Journées mathématiques X-UPS

Année 1995

Aspects géométriques et combinatoires de la convexité

Bernard TEISSIER

Volumes mixtes des corps convexes

Journées mathématiques X-UPS (1995), p. 71-93.
https://doi.org/10.5802/xups.1995-04

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1995, p. 71–93 doi: 10.5802/xups.1995-04

VOLUMES MIXTES DES CORPS CONVEXES

par

Bernard Teissier

Table des matières

Introduction

Le but de ces exposés est de présenter un chapitre de l'étude des corps convexes qui permet de prouver un raffinement de l'inégalité isopérimétrique et qui fournit un critère *numérique* d'égalité à translation près de deux corps convexes permettant de caractériser le cas d'égalité.

Pour commencer je reproduis un aperçu historique publié il y a quelques années.

1. Le problème isopérimétrique

> *Cependant, les théories ont leurs commencements : des allusions vagues, des essais inachevés, des problèmes particuliers ; et même lorsque ces commencements importent peu dans l'état actuel de la Science, on aurait tort de les passer sous silence.*
>
> Frédéric Riesz, 1913

Publication originelle dans Journées X-UPS 1995. Aspects géométriques et combinatoires de la convexité. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1995.

Le problème isopérimétrique n'est peut-être pas un « grand problème », mais il est certainement un vieux problème. Son origine mythique est la nécessité pour la reine Didon d'enfermer la plus grande surface possible avec une peau de boeuf ; elle eut l'idée de la découper en lanières et dut ensuite se demander quelle forme donner à un fil pour qu'il enferme la plus grande surface possible. J'appellerai problème isopérimétrique le problème consistant à montrer que parmi tous les domaines du plan ayant un périmètre donné, le disque est celui qui a la plus grande aire. Je l'ai choisi pour illustrer comment un problème d'énoncé fort simple peut en Mathématiques donner naissance à des concepts assez profonds pour qu'ils aillent ensuite enrichir des branches de Mathématiques a priori fort éloignées. Ce problème de géométrie euclidienne a fécondé l'analyse, puis plus récemment la géométrie riemannienne et la géométrie algébrique. Sa version multidimensionnelle a permis en 1982 de donner une démonstration fulgurante d'un problème de combinatoire posé en 1926 et qui avait résisté à de nombreux efforts. Je veux aussi insister sur le fait qu'il n'a pu être posé clairement que vers le début du 18ème siècle et n'a été résolu qu'à la fin du 19ème alors que les Grecs de l'époque classique étaient déjà tout-à-fait conscients de la propriété extrémale du cercle. On insiste souvent à juste titre sur le fait que les Mathématiques inventent des concepts dont l'utilité « pratique » n'apparaît parfois que plusieurs décennies ou siècles plus tard, et que la recherche mathématique est donc un investissement à très long terme. En sens inverse, il est aussi vrai que des problèmes « concrets » peuvent contribuer à créer des concepts mathématiques pendant plusieurs siècles ; l'histoire que je vais esquisser est en fait celle d'une longue méditation mathématique, commencée il y a au moins 2400 ans et qui n'est pas encore terminée, sur les concepts d'aire et de volume, et sur le concept d'extremum. Je dois aussi souligner que la motivation de ces recherches n'était pas dans les applications. Les architectes navals n'ont pas attendu la démonstration rigoureuse de l'inégalité isopérimétrique pour faire des hublots ronds. Comme le dit joliment T. Bonnesen dans l'introduction de son livre « sur le problème des isopérimètres et des isépiphanes » (1929) : « Et ces propriétés du cercle et de la sphère sont tellement intuitives que, pour l'homme de bon sens, il paraît superflu d'en donner des démonstrations. Pour les géomètres au contraire la démonstration exacte des théorèmes en question a présenté des difficultés assez grandes ». Cependant les retombées pratiques des mathématiques au développement desquelles le problème isopérimétrique a contribué sont incalculables et dépassent de très loin ce qu'aurait pu donner une réflexion « pilotée par les applications » (pour n'en citer qu'une classe : les calculs sur les vibrations des structures, par exemple les ponts).

C'est là une autre idée que j'aimerais illustrer dans cet exposé : la recherche de la rigueur est un puissant moteur pour l'invention, et fournit ainsi des champs d'application bien plus vastes que la « vérité utile » que l'on cherchait à établir.

Il est possible que le premier énoncé mathématique du problème isopérimétrique soit dû à Archimède (287-212 av. J.C.) mais la première solution d'un problème analogue qui soit parvenue jusqu'à nous est celle de Zenodorus qui vivait entre 200 av. J.C. et 90 après J.C. Celui-ci prouve par exemple que parmi tous les polygones ayant un nombre donné de côtés et inscrits dans un cercle donné, c'est le polygone régulier qui enferme la plus grande aire.

Polybius (201-120 av. J.C.) insiste sur le fait que les gens mesurent l'aire des villes et des camps par leur circonférence ; il ajoute : « l'ennui est que nous avons oublié nos leçons de géométrie » Proclus, qui vivait au cinquième siècle, mentionne des procès opposant (au premier siècle ?) des membre de communautés d'agriculteurs grecs où la terre devait être également répartie entre tous, mais l'était selon le périmètre... avec les résultats que l'on pense au moment de la récolte. Le rapport entre le périmètre et l'aire n'était donc pas tout-à-fait clair bien que la propriété d'extrémalité du cercle ait été clairement vue, au moins parmi les courbes que connaissaient bien les Grecs : coniques et polygones. Il paraît d'ailleurs que certains commentateurs tardifs mettaient en doute la proposition d'Euclide selon laquelle tous les triangles qui ont une base donnée et dont le sommet opposé parcourt une droite parallèle à la base enferment la même aire, pour la raison que l'on peut faire tendre le périmètre vers l'infini en éloignant le sommet sur la parallèle. Le problème théorique semble ensuite reposer jusqu'au 18ème siècle, et va se réveiller dès que le calcul infinitésimal donnera des techniques pour étudier le problème que voici : étant donnés un ensemble de courbes, et une grandeur associée à chaque courbe de l'ensemble (par exemple un temps de parcours, une variation d'énergie), déterminer la ou les courbes qui rendent maximale ou minimale cette grandeur ; c'est la naissance du calcul des variations comme branche de l'analyse. La solution des premiers problèmes de calcul des variations, comme celui de la « courbe brachystochrone » qui est la courbe joignant deux points donnés d'un plan vertical le long de laquelle le temps de chute d'une bille sans frottement est minimal, cette solution, dis-je, est obtenue en écrivant qu'un extremum (maximum ou minimum) « annule la dérivée par rapport à la courbe » ; cela conduit pour chaque problème à des équations appelées équations d'Euler. Les courbes qui satisfont ces équations sont candidates à donner le maximum ou le minimum cherché, mais il se peut aussi qu'aucune de ces courbes ne donne l'extremum, et qu'en fait cet extremum ne soit pas atteint. Décider de l'existence de l'extremum est la difficulté majeure du calcul des variations mais comme, dans les cas analogues à celui de la brachystochrone, les équations d'Euler peuvent être assez facilement intégrées pour donner explicitement la solution cherchée, le problème de l'existence de la solution ne se posait pas.

