Journées mathématiques X-UPS

Année 1996

Aspects des systèmes dynamiques: le premier retour

Albert FATHI

Systèmes dynamiques discrets

Journées mathématiques X-UPS (1996), p. 21-34.
https://doi.org/10.5802/xups.1996-02

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1996, p. 21–34 doi: 10.5802/xups.1996-02

SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

par

Albert Fathi

Table des matières

1. Quelques généralités et quelques exemples

Dans ce chapitre nous allons introduire la notion de système dynamique et expliquer l'objet de la théorie sur quelques exemples afin d'illustrer quelques-uns des concepts.

Publication originelle dans Journées X-UPS 1996. Aspects des systèmes dynamiques : le premier retour. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1996, et Éditions de l'École polytechnique, 2009.

1.1. Définitions

Définition 1.1.1. Un système dynamique discret est une application continue $f : X \to X$ de l'espace topologique X dans lui-même.

Le fait que f envoie X dans lui-même permet de considérer les itérées f^n, $n \in \mathbb{N}$, où

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

On peut alors définir les trajectoires ou orbites d'un point :

***Définition 1.1.2* (Orbite d'un point).** Si $f : X \to X$ est un système dynamique, l'orbite positive de x par f est

$$\mathcal{O}_+^f(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Si f est bijective, on définit l'orbite de x par $\mathcal{O}^f(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ainsi que l'orbite négative $\mathcal{O}_-^f(x) = \{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

L'objet de la théorie des systèmes dynamiques est l'étude du comportement des orbites et de la façon dont elles varient avec le point initial.

Pour étudier la suite $\mathcal{O}_+^f(x)$, on fait ce que l'on fait d'habitude avec une suite, c'est-à-dire que l'on regarde ses points d'accumulation.

S'il existe $n \geqslant 1$ tel que $f^n(x) = x$, on dit que x est périodique, la période d'un point périodique x est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $f^n(x) = x$.

On note $\omega_f(x)$ l'ensemble des points d'accumulation de la suite $f^n(x), n \in \mathbb{N}$. Si $x \in \omega_f(x)$, on dit que x est récurrent. Si $\omega_f(x) = X$, on dit que x est d'orbite dense. Si tout point de X est d'orbite dense, on dit que que f est minimal.

La meilleure façon de comprendre les notions est de les tester sur des exemples.

1.2. Les rotations sur le cercle. Commençons par un des exemples les plus connus, les rotations.

Proposition 1.2.1. *Soit $\mathbb{S}$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Si $\alpha \in \mathbb{S}$, on définit $R_\alpha : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ par $R_\alpha(z) = \alpha z$. Si* $\arg(\alpha) \in 2\pi\mathbb{Q}$*, toutes les orbites* *de R_α sont périodiques de même période. Si* $\arg(\alpha) \notin 2\pi\mathbb{Q}$*, alors R_α est minimal.*

Démonstration. On a $R_\alpha^n = R_{\alpha^n}$ d'où le résultat dans le cas où $\arg(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Dans le cas où $\arg(\alpha) \notin 2\pi\mathbb{Q}$, posons $\beta = \arg(\alpha)/2\pi \notin \mathbb{Q}$. Le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et β est dense dans $\mathbb{R}$. Soit alors $z \in \mathbb{S}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{2i\pi x}$. On peut trouver des suites d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tels que $x = \lim_{j\to\infty} n_j\beta + p_j$ donc $z = \lim_{j\to\infty} e^{2i\pi(n_j\beta+p_j)} = \lim_{j\to\infty} \alpha^{n_j} = \lim_{j\to\infty} R_\alpha^{n_j}(1)$. Par conséquent l'orbite de 1 est dense. Or pour tout $z \in \mathbb{S}$, on a $R_\alpha^n(z) = \alpha^n z = zR_\alpha^n(1)$, ce qui montre la densité des autres orbites. □

L'exemple des rotations nous donne des systèmes où le comportement d'une orbite est essentiellement le même quel que soit le point dont on part.

Une autre propriété de ce système, due au fait que les rotations sont des isométries, est que deux points proches restent proches pour tous les itérés. Une telle propriété est évidemment idéale pour les modélisations de systèmes physiques ou biologiques, car on ne connaît dans ce cas la condition initiale qu'à l'erreur de sa mesure près et le fait que cette erreur n'explose pas par itération permet donc de faire des prédictions à long terme. Malheureusement, il résulte de la théorie des systèmes dynamiques qu'en général les systèmes n'ont pas ce genre de propriété.

