Journées mathématiques X-UPS

Année 1991

Séries divergentes et procédés de resommation

Alain Chenciner

Séries divergentes de la Mécanique Céleste (problèmes planétaires)

Journées mathématiques X-UPS (1991), p. 129-154.
https://doi.org/10.5802/xups.1991-04

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1991, p. 129–154 doi: 10.5802/xups.1991-04

SÉRIES DIVERGENTES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE (PROBLÈMES PLANÉTAIRES)

par

Alain Chenciner

Table des matières

Introduction

La recherche de solutions « quasi-périodiques » des équations qui décrivent le mouvement des planètes, et plus précisément la question de l'existence parmi ces solutions de celle qui nous intéresse tant, ont conduit depuis deux siècles à des expressions approchées, puis formelles, dont la signification est l'objet de la présente causerie.

Ces équations, qui dans l'idéalisation du « Problème des $(n+1)$ corps » — les planètes et le soleil sont des points matériels strictement régis par la loi de Newton — définissent après fixation du centre de gravité un « système hamiltonien » à $3n$ degrés de liberté

Publication originelle dans Journées X-UPS 1991. Séries divergentes et procédés de resommation. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1991.

(voir le paragraphe 1), ont pour limite lorsque les masses des planètes tendent vers zéro la réunion de n « Problèmes de Kepler » dont les solutions dans le domaine d'énergies pertinent sont des mouvements elliptiques non couplés. Exprimées en termes des proportions d'aires balayées sur chaque ellipse par le segment joignant au soleil la planète correspondante (anomalies moyennes ou longitudes moyennes, voir le paragraphe 2), les solutions du système limite deviennent des fonctions quasi-périodiques du temps ayant n fréquences, éventuellement dépendantes (deuxième loi de Kepler). Il s'agit d'une situation très dégénérée, les solutions quasi-périodiques d'un système hamiltonien à $3n$ degrés de liberté « complètement intégrable » non dégénéré (voir le paragraphe 3) ayant pour la plupart $3n$ fréquences. Cette dégénérescence est levée dans l'approximation suivante dans laquelle on ne tient compte des interactions planétaires qu'en moyenne sur un grand nombre de révolutions tout en oubliant les termes non linéaires en les excentricités et les inclinaisons des ellipses képlériennes. Les solutions ainsi obtenues sont célèbres (mouvements de Laplace-Lagrange, voir le paragraphe 3) : elles fournirent à Laplace la première « preuve » de la stabilité d'un système planétaire. Les nouvelles fréquences, qui lèvent la dégénérescence, sont celles des mouvements « séculaires » des périhélies et des nœuds des ellipses képlériennes.

La relation du système ainsi « moyenné » au système complet des équations de Newton est élucidée dans le paragraphe quatre : au niveau des « séries formelles », il représente bien une approximation de ce dernier pourvu qu'on ne considère pas les solutions dans lesquelles les fréquences des mouvements képlériens approchés ne sont pas indépendantes (« résonances en moyens mouvements »). C'est d'ailleurs la proximité d'une telle résonance dans le couple Jupiter-Saturne (le fameux $2-5$) qui est à l'origine des « inégalités » de leurs mouvements dont l'explication est l'une des plus belles découvertes de Laplace.

Il reste à comprendre les mouvements séculaires au-delà de l'approximation linéaire en excentricités et inclinaisons et à construire des séries — a priori seulement formelles en les masses planétaires — qui définissent les solutions quasi-périodiques recherchées. Cette construction est indiquée dans le paragraphe 5 pour le Problème des trois corps dans le plan que la complète intégrabilité du système séculaire qui lui est associé rend plus simple que le problème général : loin des résonances en moyens mouvements et des résonances séculaires, on obtient des séries formelles en les masses planétaires. Dans le cas général, il faut également effectuer des développements formels en excentricités et inclinaisons.

Tout ceci n'est que formel bien qu'une démonstration de ce fait soit difficile (paragraphe 6). Les arguments de Poincaré montrent que la divergence de ces séries est très probable dans la situation dégénérée qui nous intéresse, et ce bien que l'existence de solutions quasi-périodiques du Problème des trois corps dans le plan soit prouvée par Arnold et que la convergence ait lieu lorsque la non-dégénérescence permet de fixer les fréquences indépendamment des masses planétaires (Moser, Zehnder). De toute façon, les résultats semi-numériques de Jacques Laskar sur deux cents millions d'années indiquent que nous ne sommes probablement pas sur une solution quasi-périodique des équations de Newton.

1. Forme hamiltonienne des équations dans un repère héliocentrique ; approximation képlérienne

Soient $m_0, m_1, \ldots, m_n$ les masses, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ les positions de $n+1$ corps ponctuels dans l'espace identifié à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère galiléen. Les équations de Newton s'écrivent

$$m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} = \gamma \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} \frac{m_j m_k}{|y_j - y_k|^3}(y_k - y_j) \quad (j = 0, \ldots, n),$$

où $(y_0, \ldots, y_n)$ appartient au complémentaire dans $(\mathbb{R}^3)^{n+1}$ de l'union des *diagonales* d'équations $y_j = y_k$. Définissant les *moments*

$$x_i = m_i \frac{dy_i}{dt},$$

on obtient la forme *hamiltonienne* de ces équations :

$$
(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_j} \\ \dfrac{dy_j}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \end{cases} (j = 0, \ldots, n), \\ \mathcal{H}(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{|x_j|^2}{2m_j} - \gamma \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{m_j m_k}{|y_k - y_j|},
$$

où l'on a noté

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, \ldots, x_n) \\
x_j &= (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}) \quad (j = 0, \ldots, n), \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} &= \Big(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{j1}}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{j2}}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{j3}} \Big), \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{H}$ est le *hamiltonien* ou énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Introduisons la 2-*forme symplectique standard* sur $\mathbb{R}^{3(n+1)} \times \mathbb{R}^{3(n+1)}$

$$
\omega = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=1}^{3} dx_{jk} \wedge dy_{jk},
$$

encore notée $\omega = dx \wedge dy$. Les équations $(\mathcal{H})$ s'écrivent encore

$$
\frac{d}{dt}(x_j, y_j) = \Big(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_j}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \Big) = \operatorname{grad}_\omega \mathcal{H},
$$

où le *gradient symplectique* $\operatorname{grad}_\omega$ est défini par l'identité, valable pour tout champ de vecteurs X,

$$
\omega(X, \operatorname{grad}_\omega \mathcal{H}) = d\mathcal{H} \cdot X.
$$

On comparera bien entendu au gradient *riemannien* défini par

$$
\langle X, \operatorname{grad} \mathcal{H} \rangle = d\mathcal{H} \cdot X,
$$

dont le gradient symplectique ne diffère que par une rotation de $\pi/2$ dans chaque 2-plan (x_{jk}, y_{jk}) (à condition bien entendu d'avoir choisi le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{6(n+1)}$). La *conservation de l'énergie* par le flot d'un gradient symplectique s'en déduit immédiatement (figure 1, schématique).

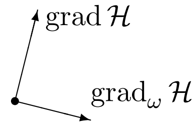

FIGURE 1. $\mathcal{H} = \text{cste}$

De même qu'une isométrie transforme un gradient en gradient, un changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^{2N}$

$$\Phi : (a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) \longmapsto (p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N)$$

qui préserve $\omega : \sum_{i=1}^N da_i \wedge db_i = \sum_{i=1}^N dp_i \wedge dq_i$, transforme le gradient symplectique de $\mathcal{H}(p, q)$ en celui de la fonction correspondante $H = \mathcal{H} \circ \Phi$. Un tel Φ est dit *symplectique* ou *canonique*.

