Journées mathématiques X-UPS

Année 1992

Processus aléatoires de diffusion et modélisation de problèmes financiers

Nicole El Karoui & Laure Elie

Modèles stochastiques en finance

Journées mathématiques X-UPS (1992), p. 1-36.
https://doi.org/10.5802/xups.1992-01

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1992, p. 1–36 doi: 10.5802/xups.1992-01

MODÈLES STOCHASTIQUES EN FINANCE

par

Nicole El Karoui & Laure Elie

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 1992. Processus aléatoires de diffusion et modélisation de problèmes financiers. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1992.

Avant-propos

Pourquoi une journée X-UPS consacrée aux marchés financiers ? En quoi cela peut-il intéresser les professeurs de mathématiques des classes préparatoires ? Est-ce un sacrifice à la mode ? La transformation récente des marchés financiers en France a conduit au recrutement de nombreux ingénieurs dans le domaine de la banque de marchés : certes, le développement de l'informatique dans les secteurs de gestion a joué un rôle important dans cette évolution, mais l'usage systématique de modèles mathématiques pour évaluer et couvrir les produits financiers de plus en plus sophistiqués introduits sur les marchés est aussi un facteur important de ces changements. Amorcée en 1973 aux États-Unis, cette transformation a été très sensible en France à partir des années 1987. Toutefois, par rapport aux journées X-UPS, le point essentiel à rappeler est que ces moments consacrés à la finance viennent essentiellement illustrer un cours d'introduction au calcul stochastique. Comme ces notes le soulignent, beaucoup de notions abstraites du calcul stochastique trouvent une interprétation très intuitive en finance : ainsi l'intégrale stochastique peut s'interpréter comme la valeur d'un portefeuille autofinançant. D'autre part, il est assez aisé, à partir d'un nombre limité d'outils, en particulier d'une bonne compréhension de la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage (détaillée au premier chapitre de ces notes), d'accéder aux principales questions de la finance moderne, ce qui fait de la finance un domaine assez exemplaire pour illustrer le calcul stochastique. Ces notes ont été rédigées en utilisant comme support le cours de « Modèles de diffusion » de l'École polytechnique (É. Pardoux) [EKP92], et ne contiennent donc aucun rappel de calcul stochastique. Il n'existe pas beaucoup d'exposés concis de ces notions la référence la plus accessible de la bibliographie est sans doute le livre de B. Oksendal [Øks85]. Les ouvrages en français de G. Demange et J.-C. Rochet [DR05] ou de D. Lamberton et B. Lapeyre [LL97] contiennent les outils du calcul stochastique indispensables à. la compréhension des modèles utilisés en Finance. La présentation du deuxième livre est plus complète sur ce point, mais aussi plus abstraite. Et si on ne sait rien du calcul stochastique, peut-on lire de ces notes ? Après l'introduction aux marchés financiers, la notion de portefeuille autofinançant est introduite, qui n'exige aucune connaissance particulière. Les conséquences de l'absence d'opportunité d'arbitrage sont ensuite exploitées dans plusieurs directions, notamment lorsque les prix des actifs sont des fonctions aléatoires d'Itô : dans un premier temps, il suffit de les considérer comme des « intégrateurs », généralisant au cas aléatoire la notion de processus à variation finie. La fin du chapitre qui utilise les notions de changement de probabilité peut être sautée en première lecture. Le chapitre suivant est consacré à la formule de Black et Scholes, d'évaluation des options, Il utilise de manière importante la formule d'Itô, qui est une formule de différentiation composée pour les fonctions aléatoires d'Itô : la différence essentielle avec le cas déterministe est l'apparition d'un terme du second ordre mettant en jeu les dérivées secondes des fonctions, et qui provient du fait que les variances instantanées des bruits aléatoires sont des infiniment petits du premier ordre. Cela a de nombreuses conséquences, notamment sur la forme des solutions des équations différentielles stochastiques linéaires, qui jouent un rôle très important dans toutes ces questions. En admettant ces résultats, l'essentiel du texte doit pouvoir être lu sans trop de difficultés...

Introduction aux marchés financiers

1. Introduction

Une révolution de grande ampleur a eu lieu ces dernières années sur les marchés financiers. Amorcée aux États-Unis depuis plus d'une quinzaine d'années, elle s'est mise en place en France depuis la mi-1984. De nouvelles techniques et de nouveaux produits viennent au secours des investisseurs pour contrebalancer l'instabilité des taux d'intérêt et des taux de change. Ce nouveau paysage financier est né notamment des déséquilibres et des incertitudes qui pèsent sur les relations économiques internationales depuis le début des années 1970 (endettement des pays en voie de développement, instabilité des taux de change). Le développement de l'inflation et la grande volatilité des taux d'intérêt ont perturbé les anticipations des investisseurs. D'autre part, l'internationalisation des capitaux, les progrès technologiques en informatique et communication ont modifié les relations entre les différentes places financières New York, Londres, Tokyo, etc. : on peut maintenant à tout instant intervenir sur tous les marchés. La première réponse à ces déséquilibres a été la déréglementation financière et bancaire, avec en particulier la fin de l'encadrement du crédit. En France, les réformes ont commencé à la mi-1984 avec comme objectifs :

- le décloisonnement des marchés et la création d'un unique marché des capitaux ;
- la modernisation des réseaux financiers ;
- la rénovation des modalités de gestion, de la dette de l'État.

D'autre part, il y a création de nouveaux instruments financiers, négociés sur des marchés très actifs, et avec de grandes liquidités

- le MATIF ou Marché à Terme international de France (1985) ;
- le MONEP ou Marché des Options Négociables de Paris (1987).

Les utilisateurs de ces nouveaux instruments de trésorerie forment mi éventail très vaste : entreprises industrielles et commerciales, sociétés d'assurance, banques, caisses d'épargne... Ces organismes joignent à des politiques de gestion classiques des stratégies de gestion plus dynamiques mettant en jeu ces nouveaux instruments financiers.

2. Les opération à terme et les options

Contrats à terme et options sont des instruments qui permettent de se protéger contre un risque déterminé : risque de taux d'intérêt, baisse des cours des actions ou des obligations, etc. De tels contrats sur des marchandises existaient déjà dans l'Antiquité, mais ce n'est qu'en 1973 que s'ouvre à Chicago un marché organisé d'options sur actions puis de contrats à terme sur taux d'intérêt. À Paris, le MATIF ouvre en 1986 et le MONEP en septembre 1987. Nous suivons le livre très clair d'Aftalion et Poncet [AP91] sur le MATIF, pour présenter ces contrats ainsi que les motivations des intervenants sur ces marchés.

2.1. Les contrats

Les contrats à terme. Une opération à terme est une opération au comptant différée dans le temps : l'acheteur et le vendeur se mettent d'accord sur les conditions d'un échange, qui s'effectuera à une date future bien précisée, dite la maturité. Les conditions de l'échange sont définitivement fixées à la date où le contrat est noué. L'échange d'argent n'a lieu qu'à la maturité du contrat.

Les options négociables. Une option est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un bien ou un actif à un cours convenu à l'avance, appelé prix d'exercice*, à (ou jusqu'à) une date fixée, dite échéance de l'option.* En contrepartie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur de l'option une prime qui est le *prix de l'option*. Les *options européennes* sont les options exercées seulement le jour de l'échéance, et les *options américaines* celles qui peuvent être exercées à tout moment avant leur échéance. Les options cotées sur le marché à Paris sont américaines, mais les options de gré à gré sont souvent européennes. Chaque contrat porte sur un nombre fixé d'actifs supports : 100 dans le cas des actions. Dans le cas du MONEP, il s'agit essentiellement d'options sur actions, ou éventuellement sur le CAC 40, qui est un indice reflétant le marché des actions en France.

2.2. Les opérations sur les options. Il existe deux sortes d'opérations les options d'achat ou *CaIl*(C) et les options de vente ou *Put*(P), chaque contrat pouvant être acheté ou vendu.

Achat d'une option d'achat. On achète le droit, mais non l'obligation, d'acheter à la date d'échéance du Call, 100 actions à un prix d'exercice convenu à l'avance. Le droit n'est exercé que si les cours ont montré : les risques sont limités à la prime, et les gains illimités.

Vente d'une option d'achat. Le vendeur a l'obligation de livrer à l'acheteur 100 actions au prix convenu si ce dernier le demande, c'est-à-dire exerce le Call. Son gain est constitué de la prime. Il espère que les cours vont baisser pour ne pas avoir à les livrer. Les pertes peuvent être grandes en cas de hausse. Le vendeur est en général un investisseur professionnel.

Achat d'une option de vente. L'acheteur a le droit de vendre 100 actions à un prix convenu. Les gains sont importants si les cours baissent ; la perte maximale est égale à la prime.

Vente d'une option de vente. Le vendeur a l'obligation d'acheter à l'acheteur du Put 100 actions au prix convenu si ce dernier le demande. Il espère que les cours vont monter pour ne pas avoir à les acheter.

2.3. Les paramètres des options

La durée d'exercice. Trois échéances sont cotées simultanément : 3, 6 et 9 mois sur les mois suivants : mars, juin, septembre, décembre. La cotation cesse la veille de leur échéance, ce qui signifie que les options sont négociables jusqu'à l'avant-dernier jour du mois d'échéance.

Le prix d'exercice. C'est le cours auquel l'option peut être exercée. Trois prix d'exercice au minimum sont cotés sur chaque action, et chacune des trois échéances. Ils respectent entre eux des écarts standards. Les trois prix d'exercice sont fixés à des cours proches de celui de l'action : Exemple : pour une action support cotant 720, les prix d'exercice étaient les suivants :

680F	au-dessous	(in the money) pour un Call
720F	au pair	(at the money)
760F	au-dessus	(out of the money) pour un Call
		(in the money) pour un Put

La prime. La prime est le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option. Comme un contrat porte sur 100 actions support, l'acheteur doit payer 100 fois la prime. Elle fait l'objet de cotations et peut être négociée : on peut acheter une option pour essayer de la revendre plus chère, ou l'inverse. Le prix de l'option évolue tout au long de sa durée de vie. On la décompose en valeur intrinsèque et valeur temps.

