Journées mathématiques X-UPS

Année 1996

Aspects des systèmes dynamiques: le premier retour

Adrien DOUADY

Le doublement de l'angle

Journées mathématiques X-UPS (1996), p. 99-115.
https://doi.org/10.5802/xups.1996-05

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1996, p. 99–115 doi: 10.5802/xups.1996-05

LE DOUBLEMENT DE L'ANGLE

par

Adrien Douady

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 1996. Aspects des systèmes dynamiques : le premier retour. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1996, et Éditions de l'École polytechnique, 2009.

Introduction (à lire en dernier)

Dans les systèmes dynamiques, on distingue deux grandes tendances de comportement, appelées *hyperbolique* et *quasi-périodique.* Le doublement de l'angle constitue un exemple des plus typiques du comportement hyperbolique. Le caractère expansif est évident ; le caractère contractant, généralement présent dans les systèmes hyperboliques, est ici absent, remplacé par le fait que l'application n'est pas injective.

Comme il s'agit d'un système particulièrement simple, un grand nombre de propriétés peuvent être établies de façon élémentaire. Cela ne veut pas dire que les démonstrations sont faciles, mais qu'elles utilisent peu d'outils théoriques. Nous nous efforçons de n'utiliser que des notions figurant au programme de Math. Spé.

Notations et définitions. On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. C'est le groupe des angles (plans orientés), en prenant le tour complet et non le radian comme unité. On peut le considérer comme le quotient de l'intervalle $[0, 1]$ par la relation d'équivalence identifiant 0 à 1. Un point de $\mathbb{T}$ est parfois appelé un *angle*, un angle est dit *rationnel* si ses représentants sont rationnels, etc. Un *arc* dans $\mathbb{T}$ est l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$, un *demi-cercle* l'image d'un intervalle de longueur $1/2$.

On considère l'application $\boldsymbol{q} : t \mapsto 2t$ de $\mathbb{T}$ dans lui-même. On note $\boldsymbol{q}^n$ la n-ème itérée de $\boldsymbol{q}$. Étant donné $t \in \mathbb{T}$, l'orbite $O(t)$ de t est l'ensemble des $\boldsymbol{q}^n(t)$. On note $\omega(t)$ l'ensemble des points de $\mathbb{T}$ qui sont limite d'une suite extraite de la suite des $\boldsymbol{q}^n(t)$. L'*orbite fermée* de t est la fermeture de $O(t)$, c'est donc $O(t) \cup \omega(t)$.

Une étoile $(*)$ indique un fait énoncé sans démonstration, celle-ci étant laissée au lecteur. Quand elle est un peu difficile, on mettra $(**)$ ou $(***)$. Les endroits qui s'écartent du programme de Math. Spé. sont indiqués par (!).

Un grand nombre de propriétés s'étendent à $\boldsymbol{q}_d : t \mapsto dt$ pour d entier $\geqslant 2$ (la généralisation étant souvent plus facile quand d est premier),

Plan de l'exposé. Nous montrons d'abord que les points d'orbite finie sont les points rationnels de $\mathbb{T}$. Par analogie avec le fait que l'ensemble des nt est fini pour t rationnel et dense pour t irrationnel, on pourrait penser que l'orbite (par $\boldsymbol{q}$) de tout point irrationnel est dense dans $\mathbb{T}$. Nous montrons au chapitre 1 qu'il n'en est rien et nous donnons des exemples montrant ce que peut être l'orbite fermée, après quoi nous donnons (avec ou sans démonstration) des propriétés générales des orbites fermées quand elles ne sont pas $\mathbb{T}$ tout entier.

Au chapitre 2, nous étudions les orbites contenues dans un demi-cercle, qui forment une famille particulièrement intéressante.

Le chapitre 3 est consacré aux propriétés de $\boldsymbol{q}$ qui découlent de son caractère expansif.

Les images de l'ensemble de Mandelbrot et de la courbe de Julia (exposé suivant) ont été obtenues par Dan Sorensen. Je l'en remercie.

1. Types d'orbites fermées

1.1. Orbites finies. Un point $t \in \mathbb{T}$ est dit périodique (pour $\boldsymbol{q}$) s'il existe un entier $k > 0$ tel que $\boldsymbol{q}^k(t) = t$; le plus petit k ayant cette propriété est appelé la *période* de t. On dit que t est *pré-périodique* s'il existe un entier ℓ tel que $\boldsymbol{q}^\ell(t)$ soit périodique ; nous appelons le plus petit ℓ ayant cette propriété la *pré-période*. Les points pré-périodiques de pré-période 0 sont les points périodiques. Ces définitions valent pour une application quelconque d'un ensemble dans lui-même. Les points d'orbite finie sont les points pré-périodiques $(*)$.

Pour l'application $\boldsymbol{q}$, nous avons :

Théorème 1. *Les points d'orbite finie sont les points rationnels de* $\mathbb{T}$.

Démonstration

(a) t rationnel $\Longrightarrow$ t d'orbite finie.