Dans les nouvelles coordonnées, les équations du mouvement conservent donc la forme hamiltonienne.

Tous les changements de coordonnées que nous ferons seront canoniques ; une méthode générale de construction sera donnée dans le paragraphe 4, mais nous commençons par un exemple élémentaire, la *réduction du centre de masse* par les coordonnées *héliocentriques* de Poincaré. Posons

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + \cdots + x_n, \\ X_j &= x_j \quad (j = 1, \ldots, n), \\ Y_0 &= y_0, \\ Y_j &= y_j - y_0 \quad (j = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Le caractère symplectique de la transformation est évident. Puisque

$$\sum_{j=0}^n m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} = 0,$$

on peut choisir le repère galiléen de façon que $X_0 = 0$. On peut alors oublier les variables X_0, Y_0 (réduction) et définir le mouvement des n masses $m_1, \ldots, m_n$ (planètes) autour de la masse m_o (soleil) par le système hamiltonien dans $\mathbb{R}^{6n}$

$$(H)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_j} \\ \dfrac{dY_j}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases} (j=1,\ldots,n), \\ H = H_0 + H_1, \\ H_0(X,Y) = \sum_{j=1}^{n}\left[\dfrac{|X_j|^2}{2\mu_j} - \gamma\dfrac{\mu_j M_j}{|Y_j|}\right], \\ H_1(X,Y) = -\gamma \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \dfrac{m_j m_k}{|Y_j - Y_k|} + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \dfrac{X_j\cdot X_k}{m_0}, \end{cases}$$

où $\mu_j = m_0 m_j/(m_0+m_j)$, $M_j = m_0 + m_j$.

Le terme H_0, encore appelé hamiltonien *non perturbé* décrit une somme de problèmes à 2 corps (m_0 et m_j) non couplés en coordonnées héliocentriques canoniques ; on peut l'interpréter comme une somme de *problèmes de Kepler* dans lesquels un centre fixe de masse M_j attire une particule mobile de masse μ_j. Nous ne nous intéresserons qu'aux solutions elliptiques de ces problèmes de Kepler.

Si les m_j, $j = 1,\ldots,n$, sont beaucoup plus petites que m_0, ce qu'on supposera, et si les mouvements des planètes restent proches de mouvements circulaires coplanaires de rayons bien distincts, ce qu'on supposera également, le terme H_1 reste au cours du mouvement très inférieur à H_0. On l'appelle la *fonction perturbatrice* (le premier et le deuxième terme sont appelés respectivement *partie principale* et *partie complémentaire* de la fonction perturbatrice).

2. Variation des constantes

On fabrique des coordonnées avec les diverses *constantes* des mouvements képlériens elliptiques décrits par les solutions de (H_0), i.e., avec les *éléments* des ellipses parcourues ; on complète par des angles paramétrant ces ellipses. Le hamiltonien non perturbé H_0 prend alors une forme particulièrement simple et résoudre (H) revient à comprendre la *variation des constantes* (à la Lagrange) au cours des mouvements réels : variation de la taille (demi-grand axe), de l'excentricité, de l'inclinaison, précession des nœuds et des périhélies.

Plus précisément, nous utiliserons deux systèmes de coordonnées dûs à Poincaré, qui ont entre eux la relation des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, à ceci près qu'il s'agit de coordonnées *polaires symplectiques* ($dx \wedge dy = dr \wedge d\theta$) :

$$x = \sqrt{2r}\cos\theta, y = \sqrt{2r}\sin\theta.$$

Issues des classiques *coordonnées de Delaunay*[(1)], ces *coordonnées de Poincaré* sont particulièrement bien adaptées à la description des mouvements planétaires proches de mouvements horizontaux et circulaires.

Notations. $\mathbb{T}^n$ désigne le tore $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$, produit de n cercles.

Coordonnées de Poincaré cartésiennes

$(\Lambda_j, \lambda_j, u_j = \xi_j + i\eta_j, z_j = p_j + iq_j)_{j=1,\dots,n} \in (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$,

Coordonnées de Poincaré polaires

$(\Lambda_j, \lambda_j, H_j, h_j, Z_j, \zeta_j)_{j=1,\dots,n} \in (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{T}^n \times (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{T}^n \times (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{T}^n$, où l'on a posé

$$\Lambda_j = \sqrt{\gamma}\mu_j\sqrt{M_j}\sqrt{a_j} \quad (a_j = 1/2 \text{ grand axe de la } j^{\text{ème}} \text{ ellipse képlérienne}),$$

$$\lambda_j = \ell_j + g_j + \theta_j \quad (\text{longitude moyenne}),$$

$$H_j = \Lambda_j(1 - \sqrt{1 - e_j^2}),$$

$$Z_j = \Lambda_j\sqrt{1 - e_j^2}(1 - \cos\ i_j),$$

$$-h_j = g_j + \theta_j \quad (\text{longitude du périhélie}),$$

$$-\zeta_j = \theta_j \quad (\text{longitude du nœud ascendant}),$$

$$u_j = \xi_j + i\eta_j = \sqrt{2H_j}e^{ih_j} = \sqrt{\Lambda_j}e_j(1 + O(e_j^2))e^{ih_j},$$

$$z_j = p_j + iq_j = \sqrt{2Z_j}e^{i\zeta_j} = \sqrt{\Lambda_j}i_j(1 + O(e_j^2) + O(i_j^2))e^{i\zeta_j}.$$

Les coordonnées u_j, z_j sont l'avatar symplectique des coordonnées $e_je^{ih_j}$, $i_je^{i\zeta_j}$ utilisées par les astronomes.

Dans l'un ou l'autre des systèmes de coordonnées de Poincaré le hamiltonien H s'écrit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1$, où

$$\mathcal{F}_0 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-\gamma^2\mu_j^3M_j^2}{2\Lambda_j^2}\right),$$

---

(1) que l'on peut retrouver en appliquant la *méthode de Hamilton-Jacobi* au problème de Kepler.

