différentiels sous-déterminés et non déterminés. Aussi, il est suggestif de considérer la sous-classe des systèmes plats parmi les systèmes différentiels sous-déterminés comme l'analogie de celle des systèmes intégrables parmi des systèmes dynamiques déterminés. Si une telle analogie est valide (comme le pense Jean-Pierre Ramis), alors la caractérisation en termes finis de la platitude a toutes les chances d'être impossible. Tout au plus peut-on espérer avoir des critères qui permettent de montrer que certains systèmes ne sont pas plats (voir le critère des variétés réglées ci-dessous). Ces critères auront alors un rôle analogue à celui du théorème de Morales-Ramis [76] qui donne la non-intégrabilité des certains systèmes hamiltoniens ainsi que des trois célèbres équations différentielles de Lorenz.

### 3.1. Équivalence et platitude

**3.1.a. Champ de vecteurs en dimension infinie.** Un système dynamique

$$(3.1) \quad \dot{x} = f(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n$$

est par définition une paire  $(X, f)$ , où  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  un champ de vecteurs sur  $X$ . Une solution, ou *trajectoire*, de (3.1) est une application  $C^1$ ,  $t \mapsto x(t)$ , telle que

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

Notons que si  $x \mapsto h(x)$  est une application régulière sur  $X$  et  $t \mapsto x(t)$  une trajectoire de (3.1), alors

$$\frac{d}{dt}h(x(t)) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t)) \cdot f(x(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

Pour cette raison, la *dérivée totale*, i.e., l'application

$$x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x) \cdot f(x)$$

est souvent appelée « dérivée en temps » de  $h$  et notée  $\dot{h}$ .

Nous voudrions avoir une description similaire, i.e., un « espace » et un champ de vecteurs sur cet espace, pour un système commandé

$$(3.2) \quad \dot{x} = f(x, u),$$

où  $f$  est régulière sur un ouvert  $X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Ici  $f$  n'est plus un champ de vecteurs sur  $X$ , mais plutôt une *collection infinie* de champs de vecteurs sur  $X$  paramétrés par  $u$  : pour chaque  $u \in U$ , l'application

$$x \mapsto f_u(x) = f(x, u)$$

est un champ de vecteurs sur  $X$ . Une telle description n'est pas adaptée au bouclage dynamique, i.e., au rajout d'intégrateurs. Si l'on prend comme commande  $v = \dot{u}$  au lieu de  $u$ , on obtient alors un système étendu

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{u} = v$$

qui correspond en un certain sens au même système mais pour lequel la notion d'état classique n'a plus cours : l'espace  $X$  doit être prolongé à l'espace  $X \times U$ .

Il est cependant possible d'associer à (3.2) un champ de vecteurs avec les « mêmes » solutions et pour lequel le fait de considérer  $u$  ou  $v = \dot{u}$  comme entrée ne change rien. Pour cela nous allons maintenant supposer que toutes les fonctions manipulées sont régulières, i.e.,  $C^\infty$ .

Soit une solution régulière de (3.2), i.e., une application  $t \mapsto (x(t), u(t))$  à valeur dans  $X \times U$  telle que

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

On peut considérer l'application *infinie*

$$t \mapsto \xi(t) = (x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots)$$

prenant ses valeurs dans  $X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty$ , où  $\mathbb{R}_m^\infty = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \dots$  représente le produit infini dénombrable de  $\mathbb{R}^m$ . Un point de  $\mathbb{R}_m^\infty$  est de la forme  $(u^1, u^2, \dots)$  avec  $u^i \in \mathbb{R}^m$ . Cette application satisfait

$$\dot{\xi}(t) = (f(x(t), u(t)), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots) \quad \forall t \geq 0,$$

et donc peut être interprétée comme la trajectoire d'un champ de vecteurs *infini*

$$(x, u, u^1, \dots) \longmapsto F(x, u, u^1, \dots) = (f(x, u), u^1, u^2, \dots)$$

sur  $X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty$ . Inversement, chaque application

$$t \longmapsto \xi(t) = (x(t), u(t), u^1(t), \dots)$$

qui est une trajectoire de ce champ de vecteurs infini nécessairement prend la forme  $(x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots)$  avec  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , et donc correspond à une solution de (3.2). Ainsi  $F$  est réellement un champ de vecteurs et non une famille paramétrée de champs de vecteurs.

Avec une telle construction, le système (3.2) est défini par la donnée d'un espace  $X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty$  est d'un champ de vecteurs  $F$  sur cet espace. Comme pour un système dynamique classique sans commande, la « dérivation en temps » d'une fonction régulière  $(x, u, u^1, \dots) \mapsto h(x, u, u^1, \dots, u^k)$  dépendant d'un nombre *fini* de variables s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{h}(x, u, u^1, \dots, u^{k+1}) &:= Dh \cdot F \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f(x, u) + \frac{\partial h}{\partial u} \cdot u^1 + \frac{\partial h}{\partial u^1} \cdot u^2 + \dots \end{aligned}$$

La somme est ici *finie* car  $h$  dépend d'un nombre fini de variables.

Pour être rigoureux, il faut définir la topologie et la structure différentiable de  $\mathbb{R}_m^\infty$  pour pouvoir parler d'objet régulier [126]. Cette topologie est celle de *Fréchet*. Elle fait en sorte que tout se passe comme si on manipule des fonctions régulières sur  $k$  copies de  $\mathbb{R}^m$  pour un  $k$  « assez grand ». Pour la suite, il est suffisant de savoir qu'une base d'ouverts est composée de produits infinis  $U_0 \times U_1 \times \dots$  d'ouverts de  $\mathbb{R}^m$ , qu'une fonction de  $\mathbb{R}_m^\infty$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  est régulière si elle dépend d'un nombre fini de variable et est régulière au sens usuel. Ainsi une application  $\Phi : \mathbb{R}_m^\infty \rightarrow \mathbb{R}_n^\infty$  est régulière si chacune de ces composantes est une fonction régulière.

L'espace  $\mathbb{R}_m^\infty$  avec sa topologie de Fréchet admet peu de propriétés. Des théorèmes utiles comme celui des fonctions implicites, celui de Frobenius et le théorème de redressement d'un champ de vecteurs ne sont plus valables.

Cependant, les notions de sous-variétés de  $\mathbb{R}_m^\infty$  et aussi de variétés de dimension infinie existent dans ce cadre. Il suffit de recopier les définitions de la dimension finie, en utilisant coordonnées locales, cartes et atlas. Un lecteur non intéressé par ces développements techniques ne perdra pas grand chose pour la suite s'il remplace variété par « ouvert de  $\mathbb{R}_m^\infty$  ».

Nous sommes en mesure de donner une définition précise de système :

**Définition 3.1.** Un *système* est une paire  $(\mathfrak{M}, F)$  où  $\mathfrak{M}$  est une variété de dimension infinie modelée sur  $\mathbb{R}_m^\infty$  et  $F$  un champ de vecteurs régulier sur  $\mathfrak{M}$ .

Localement, un système est défini par  $\mathbb{R}^\alpha$  ( $\alpha$  non nécessairement fini) avec comme coordonnées  $(\xi_1, \dots, \xi_\alpha)$  et un champ de vecteur

$$\xi \longmapsto F(\xi) = (F_1(\xi), \dots, F_\alpha(\xi))$$

où toutes ses composantes  $F_i$  sont des fonctions d'un nombre fini de coordonnées. Une *trajectoire* est alors une application régulière  $t \mapsto \xi(t)$  telle que  $\dot{\xi}(t) = F(\xi(t))$ .

Nous avons vu qu'une telle définition permet de prendre en compte les systèmes « traditionnels »  $\dot{x} = f(x, u)$ . Elle comporte une différence essentielle : la notion d'état n'existe plus ici. En effet

$$(3.3) \quad \dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

et

$$(3.4) \quad \dot{x} = f(x, u), \quad \dot{u} = v$$

admettent la même description  $(X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty, F)$ , avec

$$F(x, u, u^1, \dots) = (f(x, u), u^1, u^2, \dots),$$

Dans notre formalisme :  $t \mapsto (x(t), u(t))$  est une trajectoire de (3.3) si, et seulement si,  $t \mapsto (x(t), u(t), \dot{u}(t))$  est une trajectoire de (3.4). Cette situation n'est pas surprenante car le bouclage dynamique ne préserve

pas la dimension de l'état. Cependant le nombre de commande est préservé.

**Exemple 3.2 (le système trivial).** Le système trivial  $(\mathbb{R}_m^\infty, F_m)$ , avec les coordonnées  $(y, y^1, y^2, \dots)$  et le champs de vecteur

$$F_m(y, y^1, y^2, \dots) = (y^1, y^2, y^3, \dots)$$

décrit n'importe quel système « traditionnel » composé de  $m$  chaînes d'intégrateurs de longueurs arbitraires (cf. la forme normale de Brunovski des systèmes linéaires commandables), et en particulier le transfert direct  $y = u$ .

En pratique nous identifions le champ de vecteurs infini

$$(f(x, u), u^1, u^2, \dots)$$

avec l'équation  $\dot{x} = f(x, u)$  qui le définit. La principale motivation de ce formalisme tient à ce que les notions d'équivalence et de platitude  $y$  sont particulièrement naturelles et simples à définir.

**Remarque 3.3.** Si la variété  $\mathfrak{M}$  est de dimension finie alors il s'agit d'une équation différentielle classique, i.e., d'un système différentiel ordinaire déterminé avec autant de variables que d'équations. Dans le cas d'un système  $\dot{x} = f(x, u)$ , le système devient sous-déterminé, il comporte plus de variables  $(x, u)$  que d'équations. La variété  $\mathfrak{M}$  associée est alors de dimension infinie.

**Remarque 3.4.** Notre définition est adaptée de la notion de diffiété introduite dans [51] (voir aussi [126] pour une introduction plus abordable) pour traiter les systèmes aux dérivées partielles. Par définition, une diffiété est une paire  $(\mathfrak{M}, CT\mathfrak{M})$  où  $\mathfrak{M}$  est une variété régulière, de dimension finie ou infinie, est  $CT\mathfrak{M}$  une distribution (dite de Cartan) involutive sur  $\mathfrak{M}$ , i.e., le crochet de Lie de deux champs de vecteurs appartenant à  $CT\mathfrak{M}$  reste dans  $CT\mathfrak{M}$ . La dimension de  $CT\mathfrak{M}$  est égale au nombre de variables indépendantes, i.e., au nombre de dérivation. Comme nous considérons les systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires, nous utilisons des diffiétés avec des distributions de Cartan de dimension 1.

**3.1.b. Équivalence de systèmes.** Nous définissons ici une relation d'équivalence en formalisant l'idée que deux systèmes sont équivalents s'il existe une transformation inversible qui échange leur trajectoires. Comme nous le verrons plus loin la pertinence d'une telle d'équivalence vient du fait qu'elle admet une interprétation en termes de bouclage dynamique.

Soient deux systèmes,  $(\mathfrak{M}, F)$  et  $(\mathfrak{N}, G)$ , et une application régulière  $\Psi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ . Rappelons que, par définition, chaque composante de  $\Psi$  dépend d'un nombre fini de variables. Si  $t \mapsto \xi(t)$  est une trajectoire de  $(\mathfrak{M}, F)$ , i.e.,

$$\forall \xi, \quad \dot{\xi}(t) = F(\xi(t)),$$

Alors la composée  $t \mapsto \zeta(t) = \Psi(\xi(t))$  satisfait

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\xi(t)) \cdot \dot{\xi}(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\xi(t)) \cdot F(\xi(t)).$$

La somme ci-dessus ne comporte qu'un nombre fini de termes même si les matrices et les vecteurs admettent un nombre infini de composantes : en fait une ligne de  $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$  ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Maintenant, supposons que les champs de vecteurs  $F$  et  $G$  soient  $\Psi$ -conjugués, i.e.,

$$\forall \xi, \quad G(\Psi(\xi)) = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(\xi) \cdot F(\xi).$$

Alors

$$\dot{\zeta}(t) = G(\Psi(\xi(t))) = G(\zeta(t)),$$

signifie que  $t \mapsto \zeta(t) = \Psi(\xi(t))$  est une trajectoire de  $(\mathfrak{N}, G)$ . Si de plus  $\Psi$  admet une application inverse régulière  $\Phi$  alors  $F, G$  sont également  $\Phi$ -conjugués. Il existe alors une correspondance entre les trajectoires des deux systèmes. Une telle application  $\Psi$  qui échange  $F$  et  $G$  est appelé *transformation endogène*.

**Définition 3.5.** Deux systèmes  $(\mathfrak{M}, F)$  et  $(\mathfrak{N}, G)$  sont *équivalents en*  $(p, q) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$  si, et seulement si, il existe une transformation endogène d'un voisinage de  $p$  vers un voisinage de  $q$ .  $(\mathfrak{M}, F)$  et  $(\mathfrak{N}, G)$

sont *équivalents* s'ils sont équivalents pour toute paire de points  $(p, q)$  dans un ouvert dense de  $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ .

Si  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  ont la même dimension *finie*, les systèmes sont équivalents à cause du théorème de redressement (avec des conditions restrictives évidentes sur les point critiques des deux champs de vecteurs). Ce n'est plus le cas en dimension infinie.

Avec des coordonnées, les notions précédentes s'expriment comme suit. Considérons les deux systèmes

$$(X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty, F) \quad \text{et} \quad (Y \times V \times \mathbb{R}_s^\infty, G)$$

décrivant les dynamiques

$$(3.5) \quad \dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$(3.6) \quad \dot{y} = g(y, v), \quad (y, v) \in Y \times V \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s.$$

Les champs de vecteurs  $F, G$  sont définis par

$$\begin{aligned} F(x, u, u^1, \dots) &= (f(x, u), u^1, u^2, \dots) \\ G(y, v, v^1, \dots) &= (g(y, v), v^1, v^2, \dots). \end{aligned}$$

Si ces deux systèmes sont équivalents, la transformation endogène  $\Psi$  prend la forme suivante

$$\Psi(x, u, u^1, \dots) = (\psi(x, \bar{u}), \beta(x, \bar{u}), \dot{\beta}(x, \bar{u}), \dots).$$

Ici nous utilisons la notation abrégée  $\bar{u} = (u, u^1, \dots, u^k)$ , où  $k$  est un entier fini mais arbitraire. Ainsi  $\Psi$  est complètement déterminé par les applications  $\psi$  et  $\beta$ , i.e, par l'expression de  $y, v$  en fonction de  $x, \bar{u}$ . De même, l'inverse  $\Phi$  de  $\Psi$  prend la forme

$$\Phi(y, v, v^1, \dots) = (\varphi(y, \bar{v}), \alpha(y, \bar{v}), \dot{\alpha}(y, \bar{v}), \dots).$$

Comme  $\Psi$  et  $\Phi$  sont inverses l'une de l'autre, nous avons

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(y, \bar{v}), \bar{\alpha}(y, \bar{v})) &= y & \varphi(\psi(x, \bar{u}), \bar{\beta}(x, \bar{u})) &= x \\ \beta(\varphi(y, \bar{v}), \bar{\alpha}(y, \bar{v})) &= v & \alpha(\psi(x, \bar{u}), \bar{\beta}(x, \bar{u})) &= u. \end{aligned}$$

De plus  $F$  et  $G$   $\Psi$ -conjugués impliquent

$$f(\varphi(y, \bar{v}), \alpha(y, \bar{v})) = D\varphi(y, \bar{v}) \cdot \bar{g}(y, \bar{v})$$

où  $\bar{g}$  correspond à  $(g, v^1, \dots, v^k)$ , i.e., une troncature de  $G$  pour un entier  $k$  assez grand. Inversement,

$$g(\psi(x, \bar{u}), \beta(x, \bar{u})) = D\psi(x, \bar{u}) \cdot \bar{f}(x, \bar{u}).$$

En résumé, dès que  $t \mapsto (x(t), u(t))$  est une trajectoire de (3.5)

$$t \mapsto (y(t), v(t)) = (\psi(x(t), \bar{u}(t)), \beta(x(t), \bar{u}(t)))$$

est une trajectoire de (3.6), et réciproquement.

**Exemple 3.6 (l'avion à décollage vertical).** Le système associé à

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -u_1 \sin \theta + \varepsilon u_2 \cos \theta \\ \ddot{z} &= u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - 1 \\ \ddot{\theta} &= u_2. \end{aligned}$$

est globalement équivalent au système

$$\ddot{y}_1 = -\xi \sin \theta, \quad \ddot{y}_2 = \xi \cos \theta - 1,$$

où  $\xi$  et  $\theta$  sont les commandes. En effet, avec

$$\begin{aligned} X &:= (x, z, \dot{x}, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}) & Y &:= (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \\ U &:= (u_1, u_2) & V &:= (\xi, \theta) \end{aligned} \quad \text{et}$$

et avec les notations abrégées ci-dessus (discussion après la définition 3.5), nous définissons les applications  $Y = \psi(X, \bar{U})$  et  $V = \beta(X, \bar{U})$  par

$$\psi(X, \bar{U}) := \begin{pmatrix} x - \varepsilon \sin \theta \\ z + \varepsilon \cos \theta \\ \dot{x} - \varepsilon \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} - \varepsilon \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta(X, \bar{U}) := \begin{pmatrix} u_1 - \varepsilon \dot{\theta}^2 \\ \theta \end{pmatrix}$$

pour obtenir la transformation endogène  $\Psi$ . La transformation inverse  $\Phi$  est alors engendrée par  $X = \varphi(Y, \bar{V})$  et  $U = \alpha(Y, \bar{V})$  comme suit :

$$\varphi(Y, \bar{V}) := \begin{pmatrix} y_1 + \varepsilon \sin \theta \\ y_2 - \varepsilon \cos \theta \\ \dot{y}_1 + \varepsilon \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_2 - \varepsilon \dot{\theta} \sin \theta \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha(Y, \bar{V}) := \begin{pmatrix} \xi + \varepsilon \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$



Une propriété importante des transformations endogènes la préservation du nombre de commandes.

**Théorème 3.7.** *Si les deux systèmes*

$$(X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty, F) \quad \text{et} \quad (Y \times V \times \mathbb{R}_s^\infty, G)$$

*sont équivalents alors ils admettent le même nombre de commandes, i.e.,  $m = s$ .*

*Démonstration.* Considérons la troncature  $\Phi_\mu$  de  $\Phi$  sur  $X \times U \times (\mathbb{R}^m)^\mu$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_\mu : X \times U \times (\mathbb{R}^{m+k})^\mu &\longrightarrow Y \times V \times (\mathbb{R}^s)^\mu \\ (x, u, u^1, \dots, u^{k+\mu}) &\longmapsto (\varphi, \alpha, \dot{\alpha}, \dots, \alpha^{(\mu)}), \end{aligned}$$

i.e., les premiers  $\mu + 2$  blocs des composantes de  $\Psi$ ;  $\mu$  est juste un entier « assez grand ». Comme  $\Psi$  est inversible,  $\Psi_\mu$  est une submersion pour tout  $\mu$ . Donc la dimension de son espace de départ est supérieure ou égale à celle de son espace d'arrivée,

$$n + m(k + \mu + 1) \geq s(\mu + 1) \quad \forall \mu > 0.$$

Ce qui implique  $m \geq s$ . De même avec  $\Psi$  on obtient  $s \geq m$ .  $\square$

**Remarque 3.8.** Cette définition de l'équivalence est adaptée de l'équivalence entre deux diffiétés. Étant données deux diffiétés  $(\mathfrak{M}, CT\mathfrak{M})$  et  $(\mathfrak{N}, CT\mathfrak{N})$ , on dit qu'une application régulière  $\Psi$  d'un ouvert de  $\mathfrak{M}$  vers  $\mathfrak{N}$  est *Lie-Bäcklund* ou un *un  $C$ -morphisme* si son application tangente  $T\Psi$  satisfait  $T\Psi(CT\mathfrak{M}) \subset CT\mathfrak{N}$ . Si de plus  $\Psi$  admet une inverse régulière  $\Phi$  telle que  $T\Psi(CT\mathfrak{N}) \subset CT\mathfrak{M}$ , alors  $\Psi$  est un *isomorphisme de Lie-Bäcklund* ou un  *$C$  isomorphisme*. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, les diffiétés sont dites *équivalentes*. Une transformation endogène n'est donc qu'un isomorphisme spécial de Lie-Bäcklund qui préserve le paramétrage en temps des courbes intégrales. Il est possible de définir un concept plus général, l'équivalence *orbitale* [28, 25] avec les isomorphismes de Lie-Bäcklund ne préservant que le lieu géométrique des courbes intégrales.

**3.1.c. Platitude différentielle.** Nous mettons en évidence une classe de systèmes, les systèmes équivalents aux systèmes triviaux  $(\mathbb{R}_s^\infty, F_s)$  (voir exemple 3.2) :

**Définition 3.9.** Le système  $(\mathfrak{M}, F)$  est *plat en*  $p \in \mathfrak{M}$  (resp. *plat*) si, et seulement si, il est équivalent en  $p$  (resp. équivalent) à un système trivial.

Considérons un système plat  $(X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty, F)$ , d'après la définition 3.5, associé à

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Par définition le système est équivalent au système trivial  $(\mathbb{R}_s^\infty, F_s)$  où la transformation endogène  $\Psi$  prend la forme

$$(3.7) \quad \Psi(x, u, u^1, \dots) = (h(x, \bar{u}), \dot{h}(x, \bar{u}), \ddot{h}(x, \bar{u}), \dots).$$

En d'autres termes,  $\Psi$  est le prolongement infini de l'application  $h$ . L'inverse  $\Phi$  de  $\Psi$  prend la forme

$$\Psi(\bar{y}) = (\psi(\bar{y}), \beta(\bar{y}), \dot{\beta}(\bar{y}), \dots).$$

Comme  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des applications inverses, on a

$$\varphi(\bar{h}(x, \bar{u})) = x \quad \text{and} \quad \alpha(\bar{h}(x, \bar{u})) = u.$$

De plus  $F$  et  $G$   $\Phi$ -conjugués implique que si  $t \mapsto y(t)$  est une trajectoire de  $y = v$  — i.e., rien d'autre qu'une fonction régulière *arbitraire* du temps — alors

$$t \mapsto (x(t), u(t)) = (\psi(\bar{y}(t)), \beta(\bar{y}(t)))$$

est une trajectoire de  $\dot{x} = f(x, u)$ , et vice versa.

L'application  $h$  de l'exemple ci-dessus est importante :

**Définition 3.10.** Soit  $(\mathfrak{M}, F)$  un système plat et  $\Psi$  la transformation endogène le mettant sous forme triviale. Le premier bloc des composantes de  $\Psi$ , i.e., l'application  $h$  dans (3.7), est appelée *sortie plate* (ou *linéarisante*).

Avec cette définition, une conséquence évidente du théorème 3.7 est :

**Corollaire 3.11.** *Considérons un système plat. La dimension d'une sortie plate est égale au nombre de commandes, i.e.,  $s = m$ .*

La sortie plate n'est pas unique. Si  $y$  est une sortie plate,  $\gamma(y)$  est aussi une sortie plate dès que  $\gamma$  est un difféomorphisme régulier. Pour les systèmes à une seule commande, i.e., une sortie plate scalaire ( $s = m = 1$ ), il est facile de démontrer de l'on passe d'une sortie plate à une autre par un simple changement de variable purement statique. Le cas multi-variable est nettement plus complexe. Par exemple pour  $s = m = 2$ , il est facile de voir que si  $(y_1, y_2)$  est une sortie plate alors  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (y_1, y_2 + \gamma(y_1^{(r)}))$  est aussi une sortie plate quelque soit  $\gamma$  régulière et  $r \geq 0$ . Le choix étant loin d'être unique, il faut prendre une sortie plate qui conduit aux calculs de planification et de bouclage (cf. ce qui suit) les plus simples. À ce niveau le sens physique et surtout les symétries naturelles du système peuvent être d'une grande utilité dans un tel choix (cf. section 3.5).

**Exemple 3.12 (l'avion à décollage vertical (suite))**

Le système étudié en 3.6 est plat, avec

$$y = h(X, \bar{U}) := (x - \varepsilon \sin \theta, z + \varepsilon \cos \theta)$$

comme sortie plate. En effet, les applications  $X = \varphi(\bar{y})$  et  $U = \alpha(\bar{y})$  qui engendrent l'inverse de  $\Phi$  peut être obtenues par les fonctions implicites :

$$\begin{aligned} (y_1 - x)^2 + (y_2 - z)^2 &= \varepsilon^2 \\ (y_1 - x)(\ddot{y}_2 + 1) - (y_2 - z)\ddot{y}_1 &= 0 \\ (\ddot{y}_2 + 1) \sin \theta + \ddot{y}_1 \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

Nous résolvons directement  $x, z, \theta$ ,

$$\begin{aligned} x &= y_1 \pm \varepsilon \frac{\ddot{y}_1}{\sqrt{\ddot{y}_1^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2}} \\ z &= y_2 \pm \varepsilon \frac{(\ddot{y}_2 + 1)}{\sqrt{\ddot{y}_1^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2}} \\ \theta &= \arctan(\ddot{y}_2 + 1/\ddot{y}_1) \quad \text{mod } \pi. \end{aligned}$$

Il suffit de différentier pour avoir  $\dot{x}, \dot{z}, \dot{\theta}, u$  en fonctions des dérivées de  $y$ . Noter que la seule singularité est  $\dot{y}_1^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2 = 0$ ; elle est liée au deux branches de solutions.

**3.1.d. Application à la planification de trajectoires.** Nous illustrons maintenant comment la platitude peut être utilisée pour résoudre des problèmes de commande. Soit un système non linéaire

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

avec comme sortie plate

$$y = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}).$$

Ainsi, les trajectoires  $(x(t), u(t))$  s'écrivent en fonction de  $y$  et ses dérivées :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)}) \\ u &= \alpha(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)}). \end{aligned}$$

Nous commençons par le problème de la planification de trajectoire entre un état de départ et un état d'arrivée. Nous supposons la sortie plate (référence) donnée  $y_i, i = 1, \dots, m$  par

$$(3.8) \quad y_i(t) := \sum_j A_{ij} \lambda_j(t),$$

où les  $\lambda_j(t), j = 1, \dots, N$  sont des fonctions de base. Nous réduisons le problème à trouver une fonction dans un espace de dimension fini, l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  engendré par les  $\lambda_j(t)$ .

Supposons donnés l'état initial  $x_0$  au temps  $\tau_0$  et l'état final  $x_f$  au temps  $\tau_f > \tau_0$ . Pour un système plat ce problème est très simple. Il suffit de calculer, au départ et à l'arrivée, la sortie plate et ses dérivées à partir des états de départ et d'arrivée. Ensuite les coefficients  $A_{ij}$  vérifient les contraintes suivantes :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} y_i(\tau_0) &= \sum_j A_{ij} \lambda_j(\tau_0) & y_i(\tau_f) &= \sum_j A_{ij} \lambda_j(\tau_f) \\ \vdots & & \vdots & \\ y_i^{(q)}(\tau_0) &= \sum_j A_{ij} \lambda_j^{(q)}(\tau_0) & y_i^{(q)}(\tau_f) &= \sum_j A_{ij} \lambda_j^{(q)}(\tau_f). \end{aligned}$$

Nous détaillons le cas *mono*-dimensionnel (sortie plate de dimension un, une seule commande). Le cas multi-dimensionnel est similaire : il suffit de dupliquer pour chaque composante de la sortie plate le cas mono-dimensionnel. Notons  $\Lambda(t)$  la matrice  $q + 1$  par  $N$  d'élément  $\Lambda_{ij}(t) = \lambda_j^{(i)}(t)$  et posons

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{y}_0 &= (y_1(\tau_0), \dots, y_1^{(q)}(\tau_0)) \\ \bar{y}_f &= (y_1(\tau_f), \dots, y_1^{(q)}(\tau_f)) \\ \bar{y} &= (\bar{y}_0, \bar{y}_f). \end{aligned}$$

Alors la contrainte dans l'équation (3.9) s'écrit

$$(3.11) \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \Lambda(\tau_0) \\ \Lambda(\tau_f) \end{pmatrix} A =: \Pi A.$$

Les coefficients de  $A$  appartiennent à la sous-variété affine d'équation (3.11). La seule condition est que la matrice  $\Pi$  soit de rang plein pour que (3.11) ait toujours une solution. Cela signifie que l'espace des fonctions  $\lambda_j$  doit être suffisamment riche.

Formellement, la planification de trajectoires se ramène, pour un système plat, à de l'algèbre linéaire élémentaire.

**3.1.e. Planification sous contraintes.** Nous cherchons maintenant une trajectoire allant de  $a$  vers  $b$  qui satisfait des contraintes  $k(x, u, \dots, u^{(p)}) \leq 0$  à chaque instant. Dans les « coordonnées » plates cela consiste à trouver  $T > 0$  et une fonction  $[0, T] \ni t \mapsto y(t)$  avec  $(y, \dots, y^{(q)})$  donné en  $t = 0$  et  $T$  et surtout vérifiant  $\forall t \in [0, T]$ ,  $K(y, \dots, y^{(\nu)})(t) \leq 0$  pour un certain  $\nu$  et une fonction  $K$  obtenue à partir de  $k$ ,  $\varphi$  et  $\alpha$ . Lorsque  $q = \nu = 0$  ce problème, celui du déménageur de piano, est déjà très difficile.