1.3. Les décalages de Bernoulli. Soit p un entier $\geqslant 1$. On considère l'espace :

$$\Sigma_p^+ = \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}.$$

On notera un point de Σ_p^+ par $\boldsymbol{x}$. Un tel point $\boldsymbol{x}$ est la donnée d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n \in \{1, \dots, p\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le nombre x_n est appelé la $n^{\text{ième}}$ coordonnée de $\boldsymbol{x}$.

On munit Σ_p^+ la topologie produit. Cette topologie est définie par la métrique

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

• Si $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \delta$, alors $x_i = y_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-i} \geqslant \delta$.

• Si $x_i = y_i$ pour tout i avec $0 \leqslant i \leqslant q$, alors $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \leqslant p2^{-q}$.

Donc on peut rendre deux suites de Σ_p^+ proches en rendant un grand nombre de leurs premières coordonnées égales.

Le décalage de Bernoulli $\sigma_p^+ : \Sigma_p^+ \to \Sigma_p^+$ est défini par :

$$\sigma_p^+[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ où } y_n = x_{n+1}.$$

Proposition 1.3.1. *Les points périodiques de σ_p^+ sont denses dans Σ_p^+. Il y a un point de Σ_p^+ dont l'orbite (positive) par σ_p^+ est dense dans Σ_p^+. On a la sensibilité par rapport aux conditions initiales. Plus précisément si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} d((\sigma_p^+)^n(\boldsymbol{x}), (\sigma_p^+)^n(\boldsymbol{y})) \geqslant 1$.*

Démonstration. Remarquons qu'un point $\boldsymbol{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique pour σ_p^+, si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique. Pour approcher $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un point périodique, il suffit de tronquer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assez loin et de la rendre périodique.

Un point $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'orbite dense si toute suite finie d'éléments de $\{1, \ldots, p\}$ apparaît comme sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme l'ensemble des suites finies à valeurs dans $\{1, \ldots, p\}$ est dénombrable, il n'est pas difficile en mettant l'ensemble de toutes ces suites finies bout à bout de fabriquer un point d'orbite dense.

Si $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq \boldsymbol{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un n avec $x_n \neq y_n$. Il en résulte que les coordonnées d'ordre 0 de $(\sigma_p^+)^n(\boldsymbol{x})$ et $(\sigma_p^+)^n(\boldsymbol{y})$ diffèrent, par conséquent $d((\sigma_p^+)^n(\boldsymbol{x}), (\sigma_p^+)^n(\boldsymbol{y})) \geqslant 1$. $\square$

Nous ne donnons pas ici de définition formelle de la sensibilité aux conditions initiales. Nous la prenons au sens intuitif : les prédictions précises de comportement à long terme des orbites ne peuvent se faire qu'en connaissant la condition initiale avec une précision de plus en plus grande. Par exemple, si $f : X \to X$ satisfait à la propriété suivante :

$$(\clubsuit) \qquad \exists \varepsilon_0, \forall x, x' \in X, \quad x \neq x' \implies \sup_{n\in\mathbb{N}} d(f^n(x), f^n(x')) \geqslant \varepsilon_0,$$

alors, il est clair que f est sensible aux conditions initiales. La propriété (♣) est appelée expansivité. Dans le cas où f est un homéomorphisme, si on veut obtenir des exemples avec X non fini, il faut remplacer, dans la condition (♣), le sup sur $\mathbb{N}$ par un sup sur $\mathbb{Z}$.

On peut aussi considérer $\Sigma_p = \{1, \ldots, p\}^{\mathbb{Z}}$, muni de la topologie produit. Le décalage $\sigma_p : \Sigma_p \to \Sigma_p$ est aussi défini par :

$$\sigma_p[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}] = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \text{où } y_n = x_{n+1}.$$

À la différence de σ_p^+, l'application σ_p est inversible. On peut voir de la même manière que les points périodiques de σ_p sont denses dans Σ_p et qu'il y a un point d'orbite dense. De même σ_p est sensible aux conditions initiales.

Smale a montré que, sous des conditions assez générales, il y a une copie d'un décalage de Bernoulli dans pratiquement tous les systèmes dynamiques sur un espace de dimension supérieure ou égale à 2. Ce qui montre qu'en général un système est sensible aux conditions initiales.

