THÉORIE DES NOMBRES
BESANÇON

Années 1994/95-1995/96

T-S capitulation

C. MAIRE

T-S capitulation

Christian Maire

Introduction

Soient k un corps de nombres et deux ensembles finis disjoints T et S de places de k, non archimédiennes pour T et quelconques pour S ($S = S_0 \cup S_\infty$) ; $k_{1,T}^S$ désignera l'extension abélienne maximale de k, T-ramifiée modérée et S-décomposée. En prenant T vide et S égal à l'ensemble des places réelles de k, $k_{1,T}^S$, que l'on peut noter k_1^{ord}, correspond au corps de Hilbert de k [Kol, th. 2.2] ; on sait que dans ce cas le groupe de Galois de k_1^{ord}/k s'identifie au groupe des classes au sens ordinaire de k, noté cl_k^{ord}, et que cl_k^{ord} capitule dans $cl_{k_1^{ord}}^{ord}$ [Kol, chapitre 2, §2, th. 2.18]. En remarquant que $Gal(k_{1,T}^S/k)$ s'identifie au groupe $cl_{k,m}^S$ des S-classes de rayon $m = \prod_{v \in T} v$ (cf .§1), il est naturel de s'intéresser à la capitulation de $cl_{k,m}^S$ dans $cl_{K,m(K)}^{S(K)}$ que l'on notera par abus $cl_{K,m}^S$, où $K = k_{1,T}^S$, $m(K) = \prod_{w \in T(K)} w$, $S(K) = \{w \in pl_K,\ w|v,\ v \in S\}$, et où $T(K) = \{w \in pl_K,\ w|v,\ v \in S\}$ (cf. §3) et, de manière plus générale, au noyau de l'application

$$j_{K/k,m}^S \ :\ cl_{k,m}^S \longrightarrow cl_{K,m}^S$$

définie à partir d'une extension K/k galoisienne finie, T-ramifiée modérée de groupe de Galois G (cf. §2). On peut se référer à un travail de Jaulent [Jal, §3 , corollaire 14] qui donne une version du théorème 94 de Hilbert pour les corps de rayons ; [Jal] contient de plus une bonne bibliographie concernant le problème de la capitulation. Iwasawa [Iw], pour T vide et S égal à l'ensemble des places réelles de k, puis Matsumura [Mat], pour T quelconque et S égal aussi à l'ensemble des places réelles de k, se sont intéressés de plus à l'image de $j_{K/k,m}^S$; en reprenant leur méthode, on va montrer que le quotient $(cl_{K,m}^S)^G/j_{K/k,m}(cl_{k,m}^S)$ s'injecte dans le groupe cohomologique $H^2(G, E_{K,m}^S)$, où $E_{K,m}^S$ est le groupe des S-unités congrues à 1 *modulo* m, ceci lorsque K/k est galoisienne finie, T-ramifiée modérée, et de plus, on aura une majoration de $\dfrac{|H^2(G, E_{K,m}^S)|}{|(cl_{K,m}^S)^G/j_{K/k,m}(cl_{k,m}^S)|}$ (cf. §4, théorème 4.1).

Dans une cinquième partie nous étudierons le cas particulier où K/k est cyclique, T-ramifiée modérée ; nous verrons alors que la majoration du théorème 4.1 est optimale, i.e on montrera que

$$\frac{|H^2(G, E^S_{K,m})|}{|(cl^S_{K,m})^G / j_{K/k,m}(cl^S_{k,m})|} = \frac{\prod_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} f_v}{f},$$

f_v étant le degré résiduel de v dans K/k, et $f = ppcm\{f_v, v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}\}$.
Mais avant de développer ces points, on peut faire quelques remarques sur les notations que l'on est amené à utiliser puis sur l'extension abélienne maximale T-ramifiée modérée et S-décomposée d'un corps de nombres k.

1 Notations - Remarques

Pour un corps de nombres k, on notera pl_k l'ensemble des places de ce corps ; pl_k est la réunion de l'ensemble des places finies, $pl_{k,0}$, et de celui des places infinies, $pl_{k,\infty}$; dans ce dernier, on peut distinguer le sous-ensemble des places réelles, $pl^{re}_{k,\infty}$, de celui des places complexes $pl^c_{k,\infty}$.
Si v désigne un élément de pl_k, on notera également par v la valuation associée à la place v ; pour $x \in k^\times$, $v(x)$ peut avoir trois significations :
• $v \in pl_{k,0}$: $v(x)$ est la v-valuation normalisée de x,
• $v \in pl^{re}_{k,\infty}$: si $\sigma_v(x) > 0$ (on dira que x est positif en v), alors $v(x) = 0$ sinon $v(x) = 1$, où σ_v est le plongement associé à la place v,
• $v \in pl^c_{k,\infty}$: $v(x) = 0$.
Pour $v \in pl_{k,0}$, on confondra v avec l'idéal premier qui lui correspond ; pour un élément v de pl_k, k_v désignera le complété de k muni de la norme $|\ |_v$; en ce qui concerne les unités locales elles sont définies naturellement, à savoir par $U_{k_v} = \{x \in k_v^\times, v(x) = 0\}$; en particulier pour $v \in pl^{re}_{k,\infty}$, on trouve $k_v = \mathbb{R}$ et $U_{k_v} = \mathbb{R}^{\times\,+}$; on désignera par $U^1_{k_v}$ le groupe des unités locales principales.
Pour K, extension galoisienne finie de k, et pour v, place de k, nous noterons par w une place de K au-dessus de v, $w|v$; alors si K_w désigne le complété de K en w, on sait que K_w/k_v est une extension galoisienne finie de groupe de Galois le groupe de décomposition de w dans K/k, groupe que l'on notera $D_w(K/k)$ ou encore $D_v(K/k)$; $I_w(K/k)$, noté aussi $I_v(K/k)$, désignera le groupe d'inertie de w dans K/k. Dans le cas archimédien, par définition I_w est toujours trivial ; une place infinie se décompose ou bien reste inerte et dans ce cas on parle de complexification, notion introduite par Jaulent [Ja2].

a) **Groupes de nombres.**

On prend pour T et S deux ensembles disjoints de places de k, $T \subset pl_{k,0}$, $S = S_0 \cup S_\infty$ avec $S_0 \subset pl_{k,0}$ et $S_\infty \subset pl_{k,\infty}$; à T on associe le module m de k suivant :

$$m = \prod_{v \in T} v.$$

On notera alors :

$$\begin{aligned}
&k_T = \{x \in k^\times,\ (x,T) = 1\}\\
&k_T^+ = \{x \in k_T,\ v(x) = 0\ \forall v \in pl_{k,\infty}\}\\
&k_m^{+\ S_\infty} = \{x \in k^\times /\ x \equiv 1\ (m) \text{ et } v(x) = 0\ \forall v \in pl_{k,\infty} \backslash S_\infty\},\\
&k_m^+ = \{x \in k^\times /\ x \equiv 1\ (m) \text{ et } v(x) = 0\ \forall v \in pl_{k,\infty}\},\\
&E_{k,m}^S = \{x \in k_m^{+\ S_\infty} /\ v(x) = 0\ \forall v \in pl_{k,0} \backslash S_0\},\\
&E_k^{ord} = \{x \in k^\times /\ v(x) = 0\ \forall v \in pl_{k,0}\},\\
&E_k = \{x \in k^\times /\ v(x) = 0\ \forall v \in pl_k\},\\
&\langle S_0 \rangle = \{\mathcal{Q}_{S_0}\},
\end{aligned}$$

$\langle S_0 \rangle$ est le sous-groupe de I_k construit à partir des idéaux de S_0.

b) **Groupes d'idéaux.**

I_k désignera le groupe des idéaux non nuls de k ; on rappelle alors que les idéaux premiers de k correspondent à pl_{k_0}. On notera alors :

$$\begin{aligned}
&P_k = \{(x),\ x \in k^+\},\\
&P_k^{ord} = \{(x),\ x \in k^\times\},\\
&P_{k,m} = \{(x),\ x \in k_m^+\},\\
&P_{k,m}^{S_\infty} = \{(x),\ x \in k_m^{+\ S_\infty}\},\\
&P_{k,T} = \{(x),\ (x,T) = 1\},\\
&I_{k,T} = \{\mathcal{Q} \in I_k,\ (\mathcal{Q},T) = 1\}.
\end{aligned}$$

c) **Groupes d'idèles.**

$\mathcal{J}_k$ désigne le groupe des idèles de k, $\mathcal{J}_{k,m}^+$ le sous-groupe des idèles de k dont la v-composante appartient à $U_{k_v}^1$ pour tout v de $T \cup pl_{k,\infty}$.

$\mathcal{U}_{k,m}^S$ désignera le produit suivant :

$$\prod_{v \in T} U_{k_v}^1 \prod_{v \in S} k_v^\times \prod_{v \notin S \cup T} U_{k_v} \subset \mathcal{J}_k.$$

d) **Ordre de $cl_{k,m}^S$.**

Notons par $R^S_{k,m}$ le rayon $P^{S_\infty}_{k,m}\langle S_0\rangle$ et définissons alors $cl^S_{k,m}$ comme étant le quotient $I_{k,T}/R^S_{k,m}$; on peut remarquer que $cl^S_{k,m}$ s'identifie aussi à $cl_{k,m}/cl_{k,m}\langle S\rangle$, où $cl_{k,m} = I_{k,T}/P_{k,m}$ et $cl_{k,m}\langle S_\infty\rangle = \langle cl_{k,m}(a^v_m)\rangle$ avec $a^v_m \in k^{+\ v}_m$.
On a la formule classique suivante :

Proposition 1.1 :

$$|cl^S_{k,m}| = |cl^S_k|.\frac{\prod\limits_{v\in T}(Nv-1)}{(E^S_k : E^S_{k,m})},$$

où Nv correspond à l'ordre du corps résiduel en v, i.e. à $|\frac{U_{k_v}}{U^1_{k_v}}|$.