Supposons ici simplement que les états initial et final soient deux états d'équilibre. Supposons aussi qu'un mouvement quasi-statique satisfaisant les contraintes soient possible : il existe un *chemin* (pas une trajectoire)  $[0, 1] \ni \sigma \mapsto Y(\sigma)$  tel que  $Y(0)$  et  $Y(1)$  correspondent aux équilibres de départ et d'arrivée et, pour tout  $\sigma \in [0, 1]$ ,  $K(Y(\sigma), 0, \dots, 0) < 0$ . Alors il existe  $T > 0$  et  $[0, T] \ni t \mapsto y(t)$  solution du problème. Il suffit de prendre  $Y(\eta(t/T))$  où  $T$  est assez

grand, et avec  $\eta$  fonction régulière croissante  $[0, 1] \ni s \mapsto \eta(s) \in [0, 1]$  avec  $\eta(0) = 0$ ,  $\eta(1) = 1$  et  $\frac{d^i \eta}{ds^i}(0, 1) = 0$  pour  $i = 1, \dots, \max(q, \nu)$ .

Dans [108] cette méthode est utilisée sur un réacteur chimique à deux commandes. Dans [102] le temps minimum sous contrainte d'état est étudié pour divers systèmes mécaniques comme ceux intervenant pour la commande numérique des machines-outils et le problème de l'usinage à grande vitesse.

Enfin [117] aborde, pour les systèmes non holonomes, la planification avec obstacles. À cause des contraintes non holonomes la méthode précédente ne marche plus : il n'est plus possible de mettre les dérivées de  $y$  à zéro car elles ne correspondent plus à des dérivées en temps mais des dérivées en longueur d'arc. Cependant, plusieurs expériences numériques montrent clairement l'importance de classer les contraintes en fonction de l'ordre des dérivées de  $y$ .

**3.1.f. Planification de trajectoires avec singularités.** Dans la section précédente, nous avons toujours supposé que la transformation endogène

$$\Psi(x, u, u_1, \dots) := (h(x, \bar{u}), \dot{h}(x, \bar{u}), \ddot{h}(x, \bar{u}), \dots)$$

engendrée par la sortie plate  $y = h(x, \bar{u})$  est partout définie, régulière et inversible de sorte qu'il est toujours possible d'exprimer  $x$  et  $u$  en fonction de  $y$  et de ses dérivées,

$$(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)}) \mapsto (x, u) = \phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)}).$$

Cependant il peut arriver qu'une singularité se situe juste à l'endroit où il est intéressant de piloter de système. Comme  $\phi$  n'est pas définie en un tel point, les calculs précédents deviennent caduques. Une façon de contourner le problème est d'éclater la singularité en considérant des trajectoires bien choisies  $t \mapsto y(t)$  telles que

$$t \mapsto \phi(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(q)}(t))$$

puisse être régulièrement prolonger en temps là où  $\phi$  n'est pas défini. Une telle procédure nécessite une étude détaillée et au cas par cas de la singularité. Nous allons simplement illustrer cette idée sur un exemple simple. Nous renvoyons le lecteur aux exemples de robots mobiles avec ou sans remorques [112, 113, 30] et à la construction

d'une trajectoire de référence pour retourner le pendule sphérique du robot  $2k\pi$  [55].

**Exemple 3.13.** Considérons la dynamique plate

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 u_1, \quad \dot{x}_3 = x_2 u_1,$$

avec la sortie plate  $y := (x_1, x_3)$ . Alors dès que  $u_1 = 0$ , i.e.,  $\dot{y}_1 = 0$  la transformation endogène définie avec la sortie plate est singulière et son inverse

$$(y, \dot{y}, \ddot{y}) \xrightarrow{\phi} (x_1, x_2, x_3, u_1, u_2) = \left( y_1, \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}, y_2, \dot{y}_1, \frac{\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2}{\dot{y}_1^3} \right),$$

n'est pas définie. Cependant si nous considérons des trajectoires de la forme  $t \mapsto y(t) := (\sigma(t), p(\sigma(t)))$ , avec  $\sigma$  et  $p$  fonctions régulières, nous trouvons que

$$\frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)} = \frac{\frac{dp}{d\sigma}(\sigma(t)) \cdot \dot{\sigma}(t)}{\dot{\sigma}(t)} \quad \text{et} \quad \frac{\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2}{\dot{y}_1^3} = \frac{\frac{d^2 p}{d\sigma^2}(\sigma(t)) \cdot \dot{\sigma}^3(t)}{\dot{\sigma}^3(t)}.$$

Ainsi, nous pouvons prolonger  $t \mapsto \phi(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t))$  partout en temps avec

$$t \mapsto \left( \sigma(t), \frac{dp}{d\sigma}(\sigma(t)), p(\sigma(t)), \dot{\sigma}(t), \frac{d^2 p}{d\sigma^2}(\sigma(t)) \right).$$

La planification de trajectoire se fait alors de la même façon que précédemment : en effet, les fonctions  $\sigma$  et  $p$  et leur dérivées sont contraintes au départ et à l'arrivée. Ailleurs elles sont libres. Sur cet exemple, le passage de la singularité est intimement lié à une symétrie du système. Les équations

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2 u_1, \quad \dot{x}_3 = x_2 u_1,$$

sont linéaires en  $u_1$  ; la transformation  $t \mapsto \tilde{t} = \sigma(t)$  et  $u_1 \mapsto \tilde{u}_1 = u_1 / \dot{\sigma}(t)$  où seule le temps  $t$  et la commande  $u_1$  changent, laisse les équations invariantes.

## 3.2. Bouclage et équivalence

**3.2.a. De l'équivalence au bouclage.** La relation d'équivalence que nous avons définie est très naturelle : c'est essentiellement une correspondance entre les trajectoires fondée sur un point de vue boucle

ouverte. Nous allons maintenant aborder la boucle fermée en interprétant l'équivalence en termes de bouclage. Pour cela considérons deux dynamiques

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), & (x, u) &\in X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \dot{y} &= g(y, v), & (y, v) &\in Y \times V \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s.\end{aligned}$$

Dans notre formalisme elles correspondent aux deux systèmes

$$(X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty, F) \quad \text{et} \quad (Y \times V \times \mathbb{R}_s^\infty, G),$$

où  $F$  et  $G$  sont définis par

$$\begin{aligned}F(x, u, u^1, \dots) &:= (f(x, u), u^1, u^2, \dots) \\ G(y, v, v^1, \dots) &:= (g(y, v), v^1, v^2, \dots).\end{aligned}$$

Supposons maintenant que ces deux systèmes soient équivalents, i.e., ils ont les mêmes trajectoires. Est-ce que cela implique que nous pouvons aller du système  $\dot{x} = f(x, u)$  au système  $\dot{y} = g(y, v)$  par un bouclage (dynamique éventuellement),

$$\begin{aligned}\dot{z} &= a(x, z, v), & z &\in Z \subset \mathbb{R}^q \\ u &= \kappa(x, z, v),\end{aligned}$$

et *vice versa*? La question peut paraître stupide au premier abord puisque un bouclage ne peut qu'augmenter la dimension de l'état du système. Cependant, nous pouvons lui donner un sens si nous acceptons de travailler « à des intégrateurs purs près » (rappelons que cela ne change pas d'après la définition 3.1 le système).

**Théorème 3.14.** *Supposons que  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $\dot{y} = g(y, v)$  soient équivalents. Alors  $\dot{x} = f(x, u)$  peut être transformé par un bouclage (dynamique) et changement de coordonnées en*

$$\dot{y} = g(y, v), \quad \dot{v} = v^1, \quad \dot{v}^1 = v^2, \dots, \quad \dot{v}^\mu = w$$

*pour un entier  $\mu$  assez grand. Inversement,  $\dot{y} = g(y, v)$  peut être transformé par un bouclage (dynamique) et changement de coordonnées en*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{u} = u^1, \quad \dot{u}^1 = u^2, \dots, \quad \dot{u}^\nu = w$$

*pour un entier  $\nu$  assez grand.*



*Démonstration* [61, 31]. Notons  $F$  et  $G$  les champs de vecteurs infinis représentant les deux systèmes. L'équivalence signifie qu'il existe une application inversible

$$\Phi(y, \bar{v}) = (\varphi(y, \bar{v}), \alpha(y, \bar{v}), \dot{\alpha}(y, \bar{v}), \dots)$$

telle que

$$(3.12) \quad F(\Phi(y, \bar{v})) = D\Phi(y, \bar{v}) \cdot G(y, \bar{v}).$$

Posons  $\tilde{y} := (y, v, v^1, \dots, v^\mu)$  et  $w := v^{\mu+1}$ . Pour  $\mu$  assez grand,  $\varphi$  (resp.  $\alpha$ ) dépend uniquement de  $\tilde{y}$  (resp. de  $\tilde{y}$  et  $w$ ). Avec ces notations,  $\Phi$  s'écrit

$$\Phi(\tilde{y}, \bar{w}) = (\varphi(\tilde{y}), \alpha(\tilde{y}, w), \dot{\alpha}(\tilde{y}, w), \dots),$$

et l'équation (3.12) implique en particulier

$$(3.13) \quad f(\varphi(\tilde{y}), \alpha(\tilde{y}, w)) = D\varphi(\tilde{y}) \cdot \tilde{g}(\tilde{y}, w),$$

où  $\tilde{g} := (g, v^1, \dots, v^k)$ . Comme  $\Phi$  est inversible,  $\varphi$  est de rang plein et donc peut être complétée par une application  $\pi$  pour obtenir un changement de coordonnées

$$\tilde{y} \mapsto \phi(\tilde{y}) = (\varphi(\tilde{y}), \pi(\tilde{y})).$$

Considérons maintenant le bouclage dynamique

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\phi^{-1}(x, z), w) \\ \dot{z} &= D\pi(\phi^{-1}(x, z)) \cdot \tilde{g}(\phi^{-1}(x, z), w), \end{aligned}$$

qui transforme  $\dot{x} = f(x, u)$  en

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \tilde{f}(x, z, w) := \begin{pmatrix} f(x, \alpha(\phi^{-1}(x, z), w)) \\ D\pi(\phi^{-1}(x, z)) \cdot \tilde{g}(\phi^{-1}(x, z), w) \end{pmatrix}.$$

Utilisant (3.13), nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\phi(\tilde{y}), w) &= \begin{pmatrix} f(\varphi(\tilde{y}), \alpha(\tilde{y}, w)) \\ D\pi(\tilde{y}) \cdot \tilde{g}(\tilde{y}, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\varphi(\tilde{y}) \\ D\pi(\tilde{y}) \end{pmatrix} \cdot \tilde{g}(\tilde{y}, w) \\ &= D\phi(\tilde{y}) \cdot \tilde{g}(\tilde{y}, w). \end{aligned}$$

Ainsi  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  sont  $\phi$ -conjugués, ce qui termine la preuve. Un échange des rôles entre  $f$  et  $g$  conduit au bouclage dans l'autre sens.  $\square$

Comme un système plat est équivalent à un système trivial, on obtient immédiatement le théorème suivant :

**Corollaire 3.15.** *Une dynamique plate est linéarisable par bouclage (dynamique) et changement de coordonnées.*

**Remarque 3.16.** Comme le montre la preuve du théorème ci-dessus, de nombreux bouclages réalisant l'équivalence sont possibles, autant que de fonctions  $\pi$ . Noter que tous ces bouclages ne sont pas définis et explosent en général au point où  $\varphi$  est singulière (i.e., là où son rang chute). Plusieurs détails sur la construction de bouclages linéarisants à partir de la sortie et les liens avec l'algorithme d'extension dynamique se trouve dans [63]. Noter enfin qu'il est souvent possible de construire, pour les systèmes plats, des bouclages dits quasi-statiques. Ils ne rajoutent pas d'état supplémentaire et permettent de linéariser la dynamique sans nécessairement passer par une forme d'état explicite. Pour une excellente référence sur le sujet, nous renvoyons à [22].

**Exemple 3.17 (l'avion à décollage vertical (suite))**

Nous savons de l'exemple 3.12 que la dynamique

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -u_1 \sin \theta + \varepsilon u_2 \cos \theta \\ \ddot{z} &= u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - 1 \\ \ddot{\theta} &= u_2\end{aligned}$$

admet comme sortie plate

$$y = (x - \varepsilon \sin \theta, z + \varepsilon \cos \theta).$$

Elle se transforme en

$$y_1^{(4)} = v_1, \quad y_2^{(4)} = v_2$$

avec le bouclage dynamique

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta + \xi \dot{\theta}^2 \\ u_1 &= \xi + \varepsilon \dot{\theta}^2 \\ u_2 &= \frac{-1}{\xi} (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta + 2\xi \dot{\theta})\end{aligned}$$

et le changement de coordonnées

$$(x, z, \theta, \dot{x}, \dot{z}, \dot{\theta}, \xi, \dot{\xi}) \longmapsto (y, \dot{y}, \ddot{y}, y^{(3)}).$$

La seule singularité de ce bouclage est quand  $\xi = 0$ , c'est-à-dire

$$\ddot{y}_1^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2 = 0$$

(l'avion est en chute libre). Notons enfin que l'avion à décollage vertical n'est pas linéarisable par bouclage statique : il suffit d'appliquer le théorème 2.15.

**3.2.b. Bouclages endogènes.** Le théorème 3.14 assure l'existence d'un bouclage tel que

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \kappa(x, z, w)) \\ \dot{z} &= a(x, z, w). \end{aligned}$$

s'écrit, à un changement de coordonnées près,

$$(3.15) \quad \dot{y} = g(y, v), \quad \dot{v} = v^1, \dots, \quad \dot{v}^\mu = w.$$

Mais (3.15) est équivalent à  $\dot{y} = g(y, v)$  (voir la remarque après la définition 3.1), lui-même équivalent à  $\dot{x} = f(x, u)$ . Ainsi, (3.14) est équivalent à  $\dot{x} = f(x, u)$ . Cela conduit à la

**Définition 3.18.** Considérons la dynamique  $\dot{x} = f(x, u)$ . Le bouclage

$$\begin{aligned} u &= \kappa(x, z, w) \\ \dot{z} &= a(x, z, w) \end{aligned}$$

est dit *endogène* si la dynamique en boucle ouverte  $\dot{x} = f(x, u)$  est équivalente à la dynamique en boucle fermée

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \kappa(x, z, w)) \\ \dot{z} &= a(x, z, w). \end{aligned}$$

Le terme « endogène » traduit le fait que les variables du bouclage  $z$  et  $w$  sont en un certain sens « engendrées » par les variables originales  $x, \bar{u}$  (voir [61, 64] pour plus de détails sur ces bouclages).

**Remarque 3.19.** Il est aussi possible de considérer sans coût supplémentaire des bouclages « généralisés » dépendant non seulement de  $w$ ,

mais aussi des dérivées de  $w$ . Les bouclages quasi-statiques en font partie [22].

Nous avons ainsi une caractérisation encore plus précise de l'équivalence et de la platitude :

**Théorème 3.20.** *Deux dynamiques,  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $\dot{y} = g(y, v)$ , sont équivalentes si, et seulement si,  $\dot{x} = f(x, u)$  peut être transformé par bouclage endogène et changement de coordonnées en*

$$(3.16) \quad \dot{y} = g(y, v), \quad \dot{v} = v^1, \dots, \quad \dot{v}^\mu = w.$$

*pour un entier  $\nu$  assez, et vice versa.*

**Corollaire 3.21.** *Une dynamique est plate si, et seulement si, elle est linéarisable par bouclage dynamique endogène et changement de coordonnées.*

Une autre conséquence élémentaire et importante du théorème 3.14 est qu'un bouclage dynamique endogène peut être défait par un autre bouclage endogène :

**Corollaire 3.22.** *Considérons la dynamique*

$$\dot{x} = f(x, \kappa(x, z, w))$$

$$\dot{z} = a(x, z, w)$$

*où*

$$u = \kappa(x, z, w), \quad \dot{z} = a(x, z, w)$$

*est un bouclage endogène. Elle peut être transformée par bouclage endogène en*

$$(3.17) \quad \dot{x} = f(x, u), \quad \dot{u} = u^1, \dots, \quad \dot{u}^\mu = w.$$

*pour un entier  $\mu$  assez grand.*

Cela montre clairement les propriétés préservées par équivalence : les propriétés qui sont préservées par l'ajout d'intégrateurs purs et les changements de coordonnées, en particulier la commandabilité.

Un bouclage endogène est réellement « réversible », à des intégrateurs purs près. Il est important de mentionner qu'un bouclage qui

est *inversible* dans la terminologie standard — mais peut-être malheureuse — [87] n'est pas nécessairement endogène. Par exemple le bouclage  $\dot{z} = v$ ,  $u = v$  agissant sur le système scalaire  $\dot{x} = u$  n'est pas endogène. En effet, la dynamique en boucle fermée  $\dot{x} = v$ ,  $\dot{z} = v$  n'est plus commandable, ce qui est impossible à changer par n'importe quel autre bouclage !

**3.2.c. Suivi de trajectoires.** Un problème important en pratique est celui du *suivi de trajectoires* : étant donnée une dynamique  $\dot{x} = f(x, u)$ , nous cherchons un contrôleur capable de suivre n'importe quelle trajectoires de référence  $t \mapsto (x_r(t), u_r(t))$  : il convient de rajouter à la commande en boucle ouverte une correction  $\Delta u$  en fonction des erreurs sur l'état  $\Delta x = x - x_r$ . Pour les systèmes plats une méthode systématique existe pour calculer  $\Delta u$  à partir de  $\Delta x$  et de la trajectoire de référence.

Si la dynamique admet comme sortie plate  $y = h(x, \bar{u})$ , nous pouvons utiliser le corollaire 3.15 pour la transformer par bouclage dynamique (endogène) et changement de coordonnées en  $y^{(\mu+1)} = w$ . Avec

$$v := y_r^{(\mu+1)}(t) - K \Delta \tilde{y}$$

et une matrice gain  $K$  dont les valeurs propres sont à parties réelles positives, nous obtenons une dynamique de l'erreur asymptotiquement stable

$$\Delta y^{(\mu+1)} = -K \Delta \tilde{y},$$

où  $y_r(t) := (x_r(t), \bar{u}_r(t))$  et  $\tilde{y} := (y, \dot{y}, \dots, y^{(\mu)})$  et  $\Delta \xi$  représente  $\xi - \xi_r(t)$ .

Une telle loi de commande assure le suivi asymptotique. Il existe une transformation inversible

$$\Phi(\bar{y}) = (\varphi(\bar{y}), \alpha(\bar{y}), \dot{\alpha}(\bar{y}), \dots)$$

qui conjugue les champs infinis  $F(x, \bar{u}) := (f(x, u), u, u^1, \dots)$  et  $G(\bar{y}) := (y, y^1, \dots)$ . De la preuve du théorème 3.14, cela signifie que

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\tilde{y}_r(t) + \Delta \tilde{y}) \\ &= \varphi(\tilde{y}_r(t)) + R_\varphi(y_r(t), \Delta \tilde{y}) \cdot \Delta \tilde{y} \\ &= x_r(t) + R_\varphi(y_r(t), \Delta \tilde{y}) \cdot \Delta \tilde{y} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 u &= \alpha(\tilde{y}_r(t) + \Delta\tilde{y}, -K\Delta\tilde{y}) \\
 &= \alpha(\tilde{y}_r(t)) + R_\alpha(y_r^{(\mu+1)}(t), \Delta\tilde{y}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta\tilde{y} \\ -K\Delta\tilde{y} \end{pmatrix} \\
 &= u_r(t) + R_\alpha(\tilde{y}_r(t), y_r^{(\mu+1)}(t), \Delta\tilde{y}, \Delta w) \cdot \begin{pmatrix} \Delta\tilde{y} \\ -K\Delta\tilde{y} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le résultat classique de factorisation

$$\begin{aligned}
 R_\varphi(Y, \Delta Y) &:= \int_0^1 D\varphi(Y + t\Delta Y) dt \\
 R_\alpha(Y, w, \Delta Y, \Delta w) &:= \int_0^1 D\alpha(Y + t\Delta Y, w + t\Delta w) dt.
 \end{aligned}$$

Comme  $\Delta y \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , cela signifie que  $x \rightarrow x_r(t)$  et  $u \rightarrow u_r(t)$ . Il est clair qu'un tel algorithme de suivi a des performances qui vont se dégradant (robustesse, sensibilité aux erreurs) au fur et à mesure l'on s'approche d'une singularité de la transformation  $\varphi$  c'est à dire de  $\Phi$  et donc de la sortie plate.

Nous terminons cette section par quelques commentaires sur l'utilisation de la linéarisation par bouclage. Un bouclage linéarisant doit toujours être nourri par un *générateur de trajectoires*, même si le problème original n'est pas posé en termes de suivi de trajectoires. Supposons que l'on désire *stabiliser* un point d'équilibre. L'application brutale d'un bouclage linéarisant sans planification de trajectoires conduit à des commandes très importantes si l'on est loin de l'équilibre. Le rôle du générateur de trajectoires est de définir une trajectoire boucle ouverte « raisonnable » ramenant progressivement le système à l'équilibre — i.e., satisfaisant certaines contraintes sur l'état et/ou la commande — que le contrôleur linéarisant devra suivre.

**3.2.d. Suivi de trajectoires : singularités et échelles de temps.** Le suivi de trajectoire est possible uniquement loin des singularités de la transformation engendrée par la sortie plate. Si la trajectoire de référence passe près ou traverse la singularité il n'est plus possible de procéder comme ci-dessus. Cependant, tout n'est pas perdu comme le montre l'exemple qui suit. Il peut être

utile parfois de changer le paramétrage du temps. L'intérêt est alors, dans le nouveau temps, de retrouver une transformation régulière et inversible et d'assurer ainsi le suivi exponentiel.

**Exemple 3.23.** Soit la trajectoire de référence  $t \mapsto y_r(t) = (\sigma(t), p(\sigma(t)))$  pour l'exemple 3.13. Considérons le compensateur dynamique dépendant du temps  $u_1 = \xi \dot{\sigma}(t)$  et  $\dot{\xi} = v_1 \dot{\sigma}(t)$ . Le système en boucle fermée s'écrit

$$x'_1 = \xi, \quad x'_2 = u_2 \xi, \quad x'_3 = x_2 \xi \quad \xi' = v_1.$$

avec ' pour  $d/d\sigma$ . Une formulation équivalente est

$$x''_1 = v_1, \quad x''_3 = u_2 \xi^2 + x_2 v_1.$$

Pour  $\xi$  loin de zéro, le bouclage statique  $u_2 = (v_2 - x_2 v_1)/\xi^2$  linéarise la dynamique,

$$x''_1 = v_1, \quad x''_3 = v_2$$

dans le temps  $\sigma$ . Si le système reste proche de sa référence,  $\xi \approx 1$ , même si pour certain  $t$ ,  $\dot{\sigma}(t) = 0$ . Prenons

$$(3.18) \quad \begin{aligned} v_1 &= 0 - \text{signe}(\sigma) a_1 (\xi - 1) - a_2 (x_1 - \sigma) \\ v_2 &= \frac{d^2 p}{d\sigma^2} - \text{signe}(\sigma) a_1 \left( x_2 \xi - \frac{dp}{d\sigma} \right) - a_2 (x_3 - p) \end{aligned}$$

avec  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$ . Alors la dynamique de l'erreur devient exponentiellement stable en échelle  $\sigma$  (le terme  $\text{signe}(\sigma)$  est pour le cas  $\dot{\sigma} < 0$ ).

Des calculs similaires sont possibles pour les robots mobiles [29, 25].

### 3.3. Caractérisation de la platitude

**3.3.a. La question de base.** L'existence d'un critère calculable pour décider si  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  est plat reste une question ouverte. Cela signifie qu'il n'existe pas de méthode systématique pour construire une sortie plate. La situation est un peu analogue à celle des fonctions de Lyapounov ou des intégrales premières uniformes pour un système dynamique. Elles sont très utiles à la fois d'un point de vue théorique et pratique bien qu'elles ne soient pas systématiquement calculables.

La principale difficulté dans le calcul d'une sortie plate  $y = h(x, u, \dots, u^{(r)})$  réside dans sa dépendance par rapport aux dérivées en  $u$  d'ordre  $r$  arbitrairement grand. Savoir si cet ordre  $r$  admet une borne supérieure (en terme de  $n$  et  $m$ ) reste une énigme. Nous ne savons même pas, pour une dimension d'état et un nombre donné de commandes, si une borne finie existe. Par la suite, nous dirons qu'un système est  $r$ -plat s'il admet une sortie plate dépendant de  $u$  dérivé au plus  $r$  fois.

Pour illustrer le fait qu'une telle borne doit être au mieux linéaire en la dimension de l'état, considérons l'exemple suivant :

$$x_1^{(\alpha_1)} = u_1, \quad x_2^{(\alpha_2)} = u_2, \quad \dot{x}_3 = u_1 u_2$$

avec  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_2 > 0$ . Il admet comme sortie plate

$$y_1 = x_3 + \sum_{i=1}^{\alpha_1} (-1)^i x_1^{(\alpha_1-i)} u_2^{(i-1)}, \quad y_2 = x_2.$$

Ce système est  $r$ -plat avec  $r := \min(\alpha_1, \alpha_2) - 1$ . Nous conjecturons qu'il n'existe pas de sortie plate dépendant des dérivées de  $u$  d'un ordre inférieur ou égal à  $r - 1$ .

Admettons qu'une telle borne  $\kappa(n, m)$  soit connue. Le problème de caractériser la  $p$ -platitude pour un  $p \leq \kappa(n, m)$  donné peut être résolu au moins théoriquement. Cela revient (voir [61]) à trouver  $m$  fonctions  $h_1, \dots, h_m$  dépendant de  $(x, u, \dots, u^{(p)})$  tel que

$$\begin{aligned} \dim \text{span} \left\{ dx_1, \dots, dx_n, du_1, \dots, du_m, dh_1^{(\mu)}, \dots, dh_m^{(\mu)} \right\}_{0 \leq \mu \leq \nu} \\ = m(\nu + 1), \end{aligned}$$

où  $\nu := n + pm$ . Cela revient à vérifier l'intégrabilité d'un système aux dérivées partielles avec comme condition de transversalité

$$\begin{aligned} dx_i \wedge dh \wedge \dots \wedge dh^{(\nu)} &= 0, & i = 1, \dots, n \\ du_j \wedge dh \wedge \dots \wedge dh^{(\nu)} &= 0, & j = 1, \dots, m \\ dh \wedge \dots \wedge dh^{(\nu)} &\neq 0, \end{aligned}$$

où  $dh^{(\mu)}$  représente  $dh_1^{(\mu)} \wedge \dots \wedge dh_m^{(\mu)}$ . Il est en théorie possible de conclure par un critère calculable [10, 99], bien que les calculs généraux soient inextricables en pratique. Cependant, on peut espérer



utiliser la structure spéciale du problème pour mettre en évidence des simplifications majeures. En bref, tout reste à faire même si l'on dispose de plusieurs façon d'aborder la question (voir [3, 16, 90, 58, 5]).

### 3.3.b. Résultats connus

*Systèmes linéarisables par bouclage statique.* Nous avons vu qu'un tel système admettait une forme normale de Brunovsky. Il est donc plat, les sorties de Brunovsky, fonction de  $x$  uniquement, forment alors une sortie plate. La condition nécessaire et suffisante [48, 46] du théorème 2.15 est de nature purement géométrique. Noter qu'un système plat n'est pas, en général, linéarisable par bouclage statique (cf. l'avion à décollage vertical 3.12) sauf pour les systèmes avec une seule commande.

*Systèmes à une seule commande.* Avec une seule commande, la linéarisation par bouclage dynamique implique la linéarisation par bouclage statique [15]. Ainsi la platitude est, dans ce cas, entièrement caractérisée par le théorème 2.15.

*Systèmes affines en commande de co-dimension 1.* Un système de la forme

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^{n-1} u_j g_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

i.e., avec une commande de moins que d'état est 0-plat dès qu'il est commandable [15] (plus précisément fortement accessible en  $x$ ). La situation se complique très sensiblement lorsque la dépendance en  $u$  n'est plus affine (voir [62] pour des conditions suffisantes de nature géométrique).

*Systèmes affines en commande à deux états et quatre commandes.* Des conditions nécessaires et suffisantes de 1-platitude de tels systèmes se trouvent dans [6, 97]. Elles donnent une bonne idée de la difficulté calculatoire du test effectif de la  $r$ -platitude même pour  $r$  petit.

*Systèmes sans dérive.* Pour les systèmes de la forme  $\dot{x} = \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i$  d'autres résultats sont disponibles.

**Théorème 3.24 (systèmes sans dérive à deux commande [67])**

*Le système*

$$\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2$$

*est plat si, et seulement si, le rang générique de  $E_k$  est égale à  $k + 2$  pour  $k = 0, \dots, n - 2$  où  $E_0 := \{f_1, f_2\}$ ,  $E_{k+1} := \{E_k, [E_k, E_k]\}$ ,  $k \geq 0$ .*

Un système plat sans dérive à deux commandes est toujours 0-plat. Un tel système satisfaisant des conditions supplémentaires de régularité (voir [79]), peut être mis par bouclage statique régulier et changement de coordonnées sous *forme chaînée* [82]

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = x_2 u_1, \dots, \quad \dot{x}_n = x_{n-1} u_1,$$

la sortie plate étant alors  $y = (x_1, x_n)$ .

**Théorème 3.25 (système sans dérive,  $n$  états,  $n - 2$  commandes [68, 69])**

*Le système*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n-2} u_i f_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

*est plat dès qu'il est commandable (i.e., fortement accessible pour presque tout  $x$ ). Plus précisément, il est 0-plat si  $n$  est impaire, et 1-plat si  $n$  est pair.*

Tous les résultats ci-dessus utilisent les systèmes différentiels extérieurs et s'appuient sur certains travaux d'Élie Cartan.

*Certains systèmes mécaniques.* Lorsque le nombre des commandes (i.e., de moteurs) est égal aux nombre de degrés de liberté géométrique moins un, une caractérisation très intrinsèque d'une sortie plate ne dépendant que des variables de configuration est disponible. Dans [106] l'existence d'une telle sortie plate est caractérisée à partir de la métrique issue de l'énergie cinétique et de la co-distribution des commandes.

