Annales scientifiques de l'É.N.S.

Émile Picard

Sur les intégrales abéliennes de seconde espèce et sur leur périodicité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES
INTÉGRALES ABÉLIENNES DE SECONDE ESPÈCE
ET
SUR LEUR PÉRIODICITÉ,

PAR M. ÉMILE PICARD.

On peut présenter de bien des manières la théorie des intégrales abéliennes de seconde espèce et les problèmes relatifs à leur périodicité. Il ne me paraît pas sans intérêt, au point de vue pédagogique tout au moins, d'indiquer la manière très simple dont j'ai présenté l'été dernier cette question dans mon cours, supposant seulement connus les principes élémentaires de la théorie des fonctions analytiques. Nous supposerons que la courbe algébrique de degré n

$$f(x, y) = 0$$

n'a que des points doubles à tangentes distinctes, et est disposée arbitrairement par rapport aux axes, les n directions asymptotiques étant distinctes.

I. — Quelques remarques générales.

1. Commençons par quelques remarques préliminaires. On fait d'abord la réduction des intégrales de la forme

$$(1) \qquad \int \frac{Q(x, y)\, dx}{(x-a)^\alpha f'_y},$$

où α est un entier positif. Comme je l'ai montré dans les diverses éditions de mon *Traité d'Analyse* (en particulier 2e édition, Tome I, p. 62), on peut par la soustraction de la dérivée d'une fonction rationnelle de x et y, ramener une telle intégrale à des intégrales de même forme, où $\alpha = 1$. Pour effectuer cette réduction [1], trois cas sont à distinguer, suivant que la droite $x = a$ rencontre la courbe en n points distincts, est tangente à la courbe, ou enfin passe par un point double. Nous n'aurons pas besoin dans la suite de la réduction pour le cas où la droite $x = a$ est tangente à la courbe. Quand cette droite rencontre la courbe en n points distincts, la réduction se fait en retranchant de (I) une expression convenable de la forme

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha-1}},$$

$\lambda(x, y)$ étant un polynome.

Quand la droite $x = a$ passe par un point double, la réduction se fait en retranchant de (I) une expression de la forme

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha+1}},$$

λ étant un polynome convenablement choisi.

2. Établissons maintenant que toutes les intégrales abéliennes relatives à la courbe f, *restant finies à distance finie*, sont nécessairement de la forme

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

P étant un polynome.

---

[1] On utilise les remarques suivantes, dont la démonstration est immédiate. Quand la droite $x = a$ rencontre la courbe en n points distincts, le quotient

$$\frac{P(x, y)}{x-a}$$

pourra se mettre sous la forme d'un polynome en x et y, si le polynome $P(x, y)$ s'annule en ces n points. Si la droite $x = a$ est tangente à la courbe en un point (a, b) ou passe par le point double (a, b), aux conditions que $P(x, y)$ s'annule aux points de rencontre avec la courbe, il faut ajouter la condition

$$P'_b(a, b) = 0.$$

Soit

$$\int R(x, y)\,dx \qquad (\text{R rationnel en } x \text{ et } y),$$

une intégrale abélienne restant finie à distance finie ; il est clair que l'intégrale

$$\int y^\lambda R(x, y)\,dx \qquad (\lambda \text{ entier positif})$$

restera également finie à distance finie. Désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n racines de

$$f(x, y) = 0;$$

l'expression symétrique

$$y_1^\lambda R(x, y_1) + y_2^\lambda R(x, y_2) + \ldots + y_n^\lambda R(x, y_n)$$

sera une fonction rationnelle $P(x)$, et comme

$$\int P(x)\,dx$$

doit rester finie à distance finie, $P(x)$ sera un polynome. Écrivons donc en faisant $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\begin{array}{l} R(x, y_1) + R(x, y_2) + \ldots + R(x, y_n) = P_0(x), \\ y_1 R(x, y_1) + y_2 R(x, y_2) + \ldots + y_n R(x, y_n) = P_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1^{n-1} R(x, y_1) + y_2^{n-1} R(x, y_2) + \ldots + y_n^{n-1} R(x, y_{n-1}) = P_{n-1}(x), \end{array}$$