Si $t = [p/q]$ (classe $\mod \mathbb{Z}$ de p/q), l'orbite de t est contenue dans l'ensemble des $[i/q]$, $i = 0, \ldots, q-1$. Elle est donc finie.

(b) t pré-périodique $\Longrightarrow$ t rationnel.

Si t est périodique d'ordre k, on a $2^k t = t$, soit $(2^k - 1)t = 0$. Si x est un représentant de t dans $\mathbb{R}$, le nombre $(2^k - 1)x$ est un entier p et on a $x = p/(2k - 1)$.

Si t est pré-périodique de pré-période ℓ et si x est un représentant de t, alors $2^\ell x$ est de la forme $p/(2^k - 1)$, et on a $x = p/2^\ell(2^k - 1)$. $\square$

Remarque. En combinant les deux parties de cette démonstration on voit que tout rationnel peut se mettre sous la forme $p/2^\ell(2^k-1)$.

Cela peut se voir directement dans le cadre arithmétique $(*)$.

1.2. Interprétation de $\boldsymbol{q}$ comme décalage. En représentant chaque nombre de $\mathbb{R}_+$ par son développement en base 2, et en ne retenant que la partie après la virgule, on obtient une correspondance entre $\mathbb{T}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, où $\mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$. L'usage est d'exclure les développements ne comportant que des 1 à partir d'un certain rang. Nous nous écartons de cet usage, et nous considérons qu'un nombre dyadique, c'est-à-dire de la forme $p/2^k$, a deux développements, un se terminant par une infinité de 0 et l'autre par une infinité de 1. L'application $\boldsymbol{q}$ se traduit sur les écritures en base 2 par le décalage d'un cran vers la gauche, avec suppression du premier terme.

Reprenons cela de façon plus précise. Notons E l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ des suites $u = (u_1,\dots,u_n,\dots)$ où les u_i sont égaux à 0 ou 1. Les éléments de E seront appelés *écritures.* À chaque écriture

$$u = (u_1, u_2, \dots)$$

est associé le nombre $\sum u_n/2^n$ qu'elle représente, et sa classe t dans $\mathbb{T}$. On obtient ainsi une application $\boldsymbol{v} : E \to \mathbb{T}$.

On définit le *décalage* $\boldsymbol{s} : E \to E$ par $\boldsymbol{s}(u) = u'$ avec $u'_n = u_{n+1}$. On a $(*)$ un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\boldsymbol{s}} & E \\ {\scriptstyle\boldsymbol{v}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\boldsymbol{v}} \\ T & \xrightarrow{\boldsymbol{q}} & T \end{array}$$

On définit une distance d sur E par $d(u,u') = 2^{-k}$ où k est le plus petit i tel que u_i soit différent de u'_i. Muni de cette distance, E est homéomorphe à l'ensemble de Cantor triadique $(*)$. On munit $\mathbb{T}$ de la distance définie par $d(t,t') = \inf d(x,x')$ pour x représentant de t dans $\mathbb{R}$ et x' de t', la distance sur $\mathbb{R}$ étant la distance usuelle. Alors $\boldsymbol{v}$ est continue et même lipschitzienne de rapport 2, ce qui signifie qu'on a $d(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t')) \leqslant 2\cdot d(t,t')$.

L'application $\boldsymbol{v}$ est surjective mais non injective. Cependant elle est « presque » bijective : à l'exception des angles dyadiques qui forment un ensemble dénombrable, chaque point de $\mathbb{T}$ a un seul point dans son image réciproque. On ne peut pas trouver d'application continue $s : \mathbb{T} \to E$ telle que $\boldsymbol{v} \circ s$ soit l'identité de $\mathbb{T}$. En effet $\mathbb{T}$ est connexe et toute application continue de $\mathbb{T}$ dans E est constante.

Pour $u \in E$, l'orbite de $\boldsymbol{v}(u)$ par $\boldsymbol{q}$ est l'image par $\boldsymbol{v}$ de l'orbite de u par $\boldsymbol{s}$. Il en est de même pour les orbites fermées $(*)$.

1.3. Exemples d'orbites non denses. Soit Y l'ensemble des écritures où ne figurent jamais trois 0 consécutifs, ni trois 1 consécutifs, et posons $X = \boldsymbol{v}(Y)$. L'ensemble Y est infini non dénombrable $(*)$, donc X aussi, et X contient des points irrationnels. On a $\boldsymbol{s}(Y) = Y$, d'où $\boldsymbol{q}(X) = X$; en fait X est l'ensemble des $t \in \mathbb{T}$ dont l'orbite ne rencontre pas l'arc ouvert $]-1/8, 1/8[$. Pour $t \in X$, l'orbite de t est contenue dans X, donc aussi l'orbite fermée puisque X est fermé $(*)$.

Pour tout ouvert U de $\mathbb{T}$, on peut définir de la même façon un ensemble X_U : l'ensemble des points dont l'orbite ne rencontre pas U. C'est un ensemble fermé et on a $\boldsymbol{q}(X_U) \subset X_U$.

L'ensemble X_U peut être fini ou infini, dénombrable ou homéomorphe à l'ensemble de Cantor ou encore non dénombrable et avec des points isolés. Nous étudierons au Chapitre 2 le cas où U est un demi-cercle.