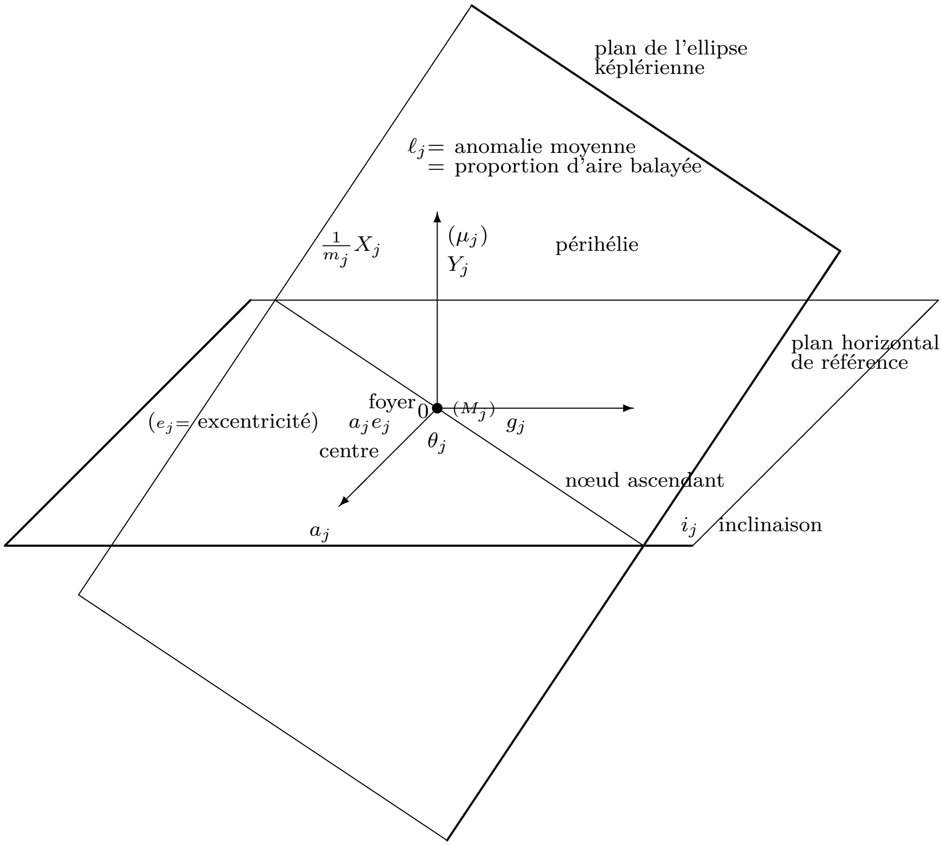

FIGURE 2.

et les équations (H) deviennent

$$
(\mathcal{F})_{\text{cart.}} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Lambda_j}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_j}, \\ \dfrac{d\lambda_j}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Lambda_j}, \\ \dfrac{d\xi_j}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta_j}, \\ \dfrac{d\eta_j}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_j}, \\ \dfrac{dp_j}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j}, \\ \dfrac{dq_j}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_j}, \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)
$$

en coordonnées cartésiennes, et

$$(\mathcal{F})_{\text{pol.}} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\Lambda_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_j}, \\ \frac{d\lambda_j}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Lambda_j}, \\ \frac{dH_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h_j}, \\ \frac{dh_j}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H_j}, \\ \frac{dZ_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta_j}, \\ \frac{d\zeta_j}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z_j}, \end{aligned}\right. \qquad (j = 1, \dots, n)$$

en coordonnées polaires. Notons que la deuxième famille d'équations de $(\mathcal{F})_{\text{cart.}}$ prend en coordonnées complexes la forme particulièrement agréable

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= i\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{u}_j} \\ \frac{dz_j}{dt} &= i\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{z}_j}. \end{aligned} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

Dans les deux cas, les solutions de $(\mathcal{F}_0)$ sont comme on s'y attendait de la forme

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= \text{constante}, \\ \lambda_j &= \text{constante} + n_j t \quad \text{(2ème loi de Kepler)}, \end{aligned}$$

les autres coordonnées étant constantes, et telles que $n_j^2 a_j^3 = \gamma M_j$ (3ème loi de Kepler).

Les développements en séries que nous avons en vue nous amènent à choisir[(2)] un petit paramètre μ qui mesure la *distance* de $\mathcal{F}$ au hamiltonien non perturbé $\mathcal{F}_0$. Le plus simple est de poser $m_j = \mu \widetilde{m}_j$ où m_o et les $\widetilde{m}_j$, $j = 1, \dots, n$, sont considérés comme $O(1)$, et de choisir de

[(2)] c'est un point faible de cette théorie ; le choix est assez arbitraire.

nouvelles coordonnées $(\widetilde{\Lambda}_j, \widetilde{\lambda}_j, \widetilde{u}_j, \widetilde{z}_j)$ [resp. . $(\widetilde{\Lambda}_j, \widetilde{\lambda}_j, \widetilde{H}_j, \widetilde{h}_j, \widetilde{Z}_j, \widetilde{\zeta}_j)$], définies par

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}_j &= \frac{1}{\mu}\Lambda_j,\\ \widetilde{\lambda}_j &= \lambda_j,\\ (\widetilde{u}_j, \widetilde{z}_j) &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}(u_j, z_j).\end{aligned}$$

Ces coordonnées ne conservent la forme symplectique qu'à homothétie près, ce qu'on rétablit en remplaçant $\mathcal{F}$ (qui est d'ordre 1 en μ) par $F = (1/\mu)\mathcal{F}$, i.e., en changeant l'échelle de temps.

Développant F par rapport à μ, on met le hamiltonien du mouvement des planètes sous la forme de ce que Poincaré nomme *« le problème fondamental de la dynamique »* :

$$F = F_0 + \mu F_1 + O(\mu^2),$$

où

$$F_0 = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{-m_0^2\widetilde{m}_j^3}{\widetilde{\Lambda}_j^2}\Big)$$

(attention, ce n'est $(1/\mu)\mathcal{F}_0$ qu'à $O(\mu)$ près) et F_1 est somme d'une fonction des $\widetilde{\Lambda}_j$ (qui provient de $(1/\mu)\mathcal{F}_0$) et de la fonction perturbatrice

$$-\gamma \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{\widetilde{m}_j\widetilde{m}_k}{|Y_k - Y_j|} + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{\widetilde{X}_j \cdot \widetilde{X}_k}{m_0}$$

écrite dans les nouvelles variables (on a noté $\widetilde{X}_j = (1/\mu)X_j$).

3. Mouvements séculaires dans l'approximation de Laplace

À l'ordre 0 ($\mu = 0$), F se réduit à F_0 qui décrit l'évolution de n mouvements képlériens indépendants. Dans l'espace des phases de dimension $6n$, chaque courbe intégrale appartient à un tore de dimension n d'équations

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}_j &= \text{constante},\\ \widetilde{u}_j &= \text{constante}, \qquad (j = 1, \dots, n)\\ \widetilde{z}_j &= \text{constante},\end{aligned}$$

sur lequel les $\widetilde{\lambda}_j$ sont coordonnées globales ; la restriction à un tel tore du système (F_0) est simplement

$$\frac{d\widetilde{\lambda}_j}{dt} = n_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

les fréquences n_j dépendant des constantes choisies. Suivant les rapports de dépendance sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels des $n_j/2\pi$, l'adhérence de chaque courbe intégrale dans un tore donné est un tore dont la dimension peut varier de 1 (orbite périodique si tous les n_j sont multiples entiers d'une même fréquence) à n (si les $n_j/2\pi$ $(j = 1, \dots, n)$ sont indépendants sur $\mathbb{Q}$). La figure 3 est une représentation grossière de la situation.

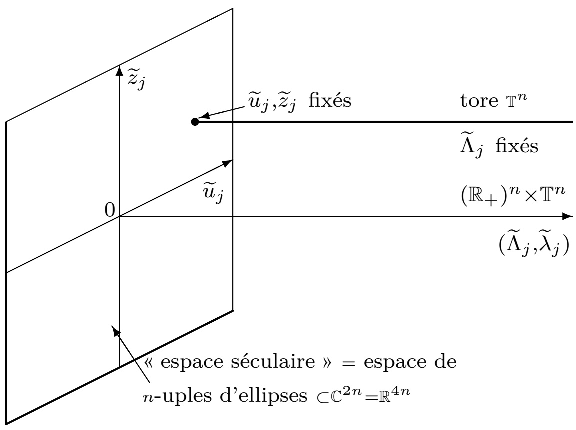

FIGURE 3. Ordre 0

À l'ordre 1 (oubli des termes $O(\mu^2)$) le problème possède déjà la complexité du cas général mais on peut, comme Laplace et les astronomes à sa suite, considérer le *système moyenné* ou *système séculaire à l'ordre* 1, de hamiltonien