1.4. Un exemple de semi-conjugaison. Considérons le système dynamique $m_p : \mathbb{S} \to \mathbb{S}, z \mapsto z^p$, où p est une entier $\geqslant 2$. Nous allons voir que m_p a une dynamique très riche. En fait m_p est « pratiquement » une version du système dynamique σ_p^+.

Définissons $\theta_p : \Sigma_p^+ \to [0,1]$ par :

$$\theta_p[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n - 1}{p^{n+1}},$$

c'est-à-dire que l'on fait correspondre à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le réel dont le développement en base p est $0, x'_0 x'_1 \ldots x'_n \ldots$ avec

$$x'_n = x_n - 1 \in \{0, \ldots, p-1\}.$$

On voit donc que θ_p est surjective. Il n'est pas difficile de montrer qu'elle est continue et même lipschitzienne :

$$|\theta_p(\boldsymbol{x}) - \theta_p(\boldsymbol{y})| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{x_n - 1}{p^{n+1}} - \frac{y_n - 1}{p^{n+1}} \right| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{p^{n+1}} = \frac{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{p}.$$

Il est clair sur la formule que $\theta(\sigma_p^+(\boldsymbol{x}))$ est la partie fractionnaire de $p\theta(\boldsymbol{x})$. Si on définit alors $\psi_p : \Sigma_p^+ \to \mathbb{S}$ par :

$$\psi_p(\boldsymbol{x}) = e^{2i\pi\theta(\boldsymbol{x})},$$

on en déduit que l'on a $\psi_p \circ \sigma_p^+(\boldsymbol{x}) = m_p \circ \psi_p(\boldsymbol{x})$, ce qui s'exprime par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Sigma_p^+ \arrow[r, "\sigma_p^+"] \arrow[d, "\psi_p"'] & \Sigma_p^+ \arrow[d, "\psi_p"] \\ \mathbb{S} \arrow[r, "m_p"] & \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

ce qui nous amène à la définition :

***Définition 1.4.1* (Semi-conjugaison topologique).** Si $h : X \to X$ et $f : Y \to Y$ sont des applications continues des espaces topologiques X et Y. On dit que l'application continue *surjective* $\psi : X \to Y$ est une semi-conjugaison topologique entre f et h si $f \circ \psi = \psi \circ h$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[d, "\psi"] \\ Y \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Par récurrence sur n, on voit que l'on a $f^n \circ \psi = \psi \circ h^n$. Il en résulte qu'une telle semi-conjugaison topologique envoie les orbites de h sur les orbites de f. En particulier, elle envoie les orbites périodiques de h sur des orbites périodiques de f. Comme ψ est continue et surjective, elle envoie un point d'orbite dense sur un point d'orbite dense. En appliquant ces remarques à ψ_p, on obtient la proposition :

Proposition 1.4.2. *Les points périodiques de m_p, $p \geqslant 2$, sont denses dans $\mathbb{S}$. Il y a un point de $\mathbb{S}$ dont l'orbite (positive) par m_p est dense dans $\mathbb{S}$.*

Montrons que l'on a la sensibilité aux conditions initiales pour m_p, $p \geqslant 2$.

Proposition 1.4.3. *Le système dynamique* $m_p : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$*,* $p \geqslant 2$ *est expansif, donc sensible aux conditions initiales.*

Démonstration. Nous avons besoin d'un inverse local de l'exponentielle. Définissons $\widetilde{\exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par :

$$\widetilde{\exp}\,(z) = e^{2i\pi z}.$$

On a $\widetilde{\exp}\,(z) = \widetilde{\exp}\,(z')$ si et seulement si $z - z' \in \mathbb{Z}$ et $\widetilde{\exp}^{\,-1}(\mathbb{S}) = \mathbb{R}$; de plus, c'est un difféomorphisme local. Choisissons alors $\delta \in \,]0,1[$, assez petit pour que l'inverse κ de $\widetilde{\exp}$ soit défini sur le disque fermé $\overline{B}(1,\delta) = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z-1|\}$. On choisit la détermination avec $\kappa(1) = 0$. On a $\kappa(\mathbb{S} \cap \overline{B}(1,\delta)) = \,]-\alpha_0, \alpha_0[$. Fixons alors $p \geqslant 1$ et choisissons $\delta_p < \delta$ tel que $z \in \mathbb{S}$ et $|z-1| < \delta_p$ implique $|p\kappa(z)| < \alpha_0$. Supposons alors que $z_1, z_2 \in \mathbb{S}$ vérifient $|z_1^{p^n} - z_2^{p^n}| < \delta_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En posant $z = z_1/z_2$, on trouve $|z^{p^n} - 1| < \delta_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En posant $x_n = \kappa(z^{p^n})$, on a $p|x_n| < \alpha_0$, de plus