La valeur intrinsèque. C'est la différence (positive ou nulle) entre le cours côté de l'action sous-jacente et le prix d'exercice.

$$\text{Call : } \quad \text{Valeur intrinsèque} = \sup(\text{Cours de l'action} - \text{Prix d'exercice}, 0),$$

$$\text{Put : } \quad \text{Valeur intrinsèque} = \sup(\text{Prix d'exercice} - \text{Cours de l'action}, 0).$$

La valeur temps. C'est la différence entre le cours de l'option et sa valeur intrinsèque. Elle est nulle à l'échéance pour une option européenne.

2.4. Les motivations des intervenants. On distingue trois objectifs différents qui motivent les intervenants sur les marchés à termes ou d'options se couvrir (« hedger »), spéculer, arbitrer. Les nouveaux produits sont particulièrement bien adaptés pour répondre à ce troisième point, notamment par rapport aux risques de taux, de change, etc.

Les hedgers. Ce sont les opérateurs qui utilisent les nouveaux marchés pour couvrir leur position « naturellement » exposée.

Les spéculateurs. Ces opérateurs prennent des positions risquées dans l'espoir de réaliser un gain si les cours évoluent suivant leurs prévisions. Par exemple, ils achètent des calls et vendent des puts, lorsqu'ils prévoient un marché haussier.

Les arbitragistes. Leur action consiste à tirer parti, sans prendre de risque de disparités de prix qui peuvent apparaître ponctuellement sur le marché. Leur intervention conduit à faire disparaître ces incohérences dans les cours. Nous reviendrons longuement sur cette cette notion d'arbitrage, qui est à la base des méthodes d'évaluation et de couverture des produits financiers.

2.5. L'utilité des marchés des options. Depuis la création du marché des options, on a vu se développer de nombreux contrats ayant des supports autres que les cours des actions : matières premières, taux d'intérêt, devises, indices boursiers font l'objet aujourd'hui des plus grands volumes de transactions. Les options peuvent porter sur des produits de plus en plus sophistiqués : options sur le minimum ou le maximum des cours (options « lookback »), sur la valeur moyenne sur une période (options asiatiques)... Par ailleurs, au-delà de la diversification des titres support, la plupart des actifs se révèlent avoir un caractère conditionnel, ressemblant à des options par certaines de leurs caractéristiques : les bons de souscription, les emprunts indexés sur l'indice CAC 40 par exemple, mais aussi les obligations convertibles plus anciennes. Lorsque les options sont utilisées en tant que titres négociables, elles perdent leur caractère de « prime d'assurance ». Le marché des options donne une plus grande flexibilité dans la gestion des titres support : schématiquement, on peut dire qu'une action représente de la monnaie, et une prime de risque. Les options permettent de contrôler la part respective de chacune, en offrant la possibilité de construire éventuellement un portefeuille sans risque. Ces marchés permettent également de diminuer les frais de transactions car un investissement en options coûte beaucoup moins cher qu'un investissement en actions.

L'évaluation et la couverture par arbitrage

L'évaluation du prix des options et des contrats à terme se fait à partir d'un principe général que nous développons dans ce chapitre, et qui repose sur les deux notions fondamentales suivantes :

- une stratégie financière est construite à. partir de *portefeuilles autofinançants* ;
- dans un marché très liquide, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent de façon certaine sans mise de fonds.

Avant d'aborder les questions de modélisation proprement dites, regardons sur un exemple simple cette notion d'arbitrage : supposons que l'on puisse emprunter sur une période au taux de r. Si un titre a un rendement, r_e plus grand que r, on emprunte 1F et on investit pour 1F dans le titre. À l'échéance, on vend te titre $(1+r_e)$F, pour rembourser l'emprunt $(1+r)$F. On a gagné dans l'opération : $[(1+r_e)-(1+r)]$F. Résumons les opérations dans le tableau suivant :

date	0	1
argent	1	$-(1+r)$
actif	-1	$1+r_e$

On dit aussi qu'on ne peut, gagner de l'argent sans mise de fonds, « free-lunch » en anglais. Nous verrons que ce principe est à la base de tous les raisonnements qui permettent de fixer les prix des produits optionnels.

Comme Louis Bachelier le notait en 1900 dans son article [Bac00], « le marché à son insu obéit à une loi qui le domine : la, loi de probabilité ». Dans cet article majeur, non seulement L. Bachelier montre les liens très étroits entre les probabilités et la finance, mais optant résolument pour une modélisation en temps continu des cours des actifs, il dégage à, cette occasion certaines des propriétés essentielles du mouvement brownien, avant Einstein (1905) [Ein05] et Wiener (1923). Attardons nous un instant sur la nature discrète ou continue du temps de référence : s'il est vrai que les opérations sont par nature traitées à des dates discrètes, la cotation en continu par ordinateur rend difficile la modélisation discrète à des instants aussi rapprochés. Par ailleurs, comme de nombreux modèles limites, les modèles continus conduisent à des calculs plus simples à interpréter que ceux des modèles discrets, bien que ces derniers paraissent d'un premier accès plus facile de prime abord. Nous modélisons les phénomènes en temps continu essentiellement, mais n'hésiterons pas à utiliser des modèles discrets pour expliquer le plus intuitivement possible certaines notions importantes.

3. Le modèle

3.1. L'espace de probabilité de référence. L'espace de probabilité de référence est constitué de :

- l'ensemble Ω de tous les états du monde possibles ;
- la tribu $\mathcal{F}$, qui représente la structure d'information globale disponible sur le marché ;
- la classe $\mathcal{N}$ de tous les événements de $\mathcal{F}$ que le marché considère comme impossibles ;
- une probabilité $\mathbb{P}$, qui donne les probabilités *à priori* des événements considérés. C'est la probabilité historique ou objective.

Les événements impossibles du marché sont évidemment de probabilité nulle et donc nécessairement, $\forall N \in \mathcal{N},\ \mathbb{P}(N) = 0$. Comme nous le verrons dans la suite, pour les problèmes de finance qui nous intéressent, l'identification exacte de $\mathbb{P}$ n'est pas un objectif majeur, et ce point marque, entre autres, une des originalités de la finance par rapport, à la physique.

3.2. Portefeuille

3.2.1. *Le cas dit binomial.* Considérons le cas où il y a deux actifs, et deux dates 0 et 1 (c'est-à-dire une seule période d'évolution). Un franc (1F) placé à la date 0 sur le premier actif rapporte à la date 1, de manière certaine $(1+r)$ francs. L'actif est considéré comme non risqué puisque son rendement entre aujourd'hui et demain est connu. Il est généralement appelé le *cash.* Le deuxième actif, *l'actif risqué* qui vaut S francs aujourd'hui, vaudra demain hS ou bS francs à la date 1, suivant *l'état du monde*, c'est-à-dire suivant que le marché est à la hausse ou à la baisse.

Il y a un consensus de marché pour dire que l'actif risqué ne peut avoir comme rendement que h ou b. Toute autre situation correspond donc à un événement de la classe $\mathcal{N}$. Par ailleurs, nous ne cherchons pas à préciser avec quelle probabilité ces deux occurrences peuvent se produire.

Une stratégie de portefeuille est un couple (α, β) où α et β représentent le nombre de parts de chacun des actifs possédées à la date 0. Il n'y a aucune restriction de signe sur α et β car les emprunts et les ventes à découvert sont autorisés. La valeur du portefeuille est :

- à la date 0, $V(0) = \alpha \times 1 + \beta S$,
- à la date 1, $V(1) = \begin{cases} \quad\ \alpha(1+r) + \beta Sh & \text{en cas de hausse} \\ \text{ou } \alpha(1+r) + \beta Sb & \text{en cas de baisse.} \end{cases}$

Il est possible de généraliser ce modèle à n périodes ; il y a alors peu de différence avec les stratégies discrètes en temps continu.

3.2.2. *Le cas continu*

Les actifs. Nous supposons que $(d+1)$ actifs de *base* $S^0, S^1, S^2, \ldots, S^d$, sont négociés sur la période $[0, T]$. $S^i(t)$ désigne le prix de l'actif S^i à la date t en francs. Tous les processus de prix sont supposés *continus* par rapport au temps. L'actif S^0 est souvent le cash, c'est-à-dire le produit financier décrit la valeur de 1F placé au jour le jour dans un compte en banque. L'information disponible à la date t englobe la connaissance du mouvement des prix des actifs entre 0 et t. Elle est décrite par la donnée d'une filtration croissante (continue à droite si nécessaire), $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T$, à laquelle les prix des titres sont adaptés ($S^i(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable). Nous ne supposons pas nécessairement la tribu $\mathcal{F}_0$ comme triviale.

