

quatrième série - tome 50 fascicule 1 janvier-février 2017

*ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE*

Alexis BOUTHIER

La fibration de Hitchin-Frenkel-Ngô et son complexe d'intersection

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief*

Emmanuel KOWALSKI

Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur

Continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par C. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
de 1918 à 1941 par É. PICARD
de 1942 à 1967 par P. MONTEL

Comité de rédaction au 1^{er} janvier 2017

P. BERNARD A. NEVES
S. BOUCKSOM J. SZEFTEL
E. BREUILLARD S. VŨ NGỌC
R. CERF A. WIENHARD
G. CHENEVIER G. WILLIAMSON
E. KOWALSKI

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition / *Publication*

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
Fax : (33) 01 40 46 90 96

Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : smf@smf.univ-mrs.fr

Tarifs

Europe : 519 €. Hors Europe : 548 €. Vente au numéro : 77 €.

© 2017 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1^{er} juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.

ISSN 0012-9593

Directeur de la publication : Stéphane Seuret
Périodicité : 6 n^{os} / an

LA FIBRATION DE HITCHIN-FRENKEL-NGÔ ET SON COMPLEXE D'INTERSECTION

PAR ALEXIS BOUTHIER

RÉSUMÉ. – Dans cet article, on construit la fibration de Hitchin pour les groupes d'après celle esquissée par Frenkel-Ngô [14] dans le cas de SL_2 . Cette construction utilise de manière cruciale le semi-groupe de Vinberg et fait suite à l'étude menée dans [4]. L'espace total de Hitchin s'obtient comme le produit fibré du champ de Hecke avec la diagonale du champ des G -torseurs Bun_G ; on démontre alors un énoncé de transversalité du complexe d'intersection du champ de Hecke avec cette diagonale, au-dessus d'un ouvert suffisamment gros, pour obtenir des applications locales, telles que le lemme fondamental pour l'algèbre de Hecke sphérique. Dans le cours de la preuve de ce théorème, on établit un énoncé sur les classes de conjugaisons entières des points d'un groupe simplement connexe sur un corps local.

ABSTRACT. – In this article, we construct the Hitchin fibration for groups following the scheme outlined by Frenkel-Ngô [14] in the case of SL_2 . This construction uses as a decisive tool the Vinberg semigroup and follows the study accomplished in [4]. The total space of Hitchin is obtained by taking the fiber product of the Hecke stack with the diagonal of the stack of G -bundles Bun_G ; we prove a transversality statement between the intersection complex of the Hecke stack and the diagonal of Bun_G , over a sufficiently big open subset, in order to get local applications, such as the fundamental lemma for the spherical Hecke algebra. Along the proof of this theorem, we establish a result concerning the integral conjugacy classes of the points of a simply connected group in a local field.

Introduction

Dans sa preuve du lemme fondamental pour les algèbres de Lie [25], Ngô utilise la fibration de Hitchin comme un moule géométrique pour les intégrales orbitales de la fonction caractéristique du compact maximal. Dans ce travail, on s'intéresse à la construction d'un analogue de la fibration de Hitchin pour le cas des groupes ainsi qu'au lien entre cet espace et les intégrales orbitales d'une autre classe de fonctions, celles de l'algèbre de Hecke sphérique.

Soit k un corps algébriquement clos ou un corps fini, soient $\mathcal{O} := k[[\pi]]$ et $F = k((\pi))$. On note $D := \text{Spec}(\mathcal{O})$ et $D^\bullet := \text{Spec}(F)$.

Pour alléger l'introduction, on considère un groupe G semisimple simplement connexe déployé, (T, B) une paire de Borel, $r = \text{rg}(T)$, W le groupe de Weyl et w_0 son élément long. Soit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples, ainsi que le cône des cocaractères (resp. caractères) dominants $X_*(T)^+ \subset X_*(T)$, (resp. $X^*(T)^+ \subset X^*(T)$). Enfin, on note $\omega_1, \dots, \omega_r$, les poids fondamentaux. On pose $K := G(\mathcal{O})$. Considérons la grassmannienne affine,

$$\text{Gr} := G(F)/K,$$

que l'on peut munir d'une structure d'ind-schéma d'après [19, Prop.2]. On a une interprétation modulaire de la grassmannienne affine Gr , elle classe les paires (E, β) où E est un G -torseur sur D et β une trivialisaton sur D^\bullet . De plus, elle admet une décomposition en K -orbites, dite de Cartan :