C'est je crois une des grandes contributions du problème isopérimétrique que d'avoir obligé les mathématiciens à poser le problème de l'existence des solutions des problèmes variationnels, et voici comment : Les équations d'Euler n'ont de sens que sous des hypothèses de dérivabilité, donc de régularité des courbes considérées, qui ne sont pas du tout naturelles dans le problème isopérimétrique. Après des travaux analytiques pas vraiment concluants de Jacob et Johan Bernoulli et de Brook Taylor les géomètres du début du 19ème avaient donc cherché des solutions géométriques et Jacob Steiner avait inventé une construction géométrique, la symétrisation de Steiner, qui associe à chaque domaine qui n'est pas un cercle et à une direction de droite un nouveau domaine ayant la même aire et un périmètre plus petit. Steiner a cru pouvoir en déduire une propriété d'extrémalité du cercle équivalente à la propriété isopérimétrique : parmi les courbes qui enferment une aire donnée, il a le plus petit périmètre. Mais il supposait explicitement l'existence d'un extremum. O. Perron a fait observer que le même schéma de démonstration prouverait que « le nombre 1 est le plus grand nombre entier » ; à tout nombre entier a différent de 1 on peut en effet associer un nombre entier plus grand, son carré a^2. Cet argument montre en fait que le nombre 1 est le seul candidat possible pour réaliser le maximum, et l'erreur de cette « démonstration » est évidemment qu'ici le maximum n'existe pas. Il a ainsi souligné que le problème essentiel est celui de prouver l'existence d'une courbe ayant la propriété extrémale, par exemple en trouvant des condition nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe soit extrémale.

C'est à peu près à la même époque que Lejeune-Dirichlet affirmait la possibilité de prolonger une fonction donnée sur le bord d'un domaine D du plan en une fonction f définie à l'intérieur de celui-ci et minimisant une « énergie ». Les sources physiques de la théorie du potentiel (cherchant à mettre dans un même cadre mathématique le potentiel gravitationnel et le potentiel électrostatique) faisaient que nul ne doutait de l'existence de telles fonctions, dites « harmoniques », mais l'usage fait par Riemann de ce « principe de Dirichlet », et peut-être aussi l'accent mis sur les problèmes d'existence à propos du problème isopérimétrique, ont amené plus tard les mathématiciens à s'interroger sur ses conditions précises de validité. Les méthodes mises au point à propos du problème isopérimétrique, ainsi que des méthodes d'analyse, ont contribué à la création d'une magnifique théorie qui contient en particulier le problème de Dirichlet, le problème isopérimétrique, et des inégalités d'analyse reliant la forme d'un domaine du plan à la fréquence fondamentale d'un tambour dont la membrane aurait la forme de ce domaine. L'analogue dans ce dernier cas du théorème isopérimétrique est que parmi tous les domaines du plan ayant la même aire, c'est le disque qui donne la note fondamentale la plus basse. Une partie de cette théorie donne des conditions suffisantes pour l'existence de solutions d'un problème de calcul des variations et a permis à Weierstrass et Schmidt de résoudre finalement de manière satisfaisante le problème isopérimétrique dans les années 1880.

Tout cela ne constitue aujourd'hui qu'une toute petite partie du calcul des variations, qui continue d'être utilisé partout en physique, l'idée restant depuis Maupertuis et Laplace que tout mouvement, une fois représenté dans un espace de configuration convenable, doit se faire de façon à minimiser une dépense d'énergie convenablement définie. Par exemple les fameuses équations de Yang-Mills de la Physique contemporaine sont des équations variationnelles. La symétrisation de Steiner est devenue une technique classique de calcul des variations qui sert à prouver des résultats d'analyse. Les généralisations de la partie « fréquence fondamentale d'un tambour », que les mathématiciens appellent « spectre du laplacien » forment en ce moment un domaine de recherche très actif où coopèrent la géométrie et l'analyse fine.

Tout récemment Colin de Verdière a trouvé des liens entre ce spectre du laplacien pour une surface et le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier une carte tracée sur cette surface (qui est égal à 4 pour la sphère d'après le Théorème des quatre couleurs, mais ceci est une autre histoire, du moins pour le moment).

Le problème isopérimétrique en dimension supérieure, qui consiste en dimension 3 à montrer que parmi tous les solides ayant la même surface du bord (appelés isépiphanes) c'est la boule qui possède le plus grand volume, avait été abordé géométriquement dès le début du 19ème, en particulier par Steiner. Il y a des difficultés nouvelles car le comportement du volume est plus compliqué ; par exemple on ne peut pas du tout se ramener, comme dans le plan, au cas où les domaines considérés sont convexes. Pour bien comprendre il faut écrire quelques formules. Il y a un résultat quantitatif, l'« inégalité isopérimétrique » :

$$(\mathrm{Vol}(\partial D))^d \geqslant d^d \,\mathrm{Vol}(\mathbf{B})\,\mathrm{Vol}(D)^{d-1},$$