De manière plus générale :

Proposition 1.2 : Si $m = \prod_{v\in T} v^{n_v}$, $n_v \geq 1$,

$$|cl^S_{k,m}| = |cl^S_k|.\frac{\prod\limits_{v\in T}(Nv-1).(Nv)^{n_v-1}}{(E^S_k : E^S_{k,m})}.$$

Remarque 1.1 :
Soit p un nombre premier ; si l'on s'intéresse à la p-partie de $cl^S_{k,m}$ ($m = \prod\limits_{v\in T} v$), pour qu'une place joue un rôle il faut que Nv soit congru à 1 *modulo* p.

e) p-rang de $cl^S_{k,m}$.
On se fixe k, on omet k dans les notations, on suppose que $S_\infty \subset pl^{re}_{k,\infty}$ et de plus que $Nv \equiv 1\ (p)$ pour $v \in T$.
i) On part de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \frac{P^{ord}_T\langle S_0\rangle I_T{}^p}{P^{S_\infty}_m\langle S_0\rangle I_T{}^p} \longrightarrow \frac{I_T}{R^S_m I_T{}^p} \longrightarrow \frac{I_T}{P^{ord}_T\langle S_0\rangle I_T{}^p} \longrightarrow 1,$$

où $\frac{I_T}{R^S_m I_T{}^p}$ est isomorphe à $\frac{cl^S_m}{(cl^S_m)^p}$, $\frac{I_T}{P^{ord}_T\langle S_0\rangle I_T{}^p}$ isomorphe à $\frac{cl^{\bar S}}{(cl^{\bar S})^p}$, $\bar S = S_0 \cup pl^{re}_{k,\infty}$, et où $cl^{\bar S}$ correspond à l'extension abélienne maximale de k non ramifiée, non complexifiée et S_0-décomposée.
Cette suite exacte devient :

$$1 \longrightarrow \frac{P^{ord}_T}{P^{S_\infty}_m\langle S_0\rangle I_T{}^p \cap P^{ord}_T} \longrightarrow \frac{cl^S_m}{(cl^S_m)^p} \longrightarrow \frac{cl^{\bar S}}{(cl^{\bar S})^p} \longrightarrow 1.$$

ii) Identification de $P^{ord}_T/P^{S_\infty}_m\langle S_0\rangle I_T{}^p \cap P^{ord}_T$:

Notons par $cl^{\bar S}[p]$ l'ensemble des éléments de $cl^{\bar S}$ annulé par p; ceci forme un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension d égal au p-rang de $cl^{\bar S}$. Soit $h_1, \ldots, h_d$ une $\mathbb{F}_p$-base de cet espace; pour h_i, il existe un idéal $\mathcal{Q}_i$ tel que $cl^{\bar S}(\mathcal{Q}_i) = h_i$, i.e. il existe $\alpha_i \in k^\times$ tel que $\mathcal{Q}_i{}^p = (\alpha_i)\mathcal{Q}_{S_0,i}$ avec $\mathcal{Q}_{S_0,i} \in \langle S_0 \rangle$.
En prenant $(\mathcal{Q}_i, T) = 1$, on s'assure que $(\alpha_i, T) = 1$; notons alors:

$$A_{S_0} = E^{\bar S}\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_d \rangle_{\mathbb{F}_p} \ ,$$

et Ψ^S_m l'homomorphisme naturel suivant:

$$\Psi^S_m : k_T^\times / k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty} \longrightarrow P_T^{ord} / P_m^{S_\infty} \langle S_0 \rangle I_T{}^p \cap P_T^{ord}.$$

Ψ^S_m est bien défini et est naturellement surjectif; évaluons $ker\ \Psi^S_m$:
pour $x \in k_T$ (i.e $(x, T) = 1$), supposons que $\Psi^S_m(x) = 1$; alors $(x) = \mathcal{Q}^p \mathcal{Q}_{S_0}(a)$ avec $a \in k_m^{+S_\infty}$, $\mathcal{Q} \in I_T$ et $\mathcal{Q}_{S_0} \in \langle S_0 \rangle$; par conséquent $cl^{\bar S}(\mathcal{Q})^p = 1$, i.e. $cl^{\bar S}(\mathcal{Q}) \in cl^{\bar S}[p]$, plus précisément:

$$cl^{\bar S}(\mathcal{Q}) = \prod_i h_i^{\theta_i} \ ;$$

ainsi $\mathcal{Q}^p = \prod_i (\mathcal{Q}_i)^{p\ \theta_i}.(b^p).\mathcal{Q}'_{S_0}$ avec $b \in k_T$ et $\mathcal{Q}'_{S_0} \in \langle S_0 \rangle$, d'où

$$(x) = \prod_i (\alpha_i)^{\theta_i}.(b^p).(a).\mathcal{Q}''_{S_0}, \ \ \mathcal{Q}''_{S_0} \in \langle S_0 \rangle \ ;$$

l'idéal $\mathcal{Q}''_{S_0}$ est principal et est engendré par une S_0-unité au sens ordinaire, alors $x \in A_{S_0}.k_T^{\times p}.k_m^{+S_\infty}$, i.e.

$$ker\ \Psi^S_m = \frac{A_{S_0} k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty}}{k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty}}.$$

On obtient alors la suite exacte:

$$1 \longrightarrow \frac{A_{S_0} k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty}}{k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty}} \longrightarrow \frac{k_T^\times}{k_T^{\times p} k_m^{+\infty}} \xrightarrow{\Psi^S_m} \frac{P_T^{ord}}{P_T^{S_\infty} \langle S_0 \rangle I_T{}^p \cap P_T^{ord}} \longrightarrow 1 \ ;$$

de plus cette suite exacte est une suite de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels, ainsi il vient:

$$d_p cl^S_m = d_p cl^{\bar S} + d_p \left(\frac{k_T^\times}{k_T^{\times p} k_m^{+\infty}} \right) - d_p \left(\frac{A_{S_0}}{k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty} \cap A_{S_0}} \right).$$

iii) Construction de Θ^S_m :

$$\Theta^S_m \ : \ \frac{k_T^\times}{k_T^{\times p} k_m^{+\infty}} \longrightarrow \prod_{v \in T} \frac{F_v^\times}{F_v^{\times p}} \prod_{v \in pl^{re}_{k,\infty}} \left(\frac{\mathbb{R}^\times}{\mathbb{R}^{\times p}} \right) ;$$

• Injectivité: prenons x dans $ker \Theta^S_m$; pour $v \in T$, il existe a_v dans $U^1_{k_v}$ et b_v dans U_{k_v} tels que $x = a_v.b_v{}^p$, i.e $x \equiv b_v{}^p\ (v)$; par le lemme chinois [La, chapitre 1, §4, page 11], il existe b dans $k^\times$ tel que:

$$x \equiv b^p \ (m), \text{ i.e } x = ab^p \text{ avec } a \equiv 1 \ (m).$$

Pour $v \in pl_{k,\infty} \backslash S_\infty$ et $p \neq 2$, par le théorème d'approximation [Kol, chapitre 1, §4, théorème 1.68, page 48], on peut toujours trouver b_0 dans k_T, $b_0 \equiv 1 \ (m)$ et tel que $v(ab_0) = 0$ pour $v \in pl_{k,\infty} \backslash S_\infty$; on aura alors

$$x = (ab_0{}^p) \left(\frac{b}{b_0}\right)^p, \text{ i.e } x \in k_m^{+\infty} k_T^{\times p}.$$

Si $p = 2$, alors de $x = ab^2$ et de $\Theta_m^S(x) = 1$, on a $x \in k_m^{+\infty} k_T^{\times 2}$.

• Surjectivité : elle provient du lemme chinois.

Ainsi $d_p \left(\dfrac{k_T^\times}{k_T^{\times p} k_m^{+\infty}}\right) = \sum\limits_{v \in T} d_p \left(\dfrac{F_v^\times}{F_v^{\times p}}\right) + d_p \sum\limits_{v \in pl_{k,\infty}^{re}} d_p \left(\dfrac{I\!R^\times}{I\!R^{\times p}}\right)$.

iv) Interprétation de $A_{S_0} / A_{S_0} \cap k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty}$:
on utilise de nouveau l'homomorphisme Θ_m^S défini précédemment :

$$\tilde{\Theta}_m^S \ : \ \frac{A_{S_0}}{A_{S_0} \cap k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty}} \xrightarrow{\Theta_m^S} \prod_{v \in T} \left(\frac{F_v^\times}{F_v^{\times p}}\right) \prod_{v \in pl_{k,\infty}^{re}} \left(\frac{I\!R^\times}{I\!R^{\times p}}\right) \ ;$$

$\tilde{\Theta}_m^S$ est injective, ainsi on a l'isomorphisme de $I\!F_p$-espaces vectoriels suivant :

$$\frac{A_{S_0}}{A_{S_0} \cap k_T^{\times p} k_m^{+S_\infty}} \ \simeq \ \Theta_m^S(A_{S_0}).$$

Théorème 1.1 : Formule du p-rang de $cl_{k,m}^S$.
Soit $cl_{k,m}^S$ le quotient $I_{k,T}/R_{k,m}^S$, où $R_{k,m}^S$ désigne le rayon $P_{k,m}^{S_\infty}\langle S_0 \rangle$; alors

$$d_p cl_{k,m}^S = d_p cl_k^{\bar{S}} + |T| + \delta_p^2 . \left|\{v \in pl_{k,\infty}^{re} \backslash S_\infty\}\right| - d_p \left(\Theta_m^S(A_{S_0})\right),$$

où $\delta_p^2 = 1$ si $p = 2$, 0 sinon, et où $\Theta_m^S(A_{S_0})$ est l'image diagonale de $A_{S_0} = E_k^{\bar{S}} \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_d \rangle_{\mathbf{F}_p}$ dans $\prod\limits_{v \in T} \left(\dfrac{F_v^\times}{F_v^{\times p}}\right) \prod\limits_{v \in pl_{k,\infty}^{re}} \left(\dfrac{I\!R^\times}{R^{\times p}}\right)$.

Corollaire 1.1 :
Par une démarche analogue, on peut évaluer $|cl_{k,m}^S|$ en fonction de $|cl_k^{\bar{S}}|$, où $\bar{S} = S_0 \cup pl_{k,\infty}$; on a :

$$|cl_{k,m}^S| = |cl_k^{\bar{S}}| . \frac{\prod\limits_{v \in T} (Nv - 1) . 2^{|\{pl_{k,\infty}^{re} \backslash S_\infty\}|}}{\left(E_k^{\bar{S}} : E_{k,m}^S\right)} .$$

f) L'extension abélienne maximale de k, T-ramifiée modérée, S-décomposée.

On rappelle qu'une extension K/k est dite T-ramifiée modérée si :

i) K/k est non ramifiée en tout $w|v$, $v \in pl_{k,0} \backslash T$;

ii) l'indice de ramification de $w|v$ dans K/k, $v \in T$, est étranger à la caractéristique du corps résiduel F_v (on peut se référer à [Se1] ou [Fr]).

En prenant T vide et S vide, on trouve cl_k, le groupe des classes au sens restreint, groupe qui correspond à l'extension abélienne maximale de k non ramifiée aux places finies ; pour T vide et S égal à l'ensemble des places réelles de k, on obtient cl_k^{ord} le groupe des classes au sens ordinaire qui correspond à l'extension abélienne maximale de k non ramifiée aux places finies et décomposée à toutes les places infinies. De manière générale, dés que T est vide, on peut remarquer que $cl_{k,m}^S$ s'identifie à l'extension abélienne maximale de k S-décomposée ; on supposera alors pour les lemmes 1.1, 1.2, et 1.3 que T est non vide.

Lemme 1.1 : *Soit $k_{1,T}^S$ le corps de rayon $R_{k,m}^S = P_{k,m}^{S_\infty}\langle S_0\rangle$, $m = \prod_{v\in T} v$; alors $k_{1,T}^S/k$ est T-ramifiée modérée, S-décomposée.*

Démonstration :

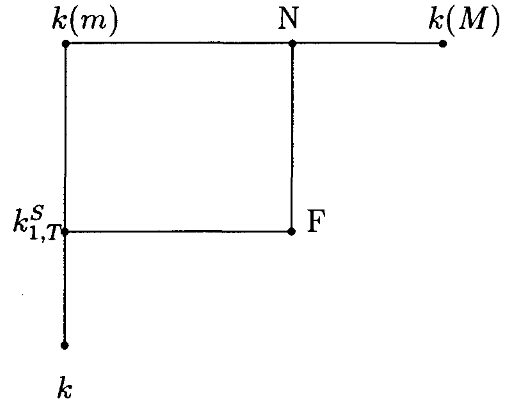
Il est clair que $k_{1,T}^S/k$ est T-ramifiée et S-décomposée. Notons par $k(m)$ le corps de rayon m et par $k(m_0)$ celui de rayon $m_0 = \prod_{v\in T\backslash v_0} v$, pour $v_0 \in T$ quelconque ; $k_{1,T}^S$ est la sous-extension maximale de $k(m)$, S-décomposée.

Le groupe de Galois de $k(m)/k(m_0)$ est engendré par le groupe d'inertie de v_0 dans $k(m)/k$; ainsi $e_{v_0}(k(m)/k) = |Gal\,(k(m)/k(m_0))\,| = \dfrac{Nv_0 - 1}{\left(E_{k,m_0}^S : E_{k,m}^S\right)}$, $e_{v_0}(k(m)/k)$ désignant l'indice de ramification de v_0 dans $k(m)/k$.