les seconds membres étant des polynomes. Résolvons ces équations par rapport à $R(x, y_1)$. On peut écrire

$$\frac{f(x, y)}{y - y_1} = (y - y_2)\ldots(y - y_n) = y^{n-1} + B_1 y^{n-2} + \ldots + B_{n-1},$$

où les B sont des polynomes en x et y_1. On en déduit de suite

$$f'_y(x, y_1) = y_1^{n-1} + B_1 y_1^{n-2} + \ldots + B_{n-1}.$$

La résolution des équations du premier degré se fera de suite en multipliant les équations par $1, B_1, \ldots, B_{n-1}$. Il vient ainsi

$$f'_y(x, y_1)\,R(x, y_1) = \chi(x, y_1),$$

χ étant un polynome en x et y_1. On en déduit, en supprimant l'indice,

$$R(x, y) = \frac{\chi(x, y)}{f'_y(x, y)};$$

c'est le théorème énoncé [1].

3. Cherchons enfin la forme générale d'une fonction rationnelle de x et y, qui reste finie à distance. Soit $R(x, y)$ une telle fonction rationnelle. Il est clair que si R reste finie, à distance finie, il en sera de même de

$$\int R\, dx,$$

et, par suite, on a

$$R(x, y) = \frac{Q(x, y)}{f'_y},$$

$Q(x, y)$ étant un polynome en x et y. Pour que R reste finie à distance finie, il faut et il suffit évidemment que la courbe

$$Q(x, y) = 0$$

passe par les points doubles et par les points de contact des tangentes à la courbe parallèles à l'axe Oy.

II. — Des intégrales de seconde espèce; nombre des intégrales distinctes de seconde espèce.

4. On appelle *intégrales de seconde espèce* les intégrales abéliennes ne présentant nulle part, ni à distance finie ni à l'infini, de singularités logarithmiques.

Nous pouvons supposer, les axes ayant une orientation quelconque par rapport à la courbe, que l'intégrale de seconde espèce envisagée ne devient pas infinie en des points simples de la courbe situés sur des tangentes parallèles à Oy ou sur des parallèles à Oy passant par

---

(1) On remarquera que la démonstration précédente ne suppose en rien que la courbe f n'a que des singularités ordinaires; les singularités pourraient être quelconques.

les points doubles. Mettons l'intégrale sous la forme

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{f'_y} + \sum \int \frac{P(x,y)}{(x-a)^\alpha}\frac{dx}{f'_y},$$

Q et les P étant des polynomes. Si une droite $x=a$ est tangente à la courbe, l'intégrale correspondante pourra seulement devenir infinie aux points doubles de la courbe, les seuls termes devenant infinis en ces points étant de nature logarithmique.

Pour les autres droites $x=a$, on pourra, d'après le paragraphe 1, supposer, après une soustraction convenable, que α est égal à *un*.

Nous aurons donc une intégrale de *seconde* espèce, que nous pouvons mettre sous la forme

$$J = \int \frac{Q(x,y)\,dx}{f'_y} + \sum \int \frac{P(x,y)}{(x-a)}\frac{dx}{f'_y} + \sum_1 \int \frac{P_1(x,y)}{(x-a_1)^\alpha}\frac{dx}{f'_y},$$

les droites $x=a$ rencontrant la courbe en n points distincts ou passant par les points doubles, tandis que les droites $x=a_1$ sont tangentes à la courbe et qu'une intégrale de la somme $\sum_1$ peut seulement devenir infinie aux points doubles.

Considérons les intégrales de la somme $\sum$. Si $x=a$ rencontre la courbe en n points distincts, il est nécessaire que $P(x,y)$ s'annule en ces points; car, autrement, ces points seraient des points singuliers logarithmiques. On en conclut que le quotient correspondant

$$\frac{P(x,y)}{x-a}$$

est susceptible de se mettre sous la forme d'un polynome en x et y, et l'intégrale est de la forme du premier terme de J.