Proposition 1. *Si U est un arc ouvert de longueur $\leqslant 1/2$, l'ensemble X_U n'est pas vide, et on a $\boldsymbol{q}(X_U) = X_U$.*

Démonstration. Pour tout n soit A_n l'ensemble des $t \in \mathbb{T}$ tels que $\boldsymbol{q}^i(t)$ n'appartienne pas à U pour $i = 0, \ldots, n-1$. On a

$$A_1 = \mathbb{T} - U \quad \text{et} \quad A_{n+1} = \boldsymbol{q}^{-1}(A_n) \cap (\mathbb{T} - U).$$

On a $\boldsymbol{q}(A_{n+1}) = A_n$. En effet l'inclusion $\boldsymbol{q}(A_{n+1}) \subset A_n$ est immédiate, et pour chaque élément de A_n, l'une de ses deux images réciproques est dans $\mathbb{T} - U$. Pour tout n, l'ensemble A_n est donc un fermé non vide, et ces fermés forment une suite décroissante. Leur intersection, qui est X_U est donc (!) non vide. On a $X_U = \boldsymbol{q}^{-1}(X_U) \cap (\mathbb{T} - U)$, et il en résulte comme plus haut que $\boldsymbol{q}(X_U) = X_U$. $\square$

Proposition 2 $(*)$***.*** *Si U est un arc de longueur $> 1/2$, l'ensemble X_U est fini.*

1.4. Exemples d'orbite dense. Les exemples du numéro précédent sont en fait exceptionnels. Si on prend un t au hasard dans $\mathbb{T}$, il y a toutes les chances pour qu'il ait une orbite dense. C'est ce que nous verrons au § 1.6 (!). Dans ce §, nous nous préoccupons de construire effectivement un t irrationnel dont on sache qu'il a une orbite dense.

Cette propriété est équivalente $(*)$ au fait que, dans l'écriture binaire u de t, toute suite finie de 0 et de 1 apparaisse quelque part. Pour obtenir une écriture ayant cette propriété, considérons *toutes* les suites finies de 0 et de 1, qui forment un ensemble dénombrable. On peut donc les numéroter par les entiers et les écrire toutes à la file :

$$.0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101 \cdots$$

À ma connaissance, la question de savoir si l'angle de 1 radian a une orbite dense par doublement est une question ouverte. Il s'agit de savoir si toute suite finie de 0 et de 1 apparaît dans le développement binaire de $1/2\pi$. On ne sait pas démontrer qu'il y a une infinité de 7 dans le développement décimal de π, et ces deux questions ont l'air d'être du même ordre de difficulté.

1.5. Exemple d'orbite fermée dénombrable. Considérons $t = \sum 2^{-n^2}$ d'écriture

$$.1\ 00\ 1\ 0000\ 1\ 000000\ 1\ 00000000\ 1 \cdots$$

L'ensemble $\omega(t)$ est formé des angles ayant au plus un 1 dans leur écriture dyadique, c'est-à-dire des 2^{-n} et de 0. Il est donc infini dénombrable, et comme l'orbite de t est aussi dénombrable, l'orbite fermée est infinie dénombrable.

1.6. Toute orbite fermée différente de $\mathbb{T}$ est de mesure nulle. La théorie de la mesure de Lebesgue n'est pas au programme de Math. Spé., mais pour les ensembles fermés d'un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut faire une théorie « à bon marché ».

Définition. Soit X un fermé de $\mathbb{R}$ contenu dans un intervalle ouvert $J =]a, b[$. Les composantes connexes de $J - X$ forment une famille dénombrable d'intervalles ouverts L_i, notons ℓ_i leur longueur. On pose $\mathrm{mes}(X) = b - a - \sum \ell_i$.

Pour justifier cette définition, il faut vérifier $(*)$ que si on remplace J par un intervalle plus grand, cela ne change pas $\mathrm{mes}(X)$.

En théorie de la mesure, on n'est jamais à un point près : on a

$$\mathrm{mes}(X \cup \{c\}) = \mathrm{mes}(X)$$

(ce n'est pas comme en topologie où un intervalle cesse d'être connexe si on lui enlève un point). On peut donc définir $\mathrm{mes}(X)$ pour X fermé de $\mathbb{T}$ comme $\mathrm{mes}(\chi^{-1}(X))$, où χ désigne l'application de passage au quotient $[0,1] \to \mathbb{T}$.

On a $\mathrm{mes}(X') = \mathrm{mes}(X)$ si X' est un translaté de X. Si X' est homothétique de X dans le rapport k, on a $\mathrm{mes}(X') = k \cdot \mathrm{mes}(X)$.