Ainsi, $e_{v_0}\left(k_{1,T}^S/k\right)$ est étranger à Nv_0. □

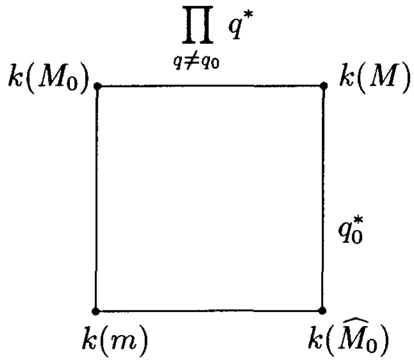
Soit F une extension abélienne T-ramifiée modérée, S-décomposée de k contenant strictement $k_{1,T}^S$; alors il existe un module $M = \prod_{v\in T} v^{a_v}$, $a_v \geq 1$, tel que $k \subset F \subset k(M)$.

On a alors le schéma (1) suivant :



où $k^S_{1,T} = F \cap k(m)$

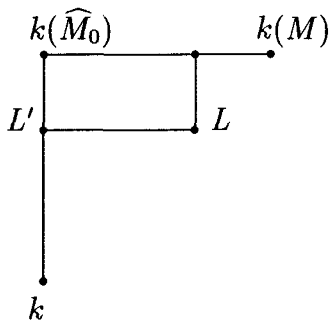
Scindons T en sous-ensembles T_q, où $T_q = \{v \in T,\ car\ F_v = \ q\ \}$, q parcourant les nombres premiers ; $T = \bigcup_q T_q$, $M = \prod_q \prod_{v \in T_q} v^{a_v}$.
Il vient alors le schéma suivant pour q_0 fixé :



où $M_0 = \prod_{v \in T_{q_0}} v^{a_v} . \prod_{v \in T | T_{q_0}} v$,
et $\widehat{M}_0 = \prod_{v \in T_{q_0}} v . \prod_{v \in T | T_{q_0}} v^{a_v}$

Lemme 1.2 :
Le groupe Gal $\left(k(M)/k(\widehat{M}_0)\right)$ est engendré par un sous-groupe de $\langle I_v\ (k(M)/k) \rangle_{v \in T_{q_0}}$; il est d'ordre une puissance de q_0.

Démonstration :
on considère le schéma suivant :



où L est le corps fixe par les groupes d'inerties $I_v\,(k(M)/k)$, $v \in T_{q_0}$ et $L' = L \cap k(\widehat{M}_0)$;
ainsi le conducteur de L divise $\prod_{v \in T \setminus T_{q_0}} v^{a_v}$,
i.e $L = L'$. □

Lemme 1.3 :
Le groupe $Gal\,(k(M)/k(m))$ *est engendré par un sous-groupe de* $\langle I_v\,(k(m)/k)\rangle_{v\in T_q}$, $q \in \mathbb{N}$, *d'ordre une puissance de* q *; plus précisémment, il existe* $q \in \mathbb{N}$, $v \in T_q$ *tels que* $e_v\,(k(M)/k(m))$ *soit d'ordre une puissance de* q.

Ceci est immédiat par le lemme 1.2.

Proposition 1.3 :
$k^S_{1,T}$ *est l'extension abélienne maximale de* k, T*-ramifiée modérée,* S*-décomposée.*

Démonstration :
On suppose T non vide.
Reprenons le schéma (1) avec F contenant strictement $k^S_{1,T}$; par le lemme 1.3, il existe q, $v \in T_q$ et $I'_v\,(k(M)/k)$ sous-groupe de $I_v\,(k(M)/k)$ d'ordre une puissance de q tel que

$$\frac{I'_v\,(k(M)/k)}{I'_v\,(k(M)/k) \cap H} \neq 1 \text{ où } H = Gal(k(M)/N);$$

ce quotient s'identifie à un sous-groupe de $I_v\,(N/k)$ d'ordre une puissance de q. Par transitivité de l'indice de ramification puis par le lemme 1.1, on obtient la proposition 1.2. □

Remarque 1.2 :
Si l'on note par induction $k^S_{i+1,T}$ l'extension abélienne maximale de $k^S_{i,T}$, T_i-ramifiée modérée, S_i-décomposée ($i \geq 1$), où $T_i = \{w \in pl^S_{k_{i,T}},\ w|v,\ v \in T\}$ et $S_i = \{w \in pl^S_{k_{i,T}},\ w|v,\ v \in S\}$, on définit une suite de corps $k^S_{i,T}$ et ainsi la T-S tour de k, notée k^S_T, vue comme réunion des $k^S_{i,T}$; pour p premier $k^S_T(p)$ désigne la p-extension maximale de k contenue dans k^S_T ; on peut également noter que $k^S_T(p)/k$ est la p-extension maximale de k, T-ramifiée modérée et S-décomposée.
L'inégalité

$$d_p cl^S_{k,m} \geq 2 + 2\sqrt{d_p E^{\bar{S}}_{k,m} + 1}\ , \quad \text{où } \bar{S} = S_0 \cup pl^{re}_{k,\infty},$$

implique que k a une p-T-S tour infinie, i.e que l'extension $k^S_T(p)/k$ est infinie [Mai].

Remarque 1.3 : Sur le déploiement de $k^S_{1,T}/k$.
On prend un ensemble fini T' de places finies de k, $T' \subset T$, $T' \cap S = \emptyset$.
Il est clair que le groupe de Galois de $k^S_{1,T}/k^S_{1,T'}$ est engendré par les groupes d'inertie des places v de $T \backslash T'$ dans $k^S_{1,T}/k$; pour $v \in T\backslash T'$, $\left|I_v\left(k^S_{1,T}/k\right)\right| = \dfrac{Nv-1}{\left(E^S_{k,\frac{m}{v}} : E^S_{k,m}\right)}$,
ceci par la proposition 1.1.
Ainsi l'extension $k^S_{1,T}/k^S_{1,T'}$ est déployée, i.e

$$Gal\left(k^S_{1,T}/k^S_{1,T'}\right) = \bigoplus_{v\in T|T'} I_v\left(k^S_{1,T}/k^S_{1,T'}\right)$$

si et seulement si

$$\left(E^S_{k,m'} : E^S_{k,m}\right) = \prod_{v\in T|T'} \left(E^S_{k,\frac{m}{v}} : E^S_{k,m}\right).$$

Pour $k = \mathbb{Q}$, $S = \emptyset$, $T' = \emptyset$, on retrouve la décomposition de $\mathbb{Q}(m)$, $m = \prod_{v\in T} v$.

g) Une suite exacte liant $cl^S_{k,m}$ à des quotients d'idèles.

Proposition 1.4 :
Nous avons la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \frac{\mathcal{U}^S_{k,m}}{E^S_{k,m}} \longrightarrow \mathcal{C}_k \xrightarrow{\phi^S_m} cl^S_{k,m} \longrightarrow 1,$$

où $\mathcal{C}_k = \dfrac{\mathcal{J}_k}{k^\times}$.

On peut rapprocher cette suite exacte de celle apparaissant dans [Mat].

Démonstration :
- Définition de ϕ^S_m :

pour $x \in \mathcal{J}_k$ et par le théorème d'approximation, il existe $\alpha \in k^\times$ tel que $j = x\alpha \in \mathcal{J}^+_{k,m}$; on pose alors

$$\phi^S_m(x) = \prod_{v\in pl_{k,0}} v^{v(j_v)} \; modulo \; R^S_{k,m} \,.$$

L'indépendance du choix de j provient du fait que $\phi^S_m(k^\times) = 1$ *modulo* $R^S_{k,m}$.
- Recherche de $ker\phi^S_m$:

$$\begin{aligned} &\phi^S_m(x) = 1 \; mod \; R^S_{k,m} \\ \Longleftrightarrow &\prod_{v\in pl_{k,0}} v^{v(j_v)} = (z)\mathcal{Q}_{S_0} \end{aligned}$$

avec z dans $k^{+S_\infty}_m$ et $\mathcal{Q}_{S_0}$ dans $\langle S_0\rangle$; par conséquent $\dfrac{j}{z} \in \mathcal{U}^S_{k,m}$ et $x \in \mathcal{U}^S_{k,m} k^{+S_\infty}_m k^\times$.
De plus, en remarquant que $\phi^S_m\left(\mathcal{U}^S_{k,m} k^{+S_\infty}_m k^\times\right) = 1 \; mod \; R^S_{k,m}$, on en déduit :

$$ker\phi^S_m = \frac{U^S_{k,m} k^{S_\infty}_m k^\times}{k^\times} = \frac{\mathcal{U}^S_{k,m}}{E^S_{k,m}} \,. \; \square$$

2 Étude de $kerj^S_{K/k,m}$.

Dorénavant, on considère K/k une extension galoisienne finie T-ramifiée modérée, de groupe de galois G ; S et T désignant des ensembles de places de k, on peut étendre ces ensembles à K en $S(K) = \{w \in pl_K,\ w|v,\ v \in S\}$ et $T(K) = \{w \in pl_K,\ w|v,\ v \in T\}$; on peut alors définir $m(K) = \prod_{w \in T(K)} w$, comme module de K et ainsi $cl^{S(K)}_{K,m(K)}$.

Par abus on notera $S(K)$ par S, $T(K)$ par T, $m(K)$ par m et $cl^{S(K)}_{K,m(K)}$ par $cl^S_{K,m}$.
L'application $j^S_{K/k,m}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} cl^S_{k,m} &\longrightarrow cl^S_{K,m} \\ cl^S_{k,m}(\mathcal{Q}) &\longmapsto cl^S_{K,m}(\mathcal{Q}\mathcal{O}_K) \end{aligned} ,$$

$\mathcal{Q}\mathcal{O}_K$ étant l'idéal $\mathcal{Q}$ étendu à l'anneau des entiers de K.

Lemme 2.1 : Théorème 90 de Hilbert avec module.
Sous les hypothèses précédentes, pour tout cocycle f de $Z^1(G,\ E^S_{K,m})$, il existe b élément de $K_m^{+\ S_\infty}$ tel que

$$\forall \sigma \in G,\ f(\sigma) = b^{1-\sigma} .$$

Pour T vide, on retrouve le théorème 90 de Hilbert, ainsi pour la démonstration on peut supposer que T est non vide.

Démonstration :
Par le théorème 90 de Hilbert, $H^1(G, K^\times) = 1$ [Gru, §2.7, proposition 3, page 124] ; ainsi pour tout cocycle de G dans $K^\times$, il existe b de $K^\times$ tel que

$$\forall \sigma \in G,\ f(\sigma) = b^{1-\sigma} .$$

L'élément b est défini par la résolvante de Hilbert comme suit :

$$b = \sum_{\sigma \in G} f(\sigma).c^\sigma, \quad \text{avec } c \in K^\times \text{ tel que } b \text{ soit non nul [Gru, §2.7, page 124].}$$

L'extension étant T-ramifiée modérée, on peut trouver un élément c appartenant à $K^\times$ tel que $tr_{K/k}c \equiv 1\ (m)$ [Fr, §5, théorème 2, page 21], $tr_{K/k}$ désignant la trace dans l'extension K/k ; par le théorème d'approximation, on peut choisir c dans $K^{+\ S_\infty}$ et par conséquent, $tr_{K/k}c \in K_m^{+\ S_\infty}$. □

Lemme 2.2 :
$k_m^{+S_\infty} \subset k^\times \cap K_m^{+S_\infty}$; on a l'égalité si K/k ne complexifie aucune place en dehors de S_∞.