$$\begin{aligned} F_0 + \mu R &= F_0 + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} F_1 d\widetilde{\lambda} \\ &= F_0 - \frac{\mu}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \gamma \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{\widetilde{m}_j \widetilde{m}_k}{|Y_j - Y_k|} d\widetilde{\lambda} \end{aligned}$$

dans lequel on ne retient des variations *à courtes périodes* (i.e., celles des $\widetilde{\lambda}_j$) que leur moyenne[(3)] pour s'intéresser exclusivement aux variations *à longues périodes* ou *séculaires* des ellipses képlériennes. Ce système décrit le mouvement sous l'attraction newtonienne de n ellipses massives dont la masse est répartie proportionnellement à l'aire balayée par le rayon vecteur issu du foyer. Il est encore assez compliqué (voir le paragraphe 5) mais si, suivant toujours Laplace, on remplace R par le début $R^{(2)}$ de son développement de Taylor en 0 (i.e., aux mouvements horizontaux et circulaires directs) par rapport aux variables $\widetilde{u}_j, \widetilde{z}_j$, il devient analysable et c'est sa résolution qui a fourni à Laplace son célèbre théorème sur la *stabilité* du système solaire : d'une part, les $\widetilde{\lambda} j$ n'apparaissant plus dans le hamiltonien moyenné, *les $\widetilde{\Lambda}_j$ sont des constantes du mouvement*; d'autre part, $R^{(2)}$ étant une forme quadratique en les $\widetilde{\xi}_j, \widetilde{\eta}_j, \widetilde{p}_j, \widetilde{q}_j$ (dont les coefficients dépendent des constantes $\widetilde{\Lambda}_j$), les variations séculaires sont maintenant décrites par un système linéaire sur $\mathbb{R}^{4n}$ (coordonnées $\widetilde{\xi}_j, \widetilde{\eta}_j, \widetilde{p}_j, \widetilde{q}_j$) dépendant des $\widetilde{\Lambda}_j$. Le contenu du théorème de Laplace est *le caractère purement imaginaire des valeurs propres de ce système linéaire*, d'où l'on déduit la représentation de la figure 4. Dans l'espace des phases, les solutions sont maintenant contenues dans des tores de dimension $3n$ (qui est la moitié de la dimension $6n$ de l'espace des phases, ce n'est pas un hasard !) obtenus en fixant les *actions*

$$\widetilde{\Lambda}_j, \quad \widehat{H}_j = \frac{1}{2}\,|\widehat{u}_j|^2\,, \quad \widehat{Z}_j = \frac{1}{2}\,|\widehat{z}_j|^2\,,$$

où $\widehat{H}_j$, $\widehat{Z}_j$ sont les analogues de $\widetilde{H}_j$, $\widetilde{Z}_j$ après un changement de coordonnées linéaire symplectique qui transforme la forme quadratique $R^{(2)}$ en une somme de carrés $\sum_{j=1}^{u} \alpha_j|\widehat{u}_j|^2 + \beta_j|\widehat{z}_j|^2$ (passage à une base propre de la matrice qui représente $R^{(2)}$).

[En fait l'adhérence des solutions dans chacun de ces tores est un tore dont la dimension n'excède pas $3n-1$: la conservation du moment cinétique implique en effet l'existence d'une relation entre les périodes de précession des nœuds qui limite à $2n-1$ le nombre de fréquences séculaires indépendantes. Sur le plan technique, on se débarrasse de ce problème par une *réduction du moment cinétique* qu'il est inutile de décrire ici].

---

(3) On montre que la moyenne de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice est identiquement nulle

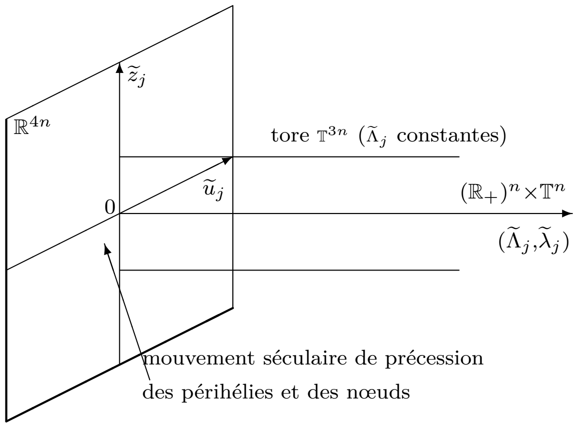

Figure 4. Ordre 1, approximation linéaire

L'hypothèse la plus optimiste sur les mouvements réels — la « complète intégrabilité » — peut maintenant être avancée : l'espace des phases[(4)] serait feuilleté par une famille à $3n$ paramètres de tores invariants de dimension $3n$ et un changement de coordonnées symplectique existerait qui *redresse* ces tores (figure 5).
Les ellipses képlériennes seraient donc animées d'une lente précession des périhélies et des nœuds, accompagnée de variations bornées des demi-grands axes, des excentricités, et des inclinaisons.

Plus précisément, il existerait dans la région de l'espace des phases qui nous intéresse des *coordonnées actions-angles*

$$(\widehat{\Lambda}_j, \widehat{\lambda}_j, \widehat{H}_j, \widehat{h}_j, \widehat{Z}_j, \widehat{\zeta}_j)_{j=1,\dots,n}$$

dans lesquelles les tores en question seraient obtenus en fixant les *actions* $\widehat{\Lambda}_j, \widehat{\lambda}_j, \widehat{H}_j, \widehat{Z}_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que ceci ait lieu est que, dans les nouvelles coordonnées, le hamiltonien soit indépendant des angles :

$$\widehat{F} = \widehat{F}(\widehat{\Lambda}_j, \widehat{H}_j, \widehat{Z}_j).$$

En effet, on aurait

$$0 = \frac{d\widehat{\Lambda}_j}{dt} = -\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\lambda}_j}, \quad \text{etc.}$$

[(4)]plus précisément le complémentaire d'une réunion d'hypersurfaces, elle-même feuilletée par des tores de dimension inférieure à $3n$.

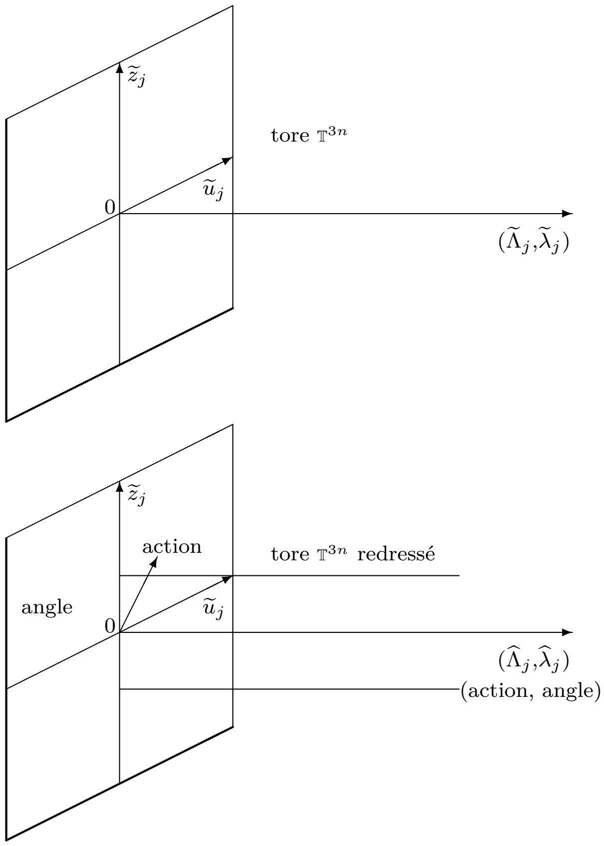

FIGURE 5.

mais alors les fréquences

$$\widehat{n}_j = \frac{d\widehat{\lambda}_j}{dt} = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \widehat{\Lambda}_j}$$

resteraient constantes au cours du mouvement, qui serait donc *quasi-périodique*.