Envisageons maintenant une intégrale de la somme $\sum$

$$\int \frac{P(x,y)}{x-a}\frac{dx}{f'_y}, \tag{1}$$

pour laquelle la droite $x=a$ passe par un point double A de coordonnées (a, b). Désignons par $B_1, B_2, \ldots, B_{n-2}$ les $n-2$ autres points de rencontre de $x=a$ avec la courbe. Le polynome P s'annulera nécessairement aux points B, sinon ils seraient des infinis logarithmiques. L'intégrale (1) peut avoir comme infinis, avec terme uniquement logarithmique, les points doubles de la courbe autres que le point A. En ce dernier point, l'intégrale pourra devenir infinie sur l'une et l'autre branche, avec un terme en

$$\frac{1}{x-a}$$

et un terme logarithmique en

$$\log(x-a).$$

Nous allons montrer maintenant que l'on peut retrancher de (1) une expression

$$H = \frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^2} \qquad (\lambda \text{ polynome}),$$

restant finie aux points B, et telle que la différence entre l'intégrale (1) et H n'ait plus, sur l'une et l'autre branche, comme terme devenant infini en A que le terme logarithmique.

Il faudra d'abord choisir $\lambda(x, y)$ de telle sorte que la courbe $\lambda = 0$ soit tangente à $f = 0$ aux points B. Ensuite le polynome $\lambda(x, y)$ devra s'annuler en A. Si on le développe suivant les puissances de $x-a$ et $y-b$, on peut choisir les coefficients des termes du premier degré de manière que la différence entre (1) et H n'ait plus de terme en

$$\frac{1}{x-a}$$

sur l'une et l'autre branche.

En retranchant des différents termes de la somme $\sum$ une expression analogue à H, on aura l'intégrale

$$J_1 = J - \sum H$$

qui manifestement sera encore une intégrale de seconde espèce. D'autre part, elle ne pourra devenir infinie qu'aux points doubles, et en chacun de ces points l'infini ne pourra être que de nature purement logarithmique. On en conclut que J_1 *reste toujours finie à distance finie.* Par suite, d'après le paragraphe 2, J_1 est de la forme

$$J_1 = \int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y}.$$

Nous arrivons donc à la conclusion, que *toutes les intégrales de seconde espèce, par la soustraction d'une fonction rationnelle convenable de x et y, se ramènent à la forme*

$$\int \frac{P(x, y)\, dx}{f'_y}, \tag{2}$$

$P(x, y)$ *étant un polynome* (1).

Il résulte évidemment du théorème du paragraphe 2 qu'une intégrale de seconde espèce de la forme (2) garde la même forme quand on fait tourner les axes Ox et Oy.

5. Nous devons chercher maintenant à quelles conditions une intégrale (2) est de seconde espèce. Il faudra tout d'abord que $P(x, y)$ s'annule pour les points doubles, car, autrement, il y aurait un point singulier logarithmique au point double pour l'une et l'autre branche. De tels polynomes sont dits *polynomes adjoints*. $P(x, y)$ s'annulant aux points doubles, l'intégrale (2) reste finie à distance finie. On voit en effet de suite qu'elle reste finie aux points de contact des tangentes parallèles à Oy. L'intégrale deviendra en général infinie aux n points à l'infini de la courbe. On voit facilement que *la somme des résidus de* $R(x, y)$ *sera nulle*. Posons en effet

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{f'_y},$$

et formons, pour les n branches, la somme

$$R(x, y_1) + R(x, y_2) + \ldots + R(x, y_n);$$

elle se réduira nécessairement à un polynome en x. La somme des résidus de $R(x, y)$ pour les n points à l'infini est donc nulle nécessairement.

---

(1) Nous avons supposé dans la réduction que certaines quantités a étaient connues. Il est clair que ces quantités pourraient n'être pas connues individuellement, mais être racines de certains polynomes. La considération des fonctions symétriques permet de n'introduire aucune irrationalité, et nous pouvons dire que la réduction à la forme (2), d'une intégrale de seconde espèce rationnelle par rapport aux coefficients de f, est susceptible d'être faite *sans l'introduction d'irrationnelles*.

Le nombre des conditions pour que l'intégrale restant finie à distance finie

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y}$$

soit de seconde espèce est donc au plus égal à $n - 1$. Il est essentiel de démontrer qu'*il y a bien effectivement* $n - 1$ *conditions distinctes*.