Hypothèse 1. *Les hypothèses suivantes sont faites couramment sur les actifs :*

- *les titres ne versent pas de dividende ;*
- *il n'y a pas de coûts de transaction pour la. vente ou l'achat des titres ;*
- *les ventes è découvert illimité sont acceptées et les actifs sont indéfiniment divisibles.*

3.2.3. *Portefeuille autofinançant.* Nous modélisons le comportement d'un investisseur, qui disposant d'un capital initial de x francs, l'investit dans les actifs de base du marché. À la date t, son portefeuille se compose de $(\varphi^i(t)$ parts de l'actif i ($i = 0, \ldots, d$). Les parts peuvent être positives ou négatives suivant qu'elles correspondent à un achat ou à une vente. Une *stratégie de portefeuille* est la donnée des processus $(\varphi^i(t))_{i=0}^d$ représentant les quantités investies dans chacun des titres. Nous définissons pour commencer les stratégies simples, pour lesquelles la composition du portefeuille ne change qu'à un nombre fini de dates appelées *dates de trading.*

Définition 1. Une stratégie simple de portefeuille écrite sur les titres de base est la donnée d'un ensemble fini de dates de trading :

$$(1) \qquad \Theta = \{t_i \in [0, t] \mid 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T\}$$

et de $d+1$ processus, $\{(\varphi^i(t)) \mid i = 0, \ldots, d\}$ qui donnent la répartition des titres dans le portefeuille au cours du temps :

$$(2) \quad \varphi^i(t) = \varphi^i_0 1_{[0,t_1]}(t) + \cdots + \varphi^i_k 1_{[t_k,t_{k+1}]}(t) + \cdots + \varphi^i_N 1_{[t_N,t_{N+1}]}(t),$$

où les variables φ_k^i sont $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurables. La valeur financière du portefeuille est notée $V_\bullet(\varphi)$. À la date t elle vaut[(1)]

$$V_t(\varphi) = \varphi(t) \cdot S(t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i(t) S^i(t). \tag{3}$$

Commentaire. Pour tout t de l'intervalle $]t_k, t_{k+1}]$, $\varphi^i(t) = \varphi^i(t_{k+1}) = \varphi_k^i$; la part investie dans l'actif i est donc $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable, c'est-à-dire ne dépend que des informations disponibles à la date de négociation précédente. Les processus $(\varphi^i(t))$ sont des processus étagés *prévisibles*. Le processus $(V_t(\varphi))$ est *adapté*.

Entre les dates t_{k-1} et t_k, un investisseur qui suit la stratégie φ place φ_{k-1}^i unités dans l'actif S^i. Juste avant la date de trading t_k, la valeur du portefeuille est

$$V_{t_{k-1}}(\varphi) + \varphi_{k-1} \cdot [S(t_k) - S(t_{k-1})] = \varphi_{k-1} \cdot S(t_k).$$

À l'instant t_k, l'investisseur forme un nouveau portefeuille φ_k, à partir des informations disponibles à l'instant t_k, comme en particulier les cotations des actifs. *Si aucune somme n'est investie (ou désinvestie) de manière exogène* à l'instant t_k,

$$\varphi_{k-1} \cdot S(t_k) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_{k-1}^i S^i(t_k) = \varphi_k \cdot S(t_k). \tag{4}$$

L'investisseur a simplement réalisé une répartition différente des poids des différents actifs dans le portefeuille sans apport extérieur d'argent. Le portefeuille est *autofinançant*, c'est-à-dire que les variations de la valeur du portefeuille sont exclusivement dues aux variations du prix des actifs. Si la. condition (4) n'était pas vérifiée, l'écart entre $V_{t_k}(\varphi) - V_{t_{k-1}}(\varphi)$ et $\varphi_{k-1} \cdot [S(t_k) - S(t_{k-1})]$ pourrait être utilisé pour la consommation ou le refinancement entre les dates t_{k-1} et t_k.

Proposition et Définition 2. *Soit* (Θ, φ) *une stratégie simple de trading autofinançante, c'est-à-dire qu'aux dates* t_k *de trading,* $\varphi_{k-1} \cdot S(t_k) = \varphi_k \cdot S(t_k)$. *La valeur du portefeuille (autofinançant) s'écrit comme*

[(1)]La notation $\cdot$ représente le produit scalaire de deux vecteurs.

l'intégrale stochastique par rapport aux prix des actifs de base $S = (S^i)$ *de la stratégie simple de trading* φ. *Elle est caractérisée par :*

$$\begin{cases} V_t(\varphi) = \varphi(t) \cdot S(t), \\ V_t(\varphi) - V_0(\varphi) = \displaystyle\int_0^t \varphi(u) \cdot \,\mathrm{d}S(u), \end{cases} \tag{5}$$

où le $\cdot$ *rappelle que l'intégrale stochastique a lieu par rapport à un vecteur. Si le portefeuille n'est pas autofinançant, on appelle processus de coût*[2]

$$C_t(\varphi) = V_t(\varphi) - V_0(\varphi) - \int_0^t \varphi(u) \cdot \,\mathrm{d}S(u). \tag{6}$$

Démonstration. Les deux équations qui caractérisent le prix d'un portefeuille autofinançant découlent immédiatement de la définition de l'autofinancement. En particulier

$$V_{t_k}(\varphi) - V_{t_{k-1}}(\varphi) = \varphi_{k-1} \cdot [S(t_k) - S(t_{k-1})] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(u) \cdot \,\mathrm{d}S(u). \quad \square$$

Nous ne faisons pas intervenir dans le cas des stratégies simples, une véritable notion d'intégrale stochastique : les processus étant constants par morceaux, l'intégrale précédente ne met en jeu que les variations des actifs entre les dates de trading. En particulier, il n'est pas nécessaire à ce niveau de supposer que les prix des actifs sont des fonctions aléatoires d'Itô.

3.2.4. *Numéraire.* Le système de prix utilisé dans cette présentation fait référence à un système monétaire donné. Par exemple, tous les cours des actifs, la valeur financière des portefeuilles sont exprimés en francs de la date considérée. Il y a un certain arbitraire dans le choix de cette référence monétaire, et il est très intuitif qu'une notion comme celle de portefeuille autofinançant doit être invariante par changement de numéraire.

Définition 3. Un numéraire est une référence monétaire dont la valeur en francs est un processus adapté strictement positif continu.

[2] en suivant Follmer-Schweitzer [FS86].

Proposition 1.

(i) *La notion de stratégie simple autofinançante est invariante par changement de numéraire.*

(ii) *Si un des actifs de base S^0 est choisi comme numéraire, toute intégrale stochastique*

$$\int_0^t \varphi(u) \cdot \mathrm{d}\Big[\frac{S(u)}{S^0(u)}\Big]$$

de processus simple φ est la valeur financière (exprimée dans ce numéraire) d'un portefeuille autofinançant.

Démonstration. Soit $X(t)$ la valeur en francs d'un numéraire. Le prix à la date t de l'actif S^i exprimé dans ce numéraire est de $S^i(t)/X(t)$ et la valeur financière d'une stratégie de portefeuille φ de $V_t(\varphi)/X(t)$. Si satisfait l'équation d'autofinancement, $\varphi_{k-1} \cdot S(t_k) = \varphi_k \cdot S(t_k)$ dans le numéraire initial, φ satisfait à la même équation dans le nouveau numéraire :

$$\frac{\varphi_{k-1} \cdot S(t_k)}{X(t_k)} = \frac{\varphi_k \cdot S(t_k)}{X(t_k)}.$$

Supposons par exemple que S^0 soit choisi comme numéraire de référence. Dans ce nouveau système monétaire, le prix du titre 0 est constant et donc de variation nulle. L'intégrale stochastique $I_t^0(\varphi)$ définie par :

$$I_t^0(\varphi) = \int_0^t \varphi(u) \cdot \mathrm{d}\Big[\frac{S(u)}{S^0(u)}\Big]$$

ne met pas en jeu cet actif de rendement nul. Il est possible de construire un portefeuille autofinançant de valeur $I_t^0(\varphi)$, en investissant à l'instant t dans l'actif 0 la quantité $\varphi^0(t)$ donnée par :

$$\varphi^0(t) = I_t^0(\varphi) - \sum_{i=1}^d \varphi^i(t)\Big(\frac{S^i(t)}{S^0(t)}\Big). \qquad \square$$

3.2.5. *Extension.* Lorsque les actifs de référence sont des fonctions aléatoires d'Itô, les définitions précédentes s'étendent à n'importe quelle stratégie adaptée pour laquelle l'intégrale stochastique vectorielle est bien définie. (Ces conditions seront explicitées ultérieurement.)

Définition 4. Supposons que les actifs de base soient des processus d'Itô, et que φ soit un processus vectoriel adapté pour lequel l'intégrale stochastique vectorielle $\int_0^t \varphi(t) \cdot \mathrm{d}S(u)$ existe. Le processus φ est une stratégie autofinançante de portefeuille, de valeur $V_t(\varphi)$ si

$$\begin{cases} V_t(\varphi) = \varphi(t) \cdot S(t), \\ V_t(\varphi) - V_0(\varphi) = \displaystyle\int_0^t \varphi(u) \cdot \mathrm{d}S(u). \end{cases} \tag{7}$$

Cette propriété est invariante par changement de numéraire.

Cette dernière propriété s'obtient en utilisant les règles de calcul stochastique.

4. Opportunités d'arbitrage

L'hypothèse « d'absence d'opportunité d'arbitrage » joue un rôle capital, tant dans la modélisation de la dynamique des prix des titres, que pour l'évaluation des prix d'actifs dérivés (contingents) dans le période $[0, T]$.

Définition 5. Une opportunité d'arbitrage est une stratégie de portefeuille autofinançante dont la valeur $V_\bullet(\varphi)$ vérifie :

(i) $V_0(\varphi) = 0$;
(ii) $V_T(\varphi) \geqslant 0$ et $\{V_T(\varphi) > 0\} \notin \mathcal{N}$.

Nous serons amenés à nous limiter à des stratégies de trading vérifiant de bonnes propriétés d'intégrabilité, que nous préciserons ultérieurement. Nous appellerons *admissibles* de telles stratégies.

Hypothèse 2. *Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage entre des stratégies de portefeuille admissibles.*

Par conséquent, deux portefeuilles qui ont la même valeur à la date T p.s., ont la même valeur financière à toute date intermédiaire t p.s. Si cette hypothèse est satisfaite pour un numéraire donné, elle l'est pour tout numéraire qui possède les mêmes portefeuilles admissibles.