*Une condition nécessaire.* Comme on ne sait pas si la platitude peut être testée de manière finie, voir section 3.3.a, il est souvent très difficile de montrer qu'un système n'est pas plat. Le critère suivant donne une condition simple qui permet de montrer de façon élémentaire que certains systèmes ne sont pas plats.

**Théorème 3.26 (le critère de la variété réglée [109])**

*Supposons que  $\dot{x} = f(x, u)$  soit plat. La projection sur le  $p$ -espace de la sous-variété d'équation  $p = f(x, u)$  dans le  $(p, u)$ -espace ( $x$  est ici un paramètre) est une sous-variété réglée pour tout  $x$ .*

Ce critère signifie que l'élimination de  $u$  des  $n$  équations  $\dot{x} = f(x, u)$  conduit à  $n - m$  équations  $F(x, \dot{x}) = 0$  avec la propriété suivante : pour tout  $(x, p)$  tel que  $F(x, p) = 0$ , il existe  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$  tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad F(x, p + \lambda a) = 0.$$

$F(x, p) = 0$  est donc réglée car elle contient la droite passant par  $p$  de direction  $a$ .

La preuve de ce résultat est directement dans l'esprit du papier de Hilbert [45] qui montre que l'équation de Monge

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

n'est pas résoluble sans intégrale. Une version restreinte est proposée dans [121] pour des systèmes linéarisables par des bouclages dynamiques très particuliers (prolongements purs).

*Démonstration.* Soit  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$ , tel que  $\bar{p} = f(\bar{x}, \bar{u})$ . Génériquement,  $f$  est de rang  $m = \dim(u)$  par rapport à  $u$  (sinon, il suffit d'enlever certaines commandes). Aussi, l'élimination de  $u$  des équations est possible. Cela conduit à  $n - m$  équations ne faisant intervenir que  $x$  et  $p$ ,  $F(x, p) = 0$ . Ainsi nous avons la contrainte sur les trajectoires autour de  $(\bar{x}, \bar{u})$  :  $F(x, \dot{x}) = 0$ . Si le système est plat alors

$$x = \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)})$$

où  $y$  est une sortie plate et l'application  $\varphi$  une submersion. Ainsi, existe  $(\bar{y}, \dot{\bar{y}}, \dots, \bar{y}^{(q)})$  tel que  $\bar{x} = \varphi(\bar{y}, \dot{\bar{y}}, \dots, \bar{y}^{(q)})$ . Quelque soit la

fonction régulière du temps  $y$ , on a l'identité suivante

$$F\left(\varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)}), \varphi_y \dot{y} + \varphi_{\dot{y}} \ddot{y} + \dots + \varphi_{y^{(q)}} y^{(q+1)}\right) \equiv 0.$$

En prenant une fonction  $y$  dont les dérivées en  $t = 0$  jusqu'à l'ordre  $q$  sont imposées  $y^{(r)}(0) = \bar{y}^{(r)}$ ,  $r = 0, \dots, q$  et  $y^{(q)}(0) = \bar{y}^{(q)} + \xi$  où  $\xi$  est un vecteur arbitraire de  $\mathbb{R}^m$  on a en particulier l'identité suivante pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^m$

$$F\left(\bar{x}, \dot{\bar{x}} + \varphi_{y^{(q)}} \xi\right) \equiv 0$$

avec  $\varphi_{y^{(q)}}$  évaluer en  $(\bar{y}, \dot{\bar{y}}, \dots, \bar{y}^{(q)})$ . Par le point  $(\bar{x}, \bar{p})$  de  $F(x, p) = 0$ , passe l'espace affine parallèle à l'image de  $\varphi_{y^{(q)}}$ , un espace vectoriel de dimension au plus égale à  $m$  et au moins égale à 1.  $\square$

Ce résultat est particulièrement simple. Il constitue cependant le seul moyen de montrer que certains systèmes avec plusieurs commandes ne sont pas plats.

**Exemple 3.27.** Le système

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = (u_1)^2 + (u_2)^3$$

n'est pas plat, car la sous-variété  $p_3 = p_1^2 + p_2^3$  n'est pas réglée : il n'existe pas de  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $a \neq 0$ , tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, p_3 + \lambda a_3 = (p_1 + \lambda a_1)^2 + (p_2 + \lambda a_2)^3.$$

En effet, le terme cubique en  $\lambda$  implique  $a_2 = 0$ , le terme quadratique  $a_1 = 0$  et donc  $a_3 = 0$ .

**Exemple 3.28.** Le système  $\dot{x}_3 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$  ne définit pas une sous-variété réglée de  $\mathbb{R}^3$  : il n'est pas plat dans  $\mathbb{R}$ . En revanche, il définit une sous-variété réglée de  $\mathbb{C}^3$  : il est plat dans  $\mathbb{C}$ , avec comme sortie plate

$$y = (x_3 - (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 \sqrt{-1})(x_1 + x_2 \sqrt{-1}), x_1 + x_2 \sqrt{-1}).$$

**Exemple 3.29 (la bille sur une règle [44]).** Considérons le système de la figure 3.1 décrit par les équations

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -Bg \sin \theta + Br \dot{\theta}^2 \\ (mr^2 + J + J_b) \ddot{\theta} &= \tau - 2mrr \dot{\theta} - mgr \cos \theta, \end{aligned}$$

où  $(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$  est l'état et  $\tau$  la commande, En tant que système à

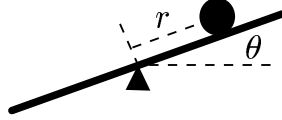


FIGURE 3.1. La bille roule sans glisser sur la règle dont on pilote l'inclinaison

une commande, nous savons qu'il n'est pas linéarisable par bouclage statique et donc qu'il ne peut pas être plat (cf. sous-section 3.3.b). Cependant il est très instructif de le montrer avec le critère des variétés réglées. Cela permet de comprendre pourquoi la caractérisation des systèmes plats à une seule commande est une question résolue.

L'élimination de  $\tau$  donne

$$\dot{r} = v_r, \quad \dot{v}_r = -Bg \sin \theta + Br\dot{\theta}^2, \quad \dot{\theta} = v_\theta$$

qui définit une sous-variété réglée de l'espace  $(\dot{r}, \dot{v}_r, \dot{\theta}, \dot{v}_\theta)$  pour chaque  $r, v_r, \theta, v_\theta$ . On ne peut pas conclure directement. Cependant le système est équivalent à

$$\dot{r} = v_r, \quad \dot{v}_r = -Bg \sin \theta + Br\dot{\theta}^2,$$

qui ne définit pas une sous-variété réglée pour chaque  $(r, v_r, \theta)$ . Donc ce système n'est pas plat.

L'exemple qui précède montre clairement pourquoi les systèmes plats à une commande coïncident avec les systèmes linéarisables par bouclage statique. Pour un système mono-entrée plat, l'élimination de  $u$ , conduit à une sous-variété de dimension 1 dans l'espace des  $p = \dot{x}$ . Or les seules sous-variétés réglées de dimension 1 sont des droites. Il est alors toujours possible de faire un changement de variable sur  $x$  pour avoir des droites parallèles à une direction fixe, indépendante de  $x$  et ainsi se ramener à un système équivalent avec un état de moins et toujours une seule commande. On se ramène ainsi de proche en proche, par changement de variables et élimination, à un système avec un état et une commande. La sortie plate est alors l'état mono-dimensionnel restant. Cette simple procédure montre clairement que le système est linéarisable par bouclage statique.

Pour un système plat à deux entrées, l'élimination de  $u$  conduit à une sous-variété réglée de dimension 2 qui n'est pas en général un plan et donc n'a aucune raison d'être un espace affine. Le fait que la géométrie des variétés réglées de dimension  $\geq 2$  soit bien plus complexe que celles de dimension 1 explique la différence entre le cas mono-entrée et le cas multi-entrées. Nous donnons ici un exemple qui vérifie le critère des variétés réglées mais qui n'est pas susceptible d'être traité par la procédure récemment proposée dans [116] :

$$\dot{x}_1 = x_2 + (u_1 - x_1 u_2)^2 u_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad \dot{x}_3 = u_2$$

Cet exemple est issu de [98] où est proposée une généralisation du critère des variétés réglées : cette généralisation permet de montrer que deux systèmes  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $\dot{y} = g(y, v)$  ne sont pas équivalents au sens de la définition 3.5 lorsque  $\dot{y} = g(y, v)$  n'est plus le système trivial  $\dot{y} = v$ .

### 3.4. Commande optimale et prédictive

Considérons le problème classique

$$\min_u J(u) = \int_0^T L(x(t), u(t)) dt$$

avec  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x(0) = a$  et  $x(T) = b$ , où  $a, b$  et  $T > 0$  sont donnés.

Supposons que  $\dot{x} = f(x, u)$  soit plat avec  $y = h(x, u, \dots, u^{(r)})$  comme sortie plate,

$$x = \varphi(y, \dots, y^{(q)}), \quad u = \alpha(y, \dots, y^{(q)}).$$

La résolution numérique de  $\min_u J(u)$  nécessite a priori la discrétisation de l'espace d'état, une approximation de dimension finie. Une autre façon consiste à discrétiser la sortie plate. Comme dans la section 3.1.d, posons  $y_i(t) = \sum_1^N A_{ij} \lambda_j(t)$ . Les conditions initiales et finales sur  $x$  signifient que les  $A_{ij}$  sont dans un sous espace affine, noté  $V$ . Ainsi nous sommes conduits au programme non linéaire suivant

$$\min_{A \in V} J(A) = \int_0^T L(\varphi(y, \dots, y^{(q)}), \alpha(y, \dots, y^{(q)})) dt,$$

où les  $y_i$  sont remplacés par  $\sum_1^N A_{ij} \lambda_j(t)$ .

Cette méthode a été utilisée dans [85] pour la génération de trajectoires optimales. Elle est généralisée à des systèmes plus généraux que les systèmes plats dans [14]. Elle peut également être utilisée pour la commande prédictive. Le principal intérêt réside dans des gains importants en temps de calculs et une meilleure stabilité numérique. En effet, la quadrature exacte de la dynamique — correspondant à la discrétisation exacte de la dynamique grâce à des signaux de commande bien choisis avec  $\alpha$  — évite les problèmes usuels liés à l'intégration de  $\dot{x} = f(x, u)$  et à la contrainte finale  $x(T) = b$ . Une référence récente sur le sujet est [42].

### 3.5. Symétries

**3.5.a. Sortie plate invariante.** Soit une dynamique  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $(x, u) \in X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Selon la section 3.1, elle engendre un système  $(F, \mathfrak{M})$ , où

$$\mathfrak{M} := X \times U \times \mathbb{R}_m^\infty \quad \text{et} \quad F(x, u, u^1, \dots) := (f(x, u), u^1, u^2, \dots).$$

Au cœur de notre notion d'équivalence se trouvent les applications endogènes qui envoient les solutions d'un système vers celles d'un autre système. Nous allons maintenant considérer une sous-classe importante de transformations endogènes, celles qui envoient les solutions du système sur d'autres solutions du *même* système :

**Définition 3.30.** Une transformation endogène  $\Phi_g : \mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{M}$  est une *symétrie* du système  $(F, \mathfrak{M})$  si

$$\forall \xi := (x, u, u^1, \dots) \in \mathfrak{M}, \quad F(\Phi_g(\xi)) = D\Phi_g(\xi) \cdot F(\xi).$$

Plus généralement, nous pouvons considérer un *groupe de symétries*, i.e., une collection  $(\Phi_g)_{g \in G}$  de symétries  $\forall g_1, g_2 \in G, \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 * g_2}$ , où  $(G, *)$  est un groupe.

Supposons le système plat. Le choix de la sortie plate n'est pas unique, car toute transformation sur la sortie plate donne lieu à une autre sortie plate. Cependant, nous allons voir sur un exemple que certains choix sont meilleurs que d'autres. Cela tient au fait que certaines sorties plates admettent alors un sens physique immédiat et donc, d'une certaine manière, préservent les symétries naturelles.

**Exemple 3.31 (la voiture).** Le système décrivant une voiture (condition de roulement sans glissement à l'avant et à l'arrière)

$$\dot{x} = u_1 \cos \theta, \quad \dot{y} = u_1 \sin \theta, \quad \dot{\theta} = u_2,$$

admet, comme groupe de symétries, le groupe  $SE(2)$  des déplacements du plan  $(x, y)$  préservant l'orientation : chaque translation de vecteur  $(a, b)'$  et rotation d'angle  $\alpha$ , conduit à la transformation endogène

$$\begin{aligned} X &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + a \\ Y &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \\ \Theta &= \theta + \alpha \\ U_1 &= u_1 \\ U_2 &= u_2 \end{aligned}$$

qui est une symétrie, puisque les équations d'état restent les mêmes,

$$\dot{X} = U_1 \cos \Theta, \quad \dot{Y} = U_1 \sin \Theta, \quad \dot{\Theta} = U_2.$$

Ce système est plat avec  $z := (x, y)$  comme sortie plate. Évidemment, une multitude de sorties plates est possible comme  $\tilde{z} := (x, y + \dot{x})$ . Cependant,  $z$  est un choix bien plus « naturel » que  $\tilde{z}$ , car  $z$  correspond aux coordonnées cartésiennes de l'essieu arrière alors que la seconde composante de  $\tilde{z}$  n'a physiquement aucun sens en tant que somme d'une position et d'une vitesse. Une façon plus formelle serait de dire que  $z$  préserve les symétries alors que  $\tilde{z}$  ne les respecte pas. En fait chaque symétrie sur le système induit une transformation sur  $z$  :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \cos \alpha - z_2 \sin \alpha + a \\ z_1 \sin \alpha + z_2 \cos \alpha + b \end{pmatrix}.$$

Cette transformation ne fait pas apparaître les *dérivées* de  $z$  : c'est une transformation *ponctuelle*. Cette transformation engendre une transformation endogène  $(z, \dot{z}, \dots) \mapsto (Z, \dot{Z}, \dots)$  par simple prolongement. Selon [40], nous dirons qu'une telle transformation qui est le prolongement d'une transformation ponctuelle est *holonome*.



La transformation induite de façon similaire sur  $\tilde{z}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y + \dot{X} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \cos \alpha + (\dot{\tilde{z}}_1 - \tilde{z}_2) \sin \alpha + a \\ \tilde{z}_1 \sin \alpha + \tilde{z}_2 \cos \alpha + (\dot{\tilde{z}}_1 - \dot{\tilde{z}}_2) \sin \alpha + b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

n'est *plus* une transformation ponctuelle (elle comporte des dérivées de  $\tilde{z}$ ). Elle n'est pas holonome.

Soit un système  $(F, \mathfrak{M})$  admettant une symétrie  $\Phi$  (resp. un groupe de symétries  $(\Phi_g)_{g \in G}$ ). Supposons que ce système soit plat avec  $y = h(x, u, \dots, u^{(q)})$  comme sortie plate. Notons  $\Psi := (h, \dot{h}, \ddot{h}, \dots)$  la transformation endogène engendrée par  $h$ . L'exemple ci-dessus nous suggère la définition suivante.

**Définition 3.32 (sortie plate invariante).** La sortie plate  $h$  est dite *invariante* par rapport à la symétrie  $\Phi$  (resp. au groupe de symétries  $(\Phi_g)_{g \in G}$ ) si, et seulement si, la transformation  $\Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$  est holonome (resp. les transformations  $\Psi \circ \Phi_g \circ \Psi^{-1}$  sont holonomes pour tout  $g \in G$ ).

Se pose alors la question fondamentale suivante : soit  $(\Phi_g)_{g \in G}$  un groupe de symétries d'un système plat. Sous quelles conditions existe-t-il une sortie plate invariante par rapport à un tel groupe.

Cette question peut être vue comme le cas particulier du problème général suivant : soit un système différentiel *sous-déterminé*  $\dot{x} - f(x, u) = 0$  avec un groupe de symétries ; peut-il être réduit à un système plus petit ? Contrairement au cas *déterminé* où ce problème a été étudié et résolu depuis longtemps, il semble que, pour les systèmes sous-déterminés cette question ait été très peu étudiée [89].

### 3.5.b. Sortie plate, potentiel et degré de liberté de jauge.

Symétries et potentiels sont des concepts très importants en physique. Pour clore ce chapitre, nous ne pouvons pas résister à la tentation de montrer que la problématique des systèmes plats s'inscrit très naturellement dans ce cadre.

Les équations de Maxwell dans le vide indique que le champ magnétique  $H$  est à divergence nulle,  $\nabla \cdot H = 0$ . En coordonnées euclidiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ , cela conduit au système sous-déterminé aux dérivées partielles suivant

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0.$$

Une observation clé est que la solution générale de ce système dérive d'un potentiel vecteur  $H = \nabla \times A$  : la contrainte  $\nabla \cdot H = 0$  est alors automatiquement vérifiée quelque soit le potentiel vecteur  $A$ . Ce potentiel paramétrise toutes les solutions du système sous-déterminé  $\nabla \cdot H = 0$  (voir [100] pour une théorie générale dans le cadre linéaire avec la notion de systèmes paramétrisables).  $A$  est a priori non unique car il est défini, à partir de  $H$ , à un champ de gradient près, le degré de liberté de jauge. Les symétries du problème indiquent souvent comment utiliser ce degré de liberté pour définir un potentiel  $A$  « naturel » de façon à avoir les calculs les plus simples par la suite.

La situation est très analogue pour les systèmes plats. La sortie plate est un « potentiel » pour le système différentiel sous-déterminé  $\dot{x} - f(x, u) = 0$ . Les transformations endogènes sur la sortie plate correspondent aux degrés de liberté de jauge. La sortie plate « naturelle » est également déterminée par les symétries « naturelles » du système. Avec une telle sortie plate, les bouclages deviennent aussi invariants et donc préservent la physique du système (voir [71] pour le suivi de trajectoire invariant).

Une façon moins ésotérique et plus pragmatique pour se convaincre que la platitude est une notion intéressante consiste à parcourir le petit catalogue de systèmes plats du chapitre 5.

#### Chapitre 4. Systèmes plats de dimension infinie

La correspondance entre les trajectoires est à la base de la notion d'équivalence et de platitude. Une telle correspondance peut être étendue à des systèmes qui ne sont plus nécessairement gouvernés par des équations différentielles ordinaires. Des prolongements sont possibles pour les systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles avec commande sur la frontière. Ici la situation est bien moins

claire que pour les équations différentielles ordinaires. Cependant des tels prolongements peuvent être très utiles pour la planification de trajectoires.

Le cadre théorique qui permettrait de regrouper sous une même forme les exemples qui suivent reste à définir. Nous renvoyons à [77, 33, 34] pour un début de formalisation dans le cas linéaire. On trouvera aussi dans le numéro spécial de « International Journal of Control » en l'honneur de Michel Fliess (Vol 81, issue 3, 2008), plusieurs articles sur la dimension infinie et la platitude, articles qui complètent la monographie [115]. Nous ne retenons ici que le coté explicite des paramétrisations à l'aide de grandeurs jouant le rôle de sorties plates et dont la dépendance en temps est libre de toutes contraintes en dehors de celles liées à la régularité.

#### 4.1. Retards et équations des ondes

**4.1.a. Exemples de base.** Soit le système différentiel à retard

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + u(t-1).$$

Avec  $y(t) := x_1(t)$ , nous avons une paramétrisation explicite des trajectoires

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t), \quad u(t) = \ddot{y}(t+1) + \dot{y}(t+1) - y(t+1).$$

Ainsi,  $y(t) := x_1(t)$  joue ici le rôle d'une sortie « plate » quitte à utiliser dans les formules des valeurs avancées de  $y$ . Cette idée est étudiée en détail dans [77], où la classe des systèmes  $\delta$ -libre est définie ( $\delta$  est ici l'opérateur de retard). Plus précisément, [77] considère les systèmes linéaires avec retard de la forme

$$M(d/dt, \delta)w = 0$$

où  $M$  est une matrice  $(n-m) \times n$  dont les éléments sont des polynômes en  $d/dt$  et  $\delta$  et où  $w = (w_1, \dots, w_n)$  correspond aux variables du système. Un tel système est alors dit  $\delta$ -libre s'il est relié au système libre  $y = (y_1, \dots, y_m)$  engendré par  $m$  fonctions arbitraires du temps

par

$$\begin{aligned} w &= P(d/dt, \delta, \delta^{-1})y \\ y &= Q(d/dt, \delta, \delta^{-1})w, \end{aligned}$$

avec  $P$  (resp.  $Q$ ) une matrice  $n \times m$  (resp.  $m \times n$ ) à éléments polynomiaux en  $d/dt$ ,  $\delta$  et  $\delta^{-1}$ .

De nombreux systèmes linéaires sont  $\delta$ -libres. Par exemple,  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-1)$ , avec  $(A, B)$  commandable, est  $\delta$ -libre, avec la sortie de Brunovsky de  $\dot{x} = Ax + Bv$  comme sortie «  $\delta$ -libre ».

Les modèles suivants, très souvent utilisés en commande de procédés,

$$z_i(s) = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{K_i^j \exp(-s\delta_i^j)}{1 + \tau_i^j s} \right\} u_j(s), \quad i = 1, \dots, p$$

( $s$  est la variable de Laplace,  $K_i^j$  est le gain statique,  $\delta_i^j$  le retard et  $\tau_i^j$  la constante de temps du transfert entre  $u_j$  et  $z_i$ ) sont  $\delta$ -libres [92].

À ce niveau, les travaux dans [101] sur des modules libres sont particulièrement intéressants : ils proposent des méthodes formelles systématiques pour le calcul de base, i.e., de paramétrisation explicite via la sortie plate.

**4.1.b. Barre en torsion.** D'autres exemples de systèmes  $\delta$ -libres sont obtenus par l'équation des ondes. La dynamique en torsion d'une barre élastique [35] avec d'un côté un moteur et de l'autre une inertie est en variables réduites (figure 4.1)

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \theta(x, t) &= \partial_x^2 \theta(x, t), \quad x \in [0, 1] \\ \partial_x \theta(0, t) &= -u(t) \\ \partial_x \theta(1, t) &= -\partial_t^2 \theta(1, t), \end{aligned}$$

où  $\theta(x, t)$  est l'angle de torsion et  $u(t)$  la commande proportionnelle au couple du moteur. Des formules de d'Alembert,  $\theta(x, t) = \phi(x+t) + \psi(x-t)$ , on déduit sans peine,

$$\begin{aligned} 2\theta(t, x) &= -\dot{y}(t+x-1) + \dot{y}(t-x+1) + y(t+x-1) + y(t-x+1) \\ 2u(t) &= \ddot{y}(t+1) + \ddot{y}(t-1) + \dot{y}(t+1) - \dot{y}(t-1), \end{aligned}$$

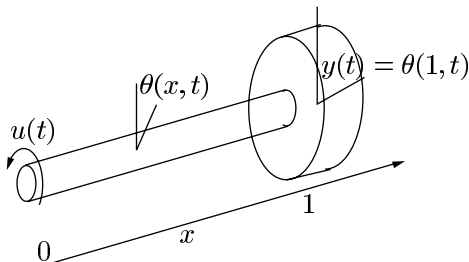


FIGURE 4.1. Une barre en torsion avec inertie ponctuelle

avec  $y(t) := \theta(1, t)$ . Ce système est clairement  $\delta$ -libre avec  $\theta(1, t)$  comme sortie «  $\delta$ -plate ». Nous renvoyons à [78, 35] pour les calculs et l'application à la planification de trajectoires (démarrage d'une machine tournante).

Les paramétrisations précédentes utilisent des retards ponctuels. Sur certains systèmes où la vitesse de propagation des ondes dépend de l'espace, il est utile d'introduire des retards répartis comme le montre l'exemple d'une chaîne pesante.

**4.1.c. Chaîne pesante.** Nous reprenons ici l'exemple introductif de [94]. Les équations de la dynamique d'une chaîne pesante (cf. figure 4.2) sont

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( gz \frac{\partial X}{\partial z} \right) \quad \text{pour } z \in [0, L], \quad X(L, t) = D(t)$$

avec la commande au bord  $D(t)$ , le déplacement du chariot. Ce modèle est un modèle linéarisé autour de l'équilibre  $X = D(t)$ ,  $X(z, t)$  étant l'abscisse à l'instant  $t$  du maillon à la coté  $z$ . Nous allons montrer que la sortie plate est  $y(t) := X(0, t)$  avec

$$(4.1) \quad X(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \left( t + 2\sqrt{z/g} \sin \xi \right) d\xi.$$

Une façon de faire est de vérifier a posteriori que, quelque soit la fonction  $t \mapsto y(t)$  deux fois dérivable, le profil  $X(z, t)$  ci-dessus vérifie les équations de la dynamique avec comme commande

$$D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \left( t + 2\sqrt{L/g} \sin \xi \right) d\xi.$$

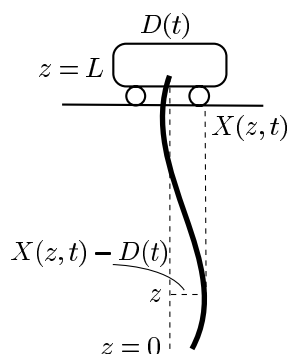


FIGURE 4.2. La chaîne pesante

Une autre manière de procéder est le calcul symbolique à la Heaviside ou Mikusiński. Formellement, cela revient à utiliser la transformation de Laplace en temps et à remplacer la dérivée en temps avec la multiplication par  $s$ , la variable de Laplace ( $\widehat{X}$  désigne la transformée de Laplace de  $X$ ) :

$$\frac{d}{dz} \left( gz \frac{d\widehat{X}}{dz} \right) = s^2 \widehat{X}.$$

Il est bien connu [125] que la solution fondamentale de cette équation du second ordre qui n'est pas infinie en  $z = 0$  s'exprime avec la fonction de Bessel  $J_0$  (il s'agit de la fonction de Clifford) :

$$J_0(-2i\sqrt{z/g}s).$$

Comme  $J_0(0) = 1$ , on a

$$\widehat{X}(z, s) = J_0(-2i\sqrt{z/g}s) X(0, s).$$

Avec la représentation intégrale de Poisson

$$J_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\xi \sin \theta) d\theta$$

on obtient

$$\widehat{X}(z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(2s\sqrt{x/g} \sin \theta\right) \widehat{y}(s) d\theta$$

avec  $y = X(0, t)$ . Comme la transformée de Laplace de  $y(t + a)$  est  $\exp(as)\widehat{y}$ , on en déduit directement la formule (4.1). L'opérateur qui

à  $y$  associe le profil  $X(z, t)$  est à support compact. Il est facilement de construire des trajectoires allant d'une position statique vers une autre en temps fini. Les formules (4.1) fournissent une réponse élémentaire à la planification de trajectoires.

**4.1.d. Réacteur chimique avec recyclage.** Cet exemple est issu de [114]. Dans [4], Aris et Amundson considèrent une classe de réac-

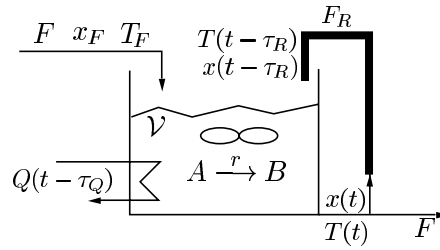


FIGURE 4.3. Le réacteur de Aris et Amundson avec un recyclage

teurs chimiques ne faisant intervenir qu'une seule réaction et dont le prototype (ici  $A \rightarrow B$  et deux espèces  $A$  et  $B$ ) est décrit sur la figure 4.3 où nous avons rajouté un recyclage et une dynamique de transfert thermique représentée par un retard pur  $\tau_Q$  constant. Sous des hypothèses classiques (agitation parfaite, volume constant, échange thermique instantané, thermodynamique simplifiée) les bilans de matière et d'énergie conduisent aux équations suivantes :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = D(x_F - x(t)) + D_R(x(t - \tau_R) - x(t)) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -r(x(t), T(t)) \\ \dot{T}(t) = D(T_F - T(t)) + D_R(T(t - \tau_R) - T(t)) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad +\alpha r(x(t), T(t)) + Q(t - \tau_Q). \end{cases}$$

La concentration de l'espèce  $A$  est notée  $x$  et la température,  $T$ . La commande  $Q$  est directement proportionnelle à la puissance échangée avec l'extérieur. Les paramètres suivants sont supposés constants :  $\alpha$ , proportionnel à l'enthalpie de réaction ;  $D$ , le taux de dilution ;  $x_F$  et  $T_F$ , les composition et température d'entrée.

Le recyclage est ici représenté par un retard pur  $\tau_R$  (absence de réaction et écoulement piston). Si  $\mathcal{V}_R$  est le volume du circuit de recycle et  $F_R$  son débit, alors  $\tau_R = \mathcal{V}_R/F_R$ .

Ainsi le modèle du réacteur est un système non linéaire à retards. Pour son intégration, il est nécessaire de fixer la valeur initiale de  $x$  et  $T$  non seulement dans le réacteur mais aussi dans le circuit de recyclage. Ainsi la condition initiale porte sur les valeurs de  $x$  et  $T$  entre les instants  $-\tau_R$  et 0 : elle est de dimension infinie.