$$\widetilde{\exp}\,(px_n) = (\widetilde{\exp}\,(x_n))^p = \widetilde{\exp}\,(x_{n+1}).$$

Donc $px_n = x_{n+1}$ car $|px_n|$ et $|x_{n+1}|$ sont tous les deux $< \alpha_0$. On voit alors par récurrence que $|x_0| = p^{-n}|x_n| < p^{-n}\alpha_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x_0 = 0$ et $z = 1$; par conséquent $z_1 = z_2$. □

1.5. Remords final : les applications linéaires. Les applications linéaires sont certainement, en dimension finie, les applications que l'on comprend le mieux au niveau des classes préparatoires (du moins, c'est ce que nous espérons tous !). Il serait évidemment intéressant de voir ce que donnent, dans ce cas, les notions introduites.

Soit $A : E \to E$ une application linéaire du K espace vectoriel E, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les points périodiques de période divisant n sont 0 ainsi que les vecteurs propres de A^n associées à la valeur propre 1.

Qu'en est-il des points d'orbite dense ? Pour cela, il faut avoir une topologie sur E. Donc on suppose maintenant que E est une espace vectoriel topologique et que A est continue. Pour rester dans le cadre des programmes, supposons par exemple E normé. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.5.1. *Soit* $f : E \to E$ *une application* K*-linéaire du* K*-espace normé* E*, avec* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Notons* $E'_{\mathbb{C}}$ *le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* *formé des applications K-linéaires continues de E dans $\mathbb{C}$. Si f a une orbite dense dans E, alors l'application transposée $f^* : E'_{\mathbb{C}} \to E'_{\mathbb{C}}, \varphi \mapsto \varphi \circ f$ n'a pas de valeur propre. Par conséquent E est nécessairement de dimension infinie.*

Démonstration. Un vecteur propre non nul de f^* associé à la valeur propre λ est une application continue K-linéaire non nulle $\varphi : E \to \mathbb{C}$, telle que $\forall x \in E$, $\varphi \circ f(x) = \lambda\varphi(x)$. Si $x_0 \in E$ a une orbite dense dans E, il s'ensuit par continuité de φ que $\{\varphi \circ f^n(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\lambda^n \varphi(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le K-espace vectoriel non nul $\varphi(E) \subset \mathbb{C}$. Il n'est pas difficile de voir que ceci n'est pas possible (par exemple en remarquant que l'ensemble des valeurs de la suite $|\lambda^n \varphi(x_0)|$ est discret dans $[0, \infty[$). □

Cette proposition montre qu'il n'y a pas d'application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans lui-même ayant une orbite dense. On peut aussi démontrer ce fait en utilisant une décomposition en blocs de Jordan et en analysant le comportement des orbites pour chaque bloc.

En dimension infinie, Rolewicz a montré dans les années 60 qu'il y a des applications linéaires qui ont des orbites denses. Le théorème suivant peut être laissé en exercice afin d'animer la discussion pendant votre repas :

***Théorème 1.5.2* (Théorème de Rolewicz).** *Considérons l'espace de Hilbert de suites $\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty\}$. Soit $\lambda \in\,]0,1[$, définissons l'opérateur linéaire continu $T : \ell^2 \to \ell^2$ par $T[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où :*

$$b_n = \begin{cases} \lambda a_{n-1}, & si\ n \geqslant 0 \\ \lambda^{-1} a_{n-1}, & si\ n < 0. \end{cases}$$

Alors T a une orbite dense dans ℓ^2.

En fait, il y a un exemple plus naturel en dimension infinie et que vous connaissez très bien. Notons $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables. On munit $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ de la topologie de convergence uniforme de toutes les dérivées. Ce n'est pas un espace normé, mais c'est quand même un espace vectoriel topologique et même ce que l'on appelle un espace de Fréchet.