La formule $\mathrm{mes}(X \cup X') = \mathrm{mes}(X) + \mathrm{mes}(X') - \mathrm{mes}(X \cap X')$ est assez difficile à démontrer avec cette définition, mais nous aurons seulement besoin de la propriété suivante, beaucoup plus facile $(*)$:

Proposition 3. *Pour $X \subset [a,b]$ et $X' \subset [b,c]$ fermés, on a*

$$\mathrm{mes}(X \cup X') = \mathrm{mes}(X) + \mathrm{mes}(X').$$

On en déduit $(*)$:

Proposition 4. *Pour $X \subset \mathbb{T}$ fermé, on a* $\mathrm{mes}(\boldsymbol{q}^{-1}(X)) = \mathrm{mes}(X)$.

Nous allons montrer :

Théorème 2. *Soit $X \subset \mathbb{T}$ un sous-ensemble strict, fermé et tel que $\boldsymbol{q}(X) \subset X$. Alors* $\mathrm{mes}(X) = 0$.

Dans $\mathbb{T}$ ou dans $[0,1]$, appelons *intervalle dyadique élémentaire* d'ordre k un intervalle de la forme $]p/2^k, (p+1)/2^k[$ avec $p \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$. Pour démontrer le théorème, il suffit $(*)$ de démontrer :

Lemme. *Pour J intervalle dyadique élémentaire, on a* $\mathrm{mes}(X_J) = 0$.

Démonstration du lemme. Soit k l'ordre de J. On a

$$\mathrm{mes}(\boldsymbol{q}^{-k}(X_J)) = \mathrm{mes}(X_J).$$

Mais $\boldsymbol{q}^{-k}(X_J)$ est réunion des translatés de $Y = \boldsymbol{q}^{-k}(X_J) \cap [0, 2^{-k}]$ dans tous les intervalles élémentaires d'ordre k, donc

$$\mathrm{mes}(X_J) = \mathrm{mes}(\boldsymbol{q}^{-k}(X_J)) = 2^k\, \mathrm{mes}(Y).$$

D'autre part X_J est contenu dans $\boldsymbol{q}^{-k}(X_J) \cap (\mathbb{T} - J)$, d'où

$$\operatorname{mes}(X_J) \leqslant (2^k - 1) \operatorname{mes}(Y) = (1 - 2^{-k}) \operatorname{mes}(X_J).$$

Ceci n'est possible que si $\operatorname{mes}(X_J) = 0$. □

Corollaire. *Pour $t \in \mathbb{T}$, l'orbite fermée de t est soit $\mathbb{T}$, soit un ensemble de mesure nulle.*

1.7. Presque tout point a une orbite dense (!)**.** Ici nous sortons, je crois, du programme de Math. Spé, et nous ne pouvons pas tricher comme au n° précédent, car il faut admettre l'existence d'une théorie cohérente de la mesure des ensembles, pour laquelle une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle.

Mais si on accepte cela le travail qui reste à faire est facile : pour tout point t ayant une orbite non dense, il existe un intervalle dyadique élémentaire J disjoint de l'orbite fermée de t. Alors t appartient à X_J. Par suite *l'ensemble des points de $\mathbb{T}$ ayant une orbite non dense est la réunion des X_J pour J intervalle dyadique élémentaire.* Ces ensembles forment une famille dénombrable et chacun est de mesure nulle. Il en résulte :

Théorème 3. *L'ensemble des points de $\mathbb{T}$ ayant une orbite non dense est de mesure nulle.*

1.8. Orbites uniformément réparties et loi des grands nombres (!!)

Pour $t \in \mathbb{T}$, J un intervalle de $\mathbb{T}$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $N(t, J, n)$ le nombre des $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tels que $\boldsymbol{q}^i(t)$ appartienne à J. On dit que t a une orbite uniformément répartie si, pour tout intervalle J de $\mathbb{T}$, on a $N(t, J, n)/n \to \operatorname{mes}(J)$ quand n tend vers l'infini.

Un simple découpage d'epsilons donne $(*)$:

Proposition 5. *Pour montrer qu'un point t a une orbite uniformément répartie, suffit de montrer que, pour tout intervalle dyadique élémentaire J d'ordre k, on a $N(t, J, k) \to 2^{-k}$.*

Le théorème suivant est une traduction de la « loi des grands nombres » en théorie des probabilités.

Théorème 4. *L'ensemble des points de $\mathbb{T}$ dont l'orbite n'est pas uniformément répartie est de mesure nulle.*

La loi des grands nombres invoquée est le résultat suivant, énoncé dans le langage des probabilités pour le jeu de pile ou face.

Une partie infinie du jeu de pile ou face (à coups indépendants donnant 0 ou 1 de façon équiprobable) a pour résultat une suite $u = (u_1, \dots, u_n, \dots)$. Soit $v = (v_1, \dots, v_k) \in \{0, 1\}^k$, et définissons le nombre $N(u, v, n)$ d'occurrences de v dans u jusqu'au $(n + k)$-ème coup comme le nombre de valeurs de $i \in \{1, \dots, n\}$ pour lesquelles on a $u_{i+j-1} = v_j$ pour $j = 1, \dots, k$.

Théorème LGN. *Dans ces conditions, $N(u, v, n)/n \to 2^{-k}$ presque sûrement quand n tend vers l'infini.*

Pour passer d'un énoncé à l'autre, il suffit de se convaincre que tirer un nombre au hasard dans $[0, 1]$ suivant la loi de densité constante 1 revient à tirer à pile ou face les chiffres de son développement en base 2. Et de sortir du langage des probabilités.