Démonstration :
Il est clair que $k_m^{+S_\infty}$ est inclus dans $k^\times \cap K_m^{+S_\infty}$. Pour $x \in k^\times \cap K_m^{+S_\infty}$ et pour $w \in pl_{K,\infty} \backslash S_\infty$, alors $w(x) = 0$; ainsi si w est réelle, alors pour toute place v de $pl_{k,\infty}$, $w|v$, nous avons $\sigma_w(x) = \sigma_v(x) > 0$, i.e $v(x) = 0$; par contre si w est complexe, l'information $w(x) = 0$ est vide.
Ainsi si K/k ne complexifie aucune place en dehors de S_∞, l'égalité est immédiate.
□

On peut alors énoncer le premier résultat de cette partie.

Proposition 2.1 :
Soit K/k une extension galoisienne finie, T-ramifiée modérée, $pl_{k,\infty} \backslash S_\infty$-décomposée ; soit $G = Gal(K/k)$, alors on a l'isomorphisme suivant :

$$kerj_{K/k,m}^S \simeq H^1(G, E_{K,m}^S) \ .$$

En particulier si l'extension K/k est cyclique, alors $kerj_{K/k,m}^S$ s'identifie à $E_{K,m}^{S*}/\left(E_{K,m}^S\right)^{1-\sigma}$, où $G = \langle\sigma\rangle$ et $E_{K,m}^{S*} = \{x \in E_{K,m}^S / \ N_{K/k}x = 1\}$.

Démonstration :
- Construction de l'homomorphisme :

Soit l'application $\Phi_{K/k,m}^S : kerj_{K/k,m}^S \longrightarrow H^1(G, E_{K,m}^S)$ défini comme suit :
pour $\mathcal{Q} \in I_{k,T}$ tel que $cl_{K,m}^S(\mathcal{Q}) = 1$, on peut écrire

$$\mathcal{Q}\mathcal{O}_K = (\alpha)\mathcal{V}_{S_0},$$

où $\alpha \in K_m^{+S_\infty}$ et $\mathcal{V}_{S_0}$ est un S_0-idéal de K ; en particulier, $\alpha^{1-\sigma}$ est un élément de $E_{K,m}^S$, quelque soit σ appartenant à G.
Si $\mathcal{Q}\mathcal{O}_K$ s'écrit également $(\alpha'\mathcal{V}'_{S_0})$, alors on en déduit l'existence de $\varepsilon \in E_{K,m}^S$ tel que $\alpha^{1-\sigma} = \varepsilon^{1-\sigma}\alpha'^{1-\sigma}$, $\forall \sigma \in G$; en remarquant que l'application qui à σ associe $\varepsilon^{1-\sigma}$ est un cobord dans $H^1(G, E_{K,m}^S)$, on peut définir $\Phi_{K/k,m}^S$:

$$\begin{array}{rlcl} \Phi_{K/k,m}^S : & cl_{k,m}^S(\mathcal{Q}) \in kerj_{K/k,m}^S & \longrightarrow & f \in Z^1(G, E_{K,m}^S) \ mod \ B^1(G, E_{K,m}^S) \\ & (\mathcal{Q}\mathcal{O}_K) = (\alpha)\mathcal{V}_{S_0} & & f : \sigma \in G \to \alpha^{1-\sigma} \ . \end{array}$$

- Injectivité de $\Phi_{K/k,m}^S$:

Soit $cl_{k,m}^S(\mathcal{Q}) \in kerj_{K/k,m}^S$ tel que $\Phi_{K/k,m}^S\left(cl_{k,m}^S(\mathcal{Q})\right) = 1$ dans $H^1(G, E_{K,m}^S)$; alors il existe $\varepsilon \in E_{K,m}^S$ tel que $\Phi_{K/k,m}^S\left(cl_{k,m}^S(\mathcal{Q})\right) = (f : \sigma \to \varepsilon^{1-\sigma})$, i.e $\alpha^{1-\sigma} = \varepsilon^{1-\sigma}$, $\forall \sigma \in G$. Ainsi $\varepsilon/\alpha \in k^\times \cap K_m^{+S_\infty}$, i.e d'après le lemme 2.2 , $\varepsilon/\alpha \in k_m^{+S_\infty}$.

En écrivant $\mathcal{Q}\mathcal{O}_K(\varepsilon/\alpha) = \mathcal{V}_{S_0}(\varepsilon)$, on en déduit que $\mathcal{V}_{S_0}(\varepsilon)$ est un S_0-idéal de K, stable par G; l'extension étant non ramifiée en S_0, alors $\mathcal{V}_{S_0}(\varepsilon)$ est un S_0-idéal de k, i.e $cl^S_{k,m}(\mathcal{Q}) = 1$.

• Surjectivité:

Soit $f \in Z^1(G, E^S_{K,m})$ alors par le lemme 2.1, il existe $b \in K^{+S_\infty}_m$ tel que $f(\sigma) = b^{1-\sigma}$, $\forall \sigma \in G$.

L'idéal (b) peut sécrire $\mathcal{V}\mathcal{V}_{S_0}$ avec $\mathcal{V}$ étranger à S_0 et $\mathcal{V}_{S_0}$ un S_0-idéal de K ; $(b)^{1-\sigma}$ étant un S_0-idéal de K, alors $\mathcal{V}^{1-\sigma} = (1)$ $\forall \sigma \in G$; finalement il suffit de remarquer que $\mathcal{V}$ est un idéal étranger à T, ainsi l'extension étant T-ramifiée, alors $\mathcal{V}$ est l'étendu d'un idéal $\mathcal{Q}$ de $I_{k,T}$.

On a alors $\Phi^S_{K/k,m}\left(cl^S_{k,m}(\mathcal{Q})\right) = f \ mod \ B^1(G, E^S_{K,m})$. □

En prenant T vide et S égal à tous les plongements réels, on retrouve le résultat d'Iwasawa [Iw] à savoir:

Si K/k est une extension galoisienne finie non ramifiée pour les idéaux alors

$$ker j^{ord}_{K/k} \simeq H^1(G, E^{ord}_K).$$

On peut élargir la situation de la proposition 2.1 en prenant une extension K/k, T-ramifiée modérée mais pas forcément $pl_{k,\infty}\backslash S_\infty$-décomposée. Avant de développer ce point, pour une extension galoisienne finie K/k, nous noterons par γ l'ensemble des places réelles de k qui se complexifient dans K/k et par $\hat{\gamma} = \gamma \cap pl_{k,\infty}\backslash S_\infty$. On peut résumer la situation:

$$pl_{k,\infty} = S_\infty \cup \hat{\gamma} \cup \Delta, \text{ réunion disjointe .}$$

On peut remarquer que les places de Δ se décomposent totalement dans K/k, puis que $S \cup \gamma = S \cup \hat{\gamma}$.

On a alors le résultat principal suivant:

Théorème 2.1 :

Soit K/k une extension galoisienne finie, T-ramifiée modérée de groupe de Galois G et soit $\hat{\gamma}$ l'ensemble des places réelles de k qui ne sont pas dans S, et qui se complexifient dans K/k.

On a alors la suite exacte:

$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow ker j^S_{K/k,m} \xrightarrow{\Phi^S_m} H^1(G, E^S_{K,m}) \longrightarrow 1,$$

où $\Gamma \simeq \dfrac{C_2^{|\hat{\gamma}|}}{Sgn\left(E^{S\cup\hat{\gamma}}_{k,m}\right)}$ *et* $Sgn\left(E^{S\cup\hat{\gamma}}_{k,m}\right) \simeq \dfrac{E^{S\cup\hat{\gamma}}_{k,m}}{E^S_{k,m}}$.

Remarques 2.1 :

i) $Sgn\left(E^{S\cup\hat{\gamma}}_{k,m}\right)$ correspond à l'image de $E^{S\cup\hat{\gamma}}_{k,m}$ dans $\prod_{v\in\hat{\gamma}}\left(\dfrac{\mathbb{R}^\times}{\mathbb{R}^{\times+}}\right)$.

ii) Sous les hypothèses de la proposition 2.1, $\hat{\gamma} = \emptyset$, ainsi $\Gamma = 1$ et on retrouve la proposition 2.1.

Démonstration :
La définition de Φ_m^S est celle de la proposition 2.1 ; la surjectivité est immédiate. En ce qui concerne l'injectivité, le problème rencontré est le même que celui apparaissant dans le lemme 2.1.

Calcul de $ker\Phi_m^S$:
On rappelle que $\Phi_m^S\left(cl_{k,m}^S(\mathcal{Q})\right) = 1 \iff \mathcal{Q}\mathcal{O}_K = (\alpha/\varepsilon).\mathcal{V}_{S_0}(\varepsilon)$, avec $(\alpha/\varepsilon) \in k^\times \cap K_m^{+S_\infty}$, $\mathcal{V}_{S_0}$ S_0-idéal de K, $\alpha \in K_m^{+S_\infty}$ et $\varepsilon \in E_{K,m}^S$; de ceci on en déduit que $(\varepsilon/\alpha) \in k_m^{S_\infty \cup \hat{\gamma}}$ ainsi $ker\Phi_m^S \subset cl_{k,m}^S\left(P_{k,m}^{S_\infty\cup\hat{\gamma}}\langle S_0\rangle\right)$; l'inclusion réciproque étant évidente, on a alors :

$$ker\Phi_m^S = cl_{k,m}^S\left(P_{k,m}^{S_\infty\cup\hat{\gamma}}\langle S_0\rangle\right).$$

Or $cl_{k,m}^S\left(P_{k,m}^{S_\infty\cup\hat{\gamma}}\langle S_0\rangle\right) = \dfrac{P_{k,m}^{S_\infty\cup\hat{\gamma}}}{P_{k,m}^{S_\infty}\langle S_0\rangle \cap P_{k,m}^{S_\infty\cup\hat{\gamma}}} \simeq \dfrac{k_m^{+\ S_\infty\cup\hat{\gamma}}}{k_m^{S_\infty} E_{k,m}^{S\cup\hat{\gamma}}}$.
Il suffit ensuite de remarquer que :

$$\frac{k_m^{+\ S_\infty\cup\hat{\gamma}}}{k_m^{S_\infty}} \simeq \prod_{v\in\hat{\gamma}}\left(\frac{\mathbb{R}^\times}{\mathbb{R}^{\times +}}\right),$$

ceci par l'homomorphisme de signatures partielles.

3 Capitulation de $cl_{k,m}^S$ dans $cl_{K,m}^S$ pour $K = k_{1,T}^S$.

Pour T vide, S égal à l'ensemble des plongements réels, on sait que le noyau de $j_{K/k}^{ord}$ est cl_k^{ord} pour $K = k_1^{ord}$; ceci est une conséquence immédiate du théorème de l'idéal principal [AT, chapitre 13, §4, théorème 7, page 194] :
Soit G un groupe fini et H son groupe des commutateurs ; alors l'homomorphisme de transfert $V_{G\to H}\ :\ G^{ab} \longrightarrow H^{ab}$ est nul.

On peut ainsi démontrer à l'aide de ce résultat, la proposition suivante :

Proposition 3.1 :
Soit $K = k_{1,T}^S$; alors $cl_{k,m}^S$ capitule entièrement dans $cl_{K,m}^S$, i.e $kerj_{K/k,m}^S = cl_{k,m}^S$.

Démonstration :
On applique le théorème de l'idéal principal en prenant $H = cl_{K,m}^S$ et $\dfrac{G}{H} = cl_{k,m}^S$; ainsi $V_{G\to H}\ :\ cl_{k,m}^S \longrightarrow cl_{K,m}^S$ est nul. Par [Se1, chapitre 7, §8, application, page 130], on conclut facilement. □

Remarque 3.1 :
Pour p premier, si l'on note $k^S_{1,T}(p)$ par K, alors $cl^S_{k,m}(p)$ capitule entièrement dans $cl^S_{K,m}(p)$.