Supposons maintenant que la loi horaire de  $x(t) = y(t)$  soit donnée. Le bilan matière (la première équation de (4.2)) donne une équation implicite définissant la température en fonction de  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  et  $y(t - \tau_R)$  :

$$T(t) = \Theta(y(t), \dot{y}(t), y(t - \tau_R)).$$

Le bilan énergie fournit le flux thermique

$$Q(t - \tau_Q) = \dot{T}(t) - D(T_F - T(t)) - D_R(T(t - \tau_R) - T(t)) - \alpha r(y(t), T(t));$$

d'où

$$Q(t) = \dot{T}(t + \tau_Q) - D(T_F - T(t + \tau_Q)) - D_R(T(t - \tau_R + \tau_Q) - T(t + \tau_Q)) - \alpha r(y(t + \tau_Q), T(t + \tau_Q)).$$

Il s'en suit que  $Q(t)$  dépend de  $y(t + \tau_Q)$ ,  $\dot{y}(t + \tau_Q)$ ,  $\ddot{y}(t + \tau_Q)$ ,  $y(t - \tau_R + \tau_Q)$ ,  $y(t - 2\tau_R + \tau_Q)$  et  $\dot{y}(t - \tau_R + \tau_Q)$ . Formellement nous avons

$$Q(t) = \Lambda[y(t + \tau_Q), \dot{y}(t + \tau_Q), \ddot{y}(t + \tau_Q), y(t - \tau_R + \tau_Q), y(t - 2\tau_R + \tau_Q), \dot{y}(t - \tau_R + \tau_Q)].$$

Ainsi la valeur de  $Q(t)$  sur l'intervalle  $[0, t_*]$  dépend de la valeur de  $y(t)$  sur l'intervalle  $[-2\tau_R + \tau_Q, t_* + \tau_Q]$ . Pour trouver une commande  $Q$  qui connecte deux états stationnaires en temps fini, il suffit alors de définir une fonction  $t \mapsto y(t)$  qui ne varie que sur  $[0, t_*]$ . Dans ce cas la transition vers le nouveau état stationnaire commencera au temps  $-\tau_Q$  pour la commande  $Q$ , au temps 0 pour  $T$  et  $x$ . Le nouveau régime stationnaire sera alors atteint au temps  $t_*$  pour  $x$ , au temps  $t_* + \tau_R$  pour  $T$  et au temps  $t_* + 2\tau_R - \tau_Q$  pour  $Q$ .



**4.1.e. Serpent non holonome.** L'exemple le plus connu de système plat est celui de la voiture avec plusieurs remorques (cf. chapitre 5), la sortie plate étant la position de la dernière remorque. Lorsque le nombre de remorques est important, il est tentant, comme

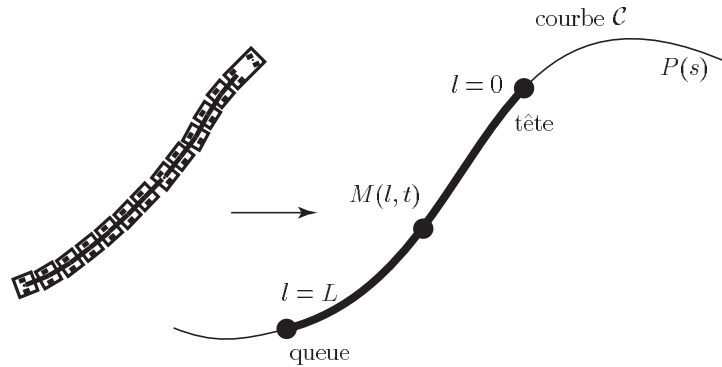


FIGURE 4.4. Le serpent non holonome : approximation par un système continu de la voiture avec beaucoup de remorques

le montre le figure 4.4, de considérer l'approximation continue par le « serpent non holonome ». Les remorques sont repérées par une variable continue,  $l \in [0, L]$  et un point dans le plan  $M(l, t)$ . Les équations aux dérivées partielles vérifiées par  $M$  sont les suivantes

$$\left\| \frac{\partial M}{\partial l} \right\| = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial l} \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = 0.$$

La première équation dit que  $l \mapsto M(l, t)$  est une paramétrisation en longueur d'arc du serpent (les attaches des remorques sont inextensibles). La seconde équation traduit les conditions de roulement sans glissement, les contraintes non holonomes : la vitesse de la remorque  $l$  est parallèle la direction de la remorque  $l$ , i.e., la tangent à la courbe  $l \mapsto M(l, t)$ . Il est évident que la solution générale de ce système est très simple :

$$M(l, t) = P(s(t) - l), \quad l \in [0, L]$$

où  $P$  correspond à la tête du serpent avec  $s \mapsto P(s)$  une paramétrisation en longueur d'arc de la courbe suivie par  $P$ . De la même

façon

$$M(l, t) = Q(s(t) + l), \quad l \in [0, L]$$

où  $Q$  correspond à la queue du serpent, la sortie plate pour le système avec un nombre fini de remorques. Le lien avec la dimension finie est alors simplement le développement en série de  $Q(s + l)$  en  $s$  via  $Q(s + l) = \sum_{i \geq 0} Q^{(i)}(s) l^i / i!$ . La formule avec le retard est cependant bien plus simple et pratique. Avec beaucoup de remorques (typiquement plus de 5), il est économe de fonder la planification de trajectoires sur  $M(l, t) = Q(s(t) + l)$ . Ainsi le modèle réduit du système, i.e., le modèle qui conduit aux calculs les plus simples, est ici de dimension infinie.

**4.1.f. Équation de Burger sans diffusion.** Nous considérons ici l'équation de Burger sans diffusion [93]. Elle représente un gaz de

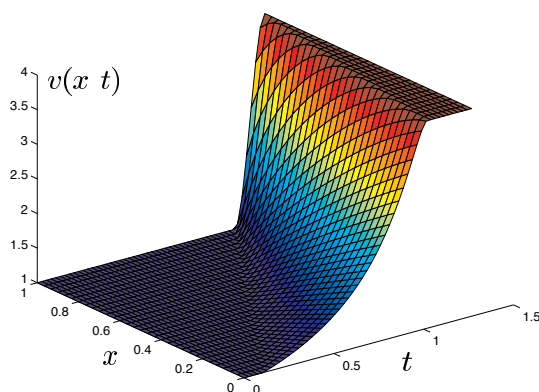


FIGURE 4.5. Un écoulement obéissant à l'équation de Burger ; transition d'une vitesse basse  $v \equiv 1$  vers une vitesse haute  $v \equiv 4$  sans choc de compression.

particules sans interaction et en mouvement inertiel dans un tuyau de longueur  $l$  :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad x \in [0, 1] \\ v(0, t) &= u(t) \end{aligned}$$

Le champ  $x \mapsto v(x, t)$  est la vitesse des particules en  $x \in [0, l]$ . La commande est la vitesse d'entrée dans le tuyau  $u(t) > 0$ .

La vitesse en sortie est notée  $y(t) = v(l, t)$ . Comme l'accélération de chaque particule est constant, sa vitesse reste constante tout au long de son trajet dans le tuyau. La particule qui en  $t$  sort, admet comme vitesse  $y(t)$ . Au temps  $t - l/y(t)$  cette même particule était à l'entrée, c'est à dire en  $x = 0$ . Sa vitesse était alors de  $u(t - l/y(t))$ . D'où

$$y(t) = u(t - l/y(t)).$$

Symétriquement nous avons ;

$$u(t) = y(t + l/u(t)).$$

Plus généralement, nous avons :

$$y(t) = v(t - (1 - x)/y(t), x) \quad x \in [0, 1]$$

et

$$u(t) = v(t + x/u(t), x) \quad x \in [0, 1].$$

Formellement, nous avons une correspondance entre les trajectoires  $t \mapsto v(\bullet, t)$ , solution de (4.3), et  $t \mapsto y(t)$ . Cette correspondance est effective dès que  $y > 0$  est différentiable et  $t \mapsto t - (1 - x)/y(t)$  croissante pour tout  $x \in [0, l]$ , c'est à dire tel que pour tout temps  $t$ ,  $\dot{y}(t) > -y^2(t)$ .

Cette condition correspond à des solutions régulières sans choc [18]. Il est alors facile de générer des commandes  $t \mapsto u(t)$  allant des bases vitesses  $v(\bullet, 0) \equiv v_1 > 0$  vers les hautes vitesses  $v(\bullet, T) \equiv v_2 > v_1$  en un temps  $T$  pas trop court en évitant la formation d'onde de choc (ce problème est typique des coups de bélier en hydraulique).

Notons que les calculs restent valables pour tout système de la forme

$$\begin{aligned} v_t + \lambda(v)v_x &= 0 \quad x \in [0, l] \\ v(0, t) &= u(t) \end{aligned}$$

car les relations entre  $y(t) = v(l, t)$ ,  $u$  et  $v$  sont (voir, par exemple, [21, page 41]) :

$$y(t) = u[t - l/\lambda(y(t))], \quad y(t) = v[t - (1 - x)/\lambda(y(t)), x].$$

**4.1.g. Mélange.** L'exemple de la figure 4.6 est issu de [93], un système où le retard dépend de la commande. À partir des trois bacs de

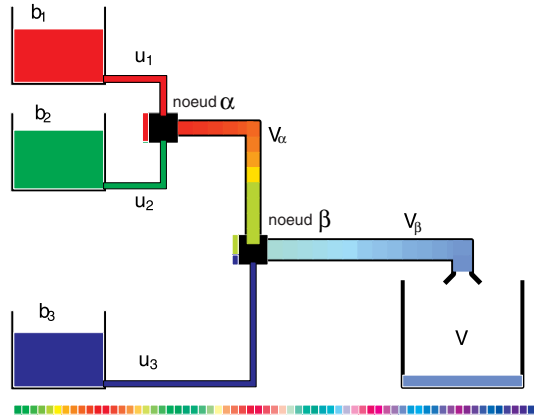


FIGURE 4.6. Mélange de couleurs ; les délais variables non négligeables sont dus aux rétentions  $V_\alpha$  et  $V_\beta$  dans les tuyaux.

couleurs pures, il convient d'obtenir dans le bac de sortie un mélange de couleur et quantité fixées à l'avance. Du fait que les volumes des tuyaux sont importants des retards apparaissent. On suppose ici les écoulements pistons dans les tuyaux  $\alpha$  et  $\beta$ . Connaissant les quantités de couleurs dans le bac de sortie,  $t \mapsto Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ , il est possible de calculer explicitement les trois commandes  $u = (u_1, u_2, u_3)$  et les profils de couleurs dans les tuyaux  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $Y$  et sa dérivée en temps  $\dot{Y}$ . Les notations sont les suivantes (cf. figure 4.6).

- une couleur (ou composition) est un triplet  $(c_1, c_2, c_3)$  avec  $\forall i = 1, 2, 3 \ 0 \leq c_i \leq 1$  et  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ .
- $b_i = (\delta_{ij})_{j=1,2,3}$  correspond aux couleurs fondamentales des trois bacs d'entrée  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .
- $u = (u_1, u_2, u_3)^T$  : les débits de soutirage des trois bacs d'entrée (la commande).
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0)^T$  : couleur au noeud mélangeur  $\alpha$ .
- $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$  : couleur au noeud mélangeur  $\beta$ .
- $V$  : volume dans le bac de sortie.

- $X = (X_1, X_2, X_3)$  : couleur du bac de sortie.
- $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T = (V.X_1, V.X_2, V.X_3)^T$  les rétentions dans le bac de sortie.  $Y_1, Y_2, Y_3$  sont des fonctions croissantes du temps.
- $V_\alpha$  : volume du tuyau  $\alpha$ .
- $V_\beta$  : volume du tuyau  $\beta$ .

Noter que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1, X_1 + X_2 + X_3 = 1.$$

L'utilisation des équations de bilan couleur par couleur permet de construire  $u$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  à partir de  $Y$ . Supposons que  $t \mapsto \sigma(t) \mapsto Y(\sigma(t))$  est donnée avec  $t \mapsto \sigma(t)$  une fonction croissante différentiable et  $\sigma \mapsto Y_i(\sigma)$  positive, différentiable et strictement croissante pour  $i = 1, 2, 3$ . Les calculs se déroulent en partant de la sortie pour aller vers l'entrée en remontant le sens des fluides. Les étapes sont les suivantes (où  $'$  signifie  $d/d\sigma$ ) :

(1) résoudre (avec, par exemple, une méthode de Newton) l'équation scalaire

$$\sum_{i=1}^3 Y_i(\sigma_\beta) = \sum_{i=1}^3 Y_i(\sigma(t)) + V_\beta$$

avec  $\sigma_\beta$  comme inconnue.

(2) résoudre de même l'équation scalaire

$$Y_1(\sigma_\alpha) + Y_2(\sigma_\alpha) = Y_1(\sigma_\beta) + Y_2(\sigma_\beta) + V_\alpha$$

avec  $\sigma_\alpha$  comme inconnue.

(3) poser

$$\alpha_1(t) = \frac{Y_1'(\sigma_\alpha)}{Y_1'(\sigma_\alpha) + Y_2'(\sigma_\alpha)}, \quad \alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t).$$

et

$$\beta(t) = \left[ \frac{Y'}{V'} \right] (s_\beta)$$

avec  $V = Y_1 + Y_2 + Y_3$ .

(4) poser

$$u_i(t) = \alpha_i(t) (Y_1'(\sigma_\beta) + Y_2'(\sigma_\beta)) V'(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t) \quad i = 1, 2$$

et

$$u_3(t) = V'(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t) - u_1(t) - u_2(t)$$

Supposons maintenant que nous ayons à produire une série de mélanges de couleurs différentes définies par  $Q^a = (Q_1^a, Q_2^a, Q_3^a)$ ,  $Q^b = (Q_1^b, Q_2^b, Q_3^b)$ ,  $Q^c, \dots$  sans possibilité de purger les tuyaux  $\alpha$  et  $\beta$  entre chaque mélange. Il suffit de définir une courbe croissante pour chaque composante de  $Y$ ,  $t \mapsto \sigma \mapsto Y_i$  comme sur la figure 4.7. La loi horaire  $t \mapsto \sigma(t)$  admet des tangentes horizontales aux instants  $t^a, t^b, t^c, \dots$  pour assurer des transitions douces entre les divers mélanges.

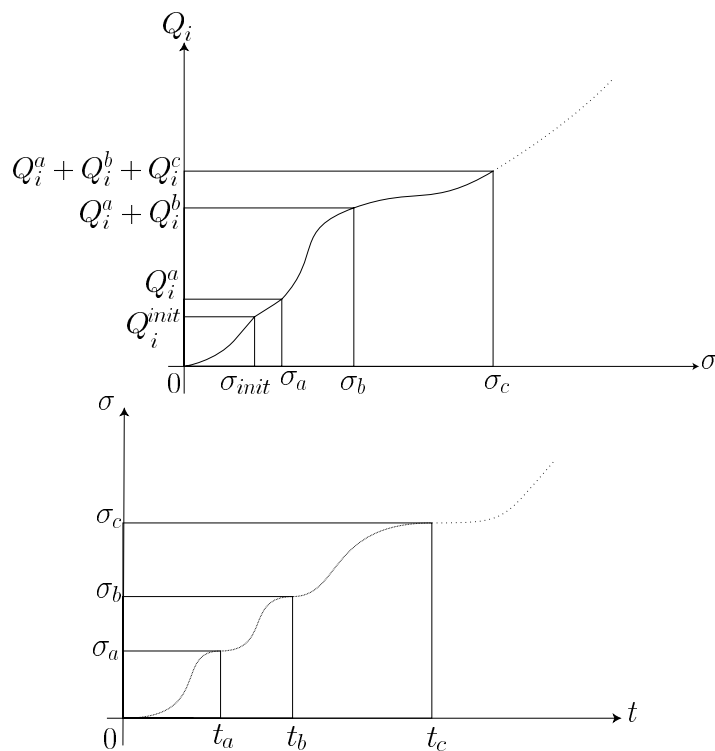


FIGURE 4.7. Planification de la production en définissant une bonne trajectoire pour la « sortie plate »  $t \mapsto Y(t)$ .

## 4.2. Diffusion

Dans la section précédente, nous avons vu comment utiliser les retards (linéaire et non linéaires) pour résoudre la planification de

trajectoires de systèmes avec propagation à vitesse finie et sans diffusion. Nous allons maintenant voir des calculs très différents avec des séries faisant intervenir un nombre infini de dérivées de  $y$ . La fonction  $t \mapsto y(t)$  est alors  $C^\infty$ . Pour assurer la convergence des séries,  $y$  doit être d'un ordre Gevrey fini [105].

**4.2.a. Équation de la chaleur.** Soit l'équation de la chaleur linéaire [54],

$$(4.4) \quad \partial_t \theta(x, t) = \partial_x^2 \theta(x, t), \quad x \in [0, 1]$$

$$(4.5) \quad \partial_x \theta(0, t) = 0$$

$$(4.6) \quad \theta(1, t) = u(t),$$

avec  $\theta(x, t)$  le profil de température et  $u(t)$  la commande. Nous allons voir que

$$y(t) := \theta(0, t)$$

est une « sortie plate ». Comme pour la chaîne pesante nous allons commencer par un calcul formel. Avec la variable de Laplace  $s$ , le système s'écrit

$$s\hat{\theta}(x, s) = \hat{\theta}''(x, s) \quad \text{avec} \quad \hat{\theta}'(0, s) = 0, \quad \hat{\theta}(1, s) = \hat{u}(s)$$

(où ' signifie  $\partial_x$  et  $\hat{\phantom{x}}$  transformée de Laplace). La solution est clairement  $\hat{\theta}(x, s) = \cosh(x\sqrt{s})\hat{u}(s)/\cosh(\sqrt{s})$ . Comme  $\hat{\theta}(0, s) = \hat{u}(s)/\cosh(\sqrt{s})$ , nous avons

$$\hat{u}(s) = \cosh(\sqrt{s}) \hat{y}(s) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}(x, s) = \cosh(x\sqrt{s}) \hat{y}(s).$$

Puisque  $\cosh \sqrt{s} = \sum_{i=0}^{+\infty} s^i / (2i)!$ , nous avons formellement

$$(4.7) \quad \theta(x, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x^{2i} \frac{y^{(i)}(t)}{(2i)!}$$

$$(4.8) \quad u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{y^{(i)}(t)}{(2i)!}.$$

Noter que ces calculs sont connus depuis longtemps (voir [124, pp. 588 and 594] ou encore [38]). Ils sont à l'origine des fonctions Gevrey-2, fonctions  $C^\infty$  telles que les séries ci-dessus convergent.

Regardons un peu ces questions de convergence. D'un coté,  $t \mapsto y(t)$  doit être une fonction régulière telle que

$$\exists K, M > 0, \quad \forall i \geq 0, \forall t \in [t_0, t_1], \quad |y^{(i)}(t)| \leq M(Ki)^{2i}$$

pour que les séries (4.7)-(4.8) convergent. D'un autre coté,  $t \mapsto y(t)$  ne peut pas être analytique partout, si l'on souhaite utiliser ces séries pour aller d'un profil vers une autre. En effet si le système est à piloter d'un profil initial  $\theta(x, t_0) = \alpha_0(x)$  en  $t_0$  au profil final  $\theta(x, t_1) = \alpha_1(x)$  en  $t_1$ , l'équation (4.4) implique que

$$\forall t \in [0, 1], \forall i \geq 0, \quad y^{(i)}(t) = \partial_t^i \theta(0, t) = \partial_x^{2i} \theta(0, t),$$

et en particulier

$$\forall i \geq 0, \quad y^{(i)}(t_0) = \partial_x^{2i} \alpha_0(0) \quad \text{et} \quad y^{(i)}(t_1) = \partial_x^{2i} \alpha_1(1).$$

Si, par exemple  $\alpha_0(x) = c$  pour tout  $x \in [0, 1]$  (i.e., profil uniforme), alors  $y(t_0) = c$  et  $y^{(i)}(t_0) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ , ce qui implique  $y(t) = c$  pour tout  $t$  si  $f$  est analytique. Il est alors impossible avec une telle classe de fonctions de générer des trajectoires autre que  $\theta \equiv c$ .

Les fonctions  $t \in [t_0, t_1] \mapsto y(t)$  qui vérifient

$$\exists K, M > 0, \quad \forall i \geq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad |y^{(i)}(t)| \leq M(Ki)^{\sigma i}$$

sont connues sous le nom de fonction Gevrey d'ordre  $\sigma$  [103] (elles sont aussi reliées aux fonctions de classe  $S$  [41]). Les fonctions analytiques sont les fonctions Gevrey d'ordre  $\leq 1$ . Pour tout  $\sigma > 1$ , il existe une fonction d'ordre Gevrey  $\sigma$  à support compact sans être nulle. Citons, comme prototype, la fonction  $\Delta_\sigma$  en forme de cloche de support  $[0, 1]$  et définie par

$$\Delta_\sigma(t) = \exp(-1/(t(1-t))^{1/(\sigma-1)}) \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

Enfin la classe des fonctions Gevrey  $\sigma \geq 1$  est stable par addition, multiplication, composition, dérivation et intégration.

Ainsi pour la planification de trajectoires de l'équation de la chaleur, nous avons besoin de fonctions Gevrey d'ordre  $> 1, \leq 2$  pour la convergence des séries et dont les séries de Taylor en  $t_0$  et  $t_1$  sont imposées par les profils initiaux et finaux. Avec de telles fonctions nous pouvons calculer avec (4.7), la commande en boucle ouverte qui assure la transition d'un profil vers un autre.



Par exemple, la figure 4.8 correspond au passage de  $\theta = 0$  en  $t = 0$  à  $\theta = 1$  en  $t = 1$  avec la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 1 \\ \frac{\int_0^t \Delta_2(\tau) d\tau}{\int_0^1 \Delta_2} & \text{si } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

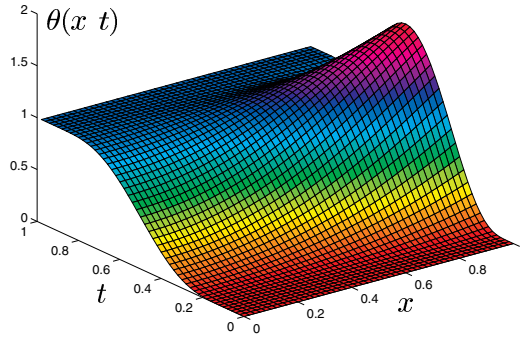


FIGURE 4.8. Équation de la chaleur ; profil de température entre deux états stationnaires  $t \in [0, 1]$

Suite à une discussion avec Jean-Pierre Ramis en octobre 1997, des essais numériques indiquent que les calculs peuvent également être conduits avec des fonctions d'ordre Gevrey  $> 2$ . Les séries divergent alors mais une sommation aux plus petits termes (voir [105]) donne des résultats numériques très encourageants. Les commandes semblent plus douces qu'avec des séries convergentes. Ces premiers calculs ont été confirmés par la suite dans [72, 73] sur équations de convection/diffusion 1D avec des termes sources non-linéaires.

#### 4.2.b. Réacteur chimique tubulaire (convection/diffusion)

Nous reprenons ici [37, 114]. La seule différence vient du fait que le système est vectoriel et les coefficients sont des fonctions de l'abscisse  $z$ . La convergence des séries est encore assurée bien que moins

évidente que pour l'équation de la chaleur. Le réacteur tubulaire est

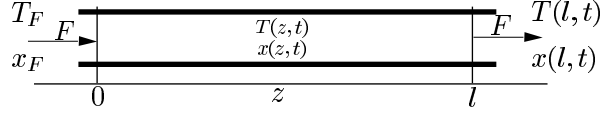


FIGURE 4.9. Réacteur tubulaire à parois adiabatiques

uniquement piloté par les flux de matière et d'énergie à l'entrée. Il est possible de paramétrer les trajectoires avec la concentration et la température en sortie  $x(l, t)$  et  $T(l, t)$ .

Un premier modèle, linéarisé autour d'un régime stationnaire est de la forme (convection-diffusion) :

$$(4.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x(z, t) \\ T(z, t) \end{bmatrix} = \Gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{bmatrix} x(z, t) \\ T(z, t) \end{bmatrix} - v \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} x(z, t) \\ T(z, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_x & -r_T \\ \alpha r_x & \alpha r_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(z, t) \\ T(z, t) \end{bmatrix},$$

pour  $z \in [0, l]$ , avec les conditions aux bords

$$v \begin{bmatrix} x(0, t) \\ T(0, t) \end{bmatrix} - \Gamma \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} x \\ T \end{bmatrix} \Big|_{0,t} = \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} x \\ T \end{bmatrix} \Big|_{l,t} = 0.$$

Le système est piloté via les flux totaux  $u_x$  et  $u_T$  à l'entrée du réacteur ( $z = 0$ ). Les flux de diffusion sont nuls à la sortie du réacteur ( $z = l$ ). La vitesse de l'écoulement est  $v$ . La matrice de diffusion est  $\Gamma$ ;  $\alpha$  est proportionnel à l'enthalpie de réaction. Les dérivées partielles de la cinétique  $r(x, T)$  par rapport à  $x$  et  $T$  sont notées  $r_x$  et  $r_T$ . Il est possible de conduire les calculs avec  $\Gamma$ ,  $\alpha$ ,  $r_x$  et  $r_T$  fonctions analytiques en  $x$ , et  $v$  Gevrey 2 en temps : les récurrences qui suivent sont alors plus complexes mais les séries convergent sous les mêmes hypothèses (cf. [54]). Pour simplifier nous présentons les calculs en supposant  $v$ ,  $\Gamma$ ,  $\alpha$ ,  $r_x$  et  $r_T$  constants.

Les concentration et température,  $x(l, t)$  et  $T(l, t)$ , à la sortie du réacteur forment une sortie plate. Notons  $y(t)$  le vecteur  $[x(l, t), T(l, t)]'$ .

En effet considérons un développement en série de puissances de  $(z - l)$  :

$$\begin{bmatrix} x \\ T \end{bmatrix} (z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z - l)^i}{i!} a_i(t).$$

où les  $a_i$  sont des vecteurs de dimension 2. Ainsi

$$a_0(t) = y(t),$$

et la condition au bord  $z = l$  donne

$$a_1(t) = 0.$$

L'équation (4.9) impose après identification terme à terme la récurrence suivante :

$$(4.10) \quad a_{i+2} = \Gamma^{-1} \left[ \frac{da_i}{dt} + va_{i+1} + Ra_i \right], \quad i > 0,$$

avec

$$R = \begin{bmatrix} r_x & r_T \\ -\alpha r_x & -\alpha r_T \end{bmatrix}.$$

Ainsi  $a_i$  s'exprime en fonction de  $y$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre<sup>(2)</sup>  $E(i/2)$ .

Formellement la commande est obtenue en évaluant pour  $z = 0$  les séries donnant  $x$ ,  $T$ ,  $\partial x / \partial z$  et  $\partial T / \partial z$  :

$$\begin{bmatrix} x \\ T \end{bmatrix} (0, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-l)^i}{i!} a_i(t)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} x \\ T \end{bmatrix} (0, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-l)^i}{i!} a_{i+1}(t).$$

Ainsi

$$(4.11) \quad \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-l)^i}{i!} (va_i - \Gamma a_{i+1}).$$

Les profils  $x$  et  $T$  ainsi que le contrôle  $u(t)$  dépendent de  $y$  et d'un nombre infini de ses dérivées en temps.

Les développements précédents sont formels. Ils doivent être complétés par l'analyse de la convergence des séries. La classe des fonctions  $y$  pour laquelle ces séries admettent un rayon de convergence

---

<sup>(2)</sup> $E(i/2)$  est la partie entière de  $i/2$ .

non nul est comme pour l'équation de la chaleur, celle des fonctions d'ordre Gevrey  $\leq 2$ .

**4.2.c. Poutre en flexion (Euler-Bernoulli).** Nous reprenons [2, 36]. Ici le coté calcul symbolique est particulièrement important.

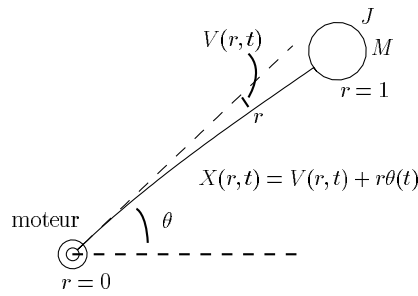


FIGURE 4.10. Une poutre flexible en rotation autour d'un axe

Nous ne développerons pas le cadre formel avec le calcul opérationnel de Mikusiński. Pour cela nous renvoyons à [36]. Nous allons uniquement présenter les calculs symboliques qui consistent comme toujours à remplacer la dérivée en temps par la multiplication par  $s$ . Le cadre formel donne un sens précis aux calculs que nous allons faire.

Les équations de l'élasticité linéaire conduisent au modèle 1D suivant

$$\partial_{tt}X = -\partial_{xxxx}X$$

$$X(0,t) = 0, \quad \partial_x X(0,t) = \theta(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = u(t) + k\partial_{xx}X(0,t)$$

$$\partial_{xx}X(1,t) = -\lambda\partial_{tt}X(1,t)$$

$$\partial_{xxx}X(1,t) = \mu\partial_{tt}X(1,t)$$

où la commande est le couple du moteur  $u$ ,  $X(r,t)$  est le profil de la poutre,  $k$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des paramètres positifs liés aux inerties du moteur et de la masse en  $r=1$  ( $t$  et  $r$  sont en échelles réduites sans dimension).

Nous allons démontrer que formellement la solution générale de ce système s'exprime à l'aide de  $y$  une fonction scalaire arbitraire  $C^\infty$

(d'ordre Gevrey  $\leq 2$  pour la convergence) :

$$(4.12) \quad X(x, t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n y^{(2n)}(t)}{(4n)!} P_n(x) + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n y^{(2n+2)}(t)}{(4n+4)!} Q_n(x)$$

avec ( $i = \sqrt{-1}$ ,  $\Re$  et  $\Im$  signifient partie réelle et partie imaginaire, respectivement)

$$P_n(x) = \frac{x^{4n+1}}{2(4n+1)} + \frac{(\Im - \Re)(1-x+i)^{4n+1}}{2(4n+1)} + \mu \Im(1-x+i)^{4n}$$

et

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{\lambda \mu}{2} (4n+4)(4n+3)(4n+2) ((\Im - \Re)(1-x+i)^{4n+1} - x^{4n+1}) \\ &\quad - \lambda(4n+4)(4n+3)\Re(1-x+i)^{4n+2}. \end{aligned}$$

Noter que les autres quantités  $\theta$  et  $u$  se déduisent sans difficulté de la série (4.12). Il suffit de dériver terme à terme.