Proposition 1.5.3. *La dérivation* $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$, $\varphi \mapsto \varphi'$, *est une application linéaire continue ayant une orbite dense.*

Cette proposition vous est laissée en exercice afin d'égayer le reste de votre week-end. Il faudra évidemment utiliser le théorème de Weierstrass de densité des polynômes dans l'espace des fonctions indéfiniment dérivables. L'inverse à droite de la dérivation

$$B : \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$$

donné par intégration

$$B(\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

est aussi utile.

2. Systèmes dynamiques discrets : stabilité structurelle

Le but de ce chapitre est l'introduction de la notion de stabilité structurelle et l'étude d'un exemple simple où elle intervient.

2.1. Conjugaison topologique et stabilité structurelle.

***Définition 2.1.1* (Conjugaison topologique).** Si $h : X \to X$ et $f : Y \to Y$ sont des applications continues des espaces topologiques X et Y. Une conjugaison topologique entre f et h est semi-conjugaison topologique $\theta : X \to Y$ où θ est un *homéomorphisme* de X sur Y.

Il est clair que l'on tient là la notion raisonnable d'isomorphisme pour les systèmes dynamiques.

Exemple 2.1.2. Considérons l'homothétie $h_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $\lambda \in \,]0,1[$. Montrons que deux telles applications sont topologiquement conjuguées. En effet, si λ_1 et λ_2 appartiennent à $]0,1[$, alors, il existe $\alpha > 0$ avec $\lambda_1^\alpha = \lambda_2$. Définissons l'homéomorphisme $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\theta(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -|x|^\alpha, & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

On vérifie que $h_{\lambda_2} \circ \theta = \theta \circ h_{\lambda_1}$.

À titre d'exercice instructif, on pourra montrer que deux homéomorphismes de l'intervalle $[0, 1]$ sur lui-même n'ayant que 0 et 1 comme points fixes sont toujours topologiquement conjugués.

Si on repense au problème de modélisation de systèmes physiques ou biologiques, même quand on est arrivé à la loi qui gouverne le phénomène, en général, cette loi va nous donner un système dynamique $f : X \to X$ qui n'est pas complètement connu car la forme exacte va dépendre de la mesure de certaines constantes qui interviennent dans f. Par conséquent, une situation idéale est celle où une petite erreur sur f redonne une système topologiquement conjugué. Ceci nous mène à une définition de la stabilité structurelle. Afin de pouvoir la donner simplement, nous allons ne considérer que des systèmes dynamiques définis sur une partie d'un espace normé.

***Définition 2.1.3* (Stabilité structurelle).** Supposons que X soit une partie de l'espace normé E. Un système dynamique $f : X \to X$ est structurellement stable, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute application $g : X \to X$ vérifiant $\|g - f\|_0 = \sup_{x\in X} \|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$ et $\operatorname{Lip}(g - f) < \varepsilon$ est topologiquement conjuguée à f.

Nous utilisons la notation $\operatorname{Lip}(\varphi)$ pour désigner la constante lipschitzienne de $\varphi : X \to Y$ application entre espaces métriques :

$$\operatorname{Lip}(\varphi) = \sup\left\{\frac{d(\varphi(x), \varphi(x'))}{d(x, x')} \mid x, x' \in X, x \neq x'\right\}.$$

La définition que nous venons de donner de la stabilité structurelle est adaptée à notre contexte.

On peut se demander pourquoi on impose une condition de proximité lipschitzienne et pas seulement une proximité dans la topologie C^0. Pour comprendre la nécessité de cette condition, nous proposons, l'exercice suivant :

Exemple 2.1.4. Soit h un homéomorphisme strictement croissant de $[0, 1]$ sur lui-même. Montrer qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ deux homéomorphismes $h_1, h_2 : [0, 1] \to [0, 1]$ tels que $\sup_{x\in[0,1]} |h_i(x) - h(x)| < \varepsilon, i = 1, 2$, que h_1 soit l'identité sur un voisinage de 0 et que h_2 admette 0 comme point fixe isolé.