Remarque 3.2 :
Soit F/k une sous-extension galoisienne de $k^S_{1,T}/k$; on a alors une évaluation partielle de $|kerj^S_{F/k,m}|$ en utilisant un résultat de Suzuki [Su] ; considérons le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] k^S_{1,T} \arrow[r] \arrow[d] & F^S_{1,T} \arrow[r] & k^S_{2,T} \\ F \arrow[d] & & \\ k & & \end{tikzcd}$$

Le résultat de Suzuki indique que $[F : k]$ divise l'ordre du noyau de l'homomorphisme de transfert $V_{H\to N}\ :\ H^{ab} \longrightarrow N^{ab}$, où $H = Gal\left(k^S_{2,T}/k\right)$ et $N = Gal\left(k^S_{2,T}/F\right)$; ainsi $[F : k]$ divise $|kerj^S_{K/k,m}|$.
Les travaux de Suzuki complètent l'article de Jaulent sur le problème de la capitulation [Ja1] notamment le corollaire 11 du théorème 10 et confirment la conjecture 4.

Remarque 3.3 :
Jaulent [Ja1, §3, corollaire 14, page 25] a établi un analogue du théorème 94 de Hilbert avec rayon ($S_0 = \emptyset$) ; en particulier dans le cas modéré, le corollaire indique que $cl^{S_\infty}_{k,m}$ capitule dans $cl^{S_\infty}_{K,\mathcal{M}}$, où $K = k^S_{1,T}$ et $\mathcal{M} = \prod\limits_{v\in T}\prod\limits_{w|v} w^{e_w}$, e_w étant l'indice de ramification de w dans K/k.

Remarque 3.4 :
Soit K/k cyclique T-ramifiée modérée, S-décomposée de groupe de Galois G ; supposons que S contient l'ensemble des plongements réels de k, alors on sait que le quotient de Herbrand de $E^S_{K,m}$ est égal à $[K : k]^{-1}$ [La, corollaire 2, page 192].
Par le théorème 2.1, il vient :

$$\left|kerj^S_{K/k,m}\right| = \left|\hat{H}^0(G, E^S_{K,m})\right|.[K : k].|\Gamma|\ .$$

En particulier, si K est égal à $k^S_{1,T}$, i.e $cl^S_{k,m}$ est cyclique, alors

$$E^S_{k,m} = N_{K/k}E^S_{K,m}\ .$$

On peut rapprocher ce résultat à certains travaux de Lemmermeyer [Le, 1.7] et de Schmithals [Sc].

4 Étude du comportement des classes de $cl_{k,m}^S$ étendues à $cl_{K,m}^S$

Soit K/k une extension galoisienne finie, T-ramifiée modérée de groupe de Galois G. On rappelle que γ désigne l'ensemble des places réelles de k se complexifiant dans K/k.

Proposition 4.1 :
Sous ces hypothèses, on a

$$\frac{H^0(G, cl_{K,m}^S)}{\phi_m^S\,(H^0(G, \mathcal{C}_K))} \;\simeq\; H^1\left(G, \frac{\mathcal{U}_{K,m}^S}{E_{K,m}^S}\right) \;\hookrightarrow\; H^2(G, E_{K,m}^S),$$

où ϕ_m^S est définie dans la proposition 1.3.

On rappelle que par le lemme de Shapiro, [Ko2, §3.4], [AW, §4, proposition 2, page 99] $\hat{H}^i(G, \prod_{w|v} K_w^\times)$ et $\hat{H}^i(G, \prod_{w|v} U_{K_w})$ s'identifient respectivement à $\hat{H}^i(D_{w_0}, K_{w_0}^\times)$ et $\hat{H}^i(D_{w_0}, U_{K_{w_0}})$ pour une place arbitraire w_0 de K au-dessus de v [Ko1, chapitre 2, §4, proposition 2.65, page 126] ; on montre de manière identique que $\hat{H}^i(G, \prod_{w|v} U_{K_w}^1)$ s'identifie à $\hat{H}^i(D_{w_0}, U_{K_{w_0}}^1)$ pour une place arbitraire w_0 au-dessus de v.

Lemme 4.1 :
Pour toute place v de T, $\hat{H}^n(G, \prod_{w|v} U_{K_w}^1) = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration :
Par un résultat classique de cohomologie ([Se1, chapitre IX, §5, théorème 8, page 152]), il suffit de vérifier que $\hat{H}^n(G, \prod_{w|v} U_{K_w}^1)$ s'annule pour deux valeurs consécutives de n.
Fixons-nous $w_0|v$, $v \in T$.
$U_{K_{w_0}}^1$ peut être vu comme limite projective des quotients $U_{K_{w_0}}^1/U_{K_{w_0}}^i$, $i \geq 1$; d'autre part, $U_{K_{w_0}}^i/U_{K_{w_0}}^{i+1}$ pour $i \geq 1$ s'identifie à F_{w_0} où F_{w_0} est le groupe additif du corps résiduel en w_0 (voir par exemple [Se1]) ; la place w_0 étant ramifiée modérée dans K/k alors $\hat{H}^n(I_{w_0}, F_{w_0}) = 1$, $\forall n$ [AW, §6, corollaire 1, page 105] ; on peut ainsi utiliser la suite de Hochschild-Serre [AW, §5, proposition 5, page 101] ; pour tout $n \geq 1$, on a alors

$$1 \longrightarrow \hat{H}^n\left(\frac{D_{w_0}}{I_{w_0}}, (F_{w_0})^{I_{w_0}}\right) \longrightarrow \hat{H}^n(D_{w_0}, F_{w_0}) \longrightarrow 1 \;;$$

il suffit ensuite de remarquer que $\forall n$, $\hat{H}^n\left(\frac{D_{w_0}}{I_{w_0}},(F_{w_0})^{I_{w_0}}\right)=\hat{H}^n\left(\frac{D_{w_0}}{I_{w_0}},F_{w_0}\right)=1$ [Gru, §2.6, corollaire, page 124].
Ainsi pour tout $n\geq 1$, $\hat{H}^n(D_{w_0},F_{w_0})=1$; par [Se2, §1, lemme 3, page 132], on conclut que $\hat{H}^n(D_{w_0},U^1_{K_{w_0}})=1$ pour tout $n\geq 1$.
On peut remarquer que dans ce cadre précis I_{w_0} est cyclique. □

Lemme 4.2 :

i) $\hat{H}^n(G,\mathcal{U}^S_{K,m})=1$ *pour tout entier* n *impair.*

ii) $\hat{H}^n(G,\mathcal{U}^S_{K,m})\simeq\prod_{v\in S_0\cup pl^{re}_{k,\infty}}C_{f_v}=C_2^{|\gamma|}.\prod_{v\in S_0}C_{f_v}$*, ceci pour tout entier* n *pair,*
et où f_v *est le degré résiduel de* v *dans* K/k*.*

Démonstration du lemme 4.2 :
On a :

$$\begin{aligned}\hat{H}^n(G,\mathcal{U}^S_{K,m}) &= \prod_{v\in T}\hat{H}^n(G,\prod_{w|v}U^1_{K_w}).\prod_{v\in S}\hat{H}^n(G,\prod_{w|v}K_w^\times).\prod_{v\notin S\cup T}\hat{H}^n(G,\prod_{w|v}U_{K_w})\\ &= \prod_{\substack{v\in T\\ w_0|v\ qcq}}\hat{H}^n(D_{w_0},U^1_{K_{w_0}}).\prod_{\substack{v\in S\\ w_0|v\ qcq}}\hat{H}^n(D_{w_0},K^\times_{w_0}).\prod_{\substack{v\notin S\cup T\\ w_0|v\ qcq}}\hat{H}^n(D_{w_0},U_{K_{w_0}});\end{aligned}$$

• Pour $w|v$, $v\in S_0$, D_w est cyclique, ainsi nous avons
d'une part

$$\hat{H}^{2q}(D_w,K_w^\times)\simeq\hat{H}^0(D_w,K_w^\times)\simeq\frac{k_v^\times}{N_{K_w/k_v}K_w^\times}\simeq D_w^{ab}\simeq C_{f_v},$$

où D_w^{ab} désigne l'abélianisé de D_w et C_{f_v} le groupe cyclique d'ordre f_v,
puis d'autre part

$$\hat{H}^{2q+1}(D_w,K_w^\times)\simeq\hat{H}^1(D_w,K_w^\times)=1,\quad \text{ceci par le théorème 90 de Hilbert ;}$$

• pour w dans $pl_{K,0}\backslash T\cup S_0$, ces places ne se ramifiant pas dans K/k, alors $\hat{H}^n(D_w,U_{K_w})=1$ pour tout entier n [Se2, §1.2, proposition 1, page 131] ;
• pour $w|v$, $v\in T$, par le lemme 4.1 on sait que $\hat{H}^n(D_w,U^1_{K_w})=1$, $\forall n$;
• pour les places infinies trois situations peuvent se présenter :

. $v\in\Delta$ (= ensemble des places décomposées dans K/k et non dans S_∞), alors $\hat{H}^n(D_w,U_{K_w})=1$, $\forall w|v$, $\forall n$;

. $v\in S_\infty\backslash S_\infty\cap\gamma$, alors $\hat{H}^n(D_w,K_w^\times)=1$, $\forall w|v$, $\forall n$;

. $v\in\gamma$, alors $\hat{H}^{2q+1}(D_w,K_w^\times)=\hat{H}^{2q+1}(D_w,U_{K_w})=\hat{H}^1(D_w,\mathbb{C}^\times)=1$ et $\hat{H}^{2q}(D_w,K_w^\times)=\hat{H}^{2q}(D_w,U_{K_w})=\frac{\mathbb{R}^\times}{\mathbb{R}^{\times+}}$. □

Démonstration de la proposition 4.1 :

On part de la suite exacte

$$1 \longrightarrow E_{K,m}^S \xrightarrow{i_m^S} \mathcal{U}_{K,m}^S \longrightarrow \frac{\mathcal{U}_{K,m}^S}{E_{K,m}^S} \longrightarrow 1$$

pour obtenir

$$1 \longrightarrow H^1(G, \frac{\mathcal{U}_{K,m}^S}{E_{K,m}^S}) \longrightarrow H^2(G, E_{K,m}^S) \xrightarrow{i_m^S} H^2(G, \mathcal{U}_{K,m}^S) \xrightarrow{a_m^S} H^2(G, \frac{\mathcal{U}_{K,m}^S}{E_{K,m}^S}) \longrightarrow \dots ,$$

$$\text{i.e} \quad H^1(G, \frac{\mathcal{U}_{K,m}^S}{E_{K,m}^S}) \hookrightarrow H^2(G, E_{K,m}^S).$$

De la proposition 1.3 appliquée à K, nous avons

$$H^0(G, \mathcal{C}_K) \xrightarrow{\phi_m^S} H^0(G, cl_{K,m}^S) \longrightarrow H^1(G, \frac{\mathcal{U}_{K,m}^S}{E_{K,m}^S}) \longrightarrow H^1(G, \mathcal{C}_K).$$

Or $H^1(G, \mathcal{C}_K) = 1$ [Ta, §9.1, page 180], ainsi il vient :

$$H^0(G, \mathcal{J}_K) \xrightarrow{\phi_m^S} H^0(G, cl_{K,m}^S) \longrightarrow H^1(G, \frac{\mathcal{U}_{K,m}^S}{E_{K,m}^S}) \longrightarrow 1 \ . \ \square$$

Notons par $H_{K/k,m}^S$ l'hypothèse suivante :

$$ker \left[H^2(G, E_{K,m}^S) \xrightarrow{i_m^S} H^2(G, \mathcal{U}_{K,m}^S) \right] = H^2(G, E_{K,m}^S) \ ;$$

on a alors le second théorème dans lequel intervient $\left(cl_{K,m}^S\right)^G$, le sous-groupe des classes ambiges et le sous-groupe $j_{K/k,m}^S\left(cl_{k,m}^S\right)$ des éléments de $cl_{K,m}^S$ représentés par un idéal de k :

Théorème 4.1 :
Soit K/k une extension galoisienne finie, T-ramifiée modérée, de groupe de Galois G ; alors :

i) Sous $H_{K/k,m}^S$,

$$H^2(G, E_{K,m}^S) \simeq \frac{\left(cl_{K,m}^S\right)^G}{j_{K/k,m}^S(cl_{k,m}^S)} \ ;$$

ii) sinon, on a l'injection

$$\frac{\left(cl_{K,m}^S\right)^G}{j_{K/k,m}^S(cl_{k,m}^S)} \hookrightarrow H^2(G, E_{K,m}^S),$$

et la double inégalité

$$1 \leq \left|H^2(G, E^S_{K,m})\right| / \left|\frac{\left(cl^S_{K,m}\right)^G}{j^S_{K/k,m}(cl^S_{k,m})}\right| \leq \frac{\prod_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} f_v}{f},$$

où f est égal au ppcm des degrés résiduels f_v des places v de $S_0 \cup pl_{k,\infty}$.