reliant le volume $(d-1)$- dimensionnel du bord ∂D d'un domaine D de l'espace euclidien de dimension d et le volume de D (ainsi que celui de la boule $\mathbf{B}$ de rayon 1, qui intervient comme une constante ne dépendant que de la dimension), sous la seule contrainte que ces deux quantités aient un sens, c'est-à-dire pour les domaines qui ne sont pas des « Fractals ». En dimension $d = 2$, cela donne

$$L^2 \geqslant 4\pi S \ ,$$

où L est le périmètre du domaine et S sa surface, et le problème isopérimétrique revient à montrer que l'on a l'égalité seulement si le domaine est un disque. La démonstration générale de l'inégalité isopérimétrique remonte aux années 1930. Dès que la dimension de l'espace est au moins 3, on peut avoir égalité pour des domaines autres que la boule de dimension d, mais on peut montrer cependant que si D donne l'égalité dans l'inégalité isopérimétrique, alors D est une boule à laquelle on a ajouté un « voile » de volume nul. Si l'on veut que l'égalité n'ait lieu que pour la boule, on peut se restreindre à l'étude des corps convexes, et l'on a alors bien mieux. Étant donnés deux domaines convexes K et K' de l'espace affine de dimension d, il est clair qu'ils peuvent avoir le même volume sans être égaux à une translation près. Il se trouve que l'on peut généraliser le concept de volume comme ceci : étant donnés deux convexes K et K' on peut intercaler naturellement entre le volume de K et celui de K' des volumes mixtes bien définis ne dépendant que de K et K' pour obtenir une suite de $d+1$ nombres positifs ou nuls $v_0, v_1, \ldots, v_d$, avec $v_0 = \mathrm{Vol}(K)$ et $v_d = \mathrm{Vol}(K')$. Le miracle est que deux convexes K et K' sont égaux à une translation près si et seulement si tous leurs volumes mixtes sont égaux. Si K' est la boule de rayon 1, le volume mixte v_1 est le volume $(d-1)$-dimensionnel du bord ∂K divisé par d (en dimension 3, c'est donc le tiers de la surface du bord). L'inégalité isopérimétrique est dans ce cas une conséquence des inégalités bien plus précises que voici :

$$v_i^2 \geqslant v_{i-1}v_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, d-1.$$

Cela suffit pour prouver que parmi les convexes, on n'a égalité dans l'inégalité isopérimétrique que si K est une boule. Ces inégalités ont vers 1980 servi à prouver une conjecture combinatoire (la conjecture des permanents de van der Waerden) qui avait résisté à beaucoup d'efforts depuis 1926 et ont d'autres applications en combinatoire. Elles ont d'autre part été reliées, au moyen d'un dictionnaire établi récemment entre la théorie des convexes et une partie de la géométrie algébrique, à des inégalités de la « Théorie de Hodge ». Comme cette dernière, toute géométrique qu'elle soit, descend en ligne directe du principe de Dirichlet, cette relation est en fait une résurgence moderne et géométrique de l'analogie féconde entre le problème isopérimétrique et le problème de Dirichlet. Cela a inspiré des énoncés dont la vérification permettrait entre autres choses de préciser et généraliser des inégalités de géométrie algébrique utilisées pour démontrer la célèbre conjecture de Weil correspondant pour les courbes algébriques sur les corps finis à l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction ζ, qui est en ce moment le « grand problème » par excellence. Les volumes mixtes ont aussi été introduits vers 1983 dans la théorie des espaces de Banach, qui sont des espace de dimension infinie où la géométrie de la « boule de rayon un » joue le rôle central, et des variantes de l'inégalité isopérimétrique jouent en ce moment un rôle crucial dans certaines parties de l'étude de la géométrie des objets les plus généraux pour lesquels les vocables de distance, boule, volume, etc. ont un sens, appelés variétés riemanniennes. Ceci nous ramène donc à la Géométrie, d'où nous étions partis.

Comme un ruisseau qui reçoit des affluents, le courant de pensée issu du problème isopérimétrique s'est mêlé à bien d'autres, inspirés des applications ou bien des problèmes les plus « purs », et ce que nous observons aujourd'hui est le résultat de ces mélanges. Distinguer la part des eaux qui provient de chaque affluent est impossible et d'ailleurs sans grand intérêt, mais je pense que la géométrie du « réseau hydrographique », dont je n'ai présenté ici qu'une partie, peut donner une idée de la richesse de la construction mathématique.

Je remercie Régine Douady pour ses commentaires utiles et Sylvain Gallot pour les nombreuses améliorations qu'il a suggérées.

2. Corps convexes

L'enveloppe affine d'une partie E de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace affine contenant E, est notée E^{aff} ; la « dimension affine » de E, que nous appellerons ici simplement dimension, est par définition la dimension de son enveloppe affine. Cette dimension vaut

$$\max\{i \geqslant 0 \mid \text{il existe } i+1 \text{ points } x_0, \ldots, x_i \text{ de } E \text{ affinement libres}\}.$$

L'intérieur d'une partie E de $\mathbb{R}^d$ est noté $\mathring{E}$, tandis que son intérieur dans E^{aff} (ou intérieur relatif) est noté $\mathring{E}^{\text{aff}}$; l'égalité $\mathring{E} = \mathring{E}^{\text{aff}}$ équivaut à $\dim E = d$. L'adhérence de E est notée $\overline{E}$ (pas d'ambiguïté ici).

Définition 2.1. Une partie E de $\mathbb{R}^d$ est dite « *convexe* » si pour tous x et y dans E le segment $[x, y]$ est inclus dans E, c'est-à-dire pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$.

Un raisonnement par récurrence immédiat montre que cette définition équivaut à la suivante (stabilité de E par passage au barycentre d'une famille finie quelconque d'éléments de E) :

Pour tout entier $p \geqslant 2$ et tout p-uple $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de nombres réels positifs vérifiant $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$ et pour tout p-uple $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de E, on a $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p \in E$.

Définition 2.2. Un corps convexe est un sous-ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^d$. La dimension d'un corps convexe est la dimension de son enveloppe affine ; un corps convexe est de dimension d si et seulement si il est d'intérieur non vide.

Nous noterons $\mathcal{K}^d$ l'ensemble des corps convexes de $\mathbb{R}^d$.