2.2. Stabilité structurelle des dilatations linéaires

Théorème 2.2.1. *Soit $A : E \to E$ un isomorphisme linéaire de l'espace de Banach E. Si $\|A^{-1}\| < 1$, alors A est structurellement stable.*

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème de point fixe de Banach. Introduisons $\mathcal{C}_b(E, E)$ des fonctions continues $\theta : E \to E$ bornées, c'est-à-dire vérifiant :

$$\|\theta\|_0 = \sup\{\|\theta(x)\| \mid x \in E\} < \infty.$$

L'espace $\mathcal{C}_b(E, E)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_0$.

Commençons par le lemme :

Lemme 2.2.2. *Pour tout $\eta \in \mathcal{C}_b(E, E)$, il existe (un unique) $\psi \in \mathcal{C}_b(E, E)$ tel que $A \circ (\mathrm{Id}_E + \psi) = (\mathrm{Id}_E + \psi) \circ (A + \eta)$. De plus, dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, si $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et η est $\mathbb{Z}^n$-périodique, alors ψ est aussi $\mathbb{Z}^n$-périodique.*

Démonstration. L'équation $A \circ (\mathrm{Id}_E + \psi) = (\mathrm{Id}_E + \psi) \circ (A + \eta)$ s'écrit

$$\mathrm{Id}_E + \psi = A^{-1} \circ (\mathrm{Id}_E + \psi) \circ (A + \eta) = \mathrm{Id}_E + A^{-1} \circ \psi \circ (A + \eta) + A^{-1} \circ \eta$$

ou encore $\psi = A^{-1} \circ \psi \circ (A + \eta) + A^{-1} \circ \eta$. Il suffit alors de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{C}_b(E, E) &\longrightarrow \mathcal{C}_b(E, E) \\ \psi &\longmapsto A^{-1} \circ \psi \circ (A + \eta) + A^{-1} \circ \eta \end{aligned}$$

est une contraction. Or

$$\begin{aligned} \|\Theta(\psi_1) - \Theta(\psi_2)\|_0 &= \|A^{-1} \circ \psi_1 \circ (A + \eta) - A^{-1} \circ \psi_2 \circ (A + \eta)\|_0 \\ &\leqslant \|A^{-1}\| \|\psi_1 - \psi_2\|_0. \end{aligned}$$

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et η est $\mathbb{Z}^n$-périodique, le sous-espace de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ constitué par les fonctions $\mathbb{Z}^n$-périodiques est fermé et invariant par Θ, donc le point fixe de Θ est dans ce sous-espace. □

Lemme 2.2.3. *Avec les notations du lemme ci-dessus, si l'on a $\mathrm{Lip}(\eta) < \|A^{-1}\|^{-1} - 1$ alors $\mathrm{Id}_E + \psi$ est injective.*

Démonstration. Commençons par remarquer que l'on a, pour tout $x, y \in E$,

$$\|Ax - Ay\| \geqslant \|A^{-1}\|^{-1}\|x - y\|.$$

En posant $f = A + \eta$, on trouve

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &\geqslant \|Ax - Ay\| - \|\eta(x) - \eta(y)\| \\ &\geqslant (\|A^{-1}\|^{-1} - \mathrm{Lip}(\eta))\|x - y\|.\end{aligned}$$

Notons alors $k = \|A^{-1}\|^{-1} - \mathrm{Lip}(\eta) > 1$, on a donc $\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|$, pour tout $x, y \in E$. Par récurrence, on obtient

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| \geqslant k^n\|x - y\|,$$

pour tout $x, y \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $k > 1$, ceci nous donne :

$$(\spadesuit) \qquad \forall x, y \in E, \quad x \neq y \implies \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f^n(x) - f^n(y)\| = \infty.$$

Posons $h = \mathrm{Id}_E + \psi$. Pour tout $x \in E$, on a $\|h(x) - x\| \leqslant \|\psi\|_0$. De plus pour tout $n \geqslant 0$, on a $A^n \circ h = h \circ f^n$. Si $h(x) = h(y)$, on trouve que $h \circ f^n(x) = h \circ f^n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f^n(x) - f^n(y)\| \leqslant 2\|\psi\|_0 < \infty,$$

par $(\spadesuit)$, on en conclut $x = y$. □

Pour conclure que $A + \eta$ est topologiquement conjugué à A, il reste à voir que $h = \mathrm{Id}_E + \psi$ est surjectif avec un inverse continu. Il faut, en fait, raffiner l'argument donné plus haut en échangeant le rôle de A et f et en jouant sur l'unicité de ψ. Plutôt que de s'embarquer dans un raffinement technique de ce qui précède, nous allons donner un argument direct dans le cas où $E = \mathbb{R}$; c'est ce seul cas que nous utiliserons dans la prochaine section pour établir la stabilité structurelle de $\mathbb{S} \to \mathbb{S}$, $z \mapsto z^p$, $p \geqslant 2$.