Si de plus la transformation

$$(\widetilde{\Lambda}_j, \widetilde{H}_j, \widetilde{Z}_j, \widetilde{\lambda}_j, \widetilde{h}_j, \widetilde{\zeta}_j) \longmapsto (\widehat{\Lambda}_j, \widehat{H}_j, \widehat{Z}_j, \widehat{\lambda}_j, \widehat{h}_j, \widehat{\zeta}_j)$$

était analytique[5] et dépendait analytiquement du petit paramètre μ, les solutions de (F) seraient données par des *séries de Lindstedt*

$$(L)\begin{cases}\widetilde{\Lambda}_j = \widetilde{\Lambda}_j^0 + \sum_{k\geqslant 1}\mu^k \Phi_{j,k}\Big(\widetilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \widetilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \widetilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t\Big),\\ \widetilde{\lambda}_j = \widetilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t \\ \qquad + \sum_{k\geqslant 1}\mu^k \varphi_{j,k}\Big(\widetilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \widetilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \widetilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t\Big),\\ \widetilde{H}_j = \widetilde{H}_j^0 + \sum_{k\geqslant 1}\mu^k \Psi_{j,k}\Big(\widetilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \widetilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \widetilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t\Big),\\ \widetilde{h}_j = \widetilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t \\ \qquad + \sum_{k\geqslant 1}\mu^k \psi_{j,k}\Big(\widetilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \widetilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \widetilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t\Big),\\ \widetilde{Z}_j = \widetilde{Z}_j^0 + \sum_{k\geqslant 1}\mu^k \Theta_{j,k}\Big(\widetilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \widetilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \widetilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t\Big),\\ \zeta_j = \widetilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t \\ \qquad + \sum_{k\geqslant 1}\mu^k \theta_{j,k}\Big(\widetilde{\lambda}_j^0 + n_j(\mu)t, \widetilde{h}_j^0 + m_j(\mu)t, \widetilde{\zeta}_j^0 + \kappa_j(\mu)t\Big),\end{cases}$$

où les $\Phi_{j,k}$, $\varphi_{j,k}$ etc. sont des fonctions analytiques sur le tore $\mathbb{T}^{3n}$ et où les différentes fréquences $n_j(\mu),\ldots,$ sont analytiques en μ et en les constantes $\widetilde{\Lambda}_j^0, \widetilde{H}_j^0, \widetilde{Z}_j^0$, et vérifient $m_j(0) = \kappa_j(0) = 0$.

[En développant ces expressions par rapport à μ et en regroupant les termes correspondant à une même puissance de μ, ce qu'on se gardera bien de faire, on obtiendrait les développements classiques des astronomes contenant des termes *séculaires* t^a ou $t^a \sin bt$, qui proviennent du développement de termes du type $\sin(\alpha + \mu\omega t)$].

Nous allons voir qu'au niveau formel, des solutions quasi-périodiques données par de telles séries existent, mais qu'il y a très certainement *divergence.*

Dans le cas du problème plan des 3 corps ($n = 2$), les développements en série se font comme ci-dessus par rapport au seul paramètre μ qui caractérise le rapport des masses planétaires à la masse du soleil.

[5]Ceci ne peut se produire pour les coordonnées sous forme polaire que si le tore qui nous intéresse correspond à des mouvements suffisamment différents des mouvements circulaires et horizontaux (excentricités et inclinaisons ne doivent pas être trop petites par rapport au masses)

Dès que l'on aborde le problème de $n+1 \geqslant 3$ corps dans l'espace ou de $n+1 \geqslant 4$ corps dans le plan, il faut également effectuer des développements formels par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des ellipses képlériennes.

4. Élimination des longitudes moyennes

Comme premier pas dans la construction de séries de Lindstedt, nous élucidons dans ce paragraphe le rôle du système moyenné $(F_0 + \mu R)$.

Voici les notations allégées que nous utiliserons[6] :

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\widetilde{\Lambda}_j)_{j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n, \\ \lambda &= (\widetilde{\lambda}_j)_{j=1,\dots,n} \in \mathbb{T}^n, \\ \xi &= ((\widetilde{\xi}_j)_{j=1,\dots,n}, (\widetilde{p}_j)_{j=1,\dots,n}) \in \mathbb{R}^{2n}, \\ \eta &= ((\widetilde{\eta}_j)_{j=1,\dots,n}, (\widetilde{q}_j)_{j=1,\dots,n}) \in \mathbb{R}^{2n}, \\ F_{(\mu)} &= F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots \end{aligned}$$

Cherchons une famille (dépendant de μ) de difféomorphismes

$$\Phi_\mu : (\Lambda', \lambda', \xi', \eta') \longmapsto (\Lambda, \lambda, \xi, \eta)$$

telle que

(i) $d\Lambda \wedge d\lambda + d\xi \wedge d\eta - (d\Lambda' \wedge d\lambda' + d\xi' \wedge d\eta') = 0$,
(ii) $F_{(\mu)}(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) = F'_{(\mu)}(\Lambda', \xi', \eta')$,

où $F'_{(\mu)}$ est une fonction *indépendante des angles* λ' (i.e., ayant les mêmes symétries que $F_0 + \mu R$). La condition (i), qui exprime que Φ_μ est symplectique, s'écrit encore

$$d\left(\Lambda \cdot d\lambda + \xi \cdot d\eta + \lambda' \cdot d\Lambda' + \eta' \cdot d\xi'\right) = 0,$$

où les points $\cdot$ désignent le produit scalaire euclidien, et il suffit pour la remplir de trouver une famille de *fonctions génératrices* $S_{(\mu)}(\Lambda', \lambda, \xi', \eta)$ telles que

$$dS_{(\mu)} = \Lambda \cdot d\lambda + \xi \cdot d\eta + \lambda' \cdot d\Lambda' + \eta' \cdot d\xi',$$

[6] On notera que (ξ, η) varie dans un certain domaine borné Δ de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$.

i.e.,

$$\frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \lambda} = \Lambda, \quad \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \eta} = \xi, \quad \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \Lambda'} = \lambda', \quad \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \xi'} = \eta'.$$

On traite ici les composantes de λ comme des nombres réels et on exige que les dérivées partielles ci-dessus soient périodiques en ces variables. On exige de plus que la matrice de dérivées secondes mixtes $\partial^2 S_{(\mu)}/\partial a' \partial b$ (où $a' \in (\Lambda', \xi')$, $b \in (\lambda, \eta)$) soit inversible, ce qui permet de déterminer Φ_μ par application du théorème des fonctions implicites. Enfin, puisque le hamiltonien $F_{(0)} = F_0$ ne dépend que des variables Λ, on peut se restreindre aux Φ_μ de la forme Identité $+O(\mu)$. Une fonction génératrice de l'Identité étant évidemment $\Lambda' \cdot \lambda + \xi' \cdot \eta$, on cherchera $S_{(\mu)}$ sous la forme d'un développement formel en μ

$$S_{(\mu)}(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) = \Lambda' \cdot \lambda + \xi' \cdot \eta + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k S_k(\Lambda', \lambda, \xi', \eta),$$

dans lequel les conditions de périodicité imposent que

$$S_k(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) = \alpha_k \cdot \lambda + s_k(\Lambda', \lambda, \xi', \eta)$$

où $\alpha_k \in \mathbb{R}^n$ et s_k est périodique en λ.