Démonstration. Soient φ et ψ deux stratégies de trading admissibles telles que $V_T(\varphi) = V_T(\psi)$ p.s et notons A l'ensemble

$$\{V_0(\varphi) = V_0(\psi) > 0\}.$$

Soit λ la stratégie autofinançante, correspondant à un investissement initial de $[V_0(\varphi) = V_0(\psi)]$ dans l'actif S^0, non renégocié entre 0 et T. En T, sa valeur est de $V_T(\lambda) = [V_0(\varphi) = V_0(\psi)]S^0(T)/S^0(0)$. La stratégie A qui vaut 0 sur A^c et $\varphi - \psi + \lambda$ sur A est une opportunité d'arbitrage si A n'est pas négligeable ($A \notin \mathcal{N}$) car $V_0(\Lambda)$ sur A^c et A, et

$$V_T(\Lambda) = 1_A V_T(\lambda) = [V_0(\varphi) = V_0(\psi)]^+ \frac{S^0(T)}{S^0(0)}.$$

On montre de même que si $V_T(\varphi) \geqslant 0$ p.s., alors $V_0(\varphi) \geqslant 0$ p.s. Le raisonnement ci-dessus s'adapte bien sur à toute date intermédiaire t. □

Donnons tout de suite une conséquence importante en Finance de cette hypothèse.

***Proposition 2* (Parité Call-Put).** *Considérons un Call et un Put écrits sur un actif S, de maturité T, et de prix d'exercice K.*

Prime du $\mathrm{Call}(t)$ – *Prime du* $\mathrm{Put}(t) = S(t)K$

(Prix en t de 1IF en T) p.s.

Démonstration. Dans cet exemple, l'actif S, le Call et le Put sont considérés comme des actifs de base du marché, et donc soumis à la règle d'absence d'opportunité d'arbitrage. À la date T, le portefeuille Call – Put a une valeur liquidative en T de $(S(T)-K)^+ - (KS(T))^* = (S(T) - K)$. Mais ce flux est aussi atteint par un portefeuille dont la valeur en t est $S(t) - K$ (Prix en t de 1F en T). □

4.1. Absence d'opportunité d'arbitrage dans le modèle binomial. Les notations sont celles du paragraphe 3.2.1.

Proposition 3. *En absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), dans le modèle binomial,*

(i) *nécessairement*

$$b \leqslant 1 + r \leqslant h. \tag{8}$$

Les inégalités sont strictes, sauf si l'actif a même rendement que le cash.

(ii) *Supposons* $h > b$ *et notons* Π *la probabilité qui affecte le. probabilité* $\pi = (1 + r - b)/(h - b)$ *à l'état du monde haut et* $1 - \pi$ *à l'état du monde bas. Sous* Π*, l'espérance de gain obtenu en plaçant* $1F$ *sur l'actif risqué est égale à*

$$\frac{1}{S}\, \mathbb{E}_{\Pi}(S_1) = 1 + r, \tag{9}$$

où $S_1 = Sh$*, dans l'état haut et* Sb *dans l'état bas. La probabilité* Π *est appelée risque-neutre.*

Interprétation. Sous la probabilité Π risque-neutre, le rendement espéré d'un investissement dans l'actif risqué est le même que celui attendu d'un investissement dans l'actif non risqué.

Démonstration.

(i) Si $1 + r < b$, considérons la stratégie :

- en 0 avec une mise de fonds nulle, emprunt de S francs et achat d'une action.
- en 1, revente de l'action qui vaut au moins bS, et remboursement de l'emprunt.

Le bilan en 1 est de au moins $(h - (1 + r))S > 0$. Cette stratégie est donc une opportunité d'arbitrage. L'autre inégalité s'obtient par un raisonnement analogue.

(ii) Supposons $h > b$ et notons $\pi = (1 + r - b)/(h - b)$. D'après (i), π est compris entre 0 et 1. Sous Π,

$$\mathbb{E}_{\Pi}(S_1) = S[\pi h + (1 - \pi)b] = (1 + r)S. \qquad \square$$

Nous en déduisons la solution du problème d'évaluation (pricing) et de couverture (hedging).

Proposition 4. *Un flux de* X_h *dans l'état haut et de* X_b *dans l'état bas est duplicable par un portefeuille* (α, β)*, qui vérifie :*

- *à la date* 1, $\begin{cases} X_h = \alpha(1+r) + \beta Sh & \textit{en cas de hausse,} \\ X_b = \alpha(1+r) + \beta Sb & \textit{en cas de baisse,} \end{cases}$
- *à la date* 0, $V(0) = \alpha \times 1 + \beta S$.

À la date 0*, sa valeur financière est calculable comme :*

$$V(0) = \frac{1}{1+r}\,\mathbb{E}_\Pi(V(1)) = \frac{1}{1+r}\,\mathbb{E}_\Pi(X(1)), \tag{10}$$

où $X(1) = X_h$ *dans l'état haut et* $X(1) = X_b$ *dans l'étai bas.*

Démonstration. La valeur financière d'un portefeuille (α, β) est de :

$$V(0) = \alpha + \beta S \quad \text{et} \quad V(1) = \alpha(1+r) + \beta S_1,$$

et satisfait à :

$$V(0) = \frac{1}{1+r}\,\mathbb{E}_\Pi(V(1)), \quad \text{soit} \quad \mathbb{E}_\Pi(V(1)) = V(0)(1+r).$$

La proposition s'en déduit aisément, en notant que tout actif duplicable a comme valeur financière en 0 celle de son portefeuille de couverture. □

La valeur en 0 d'un portefeuille ou d'un produit dérivé est donc la valeur espérée sous la probabilité risque-neutre Π, de sa valeur en 1 actualisée au taux de l'argent. L'équivalence entre l'absence d'opportunité d'arbitrage et l'existence d'une probabilité risque-neutre a été étendue en toute généralité dans les modèles finis par Harrison et Pliska ([HP81]). Dans le cas des modèles continus, ce problème devient plus difficile.

4.2. Absence d'opportunité d'arbitrage pour des processus d'Itô. Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans un univers aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où les aléas sont représentés par un brownien $(\widehat{W}(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ k-dimensionnel de composantes $\widehat{W}^j(t)$. Les actifs risqués S^i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ sont supposés être des fonctions aléatoires d'Itô satisfaisant à :

$$\mathrm{d}S^i(t) = S^i(t)\Big[b^(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{k} \sigma^i_j(t)\,\mathrm{d}\widehat{W}^j(t)\Big]. \tag{11}$$

Nous supposons aussi l'existence d'un titre sans risque S^0, le cash, tel que :

$$\mathrm{d}S^0(t) = S^0(t)r(t)\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Ici, b est le vecteur de $\mathbb{R}^d$ de composantes b^i et σ est la matrice $d \times k$ de terme général σ^i_j. La valeur de marché $V_t(\varphi)$ d'une stratégie de trading vérifie :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V_t(\varphi) &= \sum_{i=0}^{k} \varphi^i(t)\,\mathrm{d}S^i(t)\\ &= \varphi^0(t)S^0(t)r(t)\,\mathrm{d}t + (\varphi S)^*(t)b(t)\,\mathrm{d}t + (\varphi S)^*(t)\sigma(t)\,\mathrm{d}\widehat{W}(t),\end{aligned}$$

où $(\varphi S)(t)$ désigne le vecteur de composantes $(\varphi^i(t)S^i(t))^d_{i=1}$. Précisons les hypothèses que nous faisons sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ des stratégies de portefeuille admissibles : il faut que cet ensemble soit assez riche pour permettre notamment l'évaluation de nombreux produits dérivés, et pas trop gros pour éviter les opportunités d'arbitrage. Posons

$$\mathcal{A} = \Big\{\varphi \mid \mathbb{E}\int_0^T |\sigma^*(t)(\varphi S)(t)|^2\,\mathrm{d}t < +\infty\Big\}.$$

Le processus $\sigma^*(\bullet)(\varphi S)(\bullet)$ appartient alors à $M^2([0,T]) = M^2_T$ (cf. [EKP92]). Il est naturel d'imposer que les portefeuilles réduits à un des actifs de base correspondent à des stratégies admissibles, ou encore que $\mathcal{A}$ contiennent les constantes. Ceci se traduit pour l'actif S^i par le fait que l'intégrale stochastique $\int_0^t S^i t(t) \sum_{j=1}^k \sigma^i_j(t)\,\mathrm{d}\widehat{W}^j(t)(t)$ est une martingale de carré intégrable, d'espérance nulle. Nous supposons de plus que les processus b et r sont bornés, ou plus généralement suffisamment intégrables pour que les processus b^iS^i et rS^i appartiennent aussi à M^2_T. Comme dans le modèle binomial, l'absence d'opportunité d'arbitrage a des conséquences importantes sur la dynamique des actifs.

Théorème 1. *L'absence d'opportunité d'arbitrage pour des processus entraîne l'existence d'un vecteur $\theta(t)$ de $\mathbb{R}^k$ adapté,* appelé prix du marché du risque *ou* prime de risque *tel que*

$$\mathrm{d}S^i(t) = S^i(t)\Big(r(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{k} \sigma^i_j(t)\big[\,\mathrm{d}\widehat{W}^j(t) + \theta^j(t)\,\mathrm{d}t\big]\Big). \tag{13}$$

Le rendement b des titres risqués vérifie :

$$b(t) = r(t) + \sigma(t)\theta(t) \quad \mathrm{d}\mathbb{P} \times \mathrm{d}t \text{ p.s.}$$

Un processus V_t est la valeur financière d'une stratégie φ admissible si et seulement si il satisfait à :

$$\mathrm{d}V_t = V_t r(t)\,\mathrm{d}t + (\varphi S)^*(t)\sigma(t)\big(\,\mathrm{d}\widehat{W}(t) + \theta(t)\,\mathrm{d}t\big), \tag{14}$$

où $(\varphi S)(t)$ désigne le vecteur de composantes $(\varphi^i S^i(t))_{i=1}^d$.