Si l'on a choisi une origine dans l'espace affine $\mathbb{R}^d$, on peut définir les opérations élémentaires suivantes sur les corps convexes :

- La translation par un vecteur $a \in \mathbb{R}^d$:

$$(K, a) \longmapsto K + a = \{x + a \mid x \in K\}.$$

- La dilatation ou homothétie d'un facteur $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$(K, \lambda) \longmapsto \lambda K = \{\lambda x \mid x \in K\}.$$

- La *somme de Minkowski* de deux corps convexes :

$$K + K' = \{x + y \mid x \in K,\ y \in K'\}.$$

Cette dernière opération joue un rôle fondamental dans la suite de cet exposé. Il faut noter aussi l'existence d'opérations qui ne sont pas partout définies dans $\mathcal{K}^d$, mais qui ont aussi leur importance :

- La réunion $K \cup K'$ (quand elle est convexe !).

• La différence $K - K' = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x + K' \subset K\}$ (quand elle est convexe !).

Exemples de corps convexes

• Les polytopes sont les enveloppes convexes d'un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^d$; si tous les points sont à coordonnées entières (c'est-à-dire dans $\mathbf{Z}^d$), on dit que le polytope est entier.

• Parmi tous les polytopes d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^d$, ceux qui sont l'enveloppe convexe de $d+1$ points sont les plus simples ; on les appelle *simplexes*.

Les caractères numériques naturels et évidents d'un polytope sont le nombre de ses faces de chaque dimension, et le nombre des points à coordonnées entières qu'il contient. Un invariant de nature plus profonde est le polynôme d'Ehrhart d'un polytope entier, qui forme le sujet du texte de Brion.

Pour un corps convexe quelconque, son volume et le volume (en dimension un de moins) de son bord se présentent naturellement.

Un outil fondamental dans l'étude des corps convexes est la *fonction d'appui* associée à un corps convexe. Cette notion permet de penser à un corps convexe comme à une fonction. On notera $\mathbb{R}^{d*}$ l'espace vectoriel dual de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.3. Soit K un corps convexe dans $\mathbb{R}^d$. La fonction d'appui de K est l'application $H_K \colon \mathbb{R}^{d*} \to \mathbb{R}$ définie par

$$H_K(u) = \sup_{x \in K} u(x).$$

Pour K fixé, la fonction $H_K(u)$ est ce que l'on appelle une *jauge*, c'est-à-dire une fonction qui satisfait les deux conditions suivantes :

(a) H_K est convexe :

$$H_K(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \leqslant \lambda_1 H_K(u_1) + \lambda_2 H_K(u_2) \qquad \text{pour } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

(b) H_K est positivement homogène :

$$H_K(\lambda u) = \lambda H_K(u) \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Remarquons que ces deux conditions ont encore un sens pour une fonction définie sur un cône convexe de $\mathbb{R}^{d*}$.

En fait, à tout couple formé d'une fonction convexe $f : C \to \mathbb{R}$ définie sur un cône convexe C et d'un point $x_0 \in C$, on peut associer une jauge

$$y \longmapsto \partial f(x_0; y) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x_0 + \lambda y) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Cette construction nous servira plus bas. En attendant, retenons la

Proposition 2.4. *L'application $K \mapsto H_K$ est une bijection de l'ensemble des corps convexes de $\mathbb{R}^d$ sur l'ensemble des jauges définies sur $\mathbb{R}^{d^*}$. L'application réciproque est donnée par*

$$H \longmapsto K_H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x) \leqslant H(u) \quad \text{pour tous} \quad u \in \mathbb{R}^{d^*}\},$$

et la fonction d'appui de K_H est H.

La démonstration est très facile.

Exercice. Montrer que les jauges correspondant à des polytopes sont celles qui sont « linéaires par morceaux » en ce sens qu'il existe une partition finie de $\mathbb{R}^{d^*}$ en cônes convexes σ_i telle que H_K soit linéaire dans chaque σ_i ; il existe q_i tel que

$$\text{pour tout } u \in \sigma_i \ , \ H_K(u) = u(q_i).$$

Les polytopes entiers donnent des cônes convexes σ_i qui sont rationnels (définis par des inégalités $\ell_s(u) \geqslant 0$ portant sur des formes linéaires ℓ_s à coefficients entiers). Deux polytopes tels que les décompositions en cônes qui leurs correspondent soient les mêmes sont dits *analogues.* Cela signifie que leurs faces sont parallèles.

3. Volumes mixtes

Le but de ce paragraphe est d'établir l'existence des volumes mixtes dans le cas des polytopes et de donner leurs premières propriétés.

L'histoire commence avec une formule démontrée par Steiner sur le volume de l'épaississement d'un corps convexe.

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un corps convexe ; pour tout nombre réel positif ρ, soit $T_\rho(K)$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ situés à une distance $\leqslant \rho$

de K. Le volume de $T_\rho(K)$ est un polynôme en ρ de degré d dont le terme constant est le volume (d-dimensionnel) de K.

La première étape de la preuve est la formule suivante, due à Cauchy :

Proposition 3.1. *Soient P un polytope de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide et $x_0 \in \mathring{P}$. Notons $P_i = A_i \cap P$, $1 \leqslant i \leqslant k$, ses faces de dimension $d-1$ (A_i est un hyperplan de $\mathbb{R}^d$). Alors :*

$$\mathrm{Vol}_d(P) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{d}(x_0, A_i)\mathrm{Vol}_{d-1}(P_i).$$

Démonstration. Découpons P en k pyramides $Q_i = \mathrm{conv}(\{x_0\} \cup P_i)$, de sommet commun x_0 et de base P_i. Deux telles pyramides ont pour intersection un polytope inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$, dont le volume d-dimensionnel est nul ; on en déduit la formule attendue puisque le volume de la i-ème pyramide vaut $\frac{1}{d}\mathrm{d}(x_0, A_i)\,\mathrm{Vol}_{d-1}(P_i)$. □

Corollaire 3.2. *On reprend les mêmes notations que ci-dessus ; quelle que soit l'origine choisie dans $\mathbb{R}^d$, si u_i désigne le vecteur unitaire sortant de la i-ème face, c'est-à-dire le vecteur tel que*

$$A_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_i(x) = H_P(u_i)\}$$

et $P = \bigcap_i \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_i(x) \leqslant H_P(u_i)\}$ on a :

$$\mathrm{Vol}_d(P) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k} H_P(u_i)\mathrm{Vol}_{d-1}(P_i).$$