Quant à la condition (ii), c'est une *équation de Hamilton-Jacobi*

$$F_{(\mu)}\Big(\frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \lambda}, \lambda, \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \eta}, \eta\Big) = F'_{(\mu)}\Big(\Lambda', \xi', \frac{\partial S_{(\mu)}}{\partial \xi'}\Big)$$

dans laquelle les actions Λ' apparaissent comme des paramètres.

Posons $F'_{(\mu)} = F'_0 + \mu F'_1 + \mu^2 F'_2 + \cdots$ L'identification des termes d'ordre 0 en μ donne simplement

$$F_0(\Lambda') = F'_0(\Lambda', \xi', \eta'),$$

celle des termes d'ordre 1

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) + F_1(\Lambda', \lambda, \xi', \eta) = F'_1(\Lambda', \xi', \eta).$$

Égalant les valeurs moyennes sur $\mathbb{T}^n$ (coordonnées λ) des deux membres, on voit que

$$F'_1(\Lambda', \xi', \eta') = R(\Lambda', \xi', \eta') + \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_1;$$

si le problème posé a une solution, on a donc nécessairement

$$F'_{(\mu)}(\Lambda',\xi',\eta') = F_0(\Lambda') + \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda')\cdot\alpha_1 + \mu R(\Lambda',\xi',\eta') + O(\mu^2),$$

qui, au terme (arbitraire) près en α_1 et modulo les termes d'ordre 2 et plus en μ, n'est autre que le système moyenné.

Pour montrer l'existence de S_1 il est naturel de développer les fonctions en séries de Fourier relativement aux variables λ : la fonction

$$s_1(\Lambda',\lambda,\xi',\eta) = \sum_{h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} \sigma_h(\Lambda',\xi',\eta)e^{ih\cdot\lambda}$$

est déterminée à partir de

$$F_1(\Lambda,\lambda,\xi,\eta) - R(\Lambda,\xi,\eta) = \sum_{h\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} f_h(\Lambda,\xi,\eta)e^{ih\cdot\lambda}$$

par les identités

$$\sigma_h(\Lambda',\xi',\eta) = -\frac{f_h(\Lambda',\xi',\eta)}{ih\cdot\partial F_0/\partial\Lambda(\Lambda')}.$$

Les coefficients de la série de Fourier d'une fonction analytique décroissant plus vite qu'une puissance arbitraire de $|h| = h_1+\cdots+h_n$, la série de Fourier de s_1 définira une fonction analytique tant que la croissance des *petits dénominateurs* $h\cdot\partial F_0/\partial\Lambda(\Lambda')$ sera polynomiale en $|h|$, i.e., tant que Λ' appartiendra à l'un des sous-ensembles $D'_{\gamma,\nu}$ du domaine de définition $D'\subset\mathbb{R}^n$ de Λ', définis par

$$D'_{\gamma,\nu} = \left\{\Lambda'\in D', \forall\, h\in\mathbb{Z}^n-\{0\}\ \left| h\cdot\frac{\partial F_0}{\partial\Lambda}(\Lambda')\right| \geqslant \frac{\gamma}{|h|^\nu}\right\}.$$

Les fréquences $\omega_0(\Lambda') = \partial F_0/\partial\Lambda(\Lambda')$ sont celles des mouvements képlériens non perturbés décrits par F_0, et l'appartenance à $D'_{\gamma,\nu}$ signifie que l'on ne s'approche pas trop des *résonances en moyens mouvements*, i.e., des commensurabilités entre les périodes de ces n mouvements képlériens.

Nous avons donc montré l'existence d'un *changement de coordonnées* symplectique de la forme Identité $+\,O(\mu)$ qui, à l'ordre deux près en μ, transforme $F_{(\mu)}$ en le système moyenné $F_0+\mu R$, à ceci près cependant que cette transformation

$$(\Lambda',\lambda',\xi',\eta') \longmapsto (\Lambda,\lambda,\xi,\eta)$$

n'est définie que *suffisamment* loin des résonances en moyens mouvements, i.e., pour Λ' appartenant à un sous-ensemble de Cantor de $\mathbb{R}^n$. Cette dernière restriction n'étonnera pas le lecteur attentif qui aura noté l'analogie existant avec le phénomène de la résonance mécanique : certaines configurations des planètes se répétant périodiquement, de petits effets s'ajoutent à l'infini et font exploser les coefficients de Fourier de la transformation.

Revenant aux variables initiales, on voit qu'à la constance de Λ' le long des solutions de $(F_0 + \mu R)$ peuvent correspondre des oscillations de Λ d'autant plus grandes que l'on s'approche d'une résonance en moyens mouvements. Ces variations des demi-grands axes s'accompagnent d'*inégalités* sur les longitudes moyennes, dont la plus célèbre, découverte par Laplace, a une période d'environ 900 ans et provient de la petitesse de la combinaison

$$2 \times \text{(période de Saturne)} - 5 \times \text{ (période de Jupiter)}$$

(à titre de comparaison, la période de Jupiter est d'environ 12 ans).

Il est temps de remarquer que lorsque certaines variables habitent un ensemble de Cantor, la notion de changement de coordonnées pose quelques problèmes. Ne serait-ce que pour donner un sens à la formule

$$\lambda = \lambda' - \mu \frac{\partial S_1}{\partial \Lambda'} + O(\mu^2),$$

on a besoin de pouvoir dériver par rapport aux variables Λ'. Effectuant cette dérivation sur l'équation qui définit S_1, on constate que la série de Fourier de chacune des dérivées partielles $\partial S_1/\partial \Lambda'$ peut être calculée (par récurrence sur l'ordre de dérivation), ce qui donne au changement de coordonnées ainsi déterminé le statut de *jet d'ordre infini* de difféomorphisme le long de $D'_{\gamma,\nu} \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ (cela signifie simplement que les dérivées par rapport à *toutes* les variables $\Lambda', \lambda', \xi', \eta'$ sont définies en tout point).

Exercice. Poursuivre le processus à tous les ordres en μ et obtenir une transformation Φ_μ sous la forme d'une série formelle en μ dont les coefficients sont définis ainsi que leurs dérivées le long d'un domaine $D'_{\gamma,\nu} \times \mathbb{T}^n \times \Delta'$, qui rende indépendant des angles λ' le hamiltonien $F'_{(\mu)}$.

Ce dernier peut être appelé *système séculaire d'ordre infini.* On notera que contrairement au système séculaire d'ordre 1, i.e., au système moyenné, il n'est pas défini au voisinage des fréquences Λ' qui correspondent à des *résonances en moyens mouvements.*

5. Élimination des longitudes des nœuds et des périhélies, séries de Lindstedt

Considérons tout d'abord le problème des trois corps dans le plan. Ce cas est particulier en ce que la conservation du moment cinétique suffit, pour des raisons de dimension, à forcer l' *intégrabilité complète* du système moyenné. Autrement dit, le discours tenu dans le paragraphe 3 sur le système linéarisé $(F_0 + \mu R^{(2)})$ peut l'être sur le système moyenné $(F_0 + \mu R)$ lui-même.