Démonstration. Pour simplifier, commençons par supposer $r(\bullet) = 0$. Si $\sigma(t)$ est inversible, le résultat est évident. Sinon, construisons une stratégie admissible φ, adaptée et bornée, telle que pour tout t, $(\varphi S)(t)$ soit clans le noyau de $\sigma^*(t)$ $\mathrm{d}\mathbb{P} \times \mathrm{d}t$ p.s. La valeur de ce portefeuille $V_t(\varphi)$ satisfait $\mathrm{d}V_t(\varphi) = (\varphi S) * (t) b(t)\,\mathrm{d}t$. Il est p.s. sans risque et donc de rendement nul, par absence d'opportunité d'arbitrage. Mais ceci entraîne que

$$(\varphi S) * (t) b(t) \equiv 0 \quad \mathrm{d}\mathbb{P} \times \mathrm{d}t \text{ p.s.}$$

Comme cette propriété est vraie pour tous les $(\varphi S)(t)$, $((\varphi(t)$ borné) dans le noyau de $\sigma^*(t)$, $b(t)$ appartient nécessairement à l'image de $\sigma(t)$ $\mathrm{d}\mathbb{P} \times \mathrm{d}t$ p.s, d'où l'existence de $\theta(t)$. Si $r(t)$ est non nul, c'est le vecteur de composantes $b^i(t) - r(t)$ qui a cette propriété. □

Revenons à l'étude d'un portefeuille autofinançant et admissible (Définition 4). Dans le système d'équations (9) nous éliminons le processus φ^0 représentant l'investissement dans l'actif sans risque. Il ne reste alors qu'une seule équation, l'équation (14) satisfaite par la valeur financière d'un portefeuille, et les parts investies dans les actifs risqués. La réciproque est évidente d'après la Proposition 1(ii) si $r(t)$ est nul. Dans le cas général, la valeur du portefeuille étant une f.a. d'Itô, sa décomposition en partie martingale et partie à variation finie est unique. L'équation (14) permet de calculer les poids du portefeuille dans les actifs risqués. Et la condition $V_t(\varphi) = \sum_{i=0}^d \varphi^i(t) S^i(t)$

permet de calculer le poids φ^0 de l'investissement dans le titre sans risque.

Il est en général accepté que les investisseurs ont de l'aversion pour le risque. En d'autres ternies, il faut que le rendement des titres risqués soit supérieur à celui des titres sans risque, pour qu'ils soient conservés. Les prix d'équilibre des produits risqués font apparaître une prime de risque, qui est l'écart entre le rendement instantané b de l'actif et le rendement du produit sans risque r. Par contre, dans une économie neutre pour le risque, tous les titres ont le même rendement égal au taux d'intérêt du marché.

Il est aisé d'évaluer certains titres contingents ou produits dérivés.

Corollaire 1. *Soit*

$$\mathcal{B}_T = \{V_T(\varphi) \mid \varphi \text{ stratégie autofinançante admissible}\}$$

l'ensemble des actifs atteignables *(ou* simulables*).*

(i) *En absence d'opportunité d'arbitrage, l'application qui à $X \in \mathcal{B}_T$ associe son prix en t, $V_t(\varphi)$ est une forme linéaire positive, notée encore $\Pi_t(X)$.*

(ii) *Le prix d'un actif atteignable X vérifie l'équation :*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Pi_t(X) = \Pi_t(X)r(t)\,\mathrm{d}t + (\varphi S)^*(t)\sigma(t)(\,\mathrm{d}\widehat{W}(t) + \theta(t)\,\mathrm{d}t), \\ \Pi_t(X) = X. \end{cases} \tag{15}$$

φ est le portefeuille de couverture de l'actif X.

Démonstration. Soit un actif duplicable par deux stratégies de portefeuille admissibles φ et r. L'hypothèse fondamentale (H2) entraîne que ces stratégies ont même valeur financière à toute date intermédiaire. La notion de prix est donc bien définie. Le prix d'un actif atteignable par le portefeuille φ vérifie l'équation (14). $\square$

Le prix d'un actif atteignable apparaît donc comme la solution d'une équation différentielle stochastique linéaire dont, on connaît. la valeur terminale. Le portefeuille de couverture c'est une inconnue du problème, au même titre que le prix $\Pi_t(X)$.

Corollaire 2. *Supposons la prime de risque $\theta(t)(t)$ et le taux spot $r(t)$ bornés et choisissons comme numéraire le cash. Il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la probabilité de départ $\mathbb{P}$, sous laquelle les processus de prix écrits dans ce numéraire des actifs atteignables soient* *des $\mathbb{Q}$-martingales, soit :*

$$\frac{\Pi_t(X)}{S^0(t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{X}{S^0(t)}|\mathcal{F}_t\Big]. \tag{16}$$

Démonstration. D'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la probabilité de départ $\mathbb{P}$, sous laquelle le processus

$$W(t) = \int_0^t \mathrm{d}\widehat{W}(s) + \theta(s)\,\mathrm{d}s$$

est un mouvement brownien. La densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ s'écrit

$$Y = \exp\Big[-\int_0^T \theta(s)\,\mathrm{d}\widehat{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\theta(s)|^2\,\mathrm{d}s\Big].$$

Posons $\overline{\Pi}_t(X) = \Pi_t(X)/S^0(t)$; nous obtenons alors grâce à la formule d'Itô,

$$\mathrm{d}\overline{\Pi}_t(X) = S^0(t)^{-1}(\varphi S)^*(t)\sigma(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

et $\overline{\Pi}_t(X)$ s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport au processus $W(t)$, mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$. Cela ne suffit pas à priori pour affirmer que $\overline{\Pi}_t(X)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable sous $\mathbb{Q}$ puisque nous ne savons pas si le processus $l(S^0)^{-1}(\bullet)\sigma^*(\bullet)(\varphi S)(\bullet)|$ appartient alors à $M_T^2(\mathbb{Q})$. Mais comme φ est une stratégie admissible, $|(\varphi S)^*(\bullet)\sigma(\bullet)|$ appartient alors à $M_T^2(\mathbb{P})$. Comme $(S^0)^{-1}$ est borné, il est possible de montrer (mais ce n'est pas trivial) que $\overline{\Pi}_t(X)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{Q}$. Nous le justifierons sur les exemples que nous traiterons complètement dans la suite. □

Définition 6. Une probabilité $\mathbb{Q}$, équivalente à la probabilité de départ, sous laquelle les prix des actifs atteignables (écrits dans un numéraire donné) sont des martingales, est appelée *mesure-martingale* (pour le numéraire de référence). Lorsque le numéraire est le cash, une telle mesure-martingale est appelée *probabilité risque-neutre*. Si tous les éléments de $L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ sont atteignables par un portefeuille admissible, le marché est dit *complet* et il existe une unique probabilité risque-neutre.

Démonstration. Il s'agit de prouver la dernière assertion. Supposons qu'il y ait deux probabilités risque-neutre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}_1$. Alors, d'après le Corollaire 2, l'hypothèse que le marché est complet entraîne que tout X de $L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ est atteignable et a pour prix en 0

$$\frac{\overline{\Pi}_0(X)}{S^0(t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{X}{S^0(t)}|\mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}\Big[\frac{X}{S^0(t)}|\mathcal{F}_t\Big].$$

Il en résulte que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_1$ sur $\mathcal{F}_T$. □

Remarque. Si le Corollaire 2 donne une formule pour calculer le prix d'un actif atteignable, il ne permet pas de déterminer son portefeuille de couverture. Il reste donc deux problèmes majeurs à traiter à ce stade :

- caractériser la classe des actifs simulables,
- résoudre explicitement le système (14) donnant le prix et le portefeuille de couverture.

Nous traiterons ces questions dans le chapitre suivant.

Dans son article de 1900 [Bac00], L. Bachelier traduit la propriété de martingale des prix des actifs par les commentaires suivants : *puisque sur les produits financiers on peut trouver des acheteurs et des vendeurs, le « marché » n'anticipe de manière sûre ni un mouvement de hausse ni un mouvement de baisse.* En d'autres termes, le jeu financier est équitable.

La formule de Black et Scholes et les E.D.P. d'évaluation

L'objet de ce chapitre est de tirer les conséquences pratiques des équations stochastiques d'évaluation en absence d'opportunité d'arbitrage établies dans le chapitre précédent. L'objectif est de donner pour le prix d'un actif dérivé et son portefeuille de couverture des formules explicites si possible ou sinon une équation aux dérivées partielles que l'on pourra résoudre par des méthodes numériques. Il est important de rappeler les hypothèses (H1) et (H2) qui fondent ces méthodes d'évaluation, car elles restreignent l'ensemble des produits auxquels il est possible de les appliquer de façon valable. Il est supposé notamment :

- Le marché est liquide et sans arbitrage. Les ordres sont exécutés au prix du marché, sans écart entre l'offre et la demande. La pression des intervenants est, suffisamment forte pour qu'une opportunité de placement sans risque ne puisse rapporter plus d'un jour sur l'autre que le taux court du marché. À tout instant, l'existence d'acheteurs et de vendeurs sur les titres négociés (supposés indéfiniment divisibles) révèle qu'il n'y pas d'anticipation sûre à la baisse ou à la hausse.

• Le marché est parfait. Il n'y a pas de restriction, ni légale ni financière sur les ventes à terme, et les coûts de transaction sont nuls.

Nous évaluons ici des options européennes, dans un marché qui cote continûment.

5. Le modèle de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes [BS73] est l'un des premiers modèles d'évaluation en temps continu qui ait été développé et utilisé immédiatement par les marchés (1973). Deux titres sont en jeu, le cash qui est supposé avoir un taux constant r et un actif risqué dont on ne peut prévoir de manière sûre le rendement futur. Cette incertitude est modélisée par un bruit affectant les rendements instantanés de l'actif risqué, sous-jacent au produit dérivé.

