PRÉFACE

La géométrie des corps convexes, initiée par Brunn et Minkowski à la fin du siècle dernier, forme un beau chapitre de la géométrie euclidienne. Le *volume mixte* de plusieurs convexes est un concept central de la théorie, donnant lieu à une série d'inégalités de convexité.

Parmi les convexes, les polytopes (polyèdres de $\mathbb{R}^n$) sont une source de problèmes de nature combinatoire, par exemple

(1) étant donnée une famille d'entiers $f_0, \ldots, f_d$, sous quelles conditions existe-t-il un polytope convexe de dimension d dont le nombre de facettes de dimension k soit f_k pour tout k (voir le texte de B. Teissier) ? Une condition nécessaire, remontant à Euler et Poincaré, est que la somme alternée des f_k soit égale à $1-(-1)^d$;

(2) lorsque le polytope P est à sommets dans $\mathbb{Z}^n$, calculer le nombre de points de $\mathbb{Z}^n$ contenus dans P ; au début des années 60, E. Ehrhart, professeur dans un lycée à Strasbourg, a découvert des propriétés remarquables du nombre de points entiers dans les homothétiques kP, considéré comme fonction (polynomiale) de k (voir le texte de M. Brion).

Un des outils essentiels dans ce type de problèmes est un dictionnaire remarquable entre propriétés des polytopes convexes et propriétés de certaines variétés algébriques (ensembles définis par des équations polynomiales à plusieurs variables complexes), dites *variétés toriques*, permettant d'utiliser des méthodes et des résultats (d'analyse par exemple) *a priori* très éloignés des problèmes initiaux (voir le texte de B. Teissier).

En retour, des propriétés d'algèbre se sont trouvées reliées à la convexité, par exemple

(1) le nombre de zéros communs (à coordonnées complexes non nulles) de k polynômes à k variables peut s'exprimer en terme du

volume mixte des polytopes de Newton associés aux polynômes, au moins lorsque les coefficients des polynômes sont « assez généraux » (ceci généralise le fait bien connu qu'un polynôme de degré exactement d et dont le terme constant n'est pas nul, a exactement d racines non nulles) ;

(2) la méthode des variétés toriques permet de construire des configurations d'ovales (courbes planes définies par une équation polynomiale réelle $f(x, y) = 0$, sans singularité), difficiles à deviner directement (16ème problème de Hilbert) (voir le texte de J-J. Risler) ;

(3) on généralise des inégalités classiques (dues à Schur dans les années 20) qui contraignent les termes diagonaux des matrices hermitiennes de valeurs propres données à rester dans une partie convexe de l'espace (voir le texte de M. Audin).

Nicole Berline et Claude Sabbah

Bibliographie succincte sur les corps convexes

[1] M. Berger – *Géométrie*, Masson, Paris, 1978.
[2] Grünbaum – *Convex polytopes*, Interscience, London, 1967.
[3] Schneider – *Convex Bodies : the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, vol. 44, Cambridge University Press, 1994.

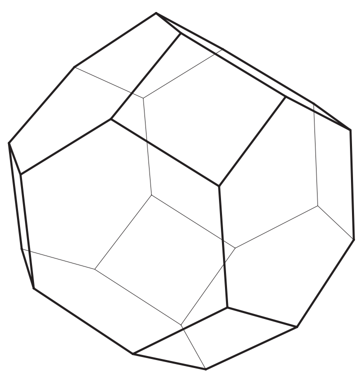

Figure dessinée à l'aide de Mathematica par J. Béthery
professeur au lycée Albert Schweizer, Le Raincy