La différence essentielle entre les deux est l'apparition de *torsion* : le paramètre Λ étant fixé les fréquences des mouvements appartenant à un tore invariant dans l'espace $\mathbb{R}^{4n}$(coordonnées ξ, η) dépendent *effectivement* du tore considéré, contrairement à ce qui se passe dans le cas linéaire [pour qu'il n'en soit pas ainsi, il eût fallu que de miraculeuses identités soient satisfaites ; qu'elles ne le sont pas a été montré par Arnold en 1961 dans sa tentative de preuve de la stabilité du système solaire].

Il est alors possible (exercice demandant un peu de réflexion) d'introduire des coordonnées que nous noterons $(\Lambda, \lambda, \rho, \omega)$ sur l'espace des phases[(7)], telles que le hamiltonien

$$F_{(\mu)}(\Lambda, \lambda, \rho, \omega) = F_0(\Lambda) + \mu F_1(\Lambda, \lambda, \rho, \omega) + \cdots$$

ait une moyenne

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} F_1(\Lambda, \lambda, \rho, \omega) d\lambda = R(\Lambda, \rho)$$

indépendante des angles ω. Dans de telles coordonnées, l'existence de torsion se traduit par l'inversibilité de la matrice de dérivées partielles $\partial^2 R / \partial \rho^2 (\Lambda, \rho)$.

---

(7)qui est maintenant de dimension $4n$ et non $6n$ (problème plan : on oublie les variables $\widetilde{Z}$ et $\widetilde{\zeta}$)

On peut alors reprendre les calculs du paragraphe précédent, en cherchant maintenant un difféomorphisme

$$\Phi_\mu : (\Lambda', \lambda', \rho', \omega') \longmapsto (\Lambda, \lambda, \rho, \omega),$$

de fonction génératrice

$$S_{(\mu)}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) = \Lambda' \cdot \lambda + \rho' \cdot \omega + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k S_k(\Lambda', \lambda, \rho', \omega),$$

qui au lieu de (ii) vérifie

$$F_{(\mu)}(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) = F'_{(\mu)}(\Lambda', \rho'), \tag{iii}$$

où $F'_{(\mu)}$ est une fonction indépendante de *tous* les angles λ', ω' (i.e., ayant les mêmes symétries que $F_0 + \mu R$). À l'ordre 0 en μ on obtient comme précédemment

$$F'_{(0)}(\Lambda', \rho') = F_0(\Lambda');$$

à l'ordre 1, on a de même

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + F_1(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) = F'_1(\Lambda', \rho'),$$

dont les solutions, si $\Lambda' \in D'_{\gamma,\nu}$, sont de la forme

$$S_1(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) = \alpha_i \cdot \lambda + \beta_1 \cdot \omega + \widetilde{s}_1(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + t_1(\Lambda', \rho', \omega),$$

où $\alpha_1 \in \mathbb{R}^n, \beta_1 \in \mathbb{R}^n$, et la fonction t_1 sont arbitraires, et $\widetilde{s}_1$ est uniquement déterminée ainsi que ses dérivées par rapport aux Λ'.

De plus on a nécessairement

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_1 + R(\Lambda', \rho') = F'_1(\Lambda', \rho').$$

L'identification des termes d'ordre 2 en μ donne (avec des notations évidentes)

$$\begin{aligned} F'_2(\Lambda', \rho') &= \\ &= \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \frac{\partial S_2}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial \Lambda^2}(\Lambda') \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega)\right)^2 \\ &+ \frac{\partial F_1}{\partial \Lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) + \frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \omega}(\Lambda', \lambda, \rho', \omega) \\ &+ F_2(\Lambda', \lambda, \rho', \omega). \end{aligned}$$

Si l'on groupe sous la dénomination $\Phi_2(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)$ les termes déjà déterminés, on obtient après avoir posé

$$S_k(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)=\alpha_k\cdot\lambda+\beta_k\cdot\omega+s_k(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)$$

où s_k est périodique en les angles λ et ω, l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_0}{\partial\Lambda}(\Lambda')\cdot\frac{\partial s_2}{\partial\lambda}&(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)\\&+\frac{\partial F_1}{\partial\rho}(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)\cdot\frac{\partial t_1}{\partial\omega}(\Lambda',\rho',\omega)+\Phi_2(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)\\&\qquad=F_2'(\Lambda',\rho')-\frac{\partial F_0}{\partial\Lambda}(\Lambda')\cdot\alpha_2-\frac{\partial F_1}{\partial\rho}(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)\cdot\beta_1,\end{aligned}$$

qui intégrée sur les angles λ devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial\rho}(\Lambda',\rho')\cdot\frac{\partial t_1}{\partial\omega}(\Lambda',\rho',\omega)+\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n}\Phi_2(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)d\lambda&\\=F_2'(\Lambda',\rho')-\frac{\partial F_0}{\partial\Lambda}(\Lambda')\cdot\alpha_2-\frac{\partial R}{\partial\rho}(\Lambda',\rho')\cdot\beta_1.&\end{aligned}$$

Si l'on est suffisamment loin des *résonances séculaires*[(8)], c'est-à-dire si

$$(\Lambda',\rho')\in\Delta'_{\gamma,\nu}=\left\{(\Lambda',\rho'),\forall\ell\in\mathbb{Z}^n-\{0\},\left|\ell\cdot\frac{\partial R}{\partial\rho}(\Lambda',\rho')\right|\geqslant\frac{\gamma}{|\ell|^\nu}\right\},$$

on détermine t_1 analytique en ω (et ses dérivées par rapport aux variables Λ',ρ'). L'équation non moyennée fournit alors s_2 à une fonction $t_2(\Lambda',\rho',\omega)$ près et la moyenne par rapport à tous les angles λ,ω donne

$$F_2'(\Lambda',\rho')=\frac{\partial F_0}{\partial\Lambda}(\Lambda')\cdot\alpha_2+\frac{\partial R}{\partial\rho}(\Lambda',\rho')\cdot\beta_1+R_2(\Lambda',\rho'),$$

où

$$R_2(\Lambda',\rho')=\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n}\Phi_2(\Lambda',\lambda,\rho',\omega)\,d\lambda\,d\omega.$$

---

(8) i.e., des commensurabilités entre les périodes des divers périhélies (rappelons qu'il s'agit du problème des 3 corps ($n=2$) dans le plan).

Les étapes suivantes sont identiques et fournissent entre les α_j, les β_j, et les $F'_k(\Lambda', \rho')$ les relations

$$F'_k(\Lambda', \rho') = \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda') \cdot \alpha_k + \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda', \rho') \cdot \beta_{k-1} + R_j(\Lambda', \rho'),$$

où $R_j(\Lambda', \rho')$ dépend du choix que l'on a fait des α_i, $i \leqslant k-1$, et des β_i, $i \leqslant k-2$.

Maintenant, on voit par un calcul explicite que la matrice des dérivées partielles $\partial^2 F_0/\partial\Lambda^2(\Lambda')$ est inversible. Jointe à l'inversibilité déjà évoquée de la matrice $\partial^2 R/\partial\rho^2(\Lambda', \rho')$ (existence de *torsion*), cette propriété montre que l'application des actions dans les fréquences

$$(\Lambda, \rho) \longmapsto \Big(\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda), \frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda, \rho)\Big)$$

est un difféomorphisme local au voisinage de tout point (Λ_0, ρ_0). Le théorème des fonctions implicites montre alors qu'on peut choisir les α_k et les β_k (dépendant de $(\Lambda_0, \rho_0) \in D'_{\gamma,\nu} \cap \Delta'_{\gamma,\nu}$!!!) de façon à annuler les $\partial F'_k/\partial\Lambda'(\Lambda_0, \rho_0)$ pour $k \geqslant 1$ et les $\partial F'_k/\partial\rho'(\Lambda_0, \rho_0)$ pour $k \geqslant 2$. On obtient ainsi des séries de Lindstedt, pour les mouvements de 3 corps dans le plan, dont les fréquences $(n_j(\mu), m_j(\mu))$ sont de la forme $(\partial F_0/\partial\Lambda(\Lambda_0), \mu\partial R/\partial\rho(\Lambda_0, \rho_0))$.