6. Avant d'aborder ce point, arrêtons-nous sur les intégrales de *première* espèce, c'est-à-dire sur les intégrales restant partout finies. Il est facile de voir que le degré de P ne devra pas dépasser $n - 3$. Les intégrales de première espèce sont donc de la forme

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{f'_y},$$

$Q(x, y)$ étant un polynome de degré $n - 3$ s'annulant pour les points doubles. On établit que le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes est égal à

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d \qquad \text{(que l'on désigne par } p\text{)},$$

d étant le nombre des points doubles. On peut effectuer la démonstration, en se servant du théorème d'Abel sous sa forme élémentaire, comme je l'ai fait dans mon *Traité d'Analyse* (2^e édition, t. II, p. 447); je me bornerai à y renvoyer. Si l'on veut rester à un point de vue algébrique, on peut utiliser la théorie des groupes de points sur une courbe plane de Brill et Nœther (*voir*, par exemple, le Tome II de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, p. 21).

7. Revenons au théorème énoncé à la fin du paragraphe 5, et considérons à cet effet le cas où $P(x, y)$ est de degré $n - 2$. Ce polynome, qui s'annule aux points doubles, contient exactement

$$p + n - 1 \text{ constantes,}$$

puisque déjà, pour le polynome de degré $n - 3$, la disposition des points doubles ne pouvait avoir aucune influence sur le dénombrement des conditions (paragraphe précédent).

Les $p+n-1$ polynomes adjoints P, d'ordre $n-2$, linéairement indépendants, sont, si l'on veut, les p polynomes adjoints d'ordre $n-3$, puis $n-1$ autres avec des termes de degré $n-2$; d'où la conséquence que, dans le polynome adjoint général d'ordre $n-2$, les termes d'ordre $n-2$ peuvent être pris arbitrairement. Soit

$$\begin{aligned} P(x, y) &= p_{n-2}(x, y) + p_{n-3}(x, y) + \ldots, \\ f(x, y) &= \quad \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots. \end{aligned}$$

Les résidus de l'intégrale (2) sont

$$\frac{p_{n-2}(1, t_i)}{\varphi'_n(1, t_i)},$$

t_i étant une racine de $\varphi_n(1, t) = 0$. Or, si l'on décompose

$$\frac{p_{n-2}(1, t)}{\varphi_n(1, t)}$$

en éléments simples, on aura

$$\frac{A_1}{t-t_1} + \frac{A_2}{t-t_2} + \ldots + \frac{A_n}{t-t_n}.$$

On a bien $\Sigma A = 0$; mais, sauf cette condition, les A sont arbitraires. On est donc assuré que, pour P de degré $n-2$, et *a fortiori* pour P de degré supérieur, *le nombre des conditions exprimant que l'intégrale*

$$\int \frac{P(x, y)\, dx}{f'_y}$$

n'a pas de point logarithmique à l'infini est exactement égal à $n-1$.

8. Nous arrivons maintenant à la recherche du nombre des intégrales *distinctes* de seconde espèce, c'est-à-dire des intégrales dont aucune combinaison linéaire n'est une fonction rationnelle de x et y. On peut établir d'abord que, par la soustraction d'un polynome convenable en x et y, l'intégrale ci-dessus peut être ramenée à une intégrale de même forme, où le degré de P ne surpasse pas $m-4$. La démonstration est très facile (*voir*, d'ailleurs, t. I, p. 65 de mon Traité). Nous sommes ainsi assuré que le nombre des intégrales distinctes de seconde

espèce est limité. Nous allons cependant raisonner en supposant que dans l'intégrale de seconde espèce

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y}, \tag{3}$$

le polynome adjoint P soit de degré quelconque λ.

Toute intégrale du type précédent, qui serait rationnelle en x et y, est nécessairement de la forme

$$\int \frac{d}{dx}\left[\frac{Q(x, y)}{f'_y}\right] dx \tag{4}$$

$Q(x, y)$ étant un polynome adjoint d'ordre $\lambda + 1$, qui passe en outre par les points de la courbe, où la tangente est parallèle à Oy (§ 3). Cherchons combien de constantes figurent dans (3) et (4); leur différence donnera le nombre cherché des intégrales *distinctes* de seconde espèce.