Démonstration. Si l'origine est en x_0, il suffit de remarquer que $H_K(u_i)$ représente la distance du plan A_i à x_0 et la formule découle immédiatement de la proposition. Notons que cette expression reste valable quel que soit le choix de l'origine dans P, toujours d'après l'interprétation géométrique de la proposition ; autrement dit, l'expression est toujours valable si on remplace P par $P - a$, quel que soit $a \in P$; or

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k} H_{P-\{a\}}(u_i)\,\mathrm{Vol}_{d-1}(P_i - \{a\}) = \mathrm{Vol}_d(P) - f(a),$$

où f désigne la forme linéaire

$$a \longmapsto \sum_{i=1}^{k} u_i(a)\,\mathrm{Vol}_{d-1}(P_i).$$

Cette égalité résulte de l'invariance du volume par translation. Mais on a prouvé que f est nulle sur P dont l'intérieur est non vide ; par suite, f est identiquement nulle et l'expression ci dessus est donc valable si on substitue $P - \{a\}$ à P, quel que soit $a \in \mathbb{R}^d$. $\square$

Intéressons nous maintenant à la proposition 3.1. Le cadre général de l'étude sera le suivant : $P_1, \ldots, P_r$ sont des polytopes dont on note $H_1, \ldots, H_r$ les fonctions d'appui et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des réels positifs ; on note P le polytope $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r$ et on suppose que $\dim(P) = d$. Il est alors immédiat que H_P vaut $\lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_r H_r$. On note $F_1, \ldots, F_q$ les faces de dimension $d-1$ de P, $u_1, \ldots, u_q$ les vecteurs unitaires sortants correspondants, $F_{i,1}, \ldots, F_{i,k(i)}$ les faces de dimension $d-2$ de F_i et de même $v_{i,1}, \ldots, v_{i,k(i)}$. En utilisant les résultats du § 2, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_d(P) &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{q} H_P(u_i)\mathrm{Vol}_{d-1}(F_i)\\
&= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\Bigg(\sum_{i=1}^{q} H_j(u_i)\mathrm{Vol}_{d-1}(F_i)\Bigg)\\
&= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\Bigg(\sum_{i=1}^{q} H_j(u_i)\Bigg(\frac{1}{d-1}\sum_{\ell=1}^{k(i)}\partial H_P(u_i;v_{i,\ell})\mathrm{Vol}_{d-2}(F_{i\ell})\Bigg)\Bigg)\\
&= \frac{1}{d(d-1)}\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{r}\lambda_j\lambda_m v_{j,m},
\end{aligned}$$

où le facteur $v_{j,m}$ vaut :

$$v_{j,m} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{k(i)} H_j(u_i)\partial H_m(u_i;v_{i,\ell})\,\mathrm{Vol}_{d-2}(F_{i\ell})$$

On continue ainsi et bien que l'écriture exacte du résultat final de ce calcul en fonction des dérivées successives des fonctions H_i soit fastidieuse, il est clair qu'on obtient une expression du type :

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r) = \sum_{|\alpha|=d} \frac{d!}{\alpha!} \mathrm{Vol}(P_1^{[\alpha_1]}, \ldots, P_r^{[\alpha_r]}) \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_r^{\alpha_r},$$

où α désigne un r-uplet d'entiers positifs ou nuls $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $|\alpha|$ est la somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ et $\alpha!$ est égal au produit $\alpha_1! \cdots \alpha_r!$.

Définition 3.3. Le α-ième volume mixte des polytopes $P_1, \ldots, P_r$ est le coefficient

$$\mathrm{Vol}(P_1^{[\alpha_1]}, \ldots, P_r^{[\alpha_r]}).$$

D'après le corollaire ci-dessus, ce coefficient est indépendant de l'origine choisie (mais dépend bien sûr des positions relatives des polytopes) et aussi de l'ordre dans lequel on écrit les $P_i^{[\alpha_i]}$. Le volume de la combinaison linéaire de polytopes $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r$ (supposée de dimension d) est donc bien un polynôme homogène de degré d en les λ_i dont les coefficients sont les volumes mixtes, au facteur $d!/\alpha!$ près. L'extension de ce résultat aux éléments de $\mathcal{K}^d$ fait l'objet du paragraphe suivant.

On commence par vérifier la

Proposition 3.4. *Les volumes mixtes croissent avec les polytopes ; plus précisément, si $P_1, \ldots, P_r$ et $Q_1, \ldots, Q_r$ sont deux suites de polytopes vérifiant $P_i \subset Q_i$ pour tout i, on a, pour tout r-uplet α de poids d :*

$$\mathrm{Vol}(P_1^{[\alpha_1]}, \ldots, P_r^{[\alpha_r]}) \leqslant \mathrm{Vol}(Q_1^{[\alpha_1]}, \ldots, Q_r^{[\alpha_r]}).$$

En particulier tous les volumes mixtes sont $\geqslant 0$.

Nous ne donnons pas ici la démonstration.

Théorème et définition 3.5. *Soient $K_1, \ldots, K_r$ r éléments de $\mathcal{K}^d$. Alors le volume de la somme de Minkowski $\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r$ est un polynôme homogène de degré d en les λ_j ; on note :*

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r) = \sum_{|\alpha|=d} \frac{d!}{|\alpha|!} \mathrm{Vol}(K_1^{[\alpha_1]}, \ldots, K_r^{[\alpha_r]}) \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_r^{\alpha_r}.$$

Les coefficients mis en évidence ci-dessus s'appellent les volumes mixtes des corps convexes $K_1, \ldots, K_r$.

La démonstration consiste essentiellement à se ramener au cas de polytopes en utilisant le fait que tout corps convexe est limite d'une suite de polytopes et les faits que le volume est une fonction continue sur $\mathcal{K}^d$ muni de la métrique de Hausdorff (dont la définition est rappelée au § 4) et qu'une limite de polynômes de degré d est un polynôme de degré d. Soulignons encore que les volumes mixtes sont invariants par translation.