2. Orbites tournantes

2.1. Ordre cyclique. Soit f une application de $\mathbb{T}$ dans lui-même. Étant donné une partie finie X de $\mathbb{T}$, on dit que f *préserve l'ordre cyclique* sur X s'il existe une application $g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ qui est un homéomorphisme préservant l'orientation et qui coïncide avec f sur X. Si on choisit un point t_0 dans X, des représentants x_0 et y_0 dans $\mathbb{R}$ pour t_0 et $f(t_0)$, si pour $t \in \mathbb{T}$ on note $r(t)$ et $r'(t)$ ses représentants dans $[x_0, x_0 + 1[$ et $[y_0, y_0 + 1[$ respectivement, la condition que f préserve l'ordre cyclique sur X est équivalente à : l'application $r' \circ f \circ r^{-1} : [x_0, x_0 + 1[\to [y_0, y_0 + 1[$ est strictement croissante sur $r(X)$.

Si X est un ensemble éventuellement infini, on dit que f préserve l'ordre cyclique sur X si elle préserve l'ordre cyclique sur toute partie finie de X. Il suffit de le vérifier pour les parties à 3 éléments.

Proposition 1 ($*$). *Soit X une partie de $\mathbb{T}$. Pour que $\boldsymbol{q}$ préserve l'ordre cyclique sur X, il faut et il suffit que X soit contenue dans un demi-cercle semi-ouvert.*

Corollaire. *Soit t un point de $\mathbb{T}$. Pour que $\boldsymbol{q}$ préserve l'ordre cyclique sur l'orbite de t, il faut et il suffit que t soit périodique ou irrationnel, et appartienne à un ensemble X_J avec J un demi-cercle ouvert.*

Pour étudier X_J quand J est un demi-cercle, nous allons utiliser l'application f_J de $\mathbb{T}$ dans lui-même qui coïncide avec $\boldsymbol{q}$ sur $\mathbb{T} - J$ et qui est constante sur la fermeture de J. Pour $t \in X_J$, l'orbite de t par $\boldsymbol{q}$ est la même, et avec la même indexation, que son orbite par f_J. Nous aurons à considérer l'*angle de rotation* de f ; mais d'abord il nous faudra donner quelques généralités sur la notion d'angle de rotation.

2.2. Angle de rotation. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ une application continue. On peut ($*$) relever f en une application continue $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (qui n'est déterminée par f qu'à une constante entière additive près). On a $F(x+1) = F(x) + d$, où d est un entier appelé le *degré* de f. L'application f_J définie au § 2.1 pour J un demi-cercle est de degré 1.

On dit que f est *monotone* si F est monotone, c'est-à-dire croissante (au sens large) ou décroissante (id.). Pour f monotone de degré 1, on peut définir l'*angle de rotation* de f. On définit d'abord le *nombre de rotation* de F.

Théorème 1 et Définition. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante vérifiant $F(x+1) = F(x) + 1$. Alors $(F^n(x) - x)/n$ a une limite quand n tend vers l'infini. Cette limite ne dépend pas de x, elle est appelée* nombre de rotation *de F et notée* $\mathrm{Rot}(F)$.

Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est une application monotone croissante de degré 1, *l'*angle de rotation $\mathrm{rot}(f)$ *de f est la classe dans $\mathbb{T}$ de* $\mathrm{Rot}(F)$, *où F est un relèvement de f (cet angle ne dépend pas du choix de F).*

Démonstration. Le nombre $(F^n(x) - x)/n$ ne change pas si l'on remplace x par $x+1$. Pour $x \leqslant y \leqslant x+1$, on a $F^n(x) \leqslant F^n(y) \leqslant F^n(x)+1$, donc $(F^n(x)-x)/n$ et $(F^n(y)-y)/n$ diffèrent d'au plus $1/n$. Par suite l'ensemble R_n des $(F^n(x) - x)/n$ pour $x \in \mathbb{R}$ est un intervalle fermé de longueur $\leqslant 1/n$. Pour p multiple de n, on a $R_p \subset R_n$. Il en résulte que l'intersection des R_n est réduite à un point $\mathrm{Rot}(F)$ et que

$$\frac{F^n(x) - x}{n} - \mathrm{Rot}(F) \leqslant 1/n$$

pour tout x. □

Proposition 2 $(*)$

(a) *Si f a un point périodique t de période k, alors* $\mathrm{rot}(f)$ *est rationnel de dénominateur k. La correspondance $n \cdot \mathrm{rot}(f) \mapsto f^n(t)$ préserve l'ordre cyclique. On a* $\mathrm{rot}(f) = [(F^k(x) - x)/k]$, *où F est un relevé de f et x un représentant de t.*

(b) *Réciproquement, si* $\mathrm{rot}(f)$ *est rationnel de dénominateur k, l'application f admet un point périodique de période k.*

(c) *Si* $\mathrm{rot}(f)$ *est irrationnel, pour tout t la correspondance*

$$n \cdot \mathrm{rot}(f) \longmapsto f^n(t)$$

entre l'ensemble des multiples de $\mathrm{rot}(f)$ *et l'orbite de t préserve l'ordre cyclique.*

Proposition 3 $(*)$

(a) *Si $F_1 \leqslant F_2$, on a* $\mathrm{Rot}(F_1) \leqslant \mathrm{Rot}(F_2)$.