Nous allons uniquement montrer la formule pour  $\lambda = \mu = 0$  (pas de masse en  $r = 1$ ,  $M = J = 0$ ). La méthode reste la même dans le cas général. La question est alors la suivante : d'où vient la série

$$(4.13) \quad X(x, t) = \sum_{n \geq 0} \frac{y^{(2n)}(t)(-1)^n}{(4n)!} \pi_n(x)$$

avec

$$\pi_n(x) = \frac{x^{4n+1}}{2(4n+1)} + \frac{(\Im - \Re)(1-x+i)^{4n+1}}{2(4n+1)}.$$

Avec la variable de Laplace  $s$ , nous avons le système différentiel ordinaire

$$X^{(4)} = -s^2 X$$

où

$$X(0) = 0, \quad X^{(2)}(1) = 0, \quad X^{(3)}(1) = 0.$$

Les dérivées portent sur l'espace et  $s$  est ici un paramètre. La solution générale de ce système dépend d'une constante arbitraire, i.e., d'une

fonction arbitraire de  $s$ , puisque nous n'avons que 3 conditions aux limites. Avec les quatre solutions élémentaires suivantes

$$\begin{aligned} C_+(x) &= (\cosh((1-x)\sqrt{s}\xi) + \cosh((1-x)\sqrt{s}/\xi))/2 \\ C_-(x) &= (\cosh((1-x)\sqrt{s}\xi) - \cosh((1-x)\sqrt{s}/\xi))/(2i) \\ S_+(x) &= (i \sinh((1-x)\sqrt{s}\xi) + \sinh((1-x)\sqrt{s}/\xi))/(2\xi\sqrt{s}) \\ S_-(x) &= \xi(i \sinh((1-x)\sqrt{s}\xi) - \sinh((1-x)\sqrt{s}/\xi))/(2\sqrt{s}) \end{aligned}$$

où  $\xi = \exp(i\pi/4)$ ,  $X$  s'écrit

$$X(x) = aC_+(x) + bC_-(x) + cS_+(x) + dS_-(x).$$

Les trois conditions aux limites donnent trois équations reliant les quantités  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  :

$$aC_+(0) + bC_-(0) + cS_+(0) + dS_-(0) = 0, \quad sb = 0, \quad sc = 0.$$

Ainsi il nous reste une seule contrainte entre les deux quantités  $a$  et  $d$

$$aC_+(0) + dS_-(0) = 0.$$

Comme

$$C_+(0) = \Re(\cosh(\xi\sqrt{s})), \quad S_-(0) = \Im(\xi \sinh(\xi\sqrt{s}/\sqrt{s}))$$

sont des fonctions entières de  $s$  très similaires aux fonctions  $\cosh(\sqrt{s})$  et  $\sinh \sqrt{s}/\sqrt{s}$ , nous pouvons leur associer des opérateurs algébriquement indépendants qui commutent

$$\delta_+ = C_+(0), \quad \delta_- = S_-(0)$$

(cf. le calcul opérationnel de Mikusiński) (ce sont aussi des ultra-distributions définies comme le dual des fonctions d'ordre Gevrey  $\leq 2$  à support compact, voir [41]). Nous avons donc un module engendré par les deux éléments  $(a, d)$  vérifiant l'équation  $\delta_+a + \delta_-d = 0$ . C'est un  $\mathbb{R}[\delta_+, \delta_-]$ -module. Ce module n'est pas libre. En revanche, il est  $\delta_+$ -libre [77]. En effet

$$a = \delta_-y, \quad d = -\delta_+y$$

avec  $y = -\delta_+^{-1}d$ .

La quantité  $y$  sert ici de sortie plate. En effet nous avons

$$X(x) = (S_-(0)C_+(x) - S_-(x)C_+(0))y.$$

Des calculs un peu fastidieux utilisant la trigonométrie hyperbolique conduisent alors à la formule

$$X(x) = -\frac{1}{2}[S_-(x) + \Im(S_-(1-x+i))]y.$$

Un simple développement en série de la fonction entière  $S_-$  donne la formule (4.13).

La quantité  $y$  qui intervient ici n'a pas de sens physique direct (le module n'était pas libre). Cependant, nous conjecturons que le  $y$  choisi ici doit s'exprimer avec des intégrales en espace de  $X$  (sorte de centre de flexion).

**4.2.d. Flexion non linéaire.** Sur un plan formel, il est possible d'effectuer des calculs similaires au linéaire. Considérons la structure flexible déjà étudiée dans [53]. Les équations sont les suivantes

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u(x, t) &= \rho \omega^2(t) u(x, t) - EI \partial_x^4 u(x, t), \quad x \in [0, 1] \\ \dot{\omega}(t) &= \frac{\Gamma_3(t) - 2\omega(t) \langle u, \partial_t u \rangle(t)}{I_d + \langle u, u \rangle(t)} \end{aligned}$$

avec comme conditions aux limites

$$u(0, t) = \partial_x u(0, t) = 0, \quad \partial_x^2 u(1, t) = \Gamma_1(t), \quad \partial_x^3 u(1, t) = \Gamma_2(t).$$

$\rho, EI, I_d$  sont des constantes physiques positives,  $u(x, t)$  est la déformation de la poutre,  $\omega(t)$  la vitesse angulaire, et

$$\langle f, g \rangle(t) := \int_0^1 \rho f(x, t) g(x, t) dx.$$

Nous avons 3 commandes  $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t)$ . Formellement

$$y(t) := (\partial_x^2 u(0, t), \partial_x^3 u(0, t), \omega(t))$$

est une « sortie plate ». En effet, considérons le système sous la forme de Cauchy-Kovalevsky suivante

$$EI \partial_x^4 u(x, t) = \rho y_3^2(t) u(x, t) - \rho \partial_t^2 u(x, t) \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ \partial_x u(0, t) = 0 \\ \partial_x^2 u(0, t) = y_1(t) \\ \partial_x^3 u(0, t) = y_2(t). \end{cases}$$

Alors, si on pose  $u(x, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i(t)x^i/i!$ , les équations ci-dessus donnent

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = y_1, \quad a_3 = y_2,$$

et la récurrence  $\forall i \geq 0$ ,  $EIa_{i+4} = \rho y_3^2 a_i - \rho \ddot{a}_i$ . Ainsi pour  $i \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} a_{4i} &= 0 & a_{4i+2} &= \frac{\rho}{EI} (y_3^2 a_{4i-2} - \ddot{a}_{4i-2}) \\ a_{4i+1} &= 0 & a_{4i+3} &= \frac{\rho}{EI} (y_3^2 a_{4i-1} - \ddot{a}_{4i-1}). \end{aligned}$$

Il s'agit d'une correspondance (formelle) entre les solutions du système et les fonctions arbitraires  $t \mapsto y(t)$  : ce système est formellement plat.

Pour des calculs similaires avec des simulations numériques sur un modèle non-linéaire de poutre en flexion voir [88].

## Chapitre 5. Catalogue de systèmes plats

Nous donnons ici une liste non exhaustive de systèmes plats rencontrés dans les applications. Nous renvoyons à [57] pour des applications aux systèmes mécaniques.

### 5.1. Robots complètement commandés

La dynamique d'un système mécanique holonome avec autant de commandes que de degrés de liberté géométrique est

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = M(q)u + D(q, \dot{q}),$$

avec  $q$  les variables de configuration,  $L(q, \dot{q})$  le lagrangien (énergie cinétique — énergie potentielle),  $\dim(u) = \dim(q)$  et  $M(q)$  inversible. Il admet  $q$  comme sortie plate — même si  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$  est singulière — : en effet,  $u$  s'exprime en fonction de  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  par les formules du couple calculé

$$u = M(q)^{-1} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - D(q, \dot{q}) \right).$$



## 5.2. Systèmes mécaniques non holonomes

De nombreux robots mobiles avec contraintes de roulement sans glissement (contraintes non holonomes), comme ceux considérés dans [11, 82], sont plats. Nous considérons ici les systèmes du type voiture avec remorques [113, 30, 112, 25]. L'invariance par le groupe des déplacements du plan et l'homogénéité de degré 1 par rapport à la commande  $u$  rendent très naturelles les dérivations avec des formules de Frénet.

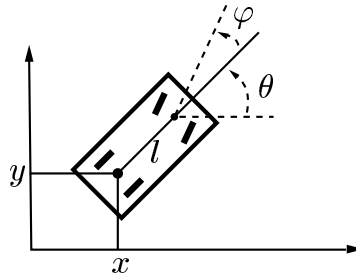


FIGURE 5.1. Cinématique d'une voiture

**5.2.a. Voiture.** Les conditions de roulement sans glissement sont les suivantes

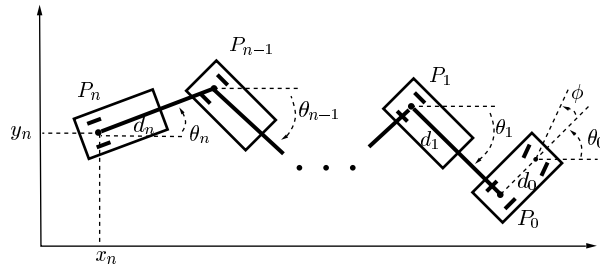
$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v}{l} \tan \varphi \end{cases}$$

avec  $v$  la vitesse et  $\varphi$  l'angle de braquage comme commande,  $l$  la distance entre les deux essieux.

La sortie plate est la position cartésienne de la voiture  $P = (x, y)$  :

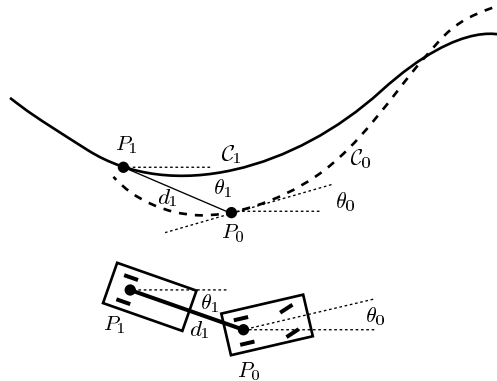
$$v = \pm \|\dot{P}\|, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \dot{P}/v, \quad \tan \varphi = l \det(\ddot{P}\dot{P})/v\sqrt{|v|}.$$

Ces formules disent simplement que  $\theta$  est l'angle de la tangente à la courbe suivie par  $P$  et  $\tan \varphi/l$  sa courbure.


 FIGURE 5.2. Voiture avec  $n$  remorques

### 5.2.b. Voiture avec $n$ remorques à attaches centrées

Le système de la figure 5.2 admet comme sortie plate les coordonnées cartésiennes de la dernière remorque  $P_n = (x_n, y_n)$  [112]. Pour montrer cela, il n'est pas utile d'écrire les équations d'état du système avec comme commandes la vitesse de la voiture et son angle de braquage. Il suffit de faire un dessin. Prenons le cas  $n = 1$  (figure 5.3), le cas général s'en déduit aussitôt.


 FIGURE 5.3. Voiture avec une attache centrée, la sortie plate est  $P_1$ 

Supposons donnée la courbe lisse  $C_1$  suivie par  $P_1$ . Prenons  $s_1 \rightarrow P_1(s_1)$  un paramétrage naturel de  $C_1$ . Alors le roulement sans glissement de la remorque implique que  $P_0 = P_1 + d_1 \vec{\tau}_1$  ( $\vec{\tau}_1$ , tangent

unitaire à  $\mathcal{C}_1$ ). En dérivant par rapport à  $s_1$ , on obtient

$$\frac{d}{ds_1} P_0 = \vec{\tau}_1 + d_1 \kappa_1 \vec{\nu}_1$$

avec  $\vec{\nu}_1$ , normale unitaire à  $\mathcal{C}_1$  et  $\kappa_1$  sa courbure. Mais  $\frac{d}{ds_1} P_0 \neq 0$  est le vecteur tangent à la courbe  $\mathcal{C}_0$  suivie par  $P_0$ . Donc

$$\tan(\theta_0 - \theta_1) = d_1 \kappa_1, \quad \vec{\tau}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (d_1 \kappa_1)^2}} (\vec{\tau}_1 + d_1 \kappa_1 \vec{\nu}_1).$$

En dérivant par rapport à  $s_0$ ,  $ds_0 = \sqrt{1 + (d_1 \kappa_1)^2} ds_1$ , on obtient l'angle de braquage  $\phi$  :

$$\tan \phi = d_0 \kappa_0 = d_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (d_1 \kappa_1)^2}} \left( \kappa_1 + \frac{d_1}{1 + (d_1 \kappa_1)^2} \frac{d\kappa_1}{ds_1} \right).$$

La vitesse  $v$  de la voiture est aussi donnée par

$$v(t) = \sqrt{1 + d_1^2 \kappa_1^2(s_1(t))} \dot{s}_1(t)$$

pour toute loi horaire  $C^1$ ,  $t \rightarrow s_1(t)$ . Noter que dans ces calculs,  $\phi$  et  $\theta_0 - \theta_1$  restent toujours entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ .

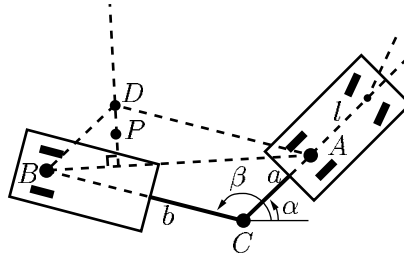


FIGURE 5.4. Voiture avec une remorque à attache décentrée

**5.2.c. Voiture avec une remorque à attache déportée.** Ici la difficulté vient du fait que l'attache le longueur  $b$  de la remorque n'est plus fixée sur l'essieu arrière de la voiture mais à une certaine distance  $a$  [113]. Nous supposons l'attache en arrière de l'essieu. Il est possible de faire les mêmes calculs avec une attache devant comme sur certains

poids lourds. Les conditions de roulement sans glissement donnent la forme d'état suivante

$$(5.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \cos \alpha v \\ \dot{y} = \sin \alpha v \\ \dot{\alpha} = \frac{1}{l} \tan \varphi v \\ \dot{\beta} = \frac{1}{b} \left( \frac{a}{l} \tan \varphi \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) \right) v. \end{cases}$$

Les notations sont sur la figure 5.4. Les commandes sont la vitesse  $v$  de la voiture et l'angle de braquage  $\varphi$ .

Le système (5.1) est plat avec comme sortie plate

$$(5.2) \quad \begin{aligned} y_1 &= x + b \cos \beta + L(\alpha - \beta) \frac{b \sin \beta - a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \beta)}} \\ y_2 &= y + b \sin \beta + L(\alpha - \beta) \frac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha - \beta)}} \end{aligned}$$

où

$$(5.3) \quad L(\alpha - \beta) = ab \int_{\pi}^{2\pi + \alpha - \beta} \frac{\cos \sigma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \sigma}} d\sigma.$$

Noter que  $(y_1, y_2)$  sont les coordonnées cartésiennes du point  $P$  de la figure 5.4.

Pour trouver ces sorties plates, il convient d'utiliser la condition nécessaire et suffisante (théorème 3.24) pour les systèmes sans dérive à deux commandes. Les calculs de  $y_1$  et  $y_2$  se simplifient en utilisant l'invariance du système par rapport au groupe des déplacements du plan.

Comme le montre la figure 5.5, le vecteur tangent  $\vec{\tau}$  à la courbe suivie par  $P$  est parallèle à la droite  $AB$ . Sa courbure  $\kappa$  est une fonction de  $\delta = \alpha - \beta$  :

$$(5.4) \quad \kappa = K(\delta) = \frac{\sin \delta}{\cos \delta \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta} - L(\delta) \sin \delta}$$

Noter que l'invariance par rapport au groupe des déplacements, implique que  $\kappa$  soit une fonction de  $\alpha - \beta$  uniquement. La fonction  $K$  est une bijection croissante de  $] \gamma, 2\pi - \gamma[$  vers  $\mathbb{R}$ . La constante  $\gamma \in [0, \pi/2]$

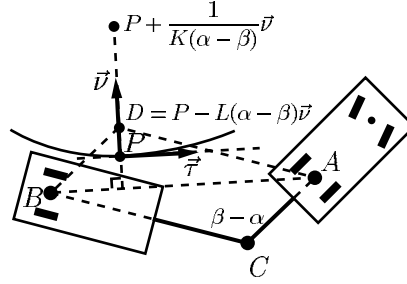


FIGURE 5.5. Construction géométrique avec les formules de Frénet

est définie par l'équation implicite suivante

$$\cos \gamma \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = ab \sin \gamma \int_{\pi}^{\gamma} \frac{\cos \sigma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \sigma}} d\sigma.$$

Pour  $a = 0$ ,  $\gamma = \pi/2$  et  $P$  coïncide avec  $B$ .

Des calculs simples montrent que  $D$  est donné par  $D = P - L(\delta)\vec{\nu}$  avec  $\vec{\nu}$  le vecteur normal unitaire. Ainsi  $(x, y, \alpha, \beta)$  est une fonction de  $(P, \vec{\tau}, \kappa)$ . L'angle de braquage  $\varphi$  dépend donc de  $\kappa$  et  $d\kappa/ds$  où  $s$  est la longueur d'arc de la courbe suivie par  $P$ . La vitesse  $v$  de la voiture s'exprime en fonction de  $\kappa$ ,  $d\kappa/ds$  et  $\dot{s}$ .

Une application du théorème 3.24 montre que la voiture avec plus de deux remorques à attaches décentrées n'est pas un système plat.

**5.2.d. Systèmes mécaniques non holonomes complètement commandés.** Commençons par l'exemple d'une pièce de monnaie qui roule sans glisser sur un plan.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \lambda \sin \varphi + u_1 \cos \varphi \\ \ddot{y} &= -\lambda \cos \varphi + u_1 \sin \varphi \\ \ddot{\varphi} &= u_2 \\ \dot{x} \sin \varphi &= \dot{y} \cos \varphi \end{aligned}$$

où  $x, y, \varphi$  sont les variables de configuration,  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $\dot{x} \sin \varphi = \dot{y} \cos \varphi$ ,  $u_1$  et  $u_2$  sont les

deux commandes. Une sortie plate est  $(x, y)$  : avec une paramétrisation en longueur d'arc  $s$  de la courbe  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , nous avons

$$\cos \varphi = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \varphi = \frac{dy}{ds}, \quad u_1 = \dot{s}, \quad u_2 = \kappa(s) \ddot{s} + \frac{d\kappa}{ds} \dot{s}^2,$$

où  $\kappa$  est la courbure. Ces formules restent valables même si  $u_1 = u_2 = 0$ .

Cet exemple est représentatif d'un système mécanique soumis à  $m$  contraintes non holonomes et avec  $n - m$  commandes (des forces) indépendantes des efforts de liaisons ( $n$  est la dimension de la variété de configuration). Ces systèmes sont, par définition, les systèmes non holonomes complètement commandés (voir [11] pour d'autres exemples). Il est alors facile de montrer qu'un système non holonome complètement commandé et dont les liaisons non holonomes sont plates est automatiquement plat, les sorties plates étant celles de ses liaisons non holonomes.

Ainsi, à cause du théorème 3.25, les systèmes mécaniques complètement commandés et soumis à deux contraintes non holonomes sont automatiquement plats. Les liaisons non holonomes de la pièce de monnaie (p. 4), de la sphère qui roule (p. 96) et de la bicyclette (p. 330) décrites dans le traité classique russe [83] sont plates. Les systèmes non holonomes complètement commandés qui s'en déduisent restent donc plats.

### 5.3. Systèmes pendulaires

Les exemples qui suivent sont des systèmes mécaniques holonomes sous-actionnés, c'est-à-dire avec moins de commandes que de degrés de liberté géométrique.

**5.3.a. Pendule inversé sur un rail.** Un pendule inversé sur un rail admet la dynamique suivante (approximation des petits angles)

$$\frac{d^2}{dt^2}(D + l\theta) = g\theta, \quad M \frac{d^2}{dt^2}D = -mg\theta + \mathcal{F}$$

où la commande est la force  $\mathcal{F}$  appliquée au chariot et  $l$  est la distance du centre d'oscillation à l'axe de rotation du pendule. Il est clair que la sortie plate est  $y = D + l\theta$ . En effet

$$\theta = \ddot{y}/g, \quad D = y - l\ddot{y}/g.$$

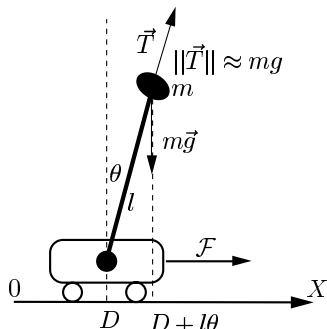


FIGURE 5.6. Pendule inversé sur un rail

Un bouclage grand gain sur le chariot ( $u$  est la consigne de position du chariot)

$$\mathcal{F} = -Mk_1\dot{D} - Mk_2(D - u)$$

avec  $k_1 \approx 10/\tau$ ,  $k_2 \approx 10/\tau^2$  où  $\tau = \sqrt{l/g}$  est le temps caractéristique du pendule, permet d'accélérer par la commande le porteur. On obtient ainsi une commande hiérarchisée avec un asservissement rapide en position du porteur et une stabilisation lente du pendule à partir du modèle lent

$$\frac{d^2}{dt^2}(y) = g(y - u)/l = \frac{y - u}{\tau^2}.$$

Le simple bouclage

$$u = -y - \tau^2\ddot{y}_r(t) + \tau(\dot{y} - \dot{y}_r(t)) + (y - y_r(t))$$

assurent le suivi d'une trajectoire de référence  $t \mapsto y_r(t)$  pour l'abscisse du centre d'oscillation du pendule.

Sans l'approximation des petits angles, le système n'est plus plat.

### 5.3.b. Le double pendule du musée de la Villette

Cet exemple fait partie du parc des expositions permanentes du musée des sciences et de l'industrie de la Villette, section mathématiques. Il s'agit de deux barres homogènes de longueur  $l$  l'une au dessus de l'autre, le tout sur un chariot linéaire actionné par un moteur. Avec l'abscisse du chariot  $D$  comme commande (commande grand

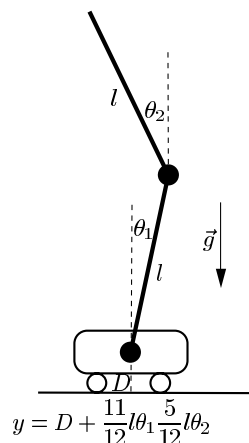


FIGURE 5.7. Le double pendule du musée de la Villette

gain du porteur) les équations de la dynamiques, après approximation des petits angles, sont (après quelques transformations qui font intervenir  $y \dots$ )

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{y^{(2)}}{g} - \frac{ly^{(4)}}{3g^2} \\ \theta_2 &= \frac{y^{(2)}}{g} + \frac{ly^{(4)}}{9g^2} \\ D &= y - \frac{35}{36}l\theta_1 - \frac{7}{12}l\theta_2 \\ &= y - \frac{14ly^{(2)}}{9g} + \frac{7l^2y^{(4)}}{27g^2}.\end{aligned}$$

Comme pour le simple pendule, sans l'approximation des petits angles, ce système n'est pas plat.

**5.3.c. Une infinité de pendules inversés.** Il s'agit du modèle de la chaîne pesante de la figure 4.2 avec la gravité dans l'autre sens. Les équations sont

$$(5.5) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( gz \frac{\partial X}{\partial z} \right) \quad \text{pour } z \in [0, L], \quad X(L, t) = D(t)$$



avec la commande au bord  $D(t)$ , le déplacement du chariot qui se trouve maintenant en bas. La sortie plate est alors en haut et la formule (4.1) s'écrit avec un « temps complexe » :

$$X(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left( y(t + 2\iota\sqrt{z/g} \sin \xi) + y(t - 2\iota\sqrt{z/g} \sin \xi) \right) d\xi$$

avec  $\iota = \sqrt{-1}$ .

Cette relation signifie que, pour toute fonction holomorphe  $\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto y(\zeta)$  dont la restriction à l'axe réel est réel, le champ de déplacement  $X(z, t)$  calculé par l'intégrale ci-dessus est réel et vérifie identiquement

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( gz \frac{\partial X}{\partial z} \right).$$

Avec cette formule nous avons la possibilité d'associer à toute fonction holomorphe sur une bande horizontale centrée autour de l'axe des réels et de demi hauteur  $2\sqrt{L/g}$  une trajectoire du système. Cette ensemble de trajectoires est suffisamment riche pour obtenir d'une façon approchée des trajectoires allant d'un état d'équilibre vers un autre. Il suffit par exemple de définir  $y$  par convolution avec un gaussienne ( $\sigma > 0$  donné)

$$y(\mu + w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(\mu - \tau + w)^2/\sigma^2) f(\tau) d\tau$$

avec  $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto f(\tau) \in \mathbb{R}$  mesurable et bornée et de tronquer l'intégrale. Avec une telle construction il est possible de montrer des propriétés de commandabilité approchée pour ce système.

Il est bien connu que le problème de Cauchy associé à (5.5), une équation elliptique, n'est pas bien posé au sens de Hadamard. Physiquement, c'est tout à fait compréhensible. Nous avons vu que la constante de temps d'instabilité d'un pendule inversé de longueur  $l$  est  $\sqrt{l/g}$  : un pendule de longueur infiniment petite est instable d'une façon infiniment rapide. Malgré cela, nous pouvons donner un sens à la planification de trajectoires, bien que le système soit un système mal posé, en construisant explicitement des familles de trajectoires régulières allant d'un état vers un autre (d'une façon approchée, cependant).

**5.3.d. Grues et ponts roulants.** Nous reprenons un exemple traité dans [30]. Les équations de Newton d'une masse  $m$  déplacée par pont roulant sont les suivantes (modèle dans un plan vertical) :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T \sin \theta & x &= R \sin \theta + D \\ m\ddot{z} &= -T \cos \theta + mg & z &= R \cos \theta, \end{aligned}$$

avec  $x, z, \theta$  les variables de configuration,  $T$  la tension du câble d'inertie négligeable et inextensible. Les deux commandes sont  $D$ , la position du chariot et  $R$  la longueur du câble. Ce système est plat avec la position  $(x, z)$  de la charge comme sortie plate. Le rajout d'une seconde dimension horizontale ne change rien : la sortie plate reste la position de la charge. D'autres types de grues ou de ponts roulants correspondant à diverses géométries du système de levage restent également plats, la position de la masse transportée étant la sortie plate (cf. [60, 50]) pour les grues de débarquement de la marine américaine)

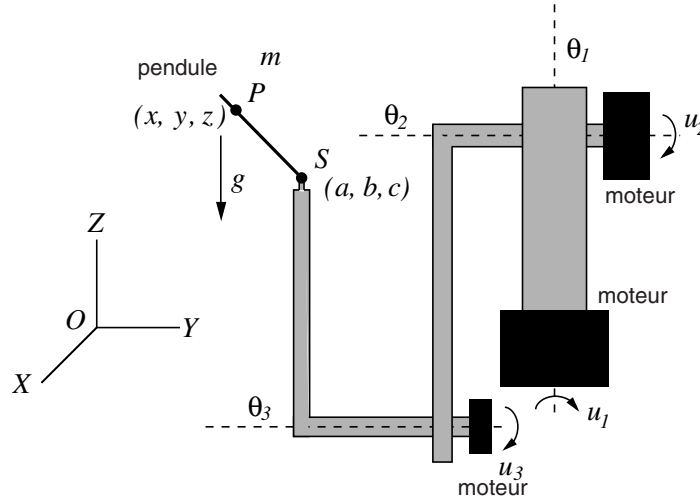


FIGURE 5.8. Le robot  $2k\pi$ .

**5.3.e. Le robot  $2k\pi$ .** C'est un robot 3 axes portant un pendule avec 2 axes, cf. figure 5.8. L'objectif est de retourner le pendule et le maintenir en position instable. Parmi les 5 degrés de liberté, seuls 3 sont

directement commandés par des moteurs (les angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ). En revanche les deux degrés de liberté du pendule ne sont pas directement actionnés.

La position  $P = (x, y, z)$  du centre d'oscillation du pendule (cf. les travaux de Huygens sur les horloges à pendule) est la sortie plate du système.

En effet, les relations entre  $P$  et  $S = (a, b, c)$ , le point de suspension du pendule, sont les suivantes

$$\begin{aligned}(x - a)(\ddot{z} + g) &= \ddot{x}(z - c) \\ (y - b)(\ddot{z} + g) &= \ddot{y}(z - c) \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 &= l^2,\end{aligned}$$

où  $l$  est la distance entre  $S$  et  $P$ . Ces relations viennent simplement des équations de Newton du pendule ponctuel isochrone de même masse  $m$  ( $\vec{T}$  est la tension dans la tige)

$$m\ddot{\vec{P}} = m\vec{g} + \vec{T}$$

de la condition de rotation parfaite sans frottement

$$\vec{T} // \overrightarrow{PS}$$

et de la contrainte de rigidité

$$\|PS\| = l^2.$$

Géométriquement  $S$  est à l'intersection de la sphère de centre  $P$  de rayon  $l$  avec la droite passant par  $P$  et parallèle à  $\vec{P} - \vec{g}$ .

Comme la géométrie du robot implique  $(a, b, c) = \mathcal{T}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  (conversion des coordonnées angulaires en coordonnées cartésiennes), les couples à appliquer aux moteurs s'obtiennent en inversant cette relation algébrique et en dérivant 2 fois de plus. En tout,  $P$  apparaît avec ses dérivées jusqu'à l'ordre 4. Pour plus d'information sur la commande du robot voir [55].