Dans le cas particulier où $r = 2$, cela donne

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} v_i \lambda_1^i \lambda_2^{d-i}, \quad \text{où } v_i = \mathrm{Vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]})$$

et l'on a les égalités

$$v_0 = \mathrm{Vol}(K_2), \quad v_d = \mathrm{Vol}(K_1).$$

Si de plus K_2 est la boule unité $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^d$, on peut observer que la somme de Minkowski $K + \lambda\mathbb{B}$ est le tube de rayon λ autour de K et on retrouve la formule de Steiner

$$\mathrm{Vol}(K + \lambda\mathbb{B}) = \mathrm{Vol}(K) + d\,\mathrm{Vol}(K^{[d-1]}, \mathbb{B}^{[1]})\lambda + \cdots + \mathrm{Vol}(\mathbb{B})\lambda^d.$$

De plus, c'est un exercice de calcul intégral de vérifier que l'on a

$$d\,\mathrm{Vol}(K^{[d-1]}, \mathbb{B}^{[1]}) = \lim_{\lambda \to 0_+} \Big(\frac{\mathrm{Vol}(K + \lambda\mathbb{B}) - \mathrm{Vol}(K)}{\lambda}\Big) = \mathrm{Vol}_{d-1}(\partial K).$$

C'est cette égalité qui fait le raccord entre la théorie des volumes mixtes et l'inégalité isopérimétrique.

En effet le résultat principal de la théorie est le suivant, où l'on a gardé les notations introduites ci-dessus :

Théorème 3.6 **(Inégalités d'Alexandrov-Fenchel)**

On a entre les volumes mixtes $v_i = \mathrm{Vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]})$ de deux corps convexes les inégalités suivantes :

$$v_{i-1}^2 \geqslant v_i v_{i-2} \quad \text{pour } 2 \leqslant i \leqslant d,$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{v_d}{v_{d-1}} \leqslant \frac{v_{d-1}}{v_{d-2}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{v_1}{v_0}.$$

Si toutes ces inégalités sont des égalités, soit ρ la valeur commune des quotients v_i/v_{i-1} ; alors $\rho K_1 = K_2$ à une translation près.

Par télescopage (= simplification dans les produits) des inégalités on déduit en élevant v_d/v_{d-1} à la puissance $d-1$ que l'on a

$$v_d^{d-i} v_0^i \leqslant v_{d-1}^d$$

ou encore en échangeant les rôles de K_1 et K_2

$$v_1^d \geqslant v_0^{d-1} v_d$$

avec égalité si et seulement si tous les rapports v_i/v_{i-1} sont égaux entre eux. En majorant ou minorant $(v_i/v_{i-1})^{i(d-i)}$ par télescopage on obtient pour $0 \leqslant i \leqslant d$ les inégalités

$$v_i^d \geqslant v_0^{d-i} v_d^i.$$

On en déduit immédiatement le

***Corollaire 3.7* (Inégalité de Brünn-Minkowski).** *On a pour deux corps convexes de $\mathbb{R}^d$ l'inégalité*

$$\mathrm{Vol}(K_1 + K_2)^{1/d} \geqslant \mathrm{Vol}(K_1)^{1/d} + \mathrm{Vol}(K_2)^{1/d}$$

avec égalité si et seulement si les deux convexes sont homothétiques à translation près.

En fait comme l'a prouvé Lyusternik dans les années 1930, l'inégalité de Brünn-Minkowski déborde largement le cadre des convexes et est valable pour deux sous-ensembles compacts quelconques de $\mathbb{R}^d$.

En tous cas on déduit de ce qui précède en prenant $K_2 = \mathbb{B}$ et notant K pour K_1 l'inégalité isopérimétrique ; il suffit de se souvenir que $v_1 = d^{-1}\,\mathrm{Vol}(\partial K)$ pour obtenir

$$\mathrm{Vol}(\partial K)^d \geqslant d^d\,\mathrm{Vol}(K)^{d-1}\,\mathrm{Vol}(\mathbb{B})$$

c'est-à-dire l'inégalité isopérimétrique ; de plus il résulte de ce qui précède que pour un corps convexe K, on a égalité si et seulement si K est à translation près homothétique à une boule, c'est-à-dire est une boule.

Il faut souligner que l'on a des inégalités d'Aleksandrov-Fenchel pour les volumes mixtes de d corps convexes quelconques de $\mathbb{R}^d$; notant K_i pour $K_i^{[1]}$, elles prennent la forme :

$$\mathrm{Vol}(K_1, \ldots, K_d)^2 \geqslant \mathrm{Vol}(K_1, K_1, K_3, \ldots, K_d)\,\mathrm{Vol}(K_2, K_2, K_3, \ldots, K_d).$$

Le cas d'égalité est encore plus délicat à déterminer. On retrouve les inégalités vues plus haut en remarquant que l'on peut interpréter la notation $\mathrm{Vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]})$ comme signifiant que l'on a pris i fois K_1 et $d-i$ fois K_2 pour former $(K_1, \dots, K_d)$.

Notons $\widetilde{\mathcal{K}}^d$ le quotient de $\mathcal{K}^d$ par la relation d'équivalence correspondant à la translation, muni de la topologie quotient de celle de Hausdorff. Les volumes mixtes définissent une application continue

$$\widetilde{\mathcal{K}}^d \times \widetilde{\mathcal{K}}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1},$$

et il est remarquable que la diagonale de l'espace de dimension infinie qui est à gauche soit l'image inverse de la multidiagonale $w_0 = \cdots = w_d$ de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Une question importante est de trouver une forme « stable » du cas d'égalité, c'est-à-dire un énoncé quantitatif disant que si les volumes mixtes sont presque égaux, les deux corps convexes sont presque égaux à translation près. Le prototype est le résultat suivant :

Définissons le *rayon inscrit* $r(K_2, K_1)$ (resp. le *rayon exinscrit* $R(K_2, K_1)$) de K_2 par rapport à K_1 par :

$$\begin{aligned} r(K_2, K_1) &= \mathrm{Sup}\{r \in \mathbb{R}_+ \mid rK_1 \subset K_2 \text{ à translation près}\}, \\ R(K_2, K_1) &= \mathrm{Inf}\{r \in \mathbb{R}_+ \mid K_2 \subset RK_1 \text{ à translation près}\}. \end{aligned}$$