(b) *Si (F_s) est une famille continue d'applications (c'est-à-dire $(s, x) \mapsto F_s(x)$ continue), satisfaisant aux hypothèses du Th. 1, alors* $\mathrm{Rot}(F_s)$ *dépend continûment de s.*

Remarque. Il est abominablement faux que, si $(s, x) \to F_s(x)$ est continûment différentiable, l'application $s \to \mathrm{Rot}(F_s)$ soit différentiable. La proposition suivante montre que cette application a des propriétés qui, dans tout autre domaine des mathématiques, seraient considérées comme pathologiques.

Proposition 4 $(*)$. *Soit $(F_s)_{s\in S}$ une famille continue d'applications satisfaisant aux hypothèses de la Prop. 2. On suppose que S est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que, pour tout x, l'application $s \mapsto F_s(x)$ est croissante. Alors, pour tout rationnel $r = p/q$, l'ensemble des s tels que* $\mathrm{Rot}(F_s) = r$ *est un intervalle fermé, qui n'est réduit à un point s_0 que si l'application f_{s_0} déduite de F_{s_0} vérifie $f_{s_0}^q = \mathrm{Id}_T$.*

2.3. L'abaque de l'escalier. Pour J demi-cercle ouvert ne contenant pas 0, l'ensemble X_J est réduit à 0 ($*$). Nous sommes donc ramenés à étudier $f_s = f_J$ pour $J = J_s$ image de $]s-1/2, s[$ avec $s \in [0, 1/2]$. Cette application se relève en F_s définie par

$$F_s(t) = \begin{cases} 2s & \text{pour} t \in [s-1/2, s], \\ 2t & \text{pour} t \in [s, s+1/2], \\ 2s+1 & \text{pour} t \in [s+1/2, s+1], \end{cases}$$
$$F_s(t+1) = F_s(t) + 1.$$

Quand s varie de 0 à 1/2 le nombre $\mathrm{Rot}(F_s)$ varie continûment de 0 à 1, avec un palier à chaque valeur rationnelle (on ne risque pas d'avoir $f_s^q = \mathrm{Id}$ car f_s n'est pas injective). Pour $r \in]0, 1[$ irrationnel, il y a donc au moins un s tel que $\mathrm{Rot}(F_s) = r$. En fait il n'y en a qu'un, et voici comment on peut le déterminer :

On sait que $[s] \in X_J$, car sinon on aurait $X_J \subset X_{J'}$ avec J' de longueur $> 1/2$, donc X_J fini et f_s aurait un point périodique. Considérons dans $\mathbb{T}$ les points $t_0 = [(1+s)/2]$, $t_1 = [s]$, …, $t_n = [2^{n-1} \cdot s]$. Le n-ème chiffre après la virgule dans le développement binaire de s est donné par la position de t_n par rapport à $\{0, 1/2\}$. Mais il n'y a pas de points de X_J entre 0 et $t_1 = s$, ni entre 1/2 et t_0, donc la position de t_n par rapport à $\{1/2, 0\}$ est la même que par rapport à $\{t_0, t_1\}$, et par la Prop. 3(c) c'est la même que la position de $n \cdot r$ par rapport à $\{0, r\}$. On a donc

$$t_n \in [0, 1/2] \iff [n \cdot r] \in [r, 1];$$
$$t_n \in [1/2, 1] \iff [n \cdot r] \in [0, r].$$

Finalement le développement de s est donné par l'*abaque de l'escalier* :

Sur une feuille de papier quadrillé à carreaux unité on trace la droite D de pente r passant par l'origine, puis le plus haut escalier extrait du quadrillage situé au-dessous de D. On marque 1 aux abscisses entières > 0 où l'escalier monte, et 0 à celles où il ne monte pas.

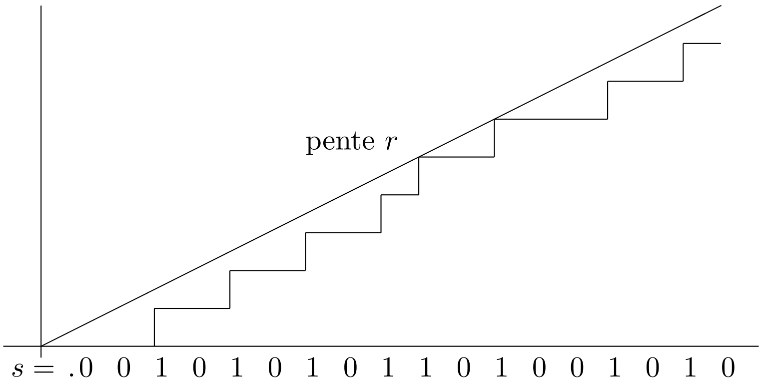

FIGURE 1. L'abaque de l'escalier

2.4. Le cas r rationnel. Pour $r = p/q$ rationnel, l'abaque de l'escalier donne deux valeurs s^- et s^+ suivant que l'on prend « au-dessous » au sens strict ou au sens large. Pour $s \in [s^-, s^+]$, on a $\mathrm{Rot}(F_s) = r$.