Remarque. Nous avons déjà noté que de telles séries décrivent des mouvements (formels) quasi-périodiques dans lesquels les excentricités des ellipses képlériennes associées restent bornées inférieurement par une constante dépendant du paramètre de masse μ. Pour décrire les mouvements très voisins de mouvements circulaires, un *changement d'origine* est nécessaire, qui remplace le tore de dimension deux d'équations $\xi = \eta = 0$, invariant par le système moyenné, par un tore de dimension deux invariant par le système $F_{(\mu)}$ lui-même. Un tel tore existe et correspond après réduction (i.e., après passage au quotient par le groupe des rotations du plan) à ce que Poincaré a appelé une *orbite périodique de première espèce* : les planètes décrivent autour du soleil des orbites presque circulaires et se retrouvent au bout d'une période dans la même situation à une rotation près.

S'il y a au moins quatre corps, ou s'il s'agit du problème dans l'espace, le système moyenné n'a plus de raison d'être *complètement* *intégrable*. Il l'est cependant à l'*origine* $\xi = \eta = 0$, i.e., dans un voisinage infinitésimal des mouvements circulaires directs et horizontaux, pourvu que les valeurs propres du système linéaire $(R^{(2)})$ vérifient des conditions de *non-résonance* (théorie de Birkhoff). Il est donc impossible d'écrire des séries de Lindstedt qui correspondent à des *fréquences séculaires* $\mu\partial R/\partial\rho(\Lambda_0, \rho_0)$ déterminées : ces dernières ne sont plus données que comme des séries formelles, non seulement en μ, mais également en excentricités et inclinaisons, et ce sont de tels développements qui doivent être manipulés. Quant aux mouvements formels ainsi décrits, on notera qu'ils sont du type de ceux évoqués dans la remarque précédente.

6. Divergence des séries de Lindstedt

C'est (au « M. » près devant le nom propre) le titre du chapitre XIII des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*.

Affirmation centrale à laquelle conduit tout l'ouvrage et pourtant affirmation non mathématiquement démontrée...

Reprenons le problème des trois corps dans le plan et fixons $(\Lambda_0, \rho_0) \in D'_{\gamma,\nu} \cap \Delta'_{\gamma,\nu}$. Si les séries correspondant à cette valeur des *actions* convergent, elles décrivent des solutions quasi-périodiques dont l'ensemble (pour toutes les valeurs des angles initiaux) remplit un tore $\mathcal{T}_\mu$ de dimension 4 invariant par le système $(F_{(\mu)})$. Lorsque μ varie, ce tore varie continûment ainsi que les fréquences

$$\Big(\frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}(\Lambda_0), \mu\frac{\partial R}{\partial \rho}(\Lambda_0, \rho_0)\Big)$$

des solutions qu'il contient. Il existe donc une infinité de valeurs de μ arbitrairement proches de 0 pour lesquelles ces fréquences sont *résonantes* : le tore $\mathcal{T}_\mu$ est alors feuilleté par une famille de tores invariants de dimension inférieure. Une précaution est nécessaire à ce point : à cause de l'invariance du problème par rotations, *chacun* des tores $\mathcal{T}_\mu$ est feuilleté par des tores invariants de dimension trois, ces tores étant eux-mêmes feuilletés par des tores invariants de dimension deux pour les valeurs *résonantes* de μ.

On se débarrasse de ce problème en considérant le problème *réduit* dans lequel les deux arguments des périhélies des planètes fictives sont remplacés par leur seule différence. Le nombre de degrés de liberté passe ainsi de quatre à trois, les tores invariants $\mathcal{T}_\mu$ ont maintenant la dimension trois (deux fréquences rapides $\omega_0 = \partial F_0/\partial\Lambda(\Lambda_0)$, une fréquence lente $\mu\omega_1$) et sont feuilletés par des tores invariants de dimension deux pour les valeurs *résonantes* de μ. Mais l'existence de telles familles continues de tores invariants de dimension deux remplissant un tore de dimension trois est un phénomène tout à fait exceptionnel. Il ne se produit le plus souvent que forcé comme ci-dessus par une symétrie des équations, i.e., par une *intégrale première* (ci-dessus, le moment cinétique). Mais l'inexistence pour le problème des trois corps de telles intégrales premières autres que celles, classiques, de l'énergie, du centre de masse, et du moment cinétique, a été prouvée par Bruns dans le cadre algébrique et par Poincaré dans le cadre analytique (pour ce dernier dans un sens assez faible, il est vrai, puisque seules sont envisagées les intégrales premières dépendant analytiquement du paramètre μ). C'est ce qu'on appelle la *non-intégrabilité* du Problème des trois corps. La démonstration de Poincaré repose sur un examen approfondi du développement de Fourier de la fonction perturbatrice. Elle constitue le cœur du premier volume des *Méthodes Nouvelles.*

Malheureusement la non-intégrabilité ne suffit pas directement à assurer la divergence des séries de Lindstedt, bien qu'elle rende celle-ci très probable pour la plupart des fréquences $(\omega_0, \mu\omega_1)$: les hypothétiques tores $\mathcal{T}_\mu$ feuilletés par des tores invariants de dimension deux ont en effet toutes les chances d'être remplacés chacun par un nombre fini de tores invariants de dimension deux.

Il n'est même pas prouvé, bien qu'infiniment probable, que la non-intégrabilité soit incompatible avec la convergence, pour des fréquences diophantiennes ω_0 fixées, de *toutes* les séries de Lindstedt à fréquences de la forme $(\omega_o, \mu\omega_1)$ (il n'y a pas de condition diophantienne sur l'unique fréquence lente, ce qui est une particularité de plus du problème des trois corps dans le plan). Une telle convergence implique pourtant l'existence, comme dans le système moyenné, d'une famille à 1 paramètre ω_1 de tores de dimension trois invariants par $F_{(\mu)}$ (correspondant aux séries de fréquences $(\omega_0, \mu\omega_1), \mu$ fixé) qui ne peuvent qu'*entourer* un tore invariant de dimension deux portant des mouvements quasi-périodiques de fréquences ω_0.

Notons que tout argument prouvant la divergence devra nécessairement faire usage de la variation avec μ des fréquences en jeu, variation que force la dégénérescence du Problème de Kepler : un avatar de la théorie de Kolmogorov - Arnold - Moser (K.A.M.) dit en effet que, dans le cas d'un problème non dégénéré (absence de fréquences lentes) tel le problème des trois corps avec presque toute autre loi d'attraction en puissance de la distance que la loi de Newton, les séries de Lindstedt à fréquence diophantienne fixée ω_0 convergent toujours ! Poincaré, qui considère ce cas dans le fameux paragraphe 149 des *Méthodes Nouvelles*, ne rejette pas cette possibilité tout en la considérant comme *« fort invraisemblable »*.

Nous retiendrons que les séries de Lindstedt du Problème des 3 corps dans le plan divergent très probablement, que la raison de la divergence est géométrique, et que cette géométrie est bien difficile à mettre en évidence.

Alain Chenciner, Département de Mathématiques, Université de Paris VII
2, place Jussieu, 75250 Paris cedex 05, France