Hypothèse 3. Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. La dynamique du cours de l'actif risqué suit un mouvement de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\widehat{W}_t, \tag{17}$$

où $(\widehat{W}_t)$ est un $\mathbb{P}$-mouvement brownien. Il existe un actif sans risque, de rendement constant et connu r.

Dans le modèle de Black et Scholes, les paramètres r, μ, σ sont constants. Mais les raisonnements restent valables si ces paramètres sont des fonctions du temps. Nous supposons évidemment alors que $\mu(\bullet)$ et $r(\bullet)$ sont intégrables sur $[0,T]$ et $\sigma(\bullet)$ de carré intégrable. L'AOA entraîne qu'il existe une fonction $\theta(\bullet)$ telle que, $\mathrm{d}t$ p.s. $\mu_t - r_t = \sigma_t\theta_t$. Nous supposons aussi θ de carré intégrable. Le cours de l'actif est un mouvement brownien géométrique donné par

$$S_t = S_0 \exp\left[\int_0^t (\mu_u - \tfrac{1}{2}\sigma_u^2)\,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma_u\,\mathrm{d}\widehat{W}_u\right].$$

Sa loi est lognormale. S_t est donc de carré intégrable et

$$\mathbb{E}(S_t^2) = S_0^2 \exp\bigg(\int_0^t [2\mu_u + \sigma_u^2]\,\mathrm{d}u\bigg).$$

Les hypothèses d'intégrabilité faites sur les coefficients impliquent que $\mathbb{E}(S_t^2)$ est borné sur l'intervalle $[0,T]$. σS appartient à M^2 et S est un cours d'actif admissible au sens du paragraphe 4.2.

5.1. La formule d'évaluation

5.1.1. *L'équation aux dérivées partielles d'évaluation.* Nous décrivons dans ce paragraphe la démarche originelle de Black et Scholes pour fixer le prix d'une option, qui a. une valeur liquidative de $h(S_T)$ à la date T, car elle est couramment utilisée sur les marchés : elle consiste à construire un portefeuille autofinançant et sans risque, sur l'option et l'actif risqué et à traduire qu'il est de rendement r. Mais c'est exactement la preuve du théorème 1 dont nous reprenons la conclusion en supposant que la valeur à la date t de l'option est une fonction régulière $\Gamma(t,S_t)$ de la date et de la valeur du cours. Rappelons que pour un Call, on a $h(x) = (x-K)^+$, pour un Put $h(x) = (K-x)^+$.

Proposition 5. *Sous les hypothèses* (H3)*, si la valeur à la date t d'un produit financier qui génère à la date T un flux $h(S_T)$ atteignable est de la forme $\Gamma(t,S_t)$, où $\Gamma(t,S)$ est une fonction de classe $C^{1,2}$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}^+$, alors r satisfait l'équation aux dérivées partielles, appelée* EDP d'évaluation

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2\Gamma(t,S) + rS\partial_S\Gamma(t,S) + \partial_t\Gamma(t,S) - r\Gamma(t,S) = 0,\\ \Gamma(T,S) = h(s). \end{cases}$$

Le portefeuille de couverture est construit à partir de $\partial_S\Gamma(t,S_t)$ parts de l'actif risqué. Réciproquement, si l'EDP (18) *admet une solution dont la dérivée partielle par rapport à S est bornée,* $\Gamma(t,S_t)$ *est le prix a payer pour obtenir un flux terminal de $h(S_T)$.*

Démonstration. D'après le théorème 1, pour que $\Gamma(t,S_t)$ soit le prix en t du flux $h(S_T)$, il est nécessaire et suffisant que sa décomposition comme processus d'Itô vérifie : il existe une stratégie de portefeuille φ admissible telle que :

$$\mathrm{d}\Gamma(t,S_t)=\Gamma(t,S_t)r_t\,\mathrm{d}t+\varphi(t)S_t\sigma_t[\,\mathrm{d}\widehat{W}_t+\theta_t\,\mathrm{d}t],\quad \text{où } \sigma_t\theta_t=\mu_t-r_t.$$

Mais si $\Gamma(t,S_t)$ est une fonction de classe $C^{1,2}$ en t et S, d'après la formule d'Itô, sa décomposition comme fonction aléatoire est donnée par

$$\begin{aligned}(19)\quad \mathrm{d}\Gamma(t,S_t)\Big[\tfrac{1}{2}\sigma_t^2S_t^2\partial_S^2\Gamma(t,S_t)+\mu_tS_t\partial_S\Gamma(t,S_t)+\partial_t\Gamma(t,S_t)\Big]\,\mathrm{d}t\\ +\sigma_tS_t\partial_S\Gamma(t,S_t)\,\mathrm{d}\widehat{W}_t.\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en partie brownienne et partie à variation finie, nous voyons que nécessairement :

$$\begin{cases}\partial_S\,\mathrm{d}\Gamma(t,S_t)=\varphi(t)\quad\text{p.s.},\\ \frac{1}{2}\sigma_t^2S_t^2\partial_S^2\Gamma(t,S_t)+\mu_tS_t\partial_S\Gamma(t,S_t)+\partial_t\Gamma(t,S_t)\\ \qquad\qquad=\Gamma(t,S_t)r_t+\partial_S\Gamma(t,S_t)S(t)(\mu-r)(t).\end{cases}$$

Après simplification, nous obtenons l'équation d'évaluation de la proposition 5. □

Soit $\Gamma(t,S)$ une fonction satisfaisant l'EDP (18) et les conditions de bornitude de la dérivée. D'après la formule d'Itô, $\Gamma(t,S_t)$ vérifie l'équation (19). Comme σS est un processus de carré intégrable, appartenant à M^2, et $\partial_S\Gamma(t,S_t)$ borné, $\sigma S\partial_S\Gamma$ est un processus de M^2. La stratégie de portefeuille investissant $\partial_S\Gamma(t,S_t)$ parts dans l'actif risqué est admissible.

Le résultat sur la couverture n'est pas très surprenant, car un portefeuille, pour être couvert, doit être peu sensible aux variations de S, puisque tous les aléas proviennent de S. La pente de la droite qui approxime le mieux $\Gamma(t,S)$ au voisinage de S est évidemment celle de la tangente à la courbe en ce point.

Remarque 5.1. La prime de risque θ_t n'apparaît pas dans l'équation aux dérivées partielles donnant le prix du Call. Il n'est donc pas nécessaire de la connaître pour mener à bien l'évaluation du prix et la couverture de l'option.

Généralisation. Supposons que les titres de base du marché dépendent de variables explicatives $Y_t^1, Y_1^2, Y_t^3, \ldots, Y_t^n$, solutions d'une équation différentielle stochastique vectorielle

$$dY_t = \alpha(t, Y_t)\,\mathrm{d}t + \gamma(t, Y_t)\,\mathrm{d}\widehat{W}_t.$$

Les composantes du vecteur α sont notées α_i et le terme général de la matrice $\gamma\gamma^*$ est désigné par $a_{i,j}$. Le taux sans risque r_t ne dépend que des variables explicatives Y, $r_t = r(t, Y_t)$. D'après le théorème 1, il existe un vecteur de primes de risque, que nous supposons de la forme $\theta(t, Y_t)$, qui établit une relation entre les écarts de rendement instantané des titres du marché au taux de l'argent r et leur volatilité : le prix $\Gamma(t, y)$ d'un produit financier de flux terminal $h(Y_T)$ vérifie *I'EDP d'évaluation*

$$(20)\qquad \begin{cases} \partial_t\Gamma(t,y) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_{i,j}(t,y)\partial^2_{i,j}\Gamma(t,y) + \sum_{1\leqslant i\leqslant d}\partial_i\Gamma(t,y) \\ \qquad\qquad = L\varphi(t,y) \\ \qquad\qquad = \Gamma(t,y)r(t,y) + \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d}\gamma_{i,j}(t,y)\partial_i\Gamma(t,y)\theta^j(t,y), \\ \Gamma(T,y) = h(y). \end{cases}$$

Les titres dont les prix sont des fonctions régulières des variables explicatives sont associés à la même équation aux dérivées partielles. Seules changent les conditions terminales.

5.1.2. *Interprétation probabiliste sous la probabilité risque-neutre*

Dans leur article de 1973, Black et Scholes calculent le prix du Call en résolvant analytiquement l'équation aux dérivées partielles d'évaluation (18) à l'aide de la transformée de Fourier de la solution. Nous allons plutôt utiliser la formule de Feynman-Kac, qui donne une représentation probabiliste de la solution et conduit à une formule quasi-explicite du prix.

Proposition 6. *Sous les hypothèses de la proposition 5, il existe sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ une probabilité $\mathbb{Q}$ risque-neutre, équivalente à $\mathbb{P}$ et (W_t) un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien tels que :*

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}dS_t}{S_t} = r_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}W_t = \theta_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\widehat{W}_t, \\ \Gamma(t,S) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_0^T r_s\,\mathrm{d}s}h(S_T)|S_t = S\Big]. \end{cases}$$

Remarque. Ce résultat a déjà été énoncé au Corollaire 2 du chapitre précédent. Dans le cas considéré ici, où le prix de l'actif sous-jacent suit un brownien géométrique, il est aisé de donner une démonstration simple et complète de cette propriété.