Proposition 5 (∗∗). *On a $s^- = P^-/Q$ et $s^+ = P^+/Q$ avec $Q = 2^q - 1$ et $P^+ = P^- + 1$. Les points s^- et s^+ de $\mathbb{T}$ sont dans la même orbite par $\boldsymbol{q}$, et la correspondance*

$$n \cdot r \longrightarrow \boldsymbol{q}^n s^-$$

respecte l'ordre cyclique.

Proposition 6 (∗∗). *Pour $s \in\,]s^-, s^+[$ l'ensemble X_s est fini : c'est l'orbite commune de s^- et s^+ pour $\boldsymbol{q}$. Pour $s = s^-$ ou s^+ il est infini dénombrable, mais tout point a une orbite finie.*

2.5. Interprétation pour l'ensemble de Mandelbrot (!!)

L'ensemble de Mandelbrot $\mathbb{M}$ est l'ensemble des nombres complexes c tels que la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ soit bornée. C'est un sous-ensemble compact connexe de $\mathbb{C}$. La composante connexe W de l'intérieur de $\mathbb{M}$ qui contient 0 est limitée par une cardioïde. Notons $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Il existe des représentations conformes $h : \mathbb{D} \to W$ et $H : \mathbb{C} - \mathbb{D} \to \mathbb{C} - \mathbb{M}$ qui envoient $[0, 1[$ sur $[0, 1/4[$ et $]1, \infty[$ sur $]1/4, \infty[$ respectivement. Pour $t \in \mathbb{T}$, on définit le *rayon interne* et le *rayon externe* de $\mathbb{M}$ d'argument t

comme image respectivement des applications $h_t : \rho \mapsto h(\rho e^{2i\pi t})$ et $H_t : \rho \mapsto H(\rho e^{2i\pi t})$ définies sur $]0,1[$ et $]1,\infty[$.

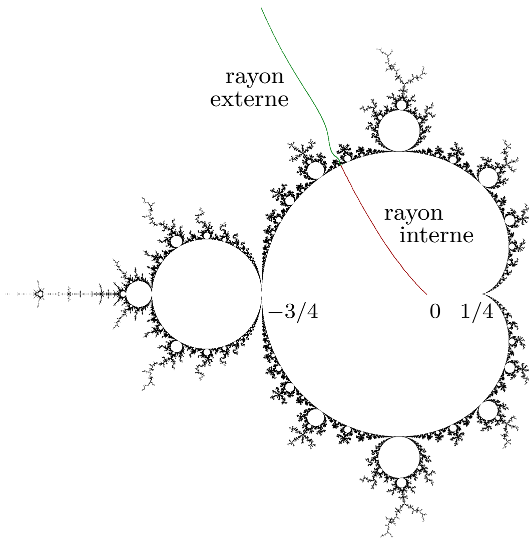

FIGURE 2. L'ensemble de Mandelbrot (image de Dan Sorensen)

On peut démontrer (!!!) :

Théorème 2. *Soit $r \in \mathbb{T}$, et soit s l'angle correspondant à r si r est irrationnel (cf. § 2.3), $s = s^-$ ou s^+ si r est rationnel (cf. § 2.4). Alors on a*

$$\lim_{\rho \to 1} H_s(\rho) = \lim_{\rho' \to 1} h_r(\rho')$$

(et ces limites existent).

Autrement dit le rayon interne d'argument r et le rayon externe d'argument s aboutissent au même point du bord de $\mathbb{M}$.

2.6. Une propriété de transcendance. À titre de curiosité, nous donnons le résultat suivant, dû à P. Sentenac et l'auteur :

Théorème 3. *Dans la correspondance étudiée au* § 2.3*, pour tout r irrationnel, s est transcendant.*

Ce résultat s'appuie sur :

***Théorème* (Roth, Thue).** *Soit x un nombre algébrique. Alors, pour tout $b > 2$, il existe un $c > 0$ tel que pour tout rationnel p/q on ait $|x - p/q| \geqslant c/q^b$.*

Il suffit de démontrer

***Lemme* ($*$).** *Soit $r \in \mathbb{T}$ irrationnel et soient $(r_n = p_n/q_n)$ les réduites du développement de r en fraction continue. Notons $s_n = P_n/Q_n$ l'angle s^- ou s^+ correspondant à r_n, le plus proche de s. Alors, pour une infinité de valeurs de n on a $|s_n - s| < 1/Q_n^b$ où $b - 1$ est le nombre d'or, i.e., $b = (3 + \sqrt{5})/2$.*

Indications. On a $q_{n+1} \geqslant q_n + q_{n-1}$, et par suite q_{n+1}/q_n est supérieur au nombre d'or pour au moins une valeur de n sur deux. Pour ces valeurs, on a

$$|s_n - s| < |s_n - s_{n+1}| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{Q_n^b}.$$