Démonstration :
La proposition 4.1 apporte le premier point et l'injection du second point.
Notons par A^S_m le quotient $\left|H^2(G, E^S_{K,m})\right| / \left|\frac{\left(cl^S_{K,m}\right)^G}{j^S_{K/k,m}(cl^S_{k,m})}\right|$; on peut alors remarquer que

$$A^S_m = \left|i^S_m(H^2(G, E^S_{K,m}))\right| = \left|ker\ a^S_m\right|.$$

Remarquons ensuite le diagramme commutatif de G-modules suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & E^S_{K,m} & \xrightarrow{i^S_m} & \mathcal{U}^S_{K,m} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & \mathcal{J}_K & \longrightarrow & \mathcal{C}_K & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & & & \downarrow \Phi^S_m & & \\
 & & & & & & cl^S_{K,m} & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 1 & &
\end{array}$$

où Φ^S_m est défini dans la proposition 1.3.
Ce dernier permet d'obtenir le diagramme commutatif cohomologique (2) suivant :

$$\begin{tikzcd}
(2) & & H^1(G, cl^S_{K,m}) \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & H^2(G,\mathcal{U}^S_{K,m}) \arrow[r, "a^S_m"] \arrow[d, "b"] & H^2(G, \frac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}}) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^2(G,\mathcal{J}_K) \arrow[r, "d"] & H^2(G,\mathcal{C}_K) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& & H^2(G, cl^S_{K,m}) &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, $ker\ a^S_m \subset ker\ (d \circ b)$, i.e $\left|ker\ a^S_m\right| \leq |ker\ (d \circ b)|$.

Par conséquent, $\left|ker\ a^S_m\right| \leq \dfrac{\prod\limits_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} f_v}{\left|d \circ b(H^2(G,\mathcal{U}^S_{K,m}))\right|}$, ceci par le lemme 4.2 ; il reste à évaluer $\left|d \circ b(H^2(G,\mathcal{U}^S_{K,m}))\right|$.

Observons le nouveau diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^2(G,\mathcal{U}^S_{K,m}) \arrow[r, "b"] & H^2(G,\mathcal{J}_K) \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "inv"'] & H^2(G,\mathcal{C}_K) \arrow[d, "\beta", "\wr"'] \\
& & \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

où $n = [K : k]$ (on peut se référer à [Ta, §11]).

Ainsi pour $h \in H^2(G, \mathcal{J}_K)$,

$$\beta \circ d(h) = inv(h) \ ;$$

or en identifiant $H^2(G, \mathcal{J}_K)$ à $\prod\limits_{\substack{v \in pl_k \\ w_0 | v \ qcq}} H^2(D_{w_0}, K^\times_{w_0})$, on a $h = \prod\limits_v h_v$, et ainsi par définition

$$inv(h) = \sum_v inv_v(h_v) \text{ modulo } \mathbb{Z},$$

où inv_v est l'invariant local associé à K_{w_0}/k_v, à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [Kol, §5.6, page 135].

Alors pour h de $H^2(G,\mathcal{U}_{K,m}^S)$ qui s'identifie à $\prod_{\substack{v\in S_0\cup pl_{k,\infty}\\ w_0|v_{qcq}}} H^2(D_{w_0}, K_{w_0}^\times)$, ceci par le lemme 4.2, nous avons :

$$\beta \circ d \circ b(h) = \sum_{v\in S_0\cup\gamma} inv_v(h_v) \ mod\ \mathbb{Z}.$$

On peut alors se rappeler que $H^2(D_{w_0}, K_{w_0}^\times)$ est un groupe cyclique d'ordre égal au degré résiduel f_v de $w_0|v$ dans K/k, engendré par un élément u_v tel que $inv_v(u_v) = \frac{1}{f_v}$ [Se2, §1, proposition 4, page 136] ; il vient alors

$$inv \circ b(H^2(G,\mathcal{U}_{K,m}^S)) = C_f,$$

où C_f désigne le groupe cyclique d'ordre f, et f le *ppcm* des degrés résiduels f_v, v dans $S_0 \cup pl_{k,\infty}$.
En conclusion,

$$\begin{aligned}|d \circ b(H^2(G,\mathcal{U}_{K,m}^S))| &= |\beta \circ d \circ b(H^2(G,\mathcal{U}_{K,m}^S))| \\ &= |inv \circ b(H^2(G,\mathcal{U}_{K,m}^S))| \\ &= f \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque 4.1 :

L'isomorphisme entre $H^2(G, E_{K,m}^S)$ et $\dfrac{\left(cl_{K,m}^S\right)^G}{j_{K/k,m}^S(cl_{k,m}^S)}$ est équivalent à l'hypothèse $H_{K/k,m}^S$.

Remarque 4.2 :
Soient K/k une extension galoisienne finie et $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ deux ensembles disjoints de places de K, non archimédiennes pour $\mathcal{T}$; supposons l'extension K/k $\mathcal{T}$-ramifiée modérée, $\mathcal{S}_0$-décomposée; contrairement aux points précédent, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ peuvent ne pas être stables par $G = Gal(K/k)$; on associe à $\mathcal{T}$ le module $\mathcal{M} = \prod_{w\in\mathcal{T}} w^{a_w}$, $a_w \geq 1$, et ainsi le rayon $\mathcal{R}_{K,\mathcal{M}}^S = \mathcal{P}_{K,\mathcal{M}}^{+\mathcal{S}_\infty}\langle\mathcal{S}_0\rangle$.
On note alors $cl_{K,\mathcal{M}}^S$ le quotient $I_{K,\mathcal{T}}/\mathcal{R}_{K,\mathcal{M}}^S$.
En adaptant la démarche précédente à cette situation, notammant les lemmes 4.1 et 4.2, et en prenant γ vide, on arrive au résultat suivant :

$$H^2(G, E_{K,\mathcal{M}}^S) \simeq \left(cl_{K,\mathcal{M}}^S\right)^G/\mathcal{H},$$

où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des classes de $cl^{\mathcal{S}}_{K,\mathcal{M}}$ représentées par un idéal de k et $E^{\mathcal{S}}_{K,\mathcal{M}} = \{x \in K^\times,\ x \equiv 1\ (\mathcal{M}),\ w(x) = 0\ \forall w \in pl_K \backslash \mathcal{S}\}$; pour $\mathcal{S} = pl_{K,\infty}$, on retrouve un résultat de Matsumura [Mat].

a) Étude de $H^S_{K/k,m}$ pour K/k, T-ramifiée modérée :

i) Soit $w_0|v$, w_0 place de K et $v \in \gamma \cup S_0$; notons H_{w_0} l'un des sous-groupes cycliques de G contenant D_{w_0}, le groupe de décomposition de w_0 dans K/k ; notons également par M_{w_0} le sous-corps fixe par H_{w_0}.
On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^2(G, E^S_{K,m}) & \xrightarrow{i_{w_0}(\sigma_{w_0})} & H^2(G, \prod_{w|v} K_w^\times) & \xrightarrow{res_{D_{w_0}}} & H^2(D_{w_0}, \prod_{w|v} K_w^\times) \\ {\scriptstyle res_{H_{w_0}}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle j_{w_0}} \\ H^2(H_{w_0}, E^S_{K,m}) & \xrightarrow[res_{D_{w_0}}]{} & H^2(D_{w_0}, E^S_{K,m}) & \xrightarrow[\sigma_{w_0}]{} & H^2(D_{w_0}, K_{w_0}^\times) \end{array}$$

où :
- σ_{w_0} est un plongement de $K^\times$ dans $K_{w_0}^\times$,
- j_{w_0} est la projection de $\mathcal{J}_K$ sur $K_{w_0}^\times$,
- i_{w_0} est un plongement de $K_{w_0}^\times$ dans $\prod_{w|v} K_w^\times$:

$$x \in K_{w_0}^\times \to i_{w_0}(x) = \prod_{w|v}(x_w) \ \in \prod_{w|v} K_w^\times$$
$$\text{où } x_w = sx \text{ avec } s \in G/\sim \text{ tel que } sw_0 = w$$
$$\text{et où } s \sim t \Leftrightarrow st^{-1} \in D_{w_0}$$

On connait par le lemme de Shapiro l'isomorphisme suivant :

$$H^2(G, \prod_{w|v} K_w^\times) \xrightarrow[\sim]{j_{w_0}(res_{D_{w_0}})} H^2(D_{w_0}, K_{w_0}^\times) ;$$

ainsi l'étude de $ker\,(i_{w_0} \circ \sigma_{w_0})$ et par conséquent l'étude de $ker\ i^S_m$, équivaut à l'étude de $ker\left[H^2(G, E^S_{K,m}) \longrightarrow H^2(D_{w_0}, K_{w_0}^\times)\right]$.
En particulier si pour toute place v de $S_0 \cup \gamma$ il existe $w_0|v$, $w_0 \in pl_K$, telle que

$$ker\left[H^2(H_{w_0}, E^S_{K,m}) \overset{\sigma(res_{D_{w_0}})}{\longrightarrow} H^2(D_{w_0}, K_{w_0}^\times)\right] = H^2(H_{w_0}, E^S_{K,m}),$$

alors $H^S_{K/k,m}$ est vérifiée.

ii) Interprétation de $H^2(H_{w_0}, E^S_{K,m}) \overset{\sigma(res_{D_{w_0}})}{\longrightarrow} H^2(D_{w_0}, K^\times_{w_0})$.
H_{w_0} et D_{w_0} étant cycliques, l'étude initiale se réduit à l'étude suivante :

$$\frac{\left(E^S_{K,m}\right)^{H_{w_0}}}{N_{K/M_{w_0}} E^S_{K,m}} \xrightarrow{\sigma_{w_0}} \frac{k_v^\times}{N_{K_{w_0}/k_v} K^\times_{w_0}},$$

σ_{w_0} étant un plongement de $K^\times$ dans $K^\times_{w_0}$.
Nous arrivons ainsi à la proposition 4.1 qui donne une condition suffisante afin que $H^S_{K/k,m}$ soit réalisée :

Proposition 4.2 :
Soit K/k, T-ramifiée modérée; pour que $H^S_{K/k,m}$ soit réalisée, il suffit que pour toute place v de $S_0 \cup \gamma$, et pour $w_0|v$ quelconque, il existe un sous-groupe cyclique $Gal(K/M_{w_0})$ de G contenant D_{w_0}, tel que

$$\forall x \in M_{w_0} \cap E^S_{K,m} \text{ alors } x \in N_{K_{w_0}/k_v} K^\times_{w_0}.$$

Cette condition normique se traduit par :
$\forall x \in M_{w_0} \cap E^S_{K,m}$, alors
- *pour $v \in \gamma$, $\sigma_{w_0}(x) > 0$,*
- *pour $v \in S_0$, $v(x) \equiv 0\ (f_v)$, i.e $x = \pi^{a.f_v}.u$, où π est une uniformisante de k_v et u une unité.*

Remarque 4.3 :
On peut noter que cette condition est indépendante du choix de $w_0|v$.