Démonstration. Soit $Y = \exp[-\int_0^T \theta_s \,\mathrm{d}\widehat{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\theta_s|^2 \,\mathrm{d}s]$. D'après la formule de Cameron-Martin [EKP92] (puisque les paramètres sont déterministes) la variable Y est d'espérance 1. C'est la densité d'une probabilité $\mathbb{Q}$, équivalente à $\mathbb{P}$ telle que (W_t) soit un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$. Si nous appliquons la formule d'Itô à la fonction $\Gamma(t, S)$ solution de l'équation (18) et au processus S_t sous la probabilité $\mathbb{Q}$, (ou si nous utilisons que $\Gamma(t, S_t)$ est le prix de l'option) il vient

$$\mathrm{d}\Gamma(t, S_t) = r_t\Gamma(t, S_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t \partial_S \Gamma(t, S_t)\,\mathrm{d}W_t.$$

Le prix du Call actualisé au taux de r, que nous désignons par $C(t, S_t)$, vérifie :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Big[(S^0)_t^{-1}\Gamma(t, S_t) = \mathrm{d}\Big[e^{-\int_0^t r_u \,\mathrm{d}u}\Gamma(t, S_t)\Big] &= \mathrm{d}C(t, S_t)\\ &= \sigma_t S_t \partial_S C(t, S_t)\,\mathrm{d}W_t.\end{aligned}$$

Le prix du Call actualisé s'écrit comme une intégrale stochastique, qui est une martingale si l'intégrant est de carré intégrable : $\partial_S\Gamma(t, S_t)$ est bornée par hypothèse ; comme tous les coefficients sont déterministes et intégrables, il en est de même de as $\partial_S C(t, S_t)$.

D'autre part, sous $\mathbb{Q}$, l'actif S suit suit la loi d'un brownien géométrique, de carré intégrable, avec moments d'ordre 2 bornés. $C(t, S_t)$ est donc une $\mathbb{Q}$-martingale de carré intégrable, de condition terminale $C(T, S_T = \exp(-\int_0^T r(u)\,\mathrm{d}u h(S_T))$.

$$C(t, S_t) = e^{-\int_0^t r(u)\,\mathrm{d}u}\Gamma(t, S_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_0^T r(u)\,\mathrm{d}u}h(S_T)|\mathcal{F}_t\Big],$$

ce qui donne après simplification la formule de représentation de la proposition. $\square$

5.1.3. *La formule de Black et Scholes*

Théorème 2. *Sous les hypothèses* (H3) *et lorsque tous les coefficients sont constants,*

$$\Gamma(t,S) = \int e^{-r(T-t)} h\Big[S^{\sigma\sqrt{T-t}\,y-(\frac{1}{2}\sigma^2-r)(T-t)}\Big] \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y. \tag{22}$$

Lorsque $h(S)$ est égal à $(S-K)^+$, on a une forme particulièrement simple pour le calcul du prix du Call :

$$\begin{cases} \Gamma(t,S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_0), \\ \quad d_0 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln\Big(\dfrac{S}{Ke^{-r(T-t)}}\Big) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ \quad d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T-t}, \end{cases} \tag{23}$$

où N est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite. De plus, $\partial_S\Gamma(t,S) = N(d_1)$.

Lorsque les coefficients dépendent du temps, les mêmes formules restent valables à condition de remplacer σ^2 et r par :

$$\Sigma^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_u^2\,\mathrm{d}u, \qquad R = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_u\,\mathrm{d}u. \tag{24}$$

Démonstration. Lorsque les coefficients sont constants, la solution de l'équation stochastique (22) a une forme explicite, donnée par :

$$S_t = S_0 \exp\big[\sigma W_t - (\tfrac{1}{2}\sigma^2 - r)t\big].$$

La loi de $\ln S_T$ sachant $\mathcal{F}_t$ est la loi normale, de variance $\sigma^2(Tt)$, et de moyenne $-[(\frac{1}{2}\sigma^2 - r)(T-t) - \ln(S_t)]$, ce qui justifie la formule (24).

Calculons le prix d'un Call. Comme h est donnée par $h(S) = (S-K)^+$, il est possible d'expliciter le calcul complètement, en mettant en évidence l'ensemble d'exercice

$$\mathcal{E} = \{S_T > K\} = \{-(W_T - W_t) < d_0(S_t)\sqrt{T-t}\},$$

où $d_0(S)$ est donné dans l'énoncé du théorème 2. Le prix en t du Call s'écrit donc encore

$$\Gamma(t,S) = S\mathbb{Q}'[\mathcal{E}|S_t = S] - Ke^{-r(T-t)}\mathbb{Q}[\mathcal{E}|S_t = S],$$

où $\mathbb{Q}'$ est la probabilité de densité par rapport à $\mathbb{Q}$

$$e^{-rT}S_T = \exp[\sigma(W_T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T].$$

Sous $\mathbb{Q}'$, $(W_t - \sigma t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$; la variable aléatoire $-(W_T - W_t)$ est gaussienne de même variance $T - t$ et de nouvelle moyenne $-\sigma(Tt)$. Le calcul des probabilités d'exercice peut être mené complètement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[\mathcal{E}|S_t = S] &= N(d_0), \\
\mathbb{Q}'[\mathcal{E}|S_t = S] &= \mathbb{Q}'\big[-(W_T - W_t) < d_0(S_t)\sqrt{T-t} \mid S_t = S\big] \\
&= \mathbb{Q}\big[-(W_T - W_t) - \sigma(T-t) < d_0(S_t)\sqrt{T-t}\big] \\
&= N(d_0 + \sigma\sqrt{T-t}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Calculons la dérivée du prix du Call par rapport à S. Pour simplifier l'écriture, nous faisons le calcul pour $t = 0$. Nous dérivons sous le signe espérance la fonction

$$\big(S \exp\big[\sigma W_t - (\tfrac{1}{2}\sigma^2 - r)T\big] - K\big)^+$$

qui est dérivable pour presque toutes les valeurs de W_T, sauf celles pour lesquelles $K = S\exp\big[\sigma W_t - (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)T\big]$. Mais la probabilité de réalisation d'un tel événement est nulle. La dérivée, lorsqu'elle existe vaut : $\exp\big[\sigma W_t - (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)T\big]1_{\mathcal{E}}$. Elle est donc majorée par la v.a. intégrable $\exp\big[\sigma W_t - (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)T\big]$, indépendante de S, ce qui justifie la dérivation sous le signe espérance. Par suite,

$$\begin{aligned}
\partial_S \Gamma(t, S) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\exp(\sigma W_T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T)1_{\mathcal{E}}|S_t = S\big] \\
&= \mathbb{Q}'[\mathcal{E}|S_t = S] = N(d_1).
\end{aligned}$$

Exercice. Montrer que la probabilité $\mathbb{Q}'$ est la mesure-martingale pour le numéraire S.

Remarque 5.2. La formule de Black et Scholes est remarquable, au sens où elle donne directement la décomposition du prix du Call en son portefeuille de couverture, qui consiste à investir dans $N(d_1)$ parts de l'actif risqué et le reste dans le cash.

Avant de commenter de manière détaillée cette formule, nous rappelons la formule de valorisation d'un Put, établie dans la proposition 2 en absence d'opportunité d'arbitrage.

***Proposition 7* (Parité Call-Put).** *Sous les hypothèses précédentes, les prix d'un Call et d'un Put sont liés par :*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad p.s. \tag{25}$$

Nous avons déjà calculé l'exposition du prix du Call aux variations du cours de l'action. Cette quantité est particulièrement importante, car elle permet de constituer le portefeuille de couverture.

Définition 7. On appelle *delta* la variation d'un produit financier par rapport à la variation du cours. La dérivée seconde est appelée *gamma.*

Plus généralement, on a les expressions suivantes pour le Call :

Proposition 8. *Le prix d'un Call de maturité T et de prix d'exercice K admet les variations suivantes par rapport aux différents paramètres :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma}{\partial S} = N(d_1), & \dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 S} = \dfrac{1}{S\sigma\sqrt{T}} N'(d_1) > 0, \\ \dfrac{\partial \Gamma}{\partial K} = -e^{-rT} N(d_0), & \dfrac{\partial \Gamma}{\partial r} = TKe^{-rT} N(d_0) > 0, \\ \dfrac{\partial \Gamma}{\partial T} = \dfrac{S\sigma}{2\sqrt{T}} N'(d_0) & \dfrac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\, N'(d_1). \\ \qquad + Ke^{-rT} N(d_0), & \end{cases} \tag{26}$$

Le prix du Call est donc une fonction convexe par rapport au cours, croissante en tous les paramètres, sauf le prix d'exercice.

Exemple numérique.

$$\begin{array}{lllll} T = 0,33 & \sigma = 0,3 & K = 400F & r = 0,12 & S = 400F \\ C = 35,50F & d_0 = 0,318 & d_1 = 0,558 & & \\ \delta = 0,625 & \partial_\sigma \Gamma = 8,747 & & & \end{array}$$

Une erreur de 0,1 point sur la volatilité entraîne une erreur de 87 centimes sur le prix du Call.

5.2. Volatilité et mise en œuvre

5.2.1. *La mise en œuvre.* Pour mettre en oeuvre pratiquement la formule de Black et Scholes, il se pose de nombreuses questions, notamment dans l'identification des paramètres :

- quel est le bon cours de l'action à retenir, celui du matin, du soir, le plus fort, le plus faible, etc. ?
- quelle est la valeur du taux d'intérêt sans risque ?
- de quelle manière doit-on définir la maturité : en comptant tous les jours ou seulement les jours ouvrables, mais les jours fériés sont moins risqués... ?
- comment repérer le paramètre de volatilité σ ?

La question la plus difficile est évidemment cette dernière, puisque l'information sur la volatilité n'est pas directement disponible sur le marché.

5.2.2. *Précisions sur la volatilité.* La volatilité est, le paramètre qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. C'est un paramètre clé en finance, qui parfois recouvre des notions un peu différentes telles que volatilité instantanée, volatilité moyenne sur une période, etc.