3. Propriétés hyperboliques de $\boldsymbol{q}$

3.1. Ordre orbital. Soit $t \in \mathbb{T}$, et notons x_n le représentant de $\boldsymbol{q}^n(t) = 2^n t$ dans $[0, 1[$. L'*ordre orbital* défini par t est la relation d'ordre $\leqslant$ (de pré-ordre si t est rationnel) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$n \leqslant p \iff x_n \leqslant x_p.$$

***Proposition 1* ($*$).** *Deux points différents de $\mathbb{T}$ ne peuvent pas définir le même ordre orbital.*

Indication. En procédant comme en 2.3, on peut écrire le développement de t, (ou x_0) en base 2 à partir de l'ordre orbital.

Remarque. La Prop. 1 ne s'étend pas telle quelle à $\boldsymbol{q}_d$, $d > 2$. *Exemple :* $d = 3$, $t = 1/8$, $t' = 1/4$. En degré 2 on peut détecter la position de $1/2$. Pour $d > 2$, on ne peut pas détecter la position des i/d par rapport à l'orbite. Il faut se les donner pour avoir l'unicité.

Question. Caractériser les relations d'ordre sur $\mathbb{N}$ qui peuvent être l'ordre orbital d'un point t pour $\boldsymbol{q}$.

3.2. Conjugaison à $\boldsymbol{q}$. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continûment dérivable de degré 2, i.e., admettant un relèvement $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $F(x+1) = F(x) + 2$. On pose $f'(t) = F'(x)$ pour x représentant de t.

Théorème 1 $(*)$. *On suppose $f'(t) > 1$ pour tout t. Alors il existe un homéomorphisme unique $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ préservant l'orientation et conjuguant f à $\boldsymbol{q}$, c'est-à-dire tel que $h \circ f \circ h^{-1} = \boldsymbol{q}$. L'homéomorphisme h est bi-höldérien, c'est-à-dire qu'il existe des constantes c et b telles que*

$$d(h(x), h(x')) \leqslant c \cdot d(x, x')^b$$
$$d(x, x') \leqslant c \cdot d(h(x), h(x'))^b.$$

Indications. L'application f a un point fixe unique σ. On prend h_0 arbitrairement tel que $h_0(\sigma) = 0$, et on définit h_n par $\boldsymbol{q} \circ h_{n+1} = h_n \circ f$, $h_{n+1}(\sigma) = 0$. Les h_n forment une suite de Cauchy pour la convergence uniforme. Pour montrer que h est bi-höldérienne, on remarque que, en notant e^m et e^M les bornes inférieure et supérieure de f', pour tout intervalle J, le temps n que met J à recouvrir $\mathbb{T}$ (c'est-à-dire le plus petit n tel que $f^n(J) = \mathbb{T}$) est lié à la longueur ℓ de J par

$$m(n-1) \leqslant -\log \ell \leqslant Mn.$$

Remarques

(1) Si t est un point périodique de période k pour f et si le *multiplicateur* $(f^k)'(t) = \prod_{i=0}^{k-1} f'(t_i)$ (où les t_i sont les points du cycle) n'est pas 2^k, il est exclu que h ait une dérivée $\neq 0$ en t.

(2) Ceci s'étend à $d > 2$, mais avec $d-1$ choix, correspondant aux $d-1$ points fixes de f.

(3) Si on suppose seulement f monotone de degré 2, on peut trouver $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continue monotone telle que $h \circ f = \boldsymbol{q} \circ h$. Mais h n'est pas forcément injective, et ne le sera pas si f a des points périodiques attractifs.

3.3. Lemme de poursuite.

Définition. Soit $\varepsilon > 0$. On appelle *ε-pseudo-orbite* (dans $\mathbb{T}$ pour $\boldsymbol{q}$) une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $d(t_{n+1}, \boldsymbol{q}(t_n)) \leqslant \varepsilon$ pour tout n.

Théorème 2 (∗). *Soit $\varepsilon \leqslant 1/4$. Pour toute ε-pseudo-orbite (t_n), il existe une véritable orbite (s_n), unique, qui diffère de (t_n) d'au plus ε.*

Autrement dit, il existe un $s \in \mathbb{T}$ unique tel que,

$$(\forall n) \quad d(\boldsymbol{q}^n(s), t_n) \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

(1) Ceci est dû à l'expansivité de $\boldsymbol{q}$, qui a un rapport 2. Pour une application dilatante avec un rapport $\lambda > 1$, on trouverait une correspondance $\varepsilon \mapsto \varepsilon/(\lambda - 1)$.

(2) Il n'y a rien de pareil avec par exemple

$$x \longmapsto x + \frac{1}{10}(\sin \pi x)^2.$$

Le point fixe 0, qui fait une barrière aux orbites, est perméable aux ε-pseudo-orbites pour tout $\varepsilon > 0$. Les orbites et les pseudo-orbites ont donc des comportements très différents.

Adrien Douady, Département de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France