**5.3.f. Solide plan piloté par deux forces.** Soit un corps rigide dans un plan vertical soumis à la gravité et commandé par deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , de directions,  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ , fixes par rapport au solide (voir figure 5.9). Ces forces sont appliquées à des points  $S_1$  et  $S_2$  fixes par rapport au solide. Nous supposons que nous avons effectivement

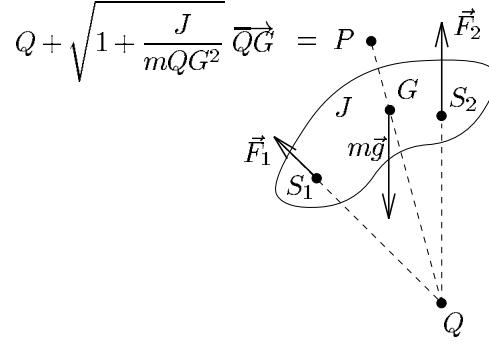


FIGURE 5.9. Un corps solide 2D piloté par deux forces de direction fixes,  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ , par rapport au solide

deux forces indépendantes, i.e., lorsque  $S_1 = S_2$  alors les directions ne sont pas co-linéaires. Enfin le cas où  $S_1 = S_2 = G$  est exclu car alors le système n'est plus commandable, le moment cinétique étant constant.

Soit  $G$  le centre de gravité et  $\theta$  l'orientation du solide. On note  $\vec{k}$  le vecteur orthogonal au plan. Notons  $m$  la masse,  $J$  son inertie par rapport à l'axe parallèle à  $\vec{k}$  passant par  $G$  et  $\vec{g}$  le champ de gravité.

Les équations de la dynamique sont alors (conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique)

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{G}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} \\ J\ddot{\vec{k}} &= \vec{GS}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{GS}_2 \wedge \vec{F}_2. \end{aligned}$$

Comme le montre la figure 5.9, la sortie plate correspond à  $P$  le centre d'oscillation de Huygens lorsque l'axe de rotation est au point d'intersection des deux droites qui supportent les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , le centre de poussée  $Q$  sur la figure 5.9 :

$$P = Q + \sqrt{1 + \frac{J}{ma^2}} \vec{Q}\vec{G}.$$

avec  $a = QG$ . Noter que lorsque les deux droites sont parallèles  $Q$  est rejeté à l'infini et  $P$  coïncide avec  $G$ . Comme pour le pendule du robot  $2k\pi$ , Le point  $P$  est le seul tel que  $\ddot{P} - \vec{g}$  soit co-linéaire à la direction  $PG$ , i.e, à l'orientation  $\theta$ . Avec cette propriété, il est

alors facile de montrer que le système est plat. Certains les exemples traités dans [30, 84, 81, 65]. sont de ce type.

Par exemple l'avion à décollage vertical de [65] d'équation

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -u_1 \sin \theta + \varepsilon u_2 \cos \theta \\ \ddot{z} &= u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - 1 \\ \ddot{\theta} &= u_2.\end{aligned}$$

admet comme sortie plate  $y = (x - \varepsilon \sin \theta, z + \varepsilon \cos \theta)$  où  $\varepsilon \approx 0$  vient du fait que les poussées des réacteurs ne sont pas parfaitement parallèles.

Des prolongement sont possibles pour des corps solides dans l'espace à trois dimension mais avec des symétries. Le pendule de  $2k\pi$  en est un exemple avec une symétrie de révolution. Une autre exemple fort proche avec les mêmes symétries est une fusée ou un missile avec poussée vectorielle. Les équations sont

$$\begin{aligned}m\ddot{\vec{G}} &= \vec{F} + m\vec{g} \\ J \frac{d}{dt}(\vec{b} \wedge \dot{\vec{b}}) &= -\overrightarrow{SG} \wedge \vec{F}\end{aligned}$$

où  $\vec{b} = \overrightarrow{SG}/SG$  (les notations sont sur la figure 5.10). La sortie plate est alors

$$P = S + \sqrt{SG^2 + J/m} \vec{b}.$$

En effet  $\ddot{P} - \vec{g}$  est co-linéaire à la direction  $\vec{b}$  de la fusée.

Notons enfin que la généralisation à la dimension 3 d'espace (sans symétrie) reste un problème ouvert. Nous ne savons pas si un corps solide dans l'espace à trois dimensions contrôlé par l'action de trois forces indépendantes, de directions et de points d'application fixes par rapport au solide, est un système plat.

**5.3.g. Le câble aéro-tracté.** Nous reprenons ici [80] pour ce qui du modèle de dimension finie. Le système illustré sur la figure 5.11 est composé d'un avion en vol circulaire qui tracte un long câble auquel est attaché une charge pesante. Sous certaines conditions, le câble atteint un régime stabilisé où sa forme ne variant plus admet également un mouvement circulaire. Avec des paramètres correctement choisis, il est possible que le rayon de la trajectoire de la charge qui se trouve

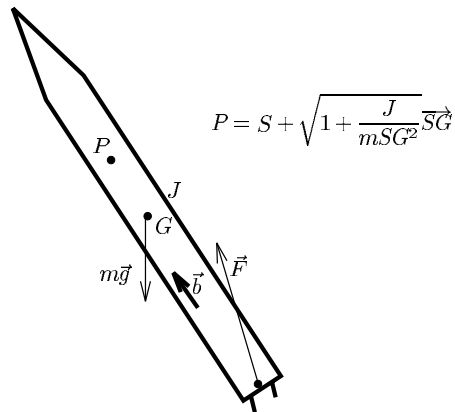


FIGURE 5.10. La fusée et sa sortie plate  $P$

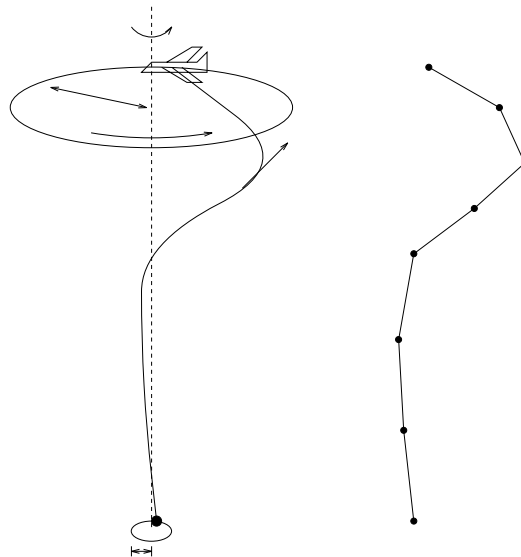


FIGURE 5.11. Le câble aéro-tracté et son approximation

bien en dessous de celle de l'avion soit d'un diamètre nettement inférieur. Un tel système existe en vraie grandeur. Il a été utilisé par l'armée américaine en Amérique du sud pour des parachutages précis à basse altitude (sans utiliser explicitement le fait que le système soit plat).

Le câble peut être vu comme une succession de petits pendules ponctuels connectés les uns aux autres par leur centres de masse. Les forces agissant sur une petit pendule (tension, traînée aérodynamique, poids,...) sont alors concentrées au centre de masse (confondu ici avec son centre d'oscillation). L'avion joue ici le rôle commande comme  $S$  joue le rôle de commande pour le contrôle du pendule porté par le robot  $2k\pi$ .

L'objectif est de générer des trajectoires de transition entre un équilibre relatif et un autre. Ce système est plat avec comme sortie plate la position de la charge. Nous renvoyons à [80] pour des calculs plus détaillés et d'autres références sur le sujet.

Il est cependant possible formellement de considérer le modèle continu du câble. Pour des raisons de simplicité nous ne considérons que le modèle parfait sans frottement avec uniquement la dynamique inertielle et la gravité  $\vec{g}$ . Le câble est décrit à l'instant  $t$  par une courbe  $[0, L] \ni s \mapsto M(s, t) \in \mathbb{R}^3$  paramétrée en longueur d'arc. En notant,  $T(s, t) \in \mathbb{R}$  la tension en  $s$ ,  $\rho$  sa densité linéaire et  $m$  la masse de la charge, les équations de Newton sont :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial M}{\partial s} \right) + \rho \vec{g} & \left\| \frac{\partial M}{\partial s} \right\| &= 1 \\ M(L, t) &= u(t) & T(0, t) \frac{\partial M}{\partial s}(0, t) &= m \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}(0, t) - m \vec{g}. \end{aligned}$$

L'avion est en  $s = L$ . Vue du câble, sa trajectoire  $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^3$  est ponctuelle et considérée ici comme une entrée. La charge ponctuelle de masse  $m$  est en  $s = 0$ . Remarquons que ce système d'équations aux dérivées partielles n'est pas sous forme involutive :  $T$  est défini implicitement par la contrainte de non extensibilité.

Cependant, en prenant  $N(s, t) = \int_0^s M(\sigma, t) d\sigma$  au lieu de  $M(s, t)$  comme variables (transformation de Bäcklund) on a avec les inconnues  $N$  et  $T$  le système suivant :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} &= T(s, t) \frac{\partial^2 N}{\partial s^2}(s, t) - T(0, t) \frac{\partial^2 N}{\partial s^2}(0, t) + \rho s \vec{g}, \\ \left\| \frac{\partial N}{\partial s} \right\| &= 1, & \frac{\partial N}{\partial s}(L, t) &= u(t), \\ T(0, t) \frac{\partial^2 N}{\partial s^2}(0, t) &= m \frac{\partial^3 N}{\partial t^2 \partial s}(0, t) - m \vec{g}, & N(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que l'on fixe la trajectoire de la charge  $t \mapsto y(t) = \frac{\partial N}{\partial s}(0, t)$  au lieu de la trajectoire de l'avion. Alors on peut facilement calculer la tension par (nous prenons la valeur positive pour  $T$ )

$$T(s, t) = \left\| \rho \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}(s, t) - (\rho s + m)\vec{g} + m\ddot{y}(t) \right\|.$$

Ainsi on obtient une forme standard de Cauchy-Kovalevsky :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial s^2}(s, t) &= \frac{1}{T(s, t)} \left( \rho \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}(s, t) - (\rho s + m)\vec{g} + m\ddot{y}(t) \right) \\ N(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial s}(0, t) &= y(t). \end{aligned}$$

Pour  $t \mapsto y(t)$  analytique, le système ci-dessus admet une solution analytique en  $s$  autour de 0 dès que  $T(0, t) \neq 0$ , i.e.,  $\ddot{y} \neq \vec{g}$ . Ce développement en série est très similaire aux calculs effectués dans [80] sur un modèle discrétisé avec beaucoup de petits pendules ponctuels. Il n'est pas sûr, compte tenu des calculs sur la chaîne pesante de la figure 4.2, qu'un tel développement soit utilisable en pratique sauf s'il est complété par des techniques de séries divergentes [105].

#### 5.4. Divers systèmes mécaniques

**5.4.a. Avion classique.** Les modèles représentant des avions conventionnels sont plats dès que l'on néglige certains effets aérodynamiques de faibles amplitudes. La sortie plate est le centre de gravité et l'angle de dérapage. Nous renvoyons à [61] pour une étude détaillée.

**5.4.b. Tige de forage.** La dynamique en torsion d'une tige de forage de quelques kilomètres de longueur peut être représentée par une équation des ondes avec une condition aux limites non linéaire en fond, condition représentative de l'outil qui taille la roche (cf. figure 5.12). Nous avons ainsi comme dynamique :

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \partial_t^2 \theta &= \partial_x^2 \theta, \quad x \in [0, 1] \\ \partial_x \theta(0, t) &= -u(t) \\ \partial_x \theta(1, t) &= -F(\partial_t \theta(1, t)) - \partial_t^2 \theta(1, t) \end{aligned}$$

où  $[0, 1] \ni x \mapsto \theta(x, t)$  est le profil de torsion à l'instant  $t$ ,  $u$  est la commande le couple exercé par un moteur au sommet du train de tiges. Les équations sont normalisées et prennent en compte l'inertie



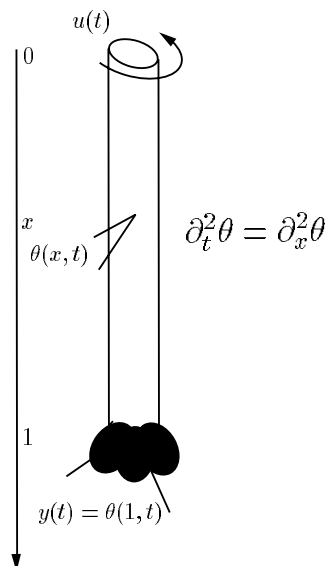


FIGURE 5.12. Tige de forage en torsion

des masses tiges au dessus de l'outil. La loi de comportement de l'outil est donnée par un frottement non linéaire  $F(v)$ . D'autres lois plus complexes sont possibles, le système restant plat dès qu'elles ne dépendent que de l'angle  $y = \theta(1, t)$  de l'outil, la sortie plate du système. Un calcul simple avec les formules de d'Alembert montre que

$$2\theta(x, t) = y(t + 1 - x) + y(t - (1 - x)) + \dot{y}(t + 1 - x) - \dot{y}(t - (1 - x)) + \int_{t-(1-x)}^{t+(1-x)} F(\dot{y}(\tau)) d\tau.$$

**5.4.c. Gamelle d'eau.** Nous reprenons ici les résultats de commandabilité obtenus sur les équations de Saint-Venant linéarisées autour d'un équilibre [95]. La commandabilité du modèle non-linéaire a été démontrée dans [19] avec des techniques très différentes. Il s'agit de transporter horizontalement un fluide dans un récipient. La question est de contrôler les vagues engendrées par les mouvements du récipient et de trouver des profils d'accélération et de freinage pour aller

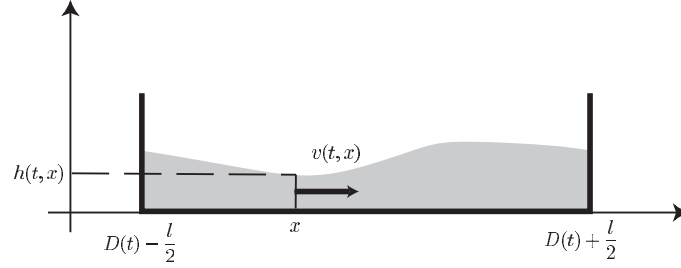


FIGURE 5.13. Fluide parfait dans un récipient se déplaçant horizontalement

d'une position fixe à une autre. Un modèle de commande simple issu des équations de la mécanique des fluides s'obtient avec les équations de Saint-Venant [52]

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hv) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hv^2 + \frac{g}{2}h^2\right) &= 0 \\ v(t, D(t) - \frac{l}{2}) &= \dot{D}(t) \\ v(t, D(t) + \frac{l}{2}) &= \dot{D}(t) \end{aligned}$$

et le système linéaire tangent autour d'une profondeur constante  $\bar{h}$ . L'étude de ce linéaire tangent montre qu'au premier ordre le système n'est pas commandable. En revanche, les points stationnaires sont tous sur la même « feuille » de commandabilité, i.e., il est toujours possible d'aller d'un état stationnaire à un autre (au premier ordre). Les formules qui assurent un tel transfert sont les suivantes (pour les détails voir [95]).

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathcal{Y}}\left(t + \frac{x - D(t)}{c}\right) + \dot{\mathcal{Y}}\left(t - \frac{x - D(t)}{c}\right) \right] \\ h(t, x) &= \left[ \sqrt{\bar{h}} + \frac{1}{\sqrt{4g}} \left( \dot{\mathcal{Y}}\left(t - \frac{x - D(t)}{c}\right) - \dot{\mathcal{Y}}\left(t + \frac{x - D(t)}{c}\right) \right) \right]^2 \\ D(t) &= (\mathcal{Y}(t + \frac{\Delta}{2}) + \mathcal{Y}(t - \frac{\Delta}{2}))/2 \end{aligned}$$

avec  $t \mapsto \mathcal{Y}(t)$  une fonction arbitraire du temps,  $c = \sqrt{hg}$  la vitesse de propagation des vagues et  $\Delta = l/c$  le temps que met une vague pour aller d'un bord à l'autre. La sortie plate  $\mathcal{Y}$  admet une interprétation physique simple. Elle résume la répartition droite/gauche du fluide dans le récipient. Comme l'illustre la figure 5.14,  $\mathcal{Y}$  est l'abscisse du centre de gravité de deux masses

$$M^- = \int_{D(t)}^{D(t)+L/2} h(t, s) ds, \quad M^+ = \int_{D(t)-L/2}^{D(t)} h(t, s) ds$$

situées aux extrémités.

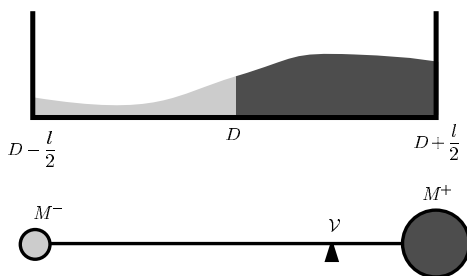


FIGURE 5.14. La « sortie plate » du linéaire tangent

$$\begin{array}{c}
 x = 0, \quad \theta(0, t) = u(t) \\
 \begin{array}{|c|} \hline \partial_t \theta = \partial_{xx} \theta \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline x = s(t), \\ \hline \end{array} \\
 \partial_x \theta(s(t), t) = -ds/dt(t)
 \end{array}$$

FIGURE 5.15. Le problème à frontière libre de Stefan (diffusion et solidification) : la « sortie plate » est  $y = s(t)$ .

**5.4.d. Problème de Stefan.** On reprend le problème à frontière libre 1D traité dans [24] et rappelé sur la figure 5.15. Supposons la

fonction  $t \mapsto s(t)$  donnée et  $C^\infty$ . On pose

$$x = \sum_0^{\infty} (a_n(t)/n!)(x - s(t))^n.$$

Alors des calculs simples donnent

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \dot{s}, \quad a_{n+2} = \dot{a}_n - a_1 a_{n+1}.$$

On montre que la série ci-dessus converge pour tout  $x$  dès que  $t \mapsto s(t)$  est d'ordre Gevrey  $< 2$  (voir [24]). On en déduit des contrôles en boucle ouverte pour aller en temps fini  $T$  d'un état stationnaire de longueur  $s(t) = L_0 > 0$  vers un autre de longueur différente  $s(T) = L_T > 0$ .

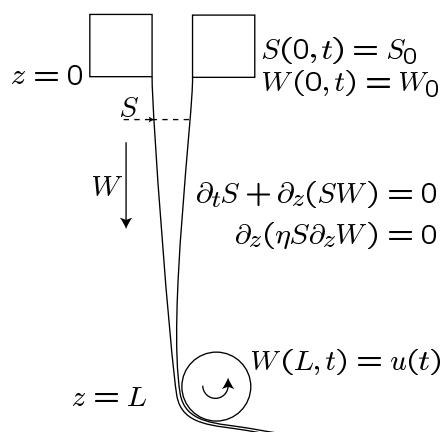


FIGURE 5.16. Extrusion de fibres minces : le contrôle est la vitesse  $u = W(L,t)$ , la « sortie plate » est le couple  $S(L,T)\partial_z W(L,t)$ .

**5.4.e. Extrusion.** Le modèle le plus simple d'un procédé d'extrusion fabriquant des fibres minces est proposé dans [1]. Comme illustré sur la figure 5.16, il s'agit d'un système implicite aux dérivées partielles sur le domaine  $z \in [0, L]$ . Il caractérise le diamètre  $S(z,t)$  et la vitesse  $W(z,t)$  de la fibre ( $\eta$  est un paramètre  $>0$ ). Usuellement, le contrôle est la vitesse  $u = W(L,t)$ . Au delà d'une certaine vitesse critique  $u^*$ , le profil stationnaire devient instable comme le montre [1].

Si, au lieu de la vitesse, on fixe le couple  $y = S(L, T)\partial_z W(L, t)$  alors on est face à un problème de type Cauchy-Kovalevsky en  $z$  (comme pour le câble aéro-tracté ci-dessus) et les instabilités disparaissent. En effet, de

$$S\partial_z W = y(t), \quad \partial_t S + \partial_z(SW) = 0$$

on tire explicitement  $\partial_z S$  et  $\partial_z W$  en fonction de  $y$ ,  $S$ ,  $W$  et  $\partial_t S$ . On dispose de deux conditions initiales en  $z = 0$ ,  $S(0, t) = S_0$  et  $W(0, t) = W_0$  issues des conditions en sortie d'extrudeuse. Un développement en série de puissances de  $z$  est donc a priori possible bien que son utilisation pour la planification de trajectoires semble délicate.

## 5.5. Systèmes électro-mécaniques

**5.5.a. Le convertisseur de tensions.** Un convertisseur de tension continu en tension continu par modulation de largeur d'impulsions (PWM) obéit aux équations suivantes

$$\dot{x}_1 = (u - 1)\frac{x_2}{L} + \frac{E}{L}, \quad \dot{x}_2 = (1 - u)\frac{x_1}{LC} - \frac{x_2}{RC},$$

où  $u \in [0, 1]$  est la commande, le rapport cyclique. L'énergie électromagnétique  $y := \frac{x_1^2}{2C} + \frac{x_2^2}{2L}$  est la sortie plate [119].

**5.5.b. Paliers magnétiques.** Une solution simple à la planification de trajectoires et à la stabilisation des paliers magnétiques est proposée dans [59]. Le contrôle obtenu assure qu'à chaque instant, seul l'un des deux électro-aimants est actif. Cela permet de réduire le nombre d'aimants par un placement plus astucieux de ces derniers.

**5.5.c. Moteurs à induction.** Le modèle standard d'un moteur à induction s'écrit avec des variables complexes pour les grandeurs électriques (voir [56] pour plus de détails)

$$\begin{aligned} R_s \dot{\iota}_s + \dot{\psi}_s &= u_s & \psi_s &= L_s \iota_s + M e^{jn\theta} \iota_r \\ R_r \dot{\iota}_r + \dot{\psi}_r &= 0 & \psi_r &= M e^{-jn\theta} \iota_s + L_r \iota_r, \end{aligned}$$

où  $\psi_s$  et  $\iota_s$  (resp.  $\psi_r$  et  $\iota_r$ ) sont valeurs complexes des flux et courants stator (resp. rotor),  $\theta$  est l'angle du rotor et  $j = \sqrt{-1}$ . La commande est la tension complexe  $u_s$  appliquée au stator. Avec  $\psi_r = \rho e^{j\alpha}$ ,

la dynamique du rotor est donnée par

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{n}{R_r} \rho^2 \dot{\alpha} - \tau_L(\theta, \dot{\theta}),$$

où  $\tau_L$  est le couple de charge.

Ce système est plat avec les deux angles  $(\theta, \alpha)$  comme sortie plate [70] (voir aussi [17]).

**5.5.d. Ligne de transmission.** [32] aborde la transmission d'un signal au moyen d'une ligne décrite par l'équation des télégraphistes avec une pré-compensation des distorsions dues à la ligne directement au niveau du signal d'entrée.

La propagation d'un signal électrique via une ligne de longueur  $\ell$  obéit aux lois de Kirchhoff (voir, par exemple, [107]) :

$$\begin{aligned} L \frac{\partial i}{\partial t} &= -Ri - \frac{\partial v}{\partial x} \\ C \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial i}{\partial x} - Gv. \end{aligned}$$

avec  $0 \leq x \leq \ell$ . Par unité de longueur, la résistance est  $R$ , l'inductance  $L$ , la capacité  $C$  et la perte  $G$ . L'élimination du courant  $i$  donne l'équation des *télégraphistes*

$$(5.7) \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \left( R + L \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( G + C \frac{\partial}{\partial t} \right) v(x, t).$$

Les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} v(0, t) &= u(t) \\ v(\ell, t) &= Zi(\ell, t) \end{aligned}$$

où  $Z$  est la résistance en bout de ligne. La commande est la tension d'entrée  $u(t) = v(0, t)$ . Nous allons voir que  $y(t) = v(\ell, t)$  est la sortie plate.

Avec  $s$ , la variable de Laplace, (5.7) devient une simple équation différentielle ordinaire en  $x$  :

$$(5.8) \quad \widehat{v}''(x, s) = \varpi(s) \widehat{v}(x, s),$$

où  $\varpi(s) = (R + Ls)(G + Cs)$ . Les conditions aux limites donnent

$$(5.9) \quad \widehat{v}(0, s) = \widehat{u}, \quad (R + Ls) \widehat{v}(\ell, s) = Z \widehat{v}'(\ell, s).$$

La solution générale de (5.8) est

$$\widehat{v}(x, s) = A(s) \cosh((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)}) + B(s) \sinh((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)})$$

avec  $A(s)$  et  $B(s)$  indépendants de  $x$  et déduits des conditions aux bords (5.9). Au lieu de considérer la relation entre  $\widehat{v}$  et  $\widehat{u}$ , regardons la relation entre  $\widehat{v}$  et  $y(s) = v(\ell, s)$  :

$$(5.10) \quad \widehat{v}(x, s) = \left( \cosh((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)}) + \frac{R + Ls \sinh((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)})}{Z \sqrt{\varpi(s)}} \right) \widehat{y}(s).$$

Noter que le transfert entre  $\widehat{v}$  et  $\widehat{y}$  est une fonction entière de  $s$ . Ainsi,  $\widehat{y}$  est une sortie plate.

Pour  $x = 0$  (5.10) donne

$$(5.11) \quad \widehat{u}(s) = \left( \cosh(\ell\sqrt{\varpi(s)}) + \frac{R + Ls \sinh(\ell\sqrt{\varpi(s)})}{Z \sqrt{\varpi(s)}} \right) \widehat{y}(s).$$

Supposons  $G = 0$  pour plus de simplicité. La formule (5.11) donne, de retour dans le domaine temporel, ( $\lambda = \ell\sqrt{LC}$ ,  $\alpha = R/2L$ ,  $\varpi(s) = RCs + LCs^2$ )

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{1}{2}e^{-\alpha\lambda} \left(1 - \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) y(t - \lambda) + \frac{1}{2}e^{\alpha\lambda} \left(1 + \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) y(t + \lambda) \\ & + \int_{-\lambda}^{+\lambda} \left[ \frac{R}{4Z\sqrt{LC}} e^{-\alpha\tau} J_0(i\alpha\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) \right. \\ & \left. + \frac{e^{-\alpha\tau} i\alpha}{2\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} \left( \lambda - \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}}\tau \right) J_1(i\alpha\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) \right] y(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

avec  $J_0$  et  $J_1$  les fonctions de Bessel (voir les tables de transformations de Laplace dans [23]).

Ainsi la relation entre  $y$  et  $u$  passe par un filtre à support compact mais non causal :  $u(t)$  dépend des valeurs de  $y$  sur  $[t - \lambda, t + \lambda]$ . Il est alors très naturel d'utiliser ce filtre pour construire un pré-compensateur.

## 5.6. Systèmes quantiques

Le modèle physique le plus simple d'un système quantique à deux états (spin 1/2) contrôlé par un champ électromagnétique cohérent

est (voir, par exemple, [43]) :

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega x_1 + u x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -u x_2$$

avec le contrôle scalaire  $u$  (typiquement proportionnel au champ électrique) et  $\omega$  une pulsation constante. Comme  $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$  est invariant, la dynamique est restreinte sur la sphère unité (sphère de Bloch) :  $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1$ . Alors  $y = x_1$  est une sortie plate car

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{y^{(1)}}{\omega}, \quad x_3 = \pm \sqrt{1 - y^2 - (y^{(1)})^2/\omega^2},$$

$$u = \pm \frac{y + y^{(2)}/\omega^2}{\sqrt{1 - y^2 - (y^{(1)})^2/\omega^2}}.$$

On trouvera dans [91], un autre exemple de dynamique quantique plate, exemple très similaire à la voiture non holonome mais où le groupe sur lequel évolue le système n'est plus  $SE(2)$  mais  $SU(2)$  : les calculs y sont alors conduits avec les quaternions. Dans [74], on montre que la partie commandable d'un oscillateur harmonique contrôlé est plate (elle est même linéaire). Dans [110], on propose une version quantique de la gamelle d'eau : sur le linéaire tangent autour de tout état propre, il est possible de déplacer la particule piégée dans sa boîte sans changer son énergie finale. Dans le cas non-linéaire, la commandabilité a été montrée dans [7] avec la méthode du retour décrite dans [20]. Pour d'autres résultats sur la commandabilité d'équations de Schrödinger 1D ayant une structure voisine voir [9, 8]. On trouvera enfin dans [111] plusieurs autres exemples de dimension finie et infinie.

### 5.7. Réacteurs chimiques

Le réacteur exothermique parfaitement considéré dans [4] admet la description suivante :

$$\frac{dx_1}{dt} = D(x_1^{in} - x_1) - kx_1 e^{-T^*/x_2},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = D(x_2^{in} - x_2) + cx_1 e^{-T^*/x_2} + u$$



avec l'état  $x = (x_1, x_2)$  et le contrôle scalaire  $u$ , les autres grandeurs étant des paramètres strictement positifs et constants. Une sortie plate est  $y = x_1$ . La première équation fournit  $x_2$  comme fonction de  $y$  et  $y^{(1)}$ . De la seconde équation, nous tirons  $u$  comme fonction de  $x_1, x_2$  et  $\dot{x}_2$ . Ainsi,  $u$  est une fonction de  $y, y^{(1)}$  et  $y^{(2)}$ . Nous renvoyons à [108] pour des calculs similaires avec des simulations en boucle fermée sur un réacteur plus complexe. Dans [114], on trouvera une liste assez complète de réacteurs chimiques plats.