Définition 8. La volatilité d'un actif de prix (X_t) est le paramètre éventuellement aléatoire σ_t^X défini par

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = r_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t^X\,\mathrm{d}W_t. \tag{27}$$

La volatilité moyenne $\Sigma(t, X)$ de X sur la période $[t, T]$ est la la quantité définie par :

$$\Sigma^2(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T (\sigma_u^X)^2\,\mathrm{d}u.$$

La propriété suivante mérite d'être notée :

Proposition 9. *Le Call est plus volatile que l'actif sous-jacent.*

Démonstration. D'après la formule d'Itô, la volatilité du Call est donnée par :

$$\frac{\partial\Gamma(t,S_t)}{\Gamma(t,S_t)}\,S_t\sigma_t = \frac{N(d_1)}{\Gamma(t,S_t)}\,S_t\sigma_t \geqslant \frac{\Gamma(t,S_t)}{\Gamma(t,S_t)}\,\sigma_t = \sigma_t. \qquad \square$$

Revenons dans le cadre de la formule de Black et Scholes sur le paramètre de volatilité σ, supposé maintenant constant dans le temps. C'est aussi le paramètre de variance par unité de temps du logarithme du cours qui, par hypothèse, suit un mouvement brownien non centré. Pour l'identifier, il est possible

- soit d'utiliser des données historiques et des méthodes d'estimations statistiques,
- soit de calculer des volatilités implicites à partir des cours observés de l'option et l'action.

5.2.3. *La volatilité historique.* En général, pour estimer statistiquement le paramètre de volatilité, on discrétise le mouvement a l'aide d'observations régulières qui satisfont à

$$S_{(j+1)\delta} = S_{j\delta}e^{\mu\delta-\sigma(W_{(j+1)\delta}-W_{j\delta})},$$

et on pose

$$\widetilde{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\ln(S_{(j+1)\delta}|S_{j\delta}), \quad \widetilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\bigl(\ln(S_{(j+1)\delta}|S_{j\delta}) - \widetilde{\mu}_n\bigr)^2.$$

On en retient, en général, des valeurs de n et δ comprises entre 90 et 180 jours. Le $\widetilde{\sigma}_n$ observé est l'estimateur de σ appelé *volatilité historique.*

Pour employer des méthodes statistiques, il faut dégager une certaine stationnarité dans les données, et faire des tests d'adéquation des modèles, notamment tester si l'hypothèse de lognormalité pour le cours de l'actif peut être retenue. Les tests permettent rarement de confirmer les hypothèses de Black et Scholes, et de nombreuses recherches sont en cours actuellement pour trouver des modèles plus adéquats, notamment les modèles ARCH en discret, et les modèles à volatilité aléatoire en continu.

Toutefois, notre propos ici est d'estimer des paramètres en vue d'évaluation et de couverture de prix, opérations qui se situent comme nous l'avons vu dans un univers risque-neutre différent de l'univers historique. Comme les nombreux tests économétriques faits sur la théorie de l'arbitrage (APT) montrent qu'il est très difficile d'évaluer des primes de risque stables, nous sommes en face d'une situation assez originale sur le plan statistique, qui conduit à être prudent dans l'usage des techniques d'estimation historique pour le calcul des prix d'options et de leur couverture.

5.2.4. *La volatilité implicite.* La volatilité implicite ne fait référence à aucune notion statistique. Elle repose sur le fait que dans un marché très liquide, la loi de l'offre et de la demande permet de fixer des prix d'équilibre, qui correspondent à un consensus de marché. Le marché se sert alors des modèles moins pour fixer des prix, (sauf sur des produits complexes), que pour évaluer et couvrir le risque attaché à un produit dérivé. Le problème est aussi de comparer les prix de différents produits optionnels écrits sur un même sous-jacent.

L'outil de référence essentiel est la volatilité implicite, obtenue en inversant la formule qui donne le prix du Call, c'est-à-dire qu'à un prix de Call et à un niveau de cours donnés, on associe la valeur de σ qui introduite dans la formule de Black et Scholes et utilisée avec le cours observé de l'actif, donne comme prix celui du Call observé sur le marché. Toutefois, il n'y a. pas sur une même action une seule volatilité implicite, mais éventuellement plusieurs, qui dépendent du prix d'exercice. Cela est en contradiction avec le modèle théorique, mais le marché retient que cela indique que le titre de volatilité implicite la plus élevée est le plus risqué, le risque étant dû, le cas échéant, à des écarts au modèle d'arbitrage théorique, moins grande liquidité par exemple, etc.

C'est ce paramètre qui sert actuellement de référence de risque sur le marché des options, où l'on évoque facilement que l'on achète ou vend de la volatilité.

On voit aussi pourquoi le marché attache une grande importance aux formules explicites, qui sont souvent utilisées inversées dans le cas des produits plus sophistiqués, évalués par des méthodes numériques, la volatilité implicite est calculée à partir de tables évidemment dont l'établissement est évidemment assez coûteux en temps de calcul.

Références

[AP91] F. Aftalion & P. Poncet – *Les futures sur taux d'intérêt : le MATIF*, PUF, Paris, 1991.

[Bac00] L. Bachelier – « Théorie de la spéculation », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17** (1900), p. 21–86.

[Ben84] A. Bensoussan – « On the theory of option pricing », *Acta Appl. Math.* **2** (1984), p. 139–158.

[BS73] F. Black & M. Scholes – « The pricing of options and corporate liabilities », *J. Polit. Econ.* **81** (1973), no. 3, p. 637–654.

[BS79] J. E. Brennan & E. S. Schwartz – « A continuous time approach to the pricing of bonds », *J. Banking and Finance* **3** (1979), no. 2, p. 133–155.

[CIR85a] J. C. Cox, J. E. Ingersoll & S. A. Ross – « An intertemporal general equilibrium model of asset prices », *Econometrica* **53** (1985), p. 363–384.

[CIR85b] J. C. Cox, J. E. j. Ingersoll & S. A. Ross – « A theory of the term structure of interest rates », *Econometrica* **53** (1985), p. 385–407.

[CRR79] J. C. Cox, S. A. Ross & M. Rubinstein – « Option pricing. A simplified approach », *J. Fin. Econ.* **7** (1979), p. 229–263.

[CR85] J. C. Cox & M. Rubinstein – *Option markets*, Prentice-Hall, 1985.

[DR05] G. Demange & J.-C. Rochet – *Méthodes mathématiques de la finance*, 3e éd., Économica, Paris, 2005.

[Duf88a] D. Duffie – « An extension of the Black-Scholes model of security valuation », *J. Econ. Theory* **46** (1988), no. 1, p. 194–204.

[Duf88b] ———, *Security markets. Stochastic models*, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[Ein05] A. Einstein – « On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat », *Ann. Physik* (1905), p. 549–560.

[EKP92] N. El Karoui & É. Pardoux – « Modèles de diffusion », 1992, Cours de l'École polytechnique.

[FS86] H. Föllmer & D. Sondermann – « Hedging of non-redundant contingent claims », in *Contributions to mathematical economics, in honor of G. Debreu*, North-Holland, Amsterdam, New York, 1986, p. 206–223.

[GY92] H. Geman & M. Yor – « Quelques relations entre processus de Bessel, options asiatiques et fonctions confluentes hypergéométriques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **314** (1992), no. 6, p. 471–474.

[HK79] J. M. Harrison & D. M. Kreps – « Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets », *J. Econ. Theory* **20** (1979), p. 381–408.

[HP81] J. M. Harrison & S. R. Pliska – « Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading », *Stochastic Processes Appl.* **11** (1981), p. 215–260.

[HP83] ———, « A stochastic calculus model of continuous trading : Complete markets », *Stochastic Processes Appl.* **15** (1983), p. 313–316.

[HJM92] D. Heath, R. Jarrow & A. Morton – « Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation », *Econometrica* **60** (1992), no. 1, p. 77–105.

[HL86] T. Ho & S. Lee – « Term structure movements and pricing interest rate contingents claims », *J. Finance* **41** (1986), p. 1011–1029.

[HW90] J. Hull & A. White – « Pricing interest-rate-derivative securities », *Rev. Financ. Stud.* **3** (1990), no. 4, p. 573–592.

[JR83] R. A. Jarrow & A. Rudd – *Option pricing*, Irving, Homewood, IL, 1983.

[Kar88] I. Karatzas – « On the pricing of American options », *Appl. Math. Optim.* **17** (1988), no. 1, p. 37–60.

[KS91] I. Karatzas & S. E. Shreve – *Brownian motion and stochastic calculus*, 2e éd., Graduate Texts in Math., vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991.

[KT81] S. Karlin & H. M. Taylor – *A second course in stochastic processes*, Academic Press, Inc., New York-London, 1981.

[LL97] D. Lamberton & B. Lapeyre – *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2e éd., Ellipses, Paris, 1997.

[Mer73] R. C. Merton – « Theory of rational option pricing », *J. Econ. Manage. Sci.* **4** (1973), no. 1, p. 141–183.

[Mer99] ———, *Continuous-time finance*, Blackwell, Cambridge, MA, 1999.

[Mül85] S. Müller – *Arbitrage pricing of contingent claims*, Lecture Notes in Economics and Math. Systems, vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Øks85] B. Øksendal – *Stochastic differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Pli86] S. R. Pliska – « A stochastic calculus model of continuous trading : optimal portfolios », *Math. Oper. Res.* **11** (1986), p. 371–382.

[SS84] S. M. Schaefer & E. S. Schwartz – « A two-factor model of the term structure : an approximate analytical solution », *Journal of Financial and Quantitative Anal.* **19** (1984), no. 4, p. 413–424.

[Str90] C. Stricker – « Arbitrage et lois de martingale », *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **26** (1990), no. 3, p. 451–460.

[Vas77] O. Vasicek – « An equilibrium characterization of the term structure », *J. Financ. Econ.* **5** (1977), no. 2, p. 177–188.

Nicole El Karoui, CMAP, Département de Mathématiques Appliquée, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Laure Elie, Université Paris VII, 75005 Paris, France