Bonnesen et Flanders ont prouvé en dimension 2 que si $P(T)$ désigne le polynôme déterminé par

$$P(T) = \mathrm{Vol}(K_2 + TK_1) \text{ pour } T \geqslant 0,$$

alors les racines ρ_1, ρ_2 de $P(-T)$ sont réelles (c'est l'inégalité d'Alexandrov-Fenchel) et positives (car les coefficients de $P(T)$ sont positifs), et de plus on a

$$\rho_1 \leqslant r(K_2, K_1) \leqslant R(K_2, K_1) \leqslant \rho_2.$$

Cela donne en particulier pour le rayon r du plus grand cercle inscrit (resp. R du plus petit cercle exinscrit) d'un convexe du plan l'inégalité (avec les notation introduites au § 1)

$$L^2 - 4\pi S \geqslant \pi^2 (R - r)^2.$$

En dimension supérieure on a un résultat de Diskant (voir [2]) mais il n'est plus vrai que les racines du polynôme de Minkowski-Steiner soient toujours réelles.

Ceci est à contraster avec ce qui se passe pour les *déterminants mixtes* de matrices $d \times d$ symétriques définies positives. On peut en effet développer une théorie tout à fait analogue (en plus simple, cf. [4]) à partir du polynôme homogène de degré d

$$\mathrm{Det}(\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_k M_k)$$

et l'on trouve que si l'on écrit les coefficients comme on l'a fait pour les volumes mixtes, on a entre les déterminants mixtes que cette écriture définit les inégalités d'Aleksandrov-Fenchel et que de plus dans le cas de deux matrices définies positives, les racines du polynôme $\mathrm{Det}(M_2 + TM_1)$ sont réelles. On n'a égalité dans les inégalités d'Aleksandrov-Fenchel que si les deux matrices sont proportionnelles.

Soulignons pour terminer que le caractère polynomial du volume d'une combinaison linéaire de convexes n'est pas accidentel et que la raison profonde en est, comme pour le polynôme d'Ehrhart, le caractère additif (propriété valuative) du volume ; on pourra consulter l'article de MacMullen dans [3].

4. Volumes mixtes avec la boule unité

Le but de ce paragraphe est de présenter les interprétations naturelles des volumes mixtes d'un corps convexe avec la boule unité et surtout de montrer que ces volumes mixtes forment une base de l'espace des applications $\mu\colon \mathcal{K}^d \to \mathbb{R}$ qui sont continues pour la métrique de Hausdorff, invariantes par translation, et vérifient la condition de *valuation*.

Définition. Une application $\mu\colon \mathcal{K}^d \to \Gamma$ de $\mathcal{K}^d$ dans un semi-groupe commutatif Γ est appelée valuation si elle satisfait :

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ si } A \cup B \text{ est convexe.}$$

Rappelons la définition de la distance de Hausdorff : soient K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}^d$. On pose

$$\mathrm{D}(K_1, K_2) = \mathrm{Inf}\{\rho \geqslant 0 \mid K_1 \subset K_2 + \rho\mathbb{B} \text{ et } K_2 \subset K_1 + \rho\mathbb{B}\}.$$

D est une distance sur $\mathcal{K}^d$ appelée distance de Hausdorff et l'inf est atteint.

Pour cette métrique les volumes mixtes de r corps convexes sont des fonctions continues sur $(\mathcal{K}^d)^r$.
Remarquons par ailleurs que les volumes mixtes

$$w_i(K) = \mathrm{Vol}(K^{[i]}, \mathbb{B}^{[d-i]})$$

d'un corps convexe avec la boule unité sont invariants non seulement par l'action sur K des translations mais aussi par celle des déplacements de l'espace $\mathbb{R}^d$ à cause de l'invariance du volume par déplacement et de la symétrie de la sphère. Ils vérifient aussi

$$w_i(\lambda K) = \lambda^i w_i(K).$$

Le résultat suivant, souvent appelé « Théorème fondamental de la Géométrie intégrale » n'en est pas moins surprenant :

***Théorème 4.1* (Hadwiger).** *Soit $\phi : \mathcal{K}^d \to \mathbb{R}$ une valuation continue et invariante par déplacement. Alors il existe des nombres réels $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d)$ uniquement déterminés tels que pour tout $K \in \mathcal{K}^d$*

$$\phi(K) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i w_i(K).$$

Autrement dit les applications $K \mapsto w_i(K)$ forment une base de l'espace des valuations à valeurs réelles continues et invariantes par déplacement.

Nous allons voir des interprétations géométriques des volumes mixtes ; je dois laisser de côté parce qu'elle nous entraînerait trop loin celle qui est probablement la plus importante : les $w_i(K)$ sont des intégrales de fonctions symétriques de courbure du bord ∂K.

Soit $\mathrm{Graff}(d, k)$ l'espace des k-plans affines de $\mathbb{R}^d$. C'est en fait une variété algébrique réelle et on peut montrer qu'elle admet une mesure invariante par les déplacements de $\mathbb{R}^d$ qui est unique à homothétie près.

Un des beaux résultats de la Géométrie intégrale, appelé *formule de Crofton* montre que le i-ième volume mixte avec la boule d'un corps K de $\mathbb{R}^d$ est proportionnel à la mesure du sous-ensemble

$\mathrm{Graff}(K, d-i) \subset \mathrm{Graff}(d, d-i)$ des espaces affines de dimension $d-i$ qui le rencontrent :

Théorème 4.2. *Il existe une mesure invariante $m_{d,d-i}$ sur l'ensemble* $\mathrm{Graff}(d, d-i)$ *telle que l'on ait*

$$m_{d,d-i}\left(\mathrm{Graff}(K, d-i)\right) = w_i(K).$$

Si l'on préfère, étant donnés deux corps convexes $K_1 \subset K_2$ tels que K_2 soit de dimension d, la probabilité conditionnelle pour qu'un sous-espace affine de dimension $d-i$ qui rencontre K_2 rencontre aussi K_1 est le quotient $w_i(K_1)/w_i(K_2)$.