### Références

- [1] J.-F. AGASSANT, P. AVENAS, J.-P. SERGENT & P. CARREAU – *Polymer processing, principles and modeling*, Hanser, 1991.
- [2] Y. Aoustin, M. FLIess, H. MOUNIER, P. ROUCHON & J. RUDOLP – « Theory and practice in the motion planning and control of a flexible robot arm using Mikusiński operators », in *Proc. of the Fifth IFAC Symposium on Robot Control* (Nantes, France), 1997, p. 287–293.
- [3] E. ARANDA-BRICAIRE, C. MOOG & J.-B. POMET – « A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization », *IEEE Trans. Automat. Contr.* **40** (1995), no. 1, p. 127–132.
- [4] R. ARIS & N. AMUNDSON – « An analysis of chemical reactor stability and control : I,II,III », *Chem. Engng. Sci.* **7** (1958), p. 121–155.
- [5] D. AVANESSOFF, L. BARATCHART & J.-B. POMET – « Sur l'intégrabilité (très) formelle d'une partie des équations de la platitude des systèmes de contrôle », 2006, HAL:inria-00071538.
- [6] D. AVANESSOFF & J.-B. POMET – « Flatness and Monge parameterization of two-input systems, control-affine with 4 states or general with 3 states », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **13** (2007), p. 237.
- [7] K. BEAUCHARD – « Local controllability of a 1D Schrödinger equation », *J. Math. Pures et Appl.* **84** (2005), p. 851–956.
- [8] ———, « Controllability of a quantum particule in a 1D variable domain », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **14** (2008), p. 105–147.
- [9] K. BEAUCHARD & J.-M. CORON – « Controllability of a quantum particle in a moving potential well », *J. of Functional Analysis* **232** (2006), p. 328–389.
- [10] R. BRYANT, S. CHERN, R. GARDNER, H. GOLDSCHMIDT & P. GRIFFITHS – *Exterior differential systems*, Springer, 1991.
- [11] G. CAMPION, B. D'ANDREA NOVEL & G. BASTIN – « Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots », *IEEE Trans. Robotics Automation* **12** (1996), no. 1, p. 47–62.
- [12] E. CARTAN – « Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes », *Bull. Soc. Math. France* **42** (1914), p. 12–48, Œuvres Complètes, II, vol. 2, p.1133–1168, CNRS, Paris, 1984.
- [13] ———, « Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles », *J. für reine und angew. Math.* **145** (1915), p. 86–91, Œuvres Complètes, II, vol. 2, p.1164–1174, CNRS, Paris, 1984.

- [14] F. CHAPLAIS & N. PETIT – « Inversion in indirect optimal control of multivariable systems », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **14** (2008), p. 294–317.
- [15] B. CHARLET, J. LÉVINE & R. MARINO – « On dynamic feedback linearization », *Systems Control Letters* **13** (1989), p. 143–151.
- [16] V. CHETVERIKOV – « New flatness conditions for control systems », in *Proceedings of NOLCOS'01, St. Petersburg*, 2001, p. 168–173.
- [17] J. CHIASSON – « Dynamic feedback linearization of the induction motor », *IEEE Trans. Automat. Control* **38** (1993), p. 1588–1594.
- [18] A. CHORIN & J. MARSDEN – *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer-Verlag, 1990.
- [19] J. CORON – « Local controllability of a 1-D tank containing a fluid modeled by the shallow water equations », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **8** (2002), p. 513–554.
- [20] ———, *Control and nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [21] R. COURANT & D. HILBERT – *Methods of mathematical physics*, vol. 2, Interscience, 1962.
- [22] E. DELALEAU & J. RUDOLPH – « Control of flat systems by quasi-static feedback of generalized states », *Int. Journal of Control* **71** (1998), p. 745–765.
- [23] G. DOESTCH – *Handbuch der Laplace-Transformation*, Birkhäuser, Bâle, 1956, 3. Bd.
- [24] W. DUNBAR, N. PETIT, P. ROUCHON & P. MARTIN – « Motion planning for a non-linear Stefan equation », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **9** (2003), p. 275–296.
- [25] M. FLIESS, J. LEVINE, P. MARTIN, F. OLLIVIER & P. ROUCHON – « Controlling nonlinear systems by flatness », in *Systems and control in the Twenty-First Century* (C. Byrnes, B. Datta, D. Gilliam & C. Martin, éd.), Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, 1997.
- [26] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, F. OLLIVIER & P. ROUCHON – « A remark on nonlinear accessibility conditions and infinite prolongations », *Syst. Control Letters* **31** (1997), p. 77–83.
- [27] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN & P. ROUCHON – « Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats », *C.R. Acad. Sci. Paris* **I-315** (1992), p. 619–624.
- [28] ———, « Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund », *C.R. Acad. Sci. Paris* **I-317** (1993), p. 981–986.
- [29] ———, « Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems », in *Proc. of the 3rd European Control Conf.* (Rome), 1995, p. 1882–1887.
- [30] ———, « Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples », *Int. J. Control* **61** (1995), no. 6, p. 1327–1361.
- [31] ———, « A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems », *IEEE Trans. Automatic Control* **44** (1999), p. 922–937.
- [32] M. FLIESS, P. MARTIN, N. PETIT & P. ROUCHON – « Active signal restoration for the telegraph equation », in *Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control* (Phoenix), december 1999.
- [33] M. FLIESS & H. MOUNIER – « Quelques propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards constants », *C.R. Acad. Sci. Paris* **I-319** (1994), p. 289–294.
- [34] M. FLIESS & H. MOUNIER – « Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **3** (1998), p. 301–314.

- [35] M. FLIESS, H. MOUNIER, P. ROUCHON & J. RUDOLPH – « Controllability and motion planning for linear delay systems with an application to a flexible rod », in *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control* (New Orleans), 1995, p. 2046–2051.
- [36] ———, « Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible », in *ESAIM Proc. "Élasticité, viscolélasticité et contrôle optimal", 8ème entretiens du centre Jacques Cartier, Lyon*, 1996, p. 157–168.
- [37] ———, « A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor : a multi- variable case », in *Proc. of the 37th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1998, p. 439– 442.
- [38] M. GEVREY – « La nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles », *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.* **35** (1918), p. 129–190.
- [39] C. GODBILLON – *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [40] M. GROMOV – *Partial differential relations*, Springer-Verlag, 1986.
- [41] I. GUELFAND & G. CHILOV – *Les distributions, tome 3*, Dunod, Paris, 1964.
- [42] V. HAGENMEYER & E. DELALEAU – « Continuous-time non-linear flatness-based predictive control : an exact feedforward linearisation setting with an induction drive example », *International Journal of Control* **81** (2008), no. 10, p. 1645–1663.
- [43] S. HAROCHE & J. RAIMOND – *Exploring the quantum : atoms, cavities and photons*, Oxford University Press, 2006.
- [44] J. HAUSER, S. SASTRY & P. KOKOTOVIĆ – « Nonlinear control via approximated input-output linearization : the ball and beam example », *IEEE Trans. Automat. Contr.* **37** (1992), p. 392–398.
- [45] D. HILBERT – « Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen », *Math. Ann.* **73** (1912), p. 95–108, also in *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, pp. 81–93, Chelsea, New York, 1965.
- [46] L. HUNT, R. SU & G. MEYER – « Global transformations of nonlinear systems », *IEEE Trans. Automat. Control* **28** (1983), p. 24–31.
- [47] A. ISIDORI – *Nonlinear control systems*, 2<sup>e</sup> éd., Springer, New York, 1989.
- [48] B. JAKUBCZYK & W. RESPONDEK – « On linearization of control systems », *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.* **28** (1980), p. 517–522.
- [49] T. KAILATH – *Linear systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [50] B. KISS & J. LÉVINE – « On the control of a reduced scale model of the US Navy cranes », in *3rd IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems*, 1999.
- [51] I. S. KRASIL'SHCHIK, V. V. LYCHAGIN & A. M. VINOGRADOV – *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.
- [52] L. LANDAU & E. LIFCHITZ – *Mécanique des fluides*, second éd., Mir Moscou, 1986.
- [53] H. LAOUSY, C. XU & G. SALLET – « Boundary feedback stabilization of rotation body-beam system », *IEEE Autom. Control* **41** (1996), p. 1–5.
- [54] B. LAROCHE, P. MARTIN & P. ROUCHON – « Motion planing for the heat equation », *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **10** (2000), p. 629–643.
- [55] Y. LENOIR, P. MARTIN & P. ROUCHON – «  $2k\pi$ , the juggling robot », in *Proc. of the 37th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1998, p. 1995–2000.
- [56] W. LEONHARD – *Control of electrical drives*, Elsevier, 1985.
- [57] J. LÉVINE – « Are there new industrial perspectives in the control of mechanical systems? », in *In Issues in Control, ECC99* (P. Frank, éd.), Springer, 1999.
- [58] ———, « On necessary and sufficient conditions for differential flatness », 2006, [arXiv:math/0605405v2](https://arxiv.org/abs/math/0605405v2).

- [59] J. LÉVINE, J. LOTTIN & J.-C. PONSART – « A nonlinear approach to the control of magnetic bearings », *IEEE Trans. Control Systems Technology* **4** (1996), p. 524–544.
- [60] J. LÉVINE, P. ROUCHON, G. YUAN, C. GREBOGI, B. HUNT, E. KOSTELICH, E. OTT & J. YORKE – « On the control of US Navy cranes », in *ECC97*, 1997.
- [61] P. MARTIN – « Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats », Thèse, École des Mines de Paris, 1992.
- [62] ———, « A geometric sufficient conditions for flatness of systems with  $m$  inputs and  $m + 1$  states », in *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control* (San Antonio), 1993, p. 3431–3436.
- [63] ———, « An intrinsic condition for regular decoupling », *Systems & Control Letters* **20** (1993), p. 383–391.
- [64] ———, « Endogenous feedbacks and equivalence », in *Systems and Networks : Mathematical Theory and Applications (MTNS'93)*, vol. II, Akademie Verlag, Berlin, 1994, p. 343–346.
- [65] P. MARTIN, S. DEVASIA & B. PADEN – « A different look at output tracking : control of a VTOL aircraft », *Automatica* **32** (1995), p. 101–108.
- [66] P. MARTIN, R. MURRAY & P. ROUCHON – « Flat systems, equivalence and trajectory generation », 2003, HAL: ce1-00392180.
- [67] P. MARTIN & P. ROUCHON – « Feedback linearization and driftless systems », *Math. Control Signal Syst.* **7** (1994), p. 235–254.
- [68] ———, « Any (controllable) driftless system with 3 inputs and 5 states is flat », *Systems Control Letters* **25** (1995), p. 167–173.
- [69] ———, « Any (controllable) driftless system with  $m$  inputs and  $m + 2$  states is flat », in *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control* (New Orleans), 1995, p. 2886–2891.
- [70] ———, « Flatness and sampling control of induction motors », in *Proc. IFAC World Congress* (San Francisco), 1996, p. 389–394.
- [71] P. MARTIN, P. ROUCHON & J. RUDOLPH – « Invariant tracking », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **10** (2004), p. 1–13.
- [72] T. MEURER & M. ZEITZ – « A modal approach to flatness-based control of flexible structures », *Proc. Appl. Math. Mech* **4** (2004), no. 1, p. 133–134.
- [73] ———, « Feedforward and feedback tracking control of nonlinear diffusion-convection-reaction systems using summability methods », *Industrial & Engineering Chemistry Research* **44** (2005), no. 8, p. 2532–2548.
- [74] M. MIRRAHIMI & P. ROUCHON – « Controllability of quantum harmonic oscillators », *IEEE Trans Automatic Control* **49** (2004), no. 5, p. 745–747.
- [75] G. MONGE – « Mémoire de l'Académie Royale des Sciences. Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites sont susceptibles d'une véritable intégration... », p. 502–576, Paris, 1784.
- [76] J. MORALES-RUIZ & J.-P. RAMIS – « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems », *Methods and Applications of Analysis* **8** (2001), p. 33–95.
- [77] H. MOUNIER – « Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques », Thèse, Université Paris Sud, Orsay, 1995.
- [78] H. MOUNIER, J. RUDOLPH, M. PETITOT & M. FLIESS – « A flexible rod as a linear delay system », in *Proc. of the 3rd European Control Conf.* (Rome), 1995, p. 3676–3681.

- [79] R. M. MURRAY – « Nilpotent bases for a class on nonintegrable distributions with applications to trajectory generation for nonholonomic systems », *Math. Control Signal Syst.* **7** (1994), p. 58–75.
- [80] ———, « Trajectory generation for a towed cable flight control system », in *Proc. IFAC World Congress* (San Francisco), 1996, p. 395–400.
- [81] R. M. MURRAY, M. RATHINAM & W. SLUIS – « Differential flatness of mechanical control systems : a catalog of prototype systems », in *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (San Francisco), november 1995.
- [82] R. MURRAY & S. SASTRY – « Nonholonomic motion planning : steering using sinusoids », *IEEE Trans. Automat. Control* **38** (1993), p. 700–716.
- [83] I. I. NEIMARK & N. FUFAYEV – *Dynamics of nonholonomic systems*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1972.
- [84] M. VAN NIEUWSTADT & R. M. MURRAY – « Approximate trajectory generation for differentially flat systems with zero dynamics », in *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control* (New Orleans), 1995, p. 4224–4230.
- [85] ———, « Real time trajectory generation for differentially flat systems », *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **8** (1998), no. 11, p. 995–1020.
- [86] M. VAN NIEUWSTADT, M. RATHINAM & R. M. MURRAY – « Differential flatness and absolute equivalence », *SIAM J. Control Optimization* **36** (1998), no. 4, p. 1225–1239.
- [87] H. NIJMEIJER & A. VAN DER SCHAFT – *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [88] F. OLLIVIER & A. SEDOGLAVIC – « A generalization of flatness to nonlinear systems of partial differential equations. Application to the command of a flexible rod », in *Proceedings of the 5th IFAC Symposium NonLinear Control Systems*, 2001, p. 196–200.
- [89] P. OLVER – *Applications of Lie groups to differential equations*, 2<sup>e</sup> éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, 1993.
- [90] P. S. PEREIRA DA SILVA – « Flatness of nonlinear control systems : a Cartan-Kähler approach », in *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2000)*, Perpignan, 2000, p. 1–10.
- [91] P. S. PEREIRA DA SILVA & P. ROUCHON – « Flatness-based control of a single qubit gate », *IEEE Automatic Control* **53** (2008), no. 3, p. 775–779.
- [92] N. PETIT, Y. CREFF & P. ROUCHON – «  $\delta$ -freeness of a class of linear delayed systems », in *European Control Conference, Brussels*, 1997.
- [93] ———, « Motion planning for two classes of nonlinear systems with delays depending on the control », in *Control and Decision Conference, Tampa*, 1998, p. 1007–1011.
- [94] N. PETIT & P. ROUCHON – « Motion planning for heavy chain systems », *SIAM J. Control and Optim.* **41** (2001), no. 2, p. 475–495.
- [95] ———, « Dynamics and solutions to some control problems for water-tank systems », *IEEE Trans. Automatic Control* **47** (2002), no. 4, p. 594–609.
- [96] J.-B. POMET – « A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization », *Banach Center Publications* **32** (1995), p. 319–339.
- [97] ———, « On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **2** (1997), p. 151–230.
- [98] ———, « A necessary condition for dynamic equivalence », *SIAM J. Control Optimization* **48** (2009), p. 925–940.

- [99] J. POMMARET – *Systems of partial differential equations and lie pseudogroups*, Gordon & Breach, N.Y., 1978.
- [100] ———, « Dualité différentielle et applications », *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **320** (1995), p. 1225–1230.
- [101] A. QUADRAT & D. ROBERTZ – « Computation of bases of free modules over the Weyl algebras », *Journal of Symbolic Computation* **42** (2007), p. 1113–1141.
- [102] C. RACZY – « Commandes optimales en temps pour les systèmes différentiellement plats », Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1997.
- [103] J.-P. RAMIS – « Dévissage Gevrey », *Astérisque* **59-60** (1978), p. 173–204.
- [104] ———, « Séries divergentes et théories asymptotiques », in *Séries divergentes et procédés de resommation*, Journées X-UPS, Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 1991, p. 1–73.
- [105] ———, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panoramas et Synthèses, Société Mathématique de France, 1993, voir aussi [104].
- [106] M. RATHINAM & R. MURRAY – « Configuration flatness of Lagrangian systems underactuated by one control », *SIAM J. Control Optimization* **36** (1998), no. 1, p. 164–179.
- [107] Y. ROCARD – *Dynamique générale des vibrations*, Masson, Paris, 1971.
- [108] R. ROTHFUSS, J. RUDOLPH & M. ZEITZ – « Flatness based control of a nonlinear chemical reactor model », *Automatica* **32** (1996), p. 1433–1439.
- [109] P. ROUCHON – « Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization », *J. Math. Systems Estim. Control* **5** (1995), no. 3, p. 345–358.
- [110] ———, « Control of a quantum particle in a moving potential well », in *IFAC 2nd Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, April 2003.
- [111] ———, « Quantum systems and control », *ARIMA Rev. Afr. Rech. Inform. Math. Appl.* **9** (2008), p. 325–357.
- [112] P. ROUCHON, M. FLIESS, J. LÉVINE & P. MARTIN – « Flatness and motion planning : the car with  $n$ -trailers », in *Proc. ECC'93, Groningen*, 1993, p. 1518–1522.
- [113] ———, « Flatness, motion planning and trailer systems », in *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control* (San Antonio), 1993, p. 2700–2705.
- [114] P. ROUCHON & J. RUDOLPH – « Commande de procédés chimiques : réacteurs et colonnes de distillation », *Traité IC2*, ch. Réacteurs chimiques différentiellement plats : planification et suivi de trajectoires, p. 163–200, *Traité IC2*, Hermès, Paris, 2001.
- [115] J. RUDOLPH – *Flatness based control of distributed parameter systems*, Shaker, Germany, 2003.
- [116] K. SCHLACHER & M. SCHÖBERL – « Construction of flat output by reduction and elimination », in *7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Pretoria*, 2007, p. 666–671.
- [117] S. SEKHAVAT – « Planification de mouvements sans collision pour systèmes non holonomes », Thèse, LAAS-CNRS, Toulouse, 1996.
- [118] H. SIRA-RAMIREZ & S. AGARWAL – *Differentially flat systems*, CRC, 2004.
- [119] H. SIRA-RAMIREZ & M. ILIC-SPONG – « Exact linearization in switched-mode DC-to-DC power converters », *Int. J. Control* **50** (1989), p. 511–524.
- [120] W. SLUIS – « Absolute equivalence and its application to control theory », Thèse, University of Waterloo, Ontario, 1992.
- [121] ———, « A necessary condition for dynamic feedback linearization », *Systems Control Letters* **21** (1993), p. 277–283.
- [122] E. SONTAG – *Mathematical control theory*, Springer Verlag, 1990.

- [123] H. SUSSMANN & V. JURDJEVIC – « Controllability of nonlinear systems », *J. Differential Equations* **12** (1972), p. 95–116.
- [124] G. VALIRON – *Équations fonctionnelles*, 2<sup>e</sup> éd., Masson et Cie, Editeurs, Paris, 1950.
- [125] G. N. WATSON – *A treatise of the theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944.
- [126] V. ZHARINOV – *Geometrical aspects of partial differential equations*, World Scientific, Singapore, 1992.

Philippe Martin, Mines ParisTech, Centre Automatique et Systèmes, Mathématiques et Systèmes, 60, Bd Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06  
*E-mail* : philippe.martin@minesparis.psl.eu

Pierre Rouchon, Mines ParisTech, Centre Automatique et Systèmes, Mathématiques et Systèmes, 60, Bd Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06  
*E-mail* : pierre.rouchon@minesparis.psl.eu  
*Url* : <https://cas.mines-paristech.fr/~rouchon/>

---

## ANNEXE. QUELQUES PROGRAMMES MATHLAB

*par*

Philippe Martin & Pierre Rouchon

---

### Chaîne pesante

```
% Mouse-driven motion planning
%   for heavy chain system
%   march 99
%   Ecole des Mines de Paris,
%   Centre Automatique et Systemes
%   60 Bd St Michel
%   75272 Paris
%   Nicolas Petit: petit@cas.ensmp.fr
%   Pierre Rouchon: rouchon@cas.ensmp.fr
%
% Linear approximation (Cf the model studied by Daniel Bernoulli 1738 )
%    $D_{tt} H = D_x ( g x D_x H ) = 0$ 
%    $H(x=L,t) = D$  (the control, horizontal position of the trolley)
%
% flat output:  $y(t)=H(0,t)$  the position of the free end
% motion planing formulae
%
%  $H(x,t) = 1/(2 \pi) \int_0^\pi [ y(t - 2 \sqrt{x/g} \sin s) + y(t + 2 \sqrt{x/g} \sin s) ] ds$ 
% derived via symbolic calculus (Poisson integral representation of the
% Bessel function  $J_0$ )
%
%
clear all;
L=1.; % rope length in m
A_max= 1.5*L ; % amplitude of horizontal motion depth in m
g=9.81; % garvity in m/s^2
T_max=2*sqrt(A_max/g); % interval of motion (s)
DT=2*sqrt(L/g);
scale=min(11., 11/max(A_max*14/19,L));

% space mesh
dx=L/40.;
x=[0:dx:L];
```



```

nx=length(x);
H=zeros(1,nx);
% time step
dt0=DT/50;
dt=dt0;
dtmin=DT/1000;
dtmax=DT/3.;

YY=0*[-DT:dt0:DT];
mt=length(YY);
m0=(mt+1)/2.;
mm=[1:mt-1];

Y=0*[-5*DT:dt:0]; D=Y;t=Y;
nt=length(Y);
nn=[1:nt-1];

figure(1),clf;
set(gca,'position',[0 0 1 1],'visible','off','Xlim',[0 19],'Ylim',[0 14]....
,'nextplot','add');

% trolley

Xt=1+[0 1 1 0 ]+scale*H(nx);
Yt=12+[0 0 1/2 1/2 ];
trol=fill(Xt,Yt,'g','EraseMode','background');

% cable

Xc=1.5 + scale*H;
Yc=12+scale*(x-1);
chain=line(Xc,Yc,'EraseMode','background','LineWidth', 4, 'Color', [0 0 1 ]);

% ref
Xr=1+[0 1 0.5 0 ] + scale*H(nx);
Yr=0.3+[0 0 1/2 0 ];
ref=fill(Xr,Yr,'y','EraseMode','background');

set(gcf,'WindowButtonMotionFcn','1;');

Hplay=uicontrol('style','push',...
'units','normalized','position',[15/19 12.6/14 2/19 .5/14], ....
'string','Plot','callback', ...
['figure(2);clf;' ...
'subplot(211);' ...
'plot(t,Y);'...

```

```

        'title(''flat output (m) versus time'');'...
        'subplot(212);'...
        'plot(t,D);'...
        'title(''trolley position (m/s)versus time''); pause;figure(1);'...
    ]);

set(Hplay,'visible','off');

Hrun=icontrol('style','push',...
    'units','normalized','position',[1/19 12.7/14 2/19 .5/14], ...
    'string','stop','callback', ...
    ' ',' ','visible','off');

% title
text(9.5,13.5,'HEAVY CHAIN: MOUSE-DRIVEN MOTION PLANNING','color',[0 0 0],...
    'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
text(9.5,13,'display speed slider','color',[0 0 0],
    'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
p1=[7.5/19 12.6/14 4/19 0.2/14];
Hslider=icontrol(figure(1),'units','normalized','style','slider','position',p1,...
    'min',log(dtmin),'max',log(dtmax),'value',log(dt0),...
    'callback',['buf=get(Hslider, ''value'');dt=exp(buf);']);

figure(1);
pause(1)
set(Hrun,'string','Stop','callback','i=2;');
set(Hplay,'visible','on')
set(Hrun,'visible','on')

t1=T_max/5;
t2=t1;
seuil=A_max/5;
y1=0;
y2=0;

i=0;

dth=pi/100;
th=[0:dth:pi-dth];
Sth=sin(th);

tt=0.;
y1_old=y1;
while (i < 1)
    buf=get(gca,'CurrentPoint');
    A=(buf(1,1)-1.5)/scale;

```

```

A=max(0,A);
A=min(A_max,A);

y1=(y1+dt*y2/t1)/(1+dt/t1);
t2b=t2*max(1,abs(A-y2)/seuil);
y2=(y2+dt*A/t2b)/(1+dt/t2b);

tt=tt+dt;
if (tt >= dt0);
    ii=floor(tt/dt0);
    dy1=(y1-y1_old)/tt;
    for iii=1:ii;
        YY(mm)=YY(mm+1);YY(mt)=y1_old+iii*dt0*dy1;
    end;
    y1_old=y1-dy1*(tt-ii*dt0);
    tt=0.;
end;

for ix=1:nx;
    tau=2*sqrt(x(ix)/g);
    s=tau*Sth;
    ns=floor((mt-m0)*s/DT);
    H(ix)=(dth/2/pi)*sum(YY(m0+ns)+YY(m0-ns));
end

Y(nn)=Y(nn+1); Y(nt)=H(1);
D(nn)=D(nn+1); D(nt)=H(nx);
t(nn)=t(nn+1); t(nt)=t(nt)+dt;

Xt=1+[0 1 1 0 ] + scale*H(nx);
Xr=1+[0 1 0.5 0 ] + scale*A;
Xc=1.5 + scale*H;
set(trol, 'XData',Xt);
set(chain,'XData',Xc);
set(ref,'XData',Xr);
drawnow;

end;

close(figure(1));
close(figure(2));

return

```

## Double pendule

```
% Mouse-driven motion planning
%   for the double pendulum at the "musÉE des sciences de la Villette"
%   mai 99
%   Ecole des Mines de Paris,
%   Centre Automatique et Systemes
%   60 Bd St Michel
%   75272 Paris
%   Nicolas Petit: petit@cas.ensmp.fr
%   Pierre Rouchon: rouchon@cas.ensmp.fr
%   Yves Lenoir : lenoir@cas.ensmp.fr
%
% Linear approximation
% 2 homogeneous beams of length l
% vertical deviation th1 and th2
% trolley abscissa D is the control
% Motion planning based on the flat output:
%   z= D + (35/36)*th1*l + (7/12)*l*th2 is the flat output
% g gravity
%
% th1= z^(2)/g - (1/3)*(z^(4)/g^2)*l
% th2= z^(2)/g + (1/9)*(z^(4)/g^2)*l
% D = z - (14/9)*z^(2)/g * l + (7/27)*(z^(4)/g^2)*(l^2)
%
%
%
%
%
clear all;

L=.5; % beam length
g=9.81; % gravity in m/s^2
scale=10.8825;

A = 0.75; th1= 18*(pi/180); th2= (18-27)*(pi/180);

D=A; z= D + (35/36)*th1*L + (7/12)*L*th2; dz=0.;
d2z= g*(3*th2+th1)/4;
d3z=0;
d4z=(9/4)*(g^2/L)*(th2-th1);

dtmin=0.001;
dtmax=1.;

dt=0.02;
```

```

n=floor(10/dt);
Dr=D*ones(1,n);th1r=th1*ones(1,n);th2r=th2*ones(1,n);zr=z*ones(1,n);

nn=[1:n-1];
tr=0*Dr;

figure(1),clf;
set(gca,'position',[0 0 1 1],'visible','off','Xlim',[0 19],'Ylim',[0 14]...
,'nextplot','add');

% trolley
Xt=1+[0 1 1 0 ] + scale*D;
Yt=1+[0 0 1/2 1/2 ];
trol=fill(Xt,Yt,'g','EraseMode','background');

% ref
Xr=1+[0 1 0.5 0 ] + scale*D;
Yr=0.3+[0 0 1/2 0 ];
ref=fill(Xr,Yr,'y','EraseMode','background');

% pendule 1 et 2 avec les deux articulations
Xp1=1.5 + scale*[ D D+L*sin(th1) ];
Yp1=1.5+scale*[0 L*cos(th1) ];
Xp2=1.5 + scale*[ D+L*sin(th1) D+L*sin(th1)+L*sin(th2) ];
Yp2=1.5+scale*[ L*cos(th1) L*cos(th1)+L*cos(th2) ];

Xj1=1.5 + scale*(D + L*cos(0:(2*pi/10):(2*pi))/25 );
Yj1=1.5+scale*(L*sin(0:(2*pi/10):(2*pi))/25);
Xj2=1.5 + scale*(D+L*sin(th1) + L*cos(0:(2*pi/10):(2*pi))/25 );
Yj2=1.5+scale*(L*cos(th1) + L*sin(0:(2*pi/10):(2*pi))/25);

P1=line(Xp1,Yp1,'EraseMode','background','LineWidth', 4, 'Color', [1 0 0 ]);
P2=line(Xp2,Yp2,'EraseMode','background','LineWidth', 4, 'Color', [0 0 1 ]);

J1=fill(Xj1,Yj1,'k','EraseMode','background','Facecolor',[1 0 0 ]);
J2=fill(Xj2,Yj2,'k','EraseMode','background','Facecolor',[0 0 1 ]);

set(gcf,'WindowButtonMotionFcn','1;');

% title
text(9.5,13.5,'DOUBLE INVERTED PENDULUM: MOUSE-DRIVEN MOTION PLANNING','color',[0 0 0],...
'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
text(9.5,13,'display speed slider','color',[0 0 0],
'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
p1=[7.5/19 12.6/14 4/19 0.2/14];
Hslider=uicontrol(figure(1),'units','normalized','style','slider','position',p1,...

```

```

'min',log(dtmin),'max',log(dtmax),'value',log(dt),...
    'callback',['buf=get(Hslider, 'value');dt=exp(buf);']);

i=0;

t1=0.3;
s=1.3;

seuil=0.1;

t2=t1/s;
t3=t2/s;
t4=t3/s;
t5=t4/s;

F=[
    -1/t1 1/t1 0 0 0
    0 -1/t2 1/t2 0 0
    0 0 -1/t3 1/t3 0
    0 0 0 -1/t4 1/t4
    0 0 0 0 -1/t5
];
F2=F*F;
F3=F2*F;
F4=F3*F;
M=[ 1 0 0 0 0
    F(1,:)
    F2(1,:)
    F3(1,:)
    F4(1,:)
];

N=inv(M)*[z;dz;d2z;d3z;d4z];
z1=N(1);
z2=N(2);
z3=N(3);
z4=N(4);
z5=N(5);

Hplay=uicontrol('style','push',...
    'units','normalized','position',[15/19 12.7/14 2/19 .5/14], ...
    'string','Plot','callback',[ ...
    'figure(2);clf;' ...
    'subplot(211);plot(tr,zr); zoom on;' ...
    'title(''flat output (m) versus time (s)'')';' ...
    'subplot(212);plot(tr,Dr);zoom on;']...