Dans (3) le nombre des constantes est

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} - \frac{(\lambda-n+1)(\lambda-n+2)}{2} - d - (n-1);$$

le premier terme représente le nombre des constantes figurant dans un polynome de degré λ, le second provient de la réduction de ce nombre par le fait que l'on peut retrancher de $P(x, y)$ le produit

$$\theta(x, y)\,f(x, y),$$

θ étant un polynome de degré $\lambda - n$; le troisième est relatif aux points doubles, et le quatrième provient des conditions pour la seconde espèce. L'expression précédente se réduit à

$$\lambda n + 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - (n-1). \tag{5}$$

Le nombre des constantes de (4) se trouve aussi facilement; c'est

$$(\lambda+1)n + 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - [n(n-1) - 2d] - 1. \tag{6}$$

La signification des termes est bien claire. Nous avons d'abord des termes qui représentent, au terme $-(n-1)$ près, l'expression (5), où λ a été remplacé par $\lambda+1$, il y a ensuite les points de contact représentés par $n(n-1)-2d$. Quant au terme -1, il provient du fait que l'opération de la dérivation supprime dans (4) une constante. Comme λ est pris aussi grand que l'on voudra, toutes les conditions sont bien indépendantes.

En retranchant l'expression (6) de l'expression (5), on trouve le nombre

$$2p.$$

Nous avons donc établi que *le nombre des intégrales* distinctes *de seconde espèce est égal à $2p$*. C'est une proposition fondamentale.

On peut donc former $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_{2p},$$

dont aucune combinaison linéaire n'est une fonction rationnelle de x et y, et telles que toute intégrale de seconde espèce est de la forme

$$A_1 J_1 + A_2 J_2 + \ldots + A_{2p} J_{2p} + \rho(x, y),$$

les A étant des constantes, et $\rho(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y [1].

III. — De la périodicité des intégrales de seconde espèce.

9. Pour compter les périodes, je procède comme le font Briot et Bouquet [2] en introduisant, avec Clebsch et Gordan, la notion des lacets fondamentaux.

On définit d'abord $m-1$ lacets dits *fondamentaux*, en prenant un premier lacet permutant une racine y_0 de

$$f(x_0, y) = 0$$

---

[1] De la note du paragraphe 4 il résulte que les intégrales J peuvent être formées sans introduire aucune irrationalité par rapport aux coefficients de f; la réduction précédente peut se faire dans les mêmes conditions.

[2] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 51.

avec une seconde racine y_1, puis un second lacet permutant l'une des racines y_0 ou y_1 avec une troisième racine y_2, et ensuite un troisième lacet permutant l'une des racines y_0, y_1 ou y_2 avec une quatrième racine y_3, et ainsi de suite jusqu'à y_{m-1}.

On démontre de suite qu'il n'y a qu'un seul chemin formé de lacets fondamentaux unissant une racine y_α à une racine y_β, abstraction faite de lacets parcourus deux fois en sens inverse.

On établit ensuite qu'il n'y a pas de *cycles* formés seulement de lacets fondamentaux. Un cycle *simple* est un cycle contenant un seul lacet non fondamental, et il est immédiat que tout cycle est une somme de cycles simples. On trouve enfin aisément *qu'il y a*

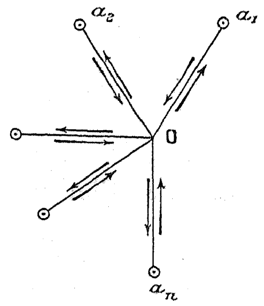
$$2p + n - 1$$

cycles simples. Tous les cycles se ramènent à ceux-ci.

10. Envisageons maintenant une intégrale quelconque de seconde espèce de la forme

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

et cherchons le nombre de ses périodes. Les $2p + n - 1$ cycles



simples, dont nous venons de parler, ne donnent que $2p$ périodes. Pour le voir, on considère le contour fermé, formé par tous les lacets partant d'un point O. L'intégrale prise, en prenant à l'origine O du premier lacet une détermination quelconque y_i pour y, est évidemment nulle, puisqu'elle revient à une intégrale prise autour du point à l'infini.