Remarque 4.4 :
Si K/k est T-ramifiée modérée, S-décomposée, cyclique et telle que $E^S_{k,m} = E^{S\cup\gamma}_{k,m}$, alors $H^S_{K/k,m}$ est vérifiée.

b) Étude d'un cas limite : $H^1(G, cl^S_{K,m}) = 1$.

Reprenons le diagramme (2) ; nous avons alors

$$ker\ a^S_m = ker\ (d \circ b),$$

i.e

$$\left|ker\ a^S_m\right| = |ker\ (d \circ b)|,$$

et ainsi, en reprenant la démonstration du théorème 4.1, on obtient

$$A^S_m = \frac{\prod_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} f_v}{f}$$

On peut remarquer que l'hypothèse $H^1(G, cl^S_{K,m}) = 1$ est vérifiée, si $|cl^S_{K,m}|$ est étranger à $|G|$; dans ce cas, on a un isomorphisme entre $\hat{H}^n(G, \frac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}})$ et $\hat{H}^n(G, \mathcal{C}_K)$, pour tout n entier, et par conséquent $a^S_m\left(H^2(G, \mathcal{U}^S_{K,m})\right) = C_f$.

Notons par $C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$, avec $n_1 | \ldots | n_r$ et $n_r = f$, la décomposition canonique de $H^2(G, \mathcal{U}^S_{K,m})$; en utilisant la suite exacte

$$1 \longrightarrow H^2(G, E^S_{K,m}) \xrightarrow{i^S_m} H^2(G, \mathcal{U}^S_{K,m}) \xrightarrow{a^S_m} H^2(G, \frac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}}) \longrightarrow H^3(G, E^S_{K,m}) \longrightarrow 1,$$

on a alors la proposition suivante :

Proposition 4.3 :
Soit K/k une extension galoisienne finie, de groupe de Galois G, T-ramifiée modérée ; supposons $|cl^S_{K,m}|$ étranger à $|G|$, alors il vient :

i) $A^S_m = \left|H^2(G, E^S_{K,m})\right| = \dfrac{\prod_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} f_v}{f}$;

plus précisément, on a l'isomorphisme

$$H^2(G, E^S_{K,m}) \simeq C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_{r-1}},$$

où $C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$ est la décomposition canonique de $\prod_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} C_{f_v}$;

ii) $H^3(G, E^S_{K,m}) \simeq C_{\frac{n}{f}}$,

où $f = ppcm\{f_v,\ v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}\}$, et $n = [K : k]$.

On peut noter que ce résultat est donc valable, si K désigne une T-tour finie de k, une T-S tour finie de k, une p-T-tour finie de k, ou bien une p-T-S tour finie de k.

Corollaire 4.1 :
Soit K/k une extension galoisienne finie, T-ramifiée modérée, S_0-décomposée tel que $\left(|G|, |cl^S_{K,m}|\right) = 1$;
alors si $|\gamma| \leq 1$, $H^2(G, E^S_{K,m}) = 1$; sinon nous avons $H^2(G, E^S_{K,m}) \simeq C_2^{|\gamma|-1}$.

Ce corollaire peut par exemple, s'appliquer à la 2-T-S-tour de k lorsque celle-ci est finie.

Remarque 4.5 :
Si $cl^S_{k,m}(p)$ est un groupe cyclique d'ordre n, alors on peut remarquer que la p-T-S tour K de k est finie et de plus que $k^S_T(p) = k^S_{1,T}(p)$ [Mai] ; dans ce cas précis

$H^3(G, E^S_{K,m})$ s'identifie à $\dfrac{E^{S\,*}_{K,m}}{\left(E^S_{K,m}\right)^{1-\sigma}}$, où σ est un élément générateur de G et $E^{S\,*}_{K,m}$ le noyau dans $E^S_{K,m}$ de la norme $N_{K/k}$. Ainsi $\dfrac{E^{S\,*}_{K,m}}{\left(E^S_{K,m}\right)^{1-\sigma}}$ est isomorphe à $C_{\frac{n}{f}}$ avec $f = 2$ si et seulement si au moins une place infinie réelle de k se complexifie dans K, sinon $f = 1$.
A ce propos, on retrouve un cas particulier du théorème 2.1, i.e dans ce cas $|\Gamma| = f$.

Remarque 4.6 :
Prenons pour K la 2-T-S tour de k et supposons K/k finie.
On peut alors se poser la question suivante : à quelle condition a-t-on un isomorphisme entre $H^{-1}(G, \frac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}})$ et $\hat{H}^0(G, E^S_{K,m})$?
Par le lemme 4.2, nous avons la suite exacte

$$1 \longrightarrow H^{-1}(G, \frac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}}) \longrightarrow \hat{H}^0(G, E^S_{K,m}) \longrightarrow \hat{H}^0(G, \mathcal{U}^S_{K,m})$$
$$\longrightarrow \hat{H}^0(G, \frac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}}) \longrightarrow H^1(G, E^S_{K,m}) \longrightarrow 1.$$

On retrouve de nouveau la suite du théorème 2.1.
Montrer l'isomorphisme entre $H^{-1}(G, \frac{\mathcal{U}^S_{K,m}}{E^S_{K,m}})$ et $\hat{H}^0(G, E^S_{K,m})$ équivaut à $E^S_{k,m} = E^{S\cup\gamma}_{k,m}$, γ étant l'ensemble des places de k se complexifiant dans K/k ; dans ce cas on peut alors remarquer que l'extension $k^S_{1,T}(2)/k$ est complexifiée en γ, et d'autre part que :

$$Gal\left(k^S_{1,T}(2)/k^{S\cup\gamma}_{1,T}(2)\right) = \bigoplus_{v\in\gamma} D_v\left(k^S_{1,T}(2)/k\right).$$

Exemple 4.1.
Prenons $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-3}, \sqrt{-7}\right)$, $k = \mathbb{Q}$, $T = \{3, 7\}$, $S = \emptyset$; K/k est T-ramifiée modérée ; $\gamma = \{id\}$.
On a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
K \arrow[d] & \mathcal{P}_3 \arrow[d] & \mathcal{Q}_7 \arrow[d] & \mathcal{Q}'_7 \arrow[dl] \\
\mathbb{Q}(\sqrt{21}) \arrow[d] & \mathcal{P}_3 \arrow[d] & \mathcal{P}_7 \arrow[d] & \\
k & 3 & 7 &
\end{tikzcd}$$

En utilisant la proposition 1.1, on a

$$|cl^S_{\mathbb{Q},m}| = 12 \ ;$$

ainsi le 2-rang de $cl^S_{\mathbb{Q},m}$ est égal à 2, et $\mathbb{Q}^S_{1,T}(2) = K$.

Par conséquent, $kerj^S_{K/k,m} = cl^S_{\mathbb{Q},m}(2)$; ainsi en utilisant le théorème 2.1, on a

$$H^1(G, E^S_{K,m}) \simeq C_2.$$

Étude de $E^{\bar{S}}_K / E^S_{K,m}$ *:*
Afin d'obtenir la structure du quotient $E^{\bar{S}}_K / E^S_{K,m}$, il suffit d'observer l'image diagonale de $E^{\bar{S}}_K$ dans $F_{\mathcal{P}_3}.F_{\mathcal{Q}_7}.F_{\mathcal{Q}'_7}$; ici $F_{\mathcal{P}_3}$ est le corps à 3^2 éléments, dont le sous-groupe multiplicatif est engendré par ω, racine de $X^8 - 1$ dans $\mathbb{F}_3$; $F_{\mathcal{Q}_7}$ et $F'_{\mathcal{Q}_7}$ sont deux corps à 7 éléments.
Notons par ε l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$, $\varepsilon = 2 + \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.
Par PARI, on peut remarquer que

$$\varepsilon = -(x)^2,$$

où x est une unité de K.
Ainsi de $\varepsilon \equiv 1 \ (\mathcal{P}_3)$, on a $x = \omega^2$ dans $F_{\mathcal{P}_3}$.
Ensuite, comme $\varepsilon \equiv -1 \ (\mathcal{P}_7.\mathcal{P}'_7)$, alors $x^2 \equiv 1 \ (\mathcal{P}_7.\mathcal{P}'_7)$, et ainsi il vient :

$$x \equiv -1 \ (\mathcal{Q}_7) \ , \ x \equiv 1 \ (\mathcal{Q}'_7), \quad \text{par exemple} .$$

En résumé, matricellement nous avons :

$$\begin{array}{c} \\ \zeta_6 \\ x \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_{\mathcal{P}_3} & F_{\mathcal{Q}_7} & F'_{\mathcal{Q}_7} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \omega^4 & -2 & -4 \\ \omega^2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Ceci permet d'obtenir la structure de $cl^S_{K,m}$ (cf. théorème 1.1) :

$$cl^S_{K,m} \simeq C_{12}.$$

Application du théorème 4.1 :
Pour que $H^S_{K/k,m}$ soit vérifiée, il suffit que pour tout $x \in E^S_{K,m} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{21})$, x soit totalement positif; ici $E^S_{K,m} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{21})$ est un sous-groupe du groupe $\langle \varepsilon \rangle$ où $\varepsilon = 2 + \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$, et ainsi $H^S_{K/k,m}$ est vérifiée.

Corollaire 4.2 :
Sous les hypothèses de l'exemple 4.1,

$$H^2(G, E^S_{K,m}) \simeq \frac{\left(cl^S_{K,m}\right)^G}{j^S_{K/k,m}(cl^S_{\mathbb{Q},m})} = \left(cl^S_{K,m}\right)^G,$$

et par conséquent

$$H^2(G, E^S_{K,m}) \textit{ est un sous-groupe de } C_4.$$

On peut remarquer que la 2-T-S tour de $\mathbb{Q}$ est finie, puis que $\mathbb{Q}^S_T(2) = \mathbb{Q}^S_{2,T}(2)$, ceci par un résultat de [Mai].

5 Étude du cas cyclique.

Dans cette partie, nous supposerons que K/k est une extension *cyclique*, T-ramifiée modérée ; sous cette hypothèse, la borne majorant A^S_m est optimale, i.e. nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.1 :
Soit K/k une extension cyclique de groupe de Galois G, T-ramifiée modérée ; alors

$$\frac{|H^2(G, E^S_{K,m})|}{\left|\left(cl^S_{K,m}\right)^G / j^S_{K/k,m}(cl^S_{k,m})\right|} = \frac{\prod\limits_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} f_v}{f}.$$

Tout d'abord un lemme qui résulte d'un résultat de Gras [Gra] :

Lemme 5.1 : Ordre des T-S classes ambiges de K.
On a la formule suivante :

$$\left|\left(cl^S_{K,m}\right)^G\right| = \frac{|cl_{k,m}|}{[K:k].|cl_{k,m}\langle (v^{f_v})_{v\in S_0}, (a^v_m)_{v \in S_\infty \setminus (S_\infty \cap \gamma)}\rangle|},$$

où f_v est le degré résiduel de v dans K/k et où $a^v_m \in k^{+v}_m$.