```

```

        'title(''trolley position (m) versus time (s)'');'...
        'figure(3);clf;plot(tr,th1r,''-''',tr,th2r,'':'');zoom on;' ...
        'title(''angle 1 (solid line) and angle 2 (dashed line) (rd) versus
            time (s)'');' ... 'pause;figure(1);' ...
    ]);

set(Hplay,'visible','off');

Hrun=icontrol('style','push',...
    'units','normalized','position',[1/19 12.7/14 2/19 .5/14], ....
    'string','stop','callback', ...
    ' i=2;' );
set(Hrun,'visible','off');

figure(1);
pause(1)
set(Hplay,'visible','on')
set(Hrun,'visible','on')
Tini=2;
tt=0;
while (i < 1)
    tt=tt+dt;
    if (tt > Tini)
        buf=get(gca,'CurrentPoint');
        A=(buf(1,1)-1.5)/scale;
        A=max(0,A);
        A=min(1.4,A);
    end;
    z1=(z1+dt*z2/t1)/(1+dt/t1);
    z2=(z2+dt*z3/t2)/(1+dt/t2);
    z3=(z3+dt*z4/t3)/(1+dt/t3);
    z4=(z4+dt*z5/t4)/(1+dt/t4);
    t5b=t5;
    sat=A-z5;
    if(tt > Tini)
        t5b=t5*max(1,abs(sat)/seuil);
    end;
    z5=(z5+dt*A/t5b)/(1+dt/t5b);

    N=M*[z1;z2;z3;z4;z5];
    z=N(1);
    dz=N(2);
    d2z=N(3);
    d3z=N(4);
    d4z=N(5);
    th1= d2z/g - (1/3)*(d4z/g^2)*L;

```

```

th2= d2z/g + (1/9)*(d4z/g^2)*L;
D = z - (14/9)*d2z/g * L + (7/27)*(d4z/g^2)*(L^2);

Xt=1+[0 1 1 0 ] + scale*D;
Xr=1+[0 1 0.5 0 ] + scale*A;

Xp1=1.5 + scale*[ D D+L*sin(th1) ];
Yp1=1.5+scale*[0 L*cos(th1) ];
Xp2=1.5 + scale*[ D+L*sin(th1) D+L*sin(th1)+L*sin(th2) ];
Yp2=1.5+scale*[ L*cos(th1) L*cos(th1)+L*cos(th2) ];

Xj1=1.5 + scale*(D + L*cos(0:(2*pi/10):(2*pi))/25 );
Yj1=1.5+scale*(L*sin(0:(2*pi/10):(2*pi))/25);
Xj2=1.5 + scale*(D+L*sin(th1) + L*cos(0:(2*pi/10):(2*pi))/25 );
Yj2=1.5+scale*(L*cos(th1) + L*sin(0:(2*pi/10):(2*pi))/25);

set(trol, 'XData',Xt);
set(ref, 'XData',Xr);
set(P1,'XData',Xp1,'Ydata',Yp1);
set(J1,'XData',Xj1,'Ydata',Yj1);
set(P2,'XData',Xp2,'Ydata',Yp2);
set(J2,'XData',Xj2,'Ydata',Yj2);
drawnow;
Dr(nn)=Dr(nn+1); Dr(n)=D;
zr(nn)=zr(nn+1); zr(n)=z;
th1r(nn)=th1r(nn+1); th1r(n)=th1;
th2r(nn)=th2r(nn+1); th2r(n)=th2;
tr(nn)=tr(nn+1);tr(n)=tt;

end;

close(ffigure(1));
close(ffigure(2));
close(ffigure(3));

return

```



## Chaîne pesante inversée

```
% Mouse-driven motion planning
%   for inverted heavy chain system
% march 99
% Ecole des Mines de Paris,
% Centre Automatique et Systemes
% 60 Bd St Michel
% 75272 Paris
%   Nicolas Petit: petit@cas.ensmp.fr
%   Pierre Rouchon: rouchon@cas.ensmp.fr
%
% Linear approximation (Cf the model studied by Daniel Bernoulli 1738 )
%    $D_{tt} H = D_x ( g x D_x H ) = 0$  pour  $-L < x < 0$ 
%    $H(x=-L,t) = D$  (the control, horizontal position of the trolley)
%
% flat output:  $y(t)=H(0,t)$  the position of the free end
% motion planing formulae
%
%  $H(x,t) = 1/(2 \pi) \int_0^\pi [ y(t - 2 i \sqrt{x/g} \sin s) + y(t + 2 i \sqrt{x/g} \sin s) ] ds$ 
% derived via symbolic calculus (Poisson integral representation of the
% Bessel function  $J_0$ ) ( $i=\sqrt{-1}$ )
%
%
clear all;
L=1.; % rope length in m
A_max= 1.5*L ; % amplitude of horizontal motion depth in m
g=9.81; % garvity in m/s^2
T_max=2*sqrt(A_max/g); % interval of motion (s)
eps=1.e-8;
sig=1.7*sqrt(L/g);

DT=sqrt(-log(eps))*sig ;

scale=min(11., 11/max(A_max*14/19,L));

% space mesh
dx=L/40.;
x=[0:dx:L];
nx=length(x);
H=zeros(1,nx);
% time step
dt0=DT/50;
dt=dt0/3;
dtmin=DT/1000;
dtmax=DT/3.;

TT=[-DT:dt0:DT]';
```

```

YY=0*TT;
mt=length(YY);
m0=(mt+1)/2.;
mm=[1:mt-1];

Y=0*[-5*DT:dt:0]; D=Y;t=Y;
nt=length(Y);
nn=[1:nt-1];

figure(1),clf;
set(gca,'position',[0 0 1 1],'visible','off','Xlim',[0 19],'Ylim',[0 14]....
    ,'nextplot','add');

% trolley

Xt=1+[0 1 1 0 ]+scale*H(nx);
Yt=1.5+[0 0 1/2 1/2 ];
trol=fill(Xt,Yt,'g','EraseMode','background');

% cable

Xc=1.5 + scale*H;
Yc=12- scale*x;
chain=line(Xc,Yc,'EraseMode','background','LineWidth', 4, 'Color', [0 0 1 ]);

% ref
Xr=1+[0 1 0.5 0 ] + scale*H(nx);
Yr=0.3+[0 0 1/2 0 ];
ref=fill(Xr,Yr,'y','EraseMode','background');

set(gcf,'WindowButtonMotionFcn','1;');

Hplay=uicontrol('style','push',...
    'units','normalized','position',[15/19 12.6/14 2/19 .5/14], ....
    'string','Plot','callback', ...
    ['figure(2);clf;' ...
    'subplot(211);' ...
    'plot(t,Y);'...
    'title(''flat output (m) versus time'');'...
    'subplot(212);'...
    'plot(t,D);'...
    'title(''trolley position (m/s)versus time''); pause;figure(1);'...
    ]);

set(Hplay,'visible','off');

```

```

Hrun=uicontrol('style','push',...
    'units','normalized','position',[1/19 12.7/14 2/19 .5/14], ....
    'string','stop','callback', ...
    ' ',' ','visible','off');

% title
text(9.5,13.5,'HEAVY CHAIN: MOUSE-DRIVEN MOTION PLANNING','color',[0 0 0],...
    'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
text(9.5,13,'display speed slider','color',[0 0 0],
    'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
p1=[7.5/19 12.6/14 4/19 0.2/14];
Hslider=uicontrol(figure(1),'units','normalized','style','slider','position',p1,...
    'min',log(dtmin),'max',log(dtmax),'value',log(dt),...
    'callback',['buf=get(Hslider,\'value\');dt=exp(buf);']);

figure(1);
pause(1)
set(Hrun,'string','Stop','callback','i=2;');
set(Hplay,'visible','on')
set(Hrun,'visible','on')

t1=T_max/100;
t2=t1;
seuil=A_max;
y1=0;
y2=0;

i=0;

dth=pi/100;
th=[0:dth:pi-dth];
Sth=sin(th);

tt=0.;
y1_old=y1;

% the matrix (nx,mt)
EE=zeros(nx,mt);
for ix=1:nx;
    tau=2*sqrt(x(ix)/g);
    s=sqrt(-1)*tau*Sth;
    for it=1:mt;
        z= (T(it)+s)/sig;
        EE(ix,it)=dt0*(dth/pi)*real(sum(exp(-z.*z)));
    end
end
end

```

```

EE=EE/sig/sqrt(pi);

while (i < 1)
    buf=get(gca,'CurrentPoint');
    A=(buf(1,1)-1.5)/scale;
    A=max(0,A);
    A=min(A_max,A);

    y1=(y1+dt*y2/t1)/(1+dt/t1);
    t2b=t2*max(1,abs(A-y2)/seuil);
    y2=(y2+dt*A/t2b)/(1+dt/t2b);

    tt=tt+dt;
    if (tt >= dt0);
        ii=floor(tt/dt0);
        dy1=(y1-y1_old)/tt;
        for iii=1:ii;
            YY(mm)=YY(mm+1);YY(mt)=y1_old+iii*dt0*dy1;
        end;
        y1_old=y1-dy1*(tt-ii*dt0);
        tt=0.;
    end;

    H=EE*YY;

    Y(nn)=Y(nn+1); Y(nt)=H(1);
    D(nn)=D(nn+1); D(nt)=H(nx);
    t(nn)=t(nn+1); t(nt)=t(nt)+dt;

    Xt=1+[0 1 1 0 ] + scale*H(nx);
    Xr=1+[0 1 0.5 0 ] + scale*A;
    Xc=1.5 + scale*H;
    set(trol, 'XData',Xt);
    set(chain, 'XData',Xc);
    set(ref, 'XData',Xr);
    drawnow;

end;

close(ffigure(1));
close(ffigure(2));

return

```

## Chaleur 1D (appelle heatdrv.m)

```
% Mouse-driven motion planning
%   for the 1D Heat Rod
%   march 99
%   Ecole des Mines de Paris,
%   Centre Automatique et Systemes
%   60 Bd St Michel
%   75272 Paris
%   Pierre Rouchon: rouchon@cas.ensmp.fr
%
% Linear model:  $H_t = H_{zz}$ 
%                $H_z(0,t)=0, H(1,t)=u(t)$ 
%
% flat output:  $y(t)=H(0,t)$ 
% motion planing formulae
%
%  $H(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}}{(2n)!} x^{(2n)}$ 
% with y a Gevrey function of order less or equal to 2
%
% see Ph. Martin, R Murray and P. Rouchon
% flat systems, European control conference, Mini-courses, 1997, Brussel
% see also B. Laroche, Ph Martin, P. Rouchon
% Motion planning for a class of partial differential equations
% with boundary control, CDC 98, Tampa.
%
clear all;

Igevrety=1.9;
expo=1/(Igevrety-1); % Gevrey exponent 1+1/expo

T_max= 2. ;
DT=1;
scale=15;

% space mesh
dz=1/20.;
z=[0:dz:1];
nz=length(z);

nS=10;

HH=zeros(nS+1,nz);
HH(1,:)=z.^0;
z2=z.^2;
for i=2:nS+1
    HH(i,:)=HH(i-1,:).*z2;
end;
```

```

% time step and convolution length
eps= 0.5;
dt0=eps/50;

dt=dt0;
dtmin=eps/1000;
dtmax=eps/3.;

tt0= [dt0:dt0:eps-dt0]';
YY=0*tt0';
GG=heatdrv(tt0,nS,expo,eps);
GG=GG/sum(GG(:,1));
% comment next line for antidiffusion
GG=GG*diag((-ones(1,nS+1)).^[0:nS]);

H=YY*GG*HH;

mt=length(YY);
m0=(mt+1)/2.;
mm=[1:mt-1];

t=0*[-5:dt:0];
nt=length(t);
Nrec=[1 floor(nz/4) floor(nz/2) floor(3*nz/4) nz];
Yrec=zeros(nt,length(Nrec));
nn=[1:nt-1];

y1=0;

figure(1),clf;
set(gca,'position',[0 0 1 1],'visible','off','Xlim',[0 19],'Ylim',[0 14]...
,'nextplot','add');

% Color table and map
% Color table
Cmap=jet(100);
colormap(Cmap);
caxis([0 1]);

Rmin=2;
Rmax=12;
Xx=[0 0 .45 .45] + 0;
Yy=[Rmin Rmax Rmax Rmin] + 0.;

Cc=[4/12 10/12 10/12 4/12];
fill(Xx,Yy,Cc,'EraseMode','background');

```

```

% ref
Xr=[0.5 .95 .95 0.5 ] ;
Yr=[0 .5 -.5 0 ];
Cr=[1 1 1 1 ];
YHr=(7 + 5*y1/T_max);
CHr=(7 + 3*y1/T_max)/12;
ref=fill(Xr,YHr+Yr,'y','EraseMode','background');

%
% adiabatic edge
E=.3;
Xx=[17 15 15 0 0 15 15 17 ] + 1.5;
Yy=[4*E 4*E E E -E -E -4*E -4*E ] + 7.;
line(Xx,Yy,'EraseMode','background','LineWidth',6,'Color',[0 0 0 ])
% control source
Xx=[17 15 15 17 ] + 1.5;
Yy=[4*E 4*E -4*E -4*E ] + 7.;
Cu=[1 1 1 1 ];
CHu=(7+3*y1/2)/12;
UU=fill(Xx,Yy,CHu*C,'EraseMode','background');
text(18.7,7+4*E+.3,'heat source','color',[0 0 0],
'EraseMode','background','HorizontalAlignment','right');

%heated beam
Xt=scale*[ z fliplr(z) ] + 1.5 ;
Yt=E*[ -ones(1,nz) ones(1,nz)] + 7. ;
Ct=(7+3*H/2)/12;
Ct=[Ct fliplr(Ct)];
tube=fill(Xt,Yt,Ct,'EraseMode','background');

set(gcf,'WindowButtonMotionFcn','1;');

Hplay=uicontrol('style','push',...
'units','normalized','position',[15/19 12.6/14 2/19 .5/14], ....
'string','Plot','callback', ...
['figure(2);clf;'] ...
'plot(t,Yrec);zoom on;'. ...
'title('temperatures'); pause;figure(1);'. ...
]);

set(Hplay,'visible','off');

Hrun=uicontrol('style','push',...
'units','normalized','position',[1/19 12.7/14 2/19 .5/14], ....
'string','stop','callback', ...
';','visible','off');

```

```

% title
text(9.5,13.5,'HEATED ROD: MOUSE-DRIVEN MOTION PLANNING','color',[0 0 0],...
    'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
text(9.5,13,'display speed slider','color',[0 0 0],
    'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
p1=[7.5/19 12.6/14 4/19 0.2/14];
Hslider=uicontrol(figure(1),'units','normalized','style','slider','position',p1,...
    'min',log(dtmin),'max',log(dtmax),'value',log(dt0),...
    'callback',['buf=get(Hslider,\'value\');dt=exp(buf);']);

figure(1);
pause(1)
set(Hrun,'string','Stop','callback','i=2;');
set(Hplay,'visible','on')
set(Hrun,'visible','on')

t1=1/10.;
seuil=T_max/3;
y1=0;

i=0;

tt=0.;
y1_old=y1;
while (i < 1)
    buf=get(gca,'CurrentPoint');
    A=2*(buf(1,2)-7)/5;
    A=max(-T_max,A);
    A=min(T_max,A);

    t1b=t1*max(1,abs(A-y1)/seuil);
    y1=(y1+dt*A/t1b)/(1+dt/t1b);

    tt=tt+dt;
    if (tt >= dt0);
        ii=floor(tt/dt0);
        dy1=(y1-y1_old)/tt;
        for iii=1:ii;
            YY(mm)=YY(mm+1);YY(mt)=y1_old+iii*dt0*dy1;
        end;
        y1_old=y1-dy1*(tt-ii*dt0);
        tt=0.;
    end;

H=YY*GG*HH;

```



```

Yrec(nn,:)=Yrec(nn+1,:); Yrec(nt,:)=H(Nrec);
t(nn)=t(nn+1); t(nt)=t(nt)+dt;

CHu=(7+3*H(nz)/2)/12; CHu=max(0,CHu);CHu=min(1,CHu);
Ct=(7+3*H/2)/12;
Ct=[Ct fliplr(Ct)];Ct=max(0,Ct);Ct=min(1,Ct);

YHr=(7 + 5*A/T_max);
CHR=(7 + 3*A/T_max)/12;

set(tube,'FaceVertexCData',Ct');
set(UU,'FaceVertexCData',CHu*Cu');
set(ref,'Ydata',YHr+Yr);
drawnow;

end;

close(figure(1));
close(figure(2));

return

-----

heatdrv.m

function y=heatdrv(t,n,s,e)
% calcul de  $y^{(j)}/(2j)!$  pour la fonction
%  $y(t)=\exp(-1/(t/e*(1-t/e))^s)$  qui est 1+1/s Gevrey-Romieu pour  $\nu > 0$ 
%
% entrees:
% t(nt,1): un vecteur colonne de nt instants entre 0 et e
% n: un ordre de derivation
% s: l'exposant
% e: nombre positif
% sorties:
% y(nt,n+1): une matrice
% y(i,j) est la valeur de  $y^{(j-1)}/(2j-2)!$  en t(i)
%
% Pierre Rouchon
% mai 96
%
[nt,mt]=size(t);
if mt>1
error('derive: t doit etre un vecteur colonne')
end;

```

```

y=zeros(nt,n+1);
tau=t/e;
tau=max(0.001,tau);tau=min(0.999,tau); % evite pb num vers 0 et vers 1
p=tau.*(1-tau);
p1=(1-2*tau)/e;
p2=-2/e/e;

% A correspond a ( t/e(1-t/e)^(s+1) ) ^j / (j)!
A=zeros(nt,n+1);
A(:,1)=p.^(s+1);
A(:,2)=(s+1)*p1.*A(:,1)./p;
for i=2:n;
    A(:,i+1)= ( (s+2-i)*p1.*A(:,i) + (s+2-i/2)*p2*A(:,i-1) ) ./ (i*p);
end
%
y(:,1)=exp( -1./(p.^s) );
y(:,2)=s*p1.*y(:,1)./A(:,1)/2;
for i=2:n;
    f=s*( p1.*y(:,i)+p2*y(:,i-1)/(2*i-3)/2 ) / (2*i)/(2*i-1) ;
    x=-1;
    for k=1:i-1
        x=x*(i-k)/(2*i-2*k+2)/(2*i-2*k+1);
        f=f+x*A(:,k+1).*y(:,i-k+1);
    end;
    y(:,i+1)=f./A(:,1);
end

```

## Pendule inversé

```
% Mouse-driven motion planning
%   for the double pendulum at the "musÉE des sciences de la Villette"
%   mai 99
%   Ecole des Mines de Paris,
%   Centre Automatique et Systemes
%   60 Bd St Michel
%   75272 Paris
%   Pierre Rouchon: rouchon@cas.ensmp.fr
%
% Linear approximation
% 1 homogeneous beams of length l
% vertical deviation th
% trolley abscissa D is the control
% Motion planning based on the flat output:
%   z= D + (2/3)*th*l, abscisse of the oscillation center, is the flat output
% g gravity
%
% th= z^(2)/g
% D = z - (2/3)*z^(2)/g * l
%
%
%
%
%
%
clear all;

L=1.; % beam length
g=9.81; % gravity in m/s^2
scale=10.8825;

A = 0.75; th= 0;

D=A;

z= D + (2/3)*th*L ;

dtmin=0.001;
dtmax=1.;

dt=0.02;
n=floor(10/dt);
Dr=D*ones(1,n);thr=th*ones(1,n);zr=z*ones(1,n);

nn=[1:n-1];
tr=0*Dr;
```

```

figure(1),clf;
set(gca,'position',[0 0 1 1],'visible','off','Xlim',[0 19],'Ylim',[0 14]...
    , 'nextplot','add');

% trolley
Xt=1+[0 1 1 0 ] + scale*D;
Yt=1+[0 0 1/2 1/2 ];
trol=fill(Xt,Yt,'g','EraseMode','background');

% ref
Xr=1+[0 1 0.5 0 ] + scale*D;
Yr=0.3+[0 0 1/2 0 ];
ref=fill(Xr,Yr,'y','EraseMode','background');

% pendule 1 et 2 avec les deux articulations
Xp=1.5 + scale*[ D D+L*sin(th) ];
Yp=1.5+scale*[0 L*cos(th) ];

Xj=1.5 + scale*(D + L*cos(0:(2*pi/10):(2*pi))/50 );
Yj=1.5+scale*(L*sin(0:(2*pi/10):(2*pi))/50);

P=line(Xp,Yp,'EraseMode','background','LineWidth', 4, 'Color', [0 0 1 ]);
J=fill(Xj,Yj,'k','EraseMode','background','Facecolor',[0 0 1 ]);
set(gcf,'WindowButtonMotionFcn','1;');

% title
text(9.5,13.5,'INVERTED PENDULUM: MOUSE-DRIVEN MOTION PLANNING','color',[0 0 0],...
    'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
text(9.5,13,'display speed slider','color',[0 0 0],
    'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
p1=[7.5/19 12.6/14 4/19 0.2/14];
Hslider=uicontrol(figure(1),'units','normalized','style','slider','position',p1,...
    'min',log(dtmin),'max',log(dtmax),'value',log(dt),...
    'callback',['buf=get(Hslider, 'value');dt=exp(buf);']);

i=0;

ts=0.25;

seuil=0.4;

z1=z;
z2=z;
z3=z;

```

```

Hplay=uicontrol('style','push',...
    'units','normalized','position',[15/19 12.7/14 2/19 .5/14], ....
    'string','Plot','callback',[ ...
    'figure(2);clf;' ...
    'subplot(211);plot(tr,zr); zoom on;' ...
    'title(''flat output (m) versus time (s)'')';' ...
    'subplot(212);plot(tr,Dr);zoom on;'...
    'title(''trolley position (m) versus time (s)'')';'...
    'figure(3);clf;plot(tr,thr,''-')';zoom on;' ...
    'title(''pendulum angle (rd) versus time (s)'')';' ...
    'pause;figure(1);' ...
    ]);

set(Hplay,'visible','off');

Hrun=uicontrol('style','push',...
    'units','normalized','position',[1/19 12.7/14 2/19 .5/14], ....
    'string','stop','callback', ...
    ' i=2;' );
set(Hrun,'visible','off');

figure(1);
pause(1)
set(Hplay,'visible','on')
set(Hrun,'visible','on')
Tini=2;
tt=0;
while (i < 1)
    tt=tt+dt;
    if (tt > Tini)
        buf=get(gca,'CurrentPoint');
        A=(buf(1,1)-1.5)/scale;
        A=max(0,A);
        A=min(1.4,A);
    end;
    z1=(z1+dt*z2/ts)/(1+dt/ts);
    z2=(z2+dt*z3/ts)/(1+dt/ts);
    tb=ts;
    sat=A-z2;
    if(tt > Tini)
        tb=ts*max(1,abs(sat)/seuil);
    end;
    z3=(z3+dt*A/tb)/(1+dt/tb);

    z=z1;
    dz=(z2-z1)/ts;

```

```

dz2=(z3-z2)/ts;
d2z=(dz2-dz)/ts;

th= d2z/g ;
D = z - (2/3)*th * L ;

Xt=1+[0 1 1 0 ] + scale*D;
Xr=1+[0 1 0.5 0 ] + scale*A;

Xp=1.5 + scale*[ D D+L*sin(th) ];
Yp=1.5+scale*[0 L*cos(th) ];

Xj=1.5 + scale*(D + L*cos(0:(2*pi/10):(2*pi))/50 );
Yj=1.5+scale*(L*sin(0:(2*pi/10):(2*pi))/50);

set(trol, 'XData',Xt);
set(ref, 'XData',Xr);
set(P,'XData',Xp,'Ydata',Yp);
set(J,'XData',Xj,'Ydata',Yj);
drawnow;
Dr(nn)=Dr(nn+1); Dr(n)=D;
zr(nn)=zr(nn+1); zr(n)=z;
thr(nn)=thr(nn+1); thr(n)=th;
tr(nn)=tr(nn+1);tr(n)=tt;

end;

close(figure(1));
close(figure(2));
close(figure(3));

return

```

## Gamelle d'eau

```
% Mouse-driven motion planning
%   for water tank system
%   march 99
%   Ecole des Mines de Paris,
%   Centre Automatique et Systemes
%   60 Bd St Michel
%   75272 Paris
%   Nicolas Petit: petit@cas.ensmp.fr
%   Pierre Rouchon: rouchon@cas.ensmp.fr
%
% Linear approximation of the Saint-Venant equation
% see the paper:
% Motion planning and nonlinear simulations for
% a tank containing a fluid.
% F. Dubois, N. Petit and P. Rouchon
% in European control conference, ECC99
% july 1999.
%
%
%

clear all;
L=1.;
D_max=2*L;
H=.2;

g=9.81;V=sqrt(g*H); delta=L/V;
dz=L/40;

z=[0:dz:L];
nz=length(z);
h=H*ones(1,nz);
Ht=H + 2*min(H,L);
S=min(19/(L+D_max),14/Ht); % scaling

% time step
DT=delta/2.;
dt0=DT/40;
dt=dt0;
dtmin=DT/1000;
dtmax=DT/3.;

YY=0*[-DT:dt0:DT];
YYdot=0*[-DT:dt0:DT];
```

```

mt=length(YY);
m0=(mt+1)/2.;
mm=[1:mt-1];

ip=round((L/2-z)/V/dt0) + (mt+1)/2;
im=round((z-L/2)/V/dt0) + (mt+1)/2;

Y=0*[-5*DT:dt:0]; D=Y;t=Y;
nt=length(Y);
nn=[1:nt-1];

figure(1),clf;
set(gca,'position',[0 0 1 1],'visible','off','Xlim',[0 19],'Ylim',[0 14]....
,'nextplot','add');

Xi=9.5-L*S/2.;
Yi=7.5-Ht/2 *S;

Xtank=Xi + L*S + L*S*[0 0 -1 -1 ];
Ytank=Yi+[Ht*S 0 0 Ht*S];
Xwater=[ Xtank Xi+z*S ];
Ywater=[ Ytank Yi+h*S ];
tank=fill(Xwater,Ywater,'c','EraseMode','background','FaceColor',[0 0 1]);

% ref
Xr=Xi+ L*S/2 +[0 1 0.5 0 ] -.5;
Yr=Yi-1+[0 0 1/2 0 ];
ref=fill(Xr,Yr,'y','EraseMode','background');

set(gcf,'WindowButtonMotionFcn','1;');

Hplay=uicontrol('style','push',...
'units','normalized','position',[15/19 12.7/14 2/19 .5/14], ....
'string','Plot','callback', ...
['figure(2);clf;' ...
'subplot(211);' ...
'plot(t,Y);'...
'title(''flat output (m) versus time'');'...
'subplot(212);'...
'plot(t,D);'...
'title(''tank position (m) versus time''); pause,figure(1);'...
]);

set(Hplay,'visible','off');

```



```

Hrun=icontrol('style','push',...
              'units','normalized','position',[1/19 12.7/14 2/19 .5/14], ....
              'string','stop','callback', ...
              ' i=2; ','visible','off' );

% title
text(9.5,13.5,'THE WATER TANK: MOUSE-DRIVEN MOTION PLANNING','color',[0 0 0],...
     'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
text(9.5,13,'display speed slider','color',[0 0 0],
     'EraseMode','background','HorizontalAlignment','center');
p1=[7.5/19 12.6/14 4/19 0.2/14];
Hslider=icontrol(figure(1),'units','normalized','style','slider','position',p1,...
                 'min',log(dtmin),'max',log(dtmax),'value',log(dt0),...
                 'callback',['buf=get(Hslider, 'value');dt=exp(buf);']);

figure(1);
pause(1)
set(Hrun,'visible','on');
set(Hplay,'visible','on')

seuil=L/2;
t1=2*H/V;
t2=t1/1.5;
t3=t2/1.5;

y1=0;
y2=0;
y3=0;

i=0;

tt=0.;
y1_old=0;
y1dot_old=0;

while (i < 1)
    buf=get(gca,'CurrentPoint');
    A=(buf(1,1)-9.5)/S;
    A=max(-D_max/2.1,A);
    A=min(D_max/2.1,A);

    y1=(y1+dt*y2/t1)/(1+dt/t1);
    y2=(y2+dt*y3/t2)/(1+dt/t2);
    t3b=t3*max(1,abs(A-y3)/seuil);
    y3=(y3+dt*A/t3b)/(1+dt/t3b);

    y1dot=(y2-y1)/t1;

```

```

tt=tt+dt;
if (tt >= dt0);
    ii=floor(tt/dt0);
    dy1=(y1-y1_old)/tt;
    dy1dot=(y1dot-y1dot_old)/tt;
    for iii=1:ii;
        YY(mm)=YY(mm+1);YY(mt)=y1_old+iii*dt0*dy1;
        YYdot(mm)=YYdot(mm+1);YYdot(mt)=y1dot_old+iii*dt0*dy1dot;
    end;
    y1_old=y1-dy1*(tt-ii*dt0);
    y1dot_old=y1dot-dy1dot*(tt-ii*dt0);
    tt=0.;
end;

h=( ( V+(YYdot(ip)-YYdot(im) )/4 ).^2)/g;
dd=(YY(1)+YY(mt))/2;

Y(nn)=Y(nn+1); Y(nt)=YY((mt+1)/2);
D(nn)=D(nn+1); D(nt)=dd;
t(nn)=t(nn+1); t(nt)=t(nt)+dt;

Ywater=[ Ytank Yi+h*S ];
set(tank,'XData',Xwater+S*dd,'YData',Ywater);
set(ref,'XData',Xr+S*A);
drawnow;

end;

close(ffigure(1));
close(ffigure(2));

return

```