Il y a aussi une interprétation des $w_i(K)$ comme volumes moyens de projections orthogonales de K sur des espaces de dimension i. Plus précisément, notons $\mathrm{Gr}(d, k)$ l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^d$. C'est une variété algébrique, compacte et admettant aussi une mesure invariante par les déplacements de $\mathbb{R}^d$. Étant donné $L \in \mathrm{Gr}(d, d-i)$, notons π_L la projection orthogonale sur un espace de dimension i parallèlement à L. Notons enfin O_r le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^r$. On a alors :

Théorème 4.3. *Pour tout corps convexe $K \in \mathcal{K}^d$ on a l'égalité :*

$$w_i(K) = \frac{iO_{d-i-1}\cdots O_0}{dO_{d-2}\cdots O_{i-1}} \int_{L\in\mathrm{Gr}(d,d-i)} \mathrm{Vol}(\pi_L(K))dL.$$

5. Nombres de faces des polytopes

Le caractère numérique naturel d'un polytope $P \subset \mathbb{R}^d$ est la suite des nombres de ses faces de toutes les dimensions ; on note $f_i(P)$ le nombre des faces de dimension i de P. La suite

$$f(P) = (f_0(P), \ldots, f_{d-1}(P))$$

s'appelle le f-vecteur de P.

Le problème de caractériser les suites d'entiers qui sont les f-vecteurs de polytopes remonte au moins à Euler, et c'est à Poincaré que l'on doit la première contrainte générale (calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré de la boule) :

$$f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}$$

Pour aller plus loin il est commode d'introduire une suite d'entiers équivalente aux f_i en convenant de poser $f_{-1} = 1$ et en définissant

$$h_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{d-j}{d-i} (-1)^{i-j} f_{j-1}.$$

On appelle évidemment $h_0(P), \ldots, h_d(P)$ le h-vecteur de P. On remarque que $h_0 = 1$, $h_d = 1$, et que l'on peut calculer les f_i en fonction des h_j par

$$f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{d-j}{d-1-1} h_j.$$

Dans le cas particulier où toutes les faces de P sont des simplexes (on dit que P est simplicial), on a une extension de la formule d'Euler-Poincaré :

***Proposition 5.1* (Dehn-Somerville).** *Pour un polytope simplicial P on a les égalités*

$$h_i(P) = h_{d-i}(P).$$

On peut montrer que ces relations engendrent l'espace affine de toutes les relations linéaires entre les $f_i(P)$ pour P simplicial. La question qui reste est de savoir s'il y a d'autres contraintes sur les f-vecteurs ou les h-vecteurs de polytopes simpliciaux.

Introduisons encore une notation : étant donnés des entiers positifs g, i il existe une unique suite d'entiers positifs satisfaisant

$$n_i > n_{i-1} > \cdots > n_j \geqslant j \geqslant 1$$

et telle que

$$g = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{n_j}{j}.$$

C'est un exercice sur les coefficients du binôme.

Cela étant, on peut associer à g, i l'entier suivant :

$$g^{\langle i \rangle} = \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{n_j+1}{j+1},$$

posant $0^{\langle i \rangle} = 0$.

On dira qu'un vecteur $(g_0, \dots, g_c) \in \mathbf{Z}^{c+1}$ est un *M-vecteur* (M pour Macaulay) si il satisfait

$$g_0 = 1 \text{ et } 0 \leqslant g_{i+1} \leqslant g_i^{\langle i \rangle} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant c-1.$$

On peut montrer qu'un vecteur est un M-vecteur si et seulement si il existe une algèbre graduée $R = \oplus R_i$ sur un corps k, engendrée par ses éléments de degré un, de dimension finie comme espace vectoriel et telle que $\dim R_i = g_i$, $0 \leqslant i \leqslant c$.

En 1971 McMullen énonça la remarquable conjecture suivante :

Conjecture. *Un vecteur $(h_0, \dots, h_d) \in \mathbf{Z}^{d+1}$ est le h-vecteur d'un polytope simplicial P si et seulement si*

(1) *il satisfait $h_i = h_{d-i}$ et*
(2) $(h_0, h_1 - h_0, \dots, h_{[d/2]} - h_{[d/2]-1})$ *est un M-vecteur.*

Cette conjecture a été prouvée en 1979-80 par R. Stanley ([5], nécessité) et Billera-Lee ([1], suffisance). La preuve utilisait des outils puissants de Géométrie algébrique via le même dictionnaire entre polytopes et variétés algébriques qui sous-tend les résultats exposés par Brion.

Récemment McMullen a réussi à donner une version combinatoire de la preuve.

Plonger la théorie des polytopes dans la Géométrie algébrique permet de faire des opérations qui ne sont pas permises pour les polytopes, comme prendre une section hyperplane d'une variété algébrique projective ; une section hyperplane d'une variété algébrique qui « provient » d'un polytope n'a plus cette propriété. McMullen étend combinatoirement l'univers des polytopes (essentiellement par des combinaisons linéaires formelles modulo des relations géométriques) et dans ce cadre étendu parvient à formuler et démontrer des résultats analogues à ceux que la Géométrie algébrique prouve par sections hyperplanes.

Références

[1] L. Billera & C. Lee – « A proof of the sufficiency of McMullen's condition for f-vectors of simplicial convex polytopes », *J. Combin. Theory Ser. A* **31** (1981), p. 237–255.

[2] Y. D. Burago & V. A. Zalgaller – *Geometric inequalities*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 285, Springer Verlag, Berlin, 1988.
[3] P. M. Gruber & J. M. Wills (éds.) – *Convexity and its applications*, Birkhäuser, 1983.
[4] R. Schneider – « On A.D. Aleksandrov's inequalities for mixed discriminants », *Journ. for Math. and Mech.* **15** (1966), p. 285–290.
[5] R. Stanley – « The number of faces of a simplicial polytope », *Adv. in Math.* **35** (1980), p. 236–238.

Bernard Teissier, URA 762 du CNRS, DMI, Ecole Normale Supérieure, 45, Rue d'Ulm, 75005 Paris
E-mail : `bernard.teissier@imj-prg.fr`
Url : `https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.teissier/`