Démonstration du lemme :
Appliquons à notre situation la formule établie par Gras [Gra, §2, théorème 2.7] avec $\mathcal{H} = cl_{k,m}\langle S_0, (b^w_m)_{w|v,\ v\in S_\infty}\rangle$ et où $b^w_m \in K^{+w}_m$; on a alors :

$$\left|\left(cl^S_{K,m}\right)^G\right| = \frac{|cl_{k,m}|.\prod\limits_{v\notin T} e_v.\left(U_{k,m} : N_{K/k}U_{K,\mathcal{M}}\right)}{[K:k].\left|cl_{k,m}\langle (v^{f_v})_{v\in S_0}, (a^v_m)_{v\in S_\infty\setminus(S_\infty\cap\gamma)}\rangle\right|.\left(\Lambda : \Lambda \cap K^+_{\mathcal{M}}\right)},$$

où

- $N_{K/k}U_{K,\mathcal{M}} = \prod\limits_{v\in T}\prod\limits_{\substack{w|v \\ w\in pl_K}} N_{K_w/k_v}U^{e_w}_{K_w}$, avec e_w ($=e_v$) l'indice de ramification de

w dans K/k, et $U^{e_w}_{K_w} = \{x \in U_{K_w},\ w(x-1) \geq e_w\}$,

- $U_{k,m} = \prod\limits_{v\in T} U^1_{k_v}$,
- $K^+_{\mathcal{M}} = \{x \in K^+,\ x \equiv 1(\mathcal{M}),\ \mathcal{M} = \prod\limits_{v\in T}\prod\limits_{w|v} w^{e_w}\}$,
- $\Lambda = \{x \in k^+_m,\ (x) \in \langle N_{K/k}(S_0).N_{K/k}\left((b^w_m)_{w|v,\ v\in S_\infty}\right)\rangle\}$, où $b^w_m \in K^{+w}_m$.

L'extension étant T-ramifiée modérée, il vient alors immédiatement :
i) $\prod\limits_{v\notin T} e_v = 1$,
ii) $\left(U_{k,m} : N_{K/k}U_{K,\mathcal{M}}\right) = 1$ [Se1, chapitre V, §6, corollaire 3, page 101].

D'autre part, pour x de Λ, on a par définition $(x) \in \langle N_{K/k}(S_0).N_{K/k}\left((b^w_m)_{w|v,\ v\in S_\infty}\right)\rangle$, i.e

$$x \in E^{NS_0 \cup S_\infty \setminus (S_\infty \cap \gamma)}_{k,m},$$

où $E^{N(S_0)\cup S_\infty\setminus(S_\infty\cap\gamma)}_{k,m} = \{x \in E^{S_0\cup S_\infty\setminus(S_\infty\cap\gamma)}_{k,m},\ v(x) \equiv 0(f_v),\ \forall v \in S_0\}$.

On voit immédiatement que tout élément de $E_{k,m}^{N(S_0)\cup S_\infty\setminus(S_\infty\cap\gamma)}$ est partout norme locale dans K/k, par conséquent norme globale; en résumé tout x de Λ est norme globale dans K/k.
Il reste à vérifier que si x est élément de $\Lambda\cap N_{K/k}K^\times$, alors en fait x appartient à $N_{K/k}K_{\mathcal{M}}^+$; on peut déja s'assurer que x est norme d'un élément de K_T^+ [Gra, §2, lemme 2.5], puis il faut remarquer, puisque l'extension est T-ramifiée modérée, que tout x de $\Lambda\cap N_{K/k}K_T^+$ appartient au noyau de l'application surjective $\mathcal{N}$ suivante:

$$N_{K/k}(K_T^+)\xrightarrow{\mathcal{N}}\prod_{v\in T}\prod_{w|v}\frac{N_{K_w/k_v}U_{K_w}}{N_{K_w/k_v}U_{k_w}^{e_w}}.$$

Enfin, comme le noyau de $\mathcal{N}$ est exactement $N_{K/k}(K_{\mathcal{M}}^+)$, [Gra, 2.6.1 et 2.6.2], on en déduit alors la trivialité de $\left(\Lambda:\Lambda\cap K_{\mathcal{M}}^+\right)$. □

Nous pouvons alors démontrer le théorème 5.1 :

Démonstration :
On rappelle que l'on note par A_m^S le quotient $\dfrac{|H^2(G,E_{K,m}^S)|}{\left|\left(cl_{K,m}^S\right)^G/j_{K/k,m}^S(cl_{k,m}^S)\right|}$; il vient alors

$$A_m^S=\frac{|H^2(G,E_{K,m}^S)|.|H^1(G,E_{K,m}^S)|.|j_{K/k,m}^S\left(cl_{k,m}^S\right)|}{|H^1(G,E_{K,m}^S)|.|\left(cl_{K,m}^S\right)^G|},$$

égalité qui devient :

$$A_m^S=Q(E_{K,m}^S).\frac{|ker(j_{K/k,m}^S)|.\left(E_{K,m}^{S\cup\gamma}:E_{K,m}^S\right).|j_{K/k,m}^S\left(cl_{k,m}^S\right)|}{2^{|\hat{\gamma}|}.|\left(cl_{K,m}^S\right)^G|},$$

ceci par le théorème 2.1, et où $Q(E_{K,m}^S)$ désigne le quotient de Herbrand de $E_{K,m}^S$.
On sait que $Q(E_{K,m}^S)$ est égal à $\dfrac{\prod_{v\in S_0\cup pl_{k,\infty}}f_v}{[K:k]}$ [La, chapitre IX, §5, corollaire 2, page 192].
Ainsi, on a en utilisant le lemme 5.1,

$$A_m^S=\frac{2^{|\gamma\setminus\hat{\gamma}|}.\prod_{v\in S_0}f_v.|cl_{k,m}^S|.\left(E_{K,m}^{S\cup\gamma}:E_{K,m}^S\right).\left|cl_{k,m}\left(\langle(v^{f_v})_{v\in S_0},\ (a_m^v)_{v\in S_\infty\setminus(S_\infty\cap\gamma)}\rangle\right)\right|}{|cl_{k,m}^S|}.$$

Par le corollaire 1.1, on a :

$$\left|\frac{cl_{k,m}^S}{cl_{k,m}^{S\cup\gamma}}\right|=2^{|\hat{\gamma}|}.\left(E_{K,m}^{S\cup\gamma}:E_{K,m}^S\right)^{-1};$$

par conséquent,

$$A_m^S = \prod_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} f_v . \frac{|cl_{k,m}^{S \cup \gamma}| . \left| cl_{k,m}\left(\langle (v^{f_v})_{v \in S_0},\ (a_m^v)_{v \in S_\infty \setminus (S_\infty \cap \gamma)} \rangle \right) \right|}{|cl_{k,m}|},$$

mais encore

$$A_m^S = \prod_{v \in S_0 \cup pl_{k,\infty}} f_v . \frac{\left| cl_{k,m}\left(\langle (v^{f_v})_{v \in S_0},\ (a_m^v)_{v \in S_\infty \setminus (S_\infty \cap \gamma)} \rangle \right) \right|}{\left| cl_{k,m}\left(\langle (v)_{v \in S_0},\ (a_m^v)_{v \in S_\infty \cup \gamma} \rangle \right) \right|}.$$

Si l'on observe le quotient

$$\frac{cl_{k,m}\left(\langle (v)_{v \in S_0},\ (a_m^v)_{v \in S_\infty \cup \gamma} \rangle \right)}{cl_{k,m}\left(\langle (v^{f_v})_{v \in S_0},\ (a_m^v)_{v \in S_\infty \setminus (S_\infty \cap \gamma)} \rangle \right)},$$

dans l'extension $k(m)/k$, on s'aperçoit qu'il peut s'identifier à un sous-groupe de $Gal(K/k)$, plus précisément au sous-groupe de $Gal(K/k)$ engendré par les groupes de décomposition des places de $S_0 \cup pl_{k,\infty}$; ainsi si l'on note par f le *ppcm* des degrés résiduels f_v des places v de $S_0 \cup pl_{k,\infty}$, on a alors

$$\frac{cl_{k,m}\left(\langle (v)_{v \in S_0},\ (a_m^v)_{v \in S_\infty \cup \gamma} \rangle \right)}{cl_{k,m}\left(\langle (v^{f_v})_{v \in S_0},\ (a_m^v)_{v \in S_\infty \setminus (S_\infty \cap \gamma)} \rangle \right)} \simeq C_f,$$

et par conséquent le théorème 5.1. □

Références

[AT] E. Artin et J. Tate, Class Field Theory, W. A. Benjamin inc., New York, 1968.

[AW] M.-F. Atiyah et C.-T.-C. Wall, Cohomology of Groups, dans "J.-W.-S Cassels et A. Fröhlich, Algebraic Number Theory", Academic Press London, 1967.

[Ca] J.-W.-S Cassels, Global Fields, dans "J.-W.-S Cassels et A. Fröhlich, Algebraic Number Theory", Academic Press London, 1967.

[Fr] A. Fröhlich, Local Fields, dans "J.-W.-S Cassels et A. Fröhlich, Algebraic Number Theory", Academic Press London, 1967.

[Gra] G. Gras, Classes généralisées invariantes, J. Math. Soc. Japan, Vol. 46 No. 3 (1994), 467-476.

[Gru] K. Gruenberg, Profinite Groups, dans "J.-W.-S Cassels et A. Fröhlich, Algebraic Number Theory", Academic Press London, 1967.

[Iw] K. Iwasawa, A note on the group of units of an algebraic number field, J. Math Pures et Appl., 35 (1956), 180-192.

[Ja1] J.-F. Jaulent, L'état actuel de la capitulation, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, 17 (1988), 1-31.

[Ja2] J.-F. Jaulent, L'arithmétique des l-extensions, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Fascicule 1 (1986).

[Ko1] H. Koch, Number Theory II, EMS 62, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Ko2] H. Koch, Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970.

[La] S. Lang, Algebraic Number Theory, Addison Wesley, New York, 1970.

[Le] F. Lemmermeyer, Construction of Hilbert Class Field II, peprint, 1994.

[Mai] C. Maire, Finitude de tours et p-tours T-ramifiées modérées, S-décomposées, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, à paraitre.

[Mat] N. Matsumura, On the cohomology groups of the unit group of an algebraic number field, Mem. Fac. Sci. Kyushu University, Ser. A 26, 1972.

[Ro] P. Roquette, On Class Field Towers, dans "J.-W.-S Cassels et A. Fröhlich, Algebraic Number Theory", Academic Press London, 1967.

[Sc] B. Schmithals, Kapitulation der Idealklassen und Einheitenstruktur in Zahlkörpern,

[Se1] J.-P. Serre, Corps Locaux, Hermann, Paris, 1968.

[Se2] J.-P. Serre, Local Class Field Theory, dans "J.-W.-S Cassels et A. Fröhlich, Algebraic Number Theory", Academic Press London, 1967.

[Su] H. Suzuki, A generalisation of Hilbert's theorem 94, Nagoya Math. J., vol.121 (1991).

[Ta] J. Tate, Global Class Field Theory, dans "J.-W.-S Cassels et A. Fröhlich, Algebraic Number Theory", Academic Press London, 1967.

Christian Maire
Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques - U.R.A 741
16, route de Gray
25030 Besançon cedex