Les n équations ainsi obtenues se ramènent évidemment de suite à $n-1$, mais *elles ne se ramènent pas à un moindre nombre, d'après ce qui a été dit plus haut* (p. 9) *pour le point à l'infini dans le cas des intégrales de seconde espèce*. Or chacune de ces équations s'exprimera par une relation à coefficients entiers entre les périodes. Nous obtenons par suite $n-1$ relations *distinctes* entre les $2p+n-1$ périodes. Il y a donc *au plus* $2p$ périodes pour une intégrale arbitraire de seconde espèce.

Cette intégrale a-t-elle moins de $2p$ périodes? La réponse est négative, comme il va résulter des résultats précédemment établis. Considérons en effet les $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_{2p}.$$

Le déterminant d'ordre $2p$ formé avec les $2p$ périodes, que nous venons d'obtenir pour chacune de ces intégrales, *n'est pas nul;* car, autrement, on pourrait choisir les A de manière que l'intégrale

$$A_1 J_1 + A_2 J_2 + \ldots + A_{2p} J_{2p}$$

fût sans période, et fût par suite une fonction rationnelle de (x, y). Les intégrales J ne seraient pas alors *distinctes*.

On peut donc former *une intégrale de seconde espèce ayant $2p$ périodes arbitrairement données*, ce qui exclut toute possibilité de réduction pour les périodes.

11. Ainsi se trouvent établis, en toute rigueur, les points essentiels relatifs à la périodicité des intégrales abéliennes, sans recourir à la considération des surfaces de Riemann, comme je l'ai fait dans mon *Traité d'Analyse*.

On peut remarquer que la théorie des intégrales abéliennes de *seconde* espèce est, au fond, plus simple que celle des intégrales abéliennes de *première* espèce. La même circonstance s'est présentée dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, où l'étude des intégrales de différentielles totales de *seconde* espèce est plus facile à faire que celle des intégrales de différentielles totales de *première* espèce.

IV. — Une application de la réduction des intégrales de seconde espèce.

12. Proposons-nous de rechercher comment on pourra reconnaître si une intégrale

$$\int R(x, y)\,dx \qquad (\text{R rationnelle en } x \text{ et } y)$$

est une fonction rationnelle de x et y.

La réduction faite plus haut donne aisément la marche à suivre. Tout d'abord l'intégrale devra être de seconde espèce; on la mettra alors sous la forme

$$A_1 J_1 + A_2 J_2 + \ldots + A_{2p} J_{2p} + \rho(x, y),$$

ρ étant rationnelle en (x, y). Il faut et il suffit que toutes les constantes A soient nulles. On se rend donc compte immédiatement que toutes les conditions sont de nature algébrique.

13. Prenons en particulier une courbe algébrique représentée par

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

équation dont les coefficients sont supposés dépendre rationnellement d'un paramètre α. Prenons une intégrale de seconde espèce (pour α arbitraire),

$$I = \int \frac{Q(x, y, \alpha)\,dx}{f'_y},$$

dépendant rationnellement de α. Il est aisé de voir que ses $2p$ périodes, considérées comme fonctions de α, satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $2p$, à coefficients dépendant rationnellement de α.

En effet les intégrales

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{2p} I}{\partial \alpha^{2p}}$$

sont visiblement des intégrales de seconde espèce, pour α arbitraire. Il y a donc certainement une combinaison linéaire

$$A_0 I + A_1 \frac{\partial I}{\partial \alpha} + \ldots + A_{2p} \frac{\partial^{2p} I}{\partial \alpha^{2p}},$$

où les A sont rationnelles en α, qui est une fonction rationnelle de x et y, puisqu'il ne peut exister $2p+1$ intégrales *distinctes* de seconde espèce.

Si donc ω est une période de l'intégrale, correspondant à un cycle quelconque, on aura

$$A_0 \omega + A_1 \frac{d\omega}{d\alpha} + \ldots + A_{2p} \frac{d^{2p}\omega}{d\alpha^{2p}} = 0.$$

C'est l'équation que nous voulions former.