Lemme 2.2.4. *Toute application continue* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, vérifiant l'inégalité* $\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t) - t| < \infty$*, est surjective.*

Démonstration. Soit $K = \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t) - t|$. On a

$$h([-n, n]) \supset [h(-n), h(n)].$$

Or $h(n) \geqslant n-K$ et $h(-n) \leqslant -n+K$, par conséquent, pour n grand, $h([-n,n]) \supset [-n+K, n-K]$. $\square$

Remarque. L'argument précédent repose sur la connexité. Le même lemme est vrai pour une application continue $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, vérifiant $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |h(x)-x| < \infty$, mais la démonstration repose sur le théorème du point fixe de Brouwer (en fait, c'est équivalent au théorème de Brouwer).

2.3. Stabilité structurelle de m_p, $p \geqslant 2$. Le but de cette section est de démontrer le théorème :

Théorème 2.3.1. *Si $p \geqslant 2$, l'application $m_p : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ est structurellement stable.*

Soit $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ une application continue telle que $\|f - m_p\|_0 < \varepsilon_1$ et $\mathrm{Lip}(f - m_p) < \varepsilon_2$. On a donc

$$\left|\frac{f(z)}{z^p} - 1\right| = |f(z) - z^p| < \varepsilon_1.$$

En prenant ε_1 assez petit, on peut définir $\eta : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ par $\eta(z) = \kappa(f(z)z^{-p})$, où k est l'inverse de $\widetilde{\exp}$ introduit à la fin de la section 3.4. Si on pose $\overline{\eta} = \eta \circ \widetilde{\exp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a que $\overline{\eta}$ est continue, $\mathbb{Z}$-périodique et $\|\overline{\eta}\|_0 \to 0$ quand $\varepsilon_1 \to 0$. De plus, si on pose $\overline{f}(x) = px + \overline{\eta}(x)$, on voit que $\widetilde{\exp} \circ \overline{f} = f \circ \widetilde{\exp}$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\widetilde{\exp}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\widetilde{\exp}"] \\ \mathbb{S} \arrow[r, "f"] & \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

On peut aussi voir que $\mathrm{Lip}(\overline{\eta}) \to 0$ quand ε_1 et ε_2 tendent vers 0. Comme $p \geqslant 2$, l'application linéaire $A_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto px$ a un inverse qui est une contraction, par conséquent, pour ε_1 et ε_2 assez petit, on trouve un homéomorphisme $\overline{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} + \psi$ tel que $A_p \circ \overline{h} = \overline{h} \circ \overline{f}$. Comme $\overline{\eta}$ est $\mathbb{Z}$-périodique et $A_p(\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, on a que ψ est $\mathbb{Z}$-périodique. Par conséquent l'homéomorphisme $\overline{h}$ vérifie $\overline{h}(x+1) = \overline{h}(x) + 1$. Il en résulte que l'on peut définir un homéomorphisme $h : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[d, "\widetilde{\exp}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\widetilde{\exp}"] \\ \mathbb{S} \arrow[r, "h"] & \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

On vérifie sans peine que la relation $A_p \circ \overline{h} = \overline{h} \circ \overline{f}$ se traduit par le fait que h est une conjugaison topologique entre f et m_p.

Pour ceux qui savent ce qu'est la notion d'homotopie, nous proposons de résoudre l'exercice suivant :

Exercice 2.3.2. Si $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ est continue et homotope à m_p, avec $p \geqslant 2$, montrer qu'il y a une semi-conjugaison entre f et m_p.

Références

[1] A. Chenciner – « Systèmes dynamiques différentiables », in *Encyclopaedia Universalis*, vol. 17, 1985, p. 594–630.

[2] R. L. Devaney – *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin/Cummings, 1986.

[3] B. Hasselblatt & A. Katok – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopædia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1995.

[4] M. Shub – *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque, vol. 56, Société Mathématique de France, Paris, 1978.

Albert Fathi, Département de Mathématiques, École Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

E-mail : `afathi@umpa.ens-lyon.fr`