$$\text{Gr} := \coprod_{\lambda \in X_*(T)^+} K\pi^\lambda K/K.$$

On introduit alors $\text{Gr}_\lambda := K\pi^\lambda K/K$ ainsi que $\overline{\text{Gr}}_\lambda$ l'adhérence Gr_λ dans Gr . On a la description suivante :

$$\overline{\text{Gr}}_\lambda = \coprod_{\mu \leq \lambda} \text{Gr}_\mu.$$

En particulier, pour deux G -torseurs E, E' sur le disque et β un isomorphisme sur D^\bullet entre E et E' , on obtient un point :

$$\text{inv}(E, E', \beta) \in K \backslash \text{Gr} = X_*(T)^+.$$

Supposons maintenant que k est fini. Soit un entier premier $l \neq p$, on considère l'algèbre de Hecke sphérique

$$\mathcal{H} := C_c(K \backslash G(F)/K, \overline{\mathbb{Q}}_l),$$

avec comme produit, la convolution des fonctions. Par le dictionnaire fonctions-faisceaux, elle admet une base, due à Lusztig, donnée par les fonctions ϕ_λ qui correspondent aux faisceaux $IC_{\overline{\text{Gr}}_\lambda}$.

Il s'agit donc de construire une fibration, analogue à la fibration de Hitchin, dont le nombre de points fournirait les intégrales orbitales des fonctions ϕ_λ . Elle s'obtient de la manière suivante.

Soit X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur k , on note F son corps de fonctions, \mathbb{A} l'anneau des adèles et $\mathcal{O}_\mathbb{A}$ les adèles entières. On considère une somme formelle $\lambda = \sum_{x \in X} \lambda_x [x]$ avec $\lambda_x \in X_*(T)^+$ presque tous nuls et $S = \text{supp}(\lambda) := \{x \in X \mid \lambda_x \neq 0\}$. Enfin, on pose $\overline{\text{Gr}}_\lambda := \prod_{x \in X} \overline{\text{Gr}}_{\lambda_x}$.

À la suite de Beilinson-Drinfeld [2], on considère le champ de Hecke $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ qui classe les triplets (E, E', β) où E, E' sont des G -torseurs sur X et un isomorphisme

$$\beta : E|_{X-S} \rightarrow E'|_{X-S},$$

tel que pour tout $x \in S$, $\text{inv}_x(E|_{D_x}, E'|_{D_x}, \beta_{D_x^\bullet}) \leq \lambda_x$. On forme alors le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_\lambda & \xrightarrow{\Delta} & \overline{\mathcal{H}}_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Bun}_G & \xrightarrow{\Delta} & \text{Bun}_G \times \text{Bun}_G. \end{array}$$

On a la description adélique suivante :

$$\overline{\mathcal{M}}_\lambda(k) := G(F) \backslash \{(\gamma, (g_x)) \in G(F) \times G(\mathbb{A}) / G(\mathcal{O}_\mathbb{A}) \mid g_x^{-1} \gamma g_x \in \overline{K_x \pi_x^\lambda K_x}\},$$

où $G(F)$ agit par $h.(\gamma, (g_x)) = ((h\gamma h^{-1}, (hg_x)))$. Si k est fini, si l'on considère le complexe $\Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}$, la trace de Frobenius en un point $t = (\gamma, (g_x))$ est donnée par :

$$\text{Tr}(\text{Fr}_t, \Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}) = \prod_{x \in X} \phi_{\lambda_x}(g_x^{-1} \gamma g_x).$$

Si l'on regarde au travers des représentations fondamentales $\rho_i : G \rightarrow GL(V_{\omega_i})$, la condition $\text{inv}_x(E, E, \phi) \leq \lambda_x$ se réécrit :

$$\forall i, \rho_i(\phi) \in H^0(X, \text{End}(\rho_i(E))(\langle \omega_i, -w_0 \lambda \rangle)),$$

où $\rho_i(E)$ est le fibré vectoriel que l'on obtient en poussant E par $\rho_i : G \rightarrow GL(V_{\omega_i})$. On a alors une application introduite par Frenkel-Ngô :

$$f : \overline{\mathcal{M}}_\lambda \rightarrow \mathcal{A}_\lambda := \bigoplus_{i=1}^r H^0(X, \mathcal{O}_X(\langle \omega_i, -w_0 \lambda \rangle))$$

donnée par $(E, \phi) \mapsto (\text{Tr}(\rho_i(\phi)))_{1 \leq i \leq r}$, réminiscente de la fibration de Hitchin.

Si l'on suppose que k est fini et f propre, en calculant la trace de Frobenius en un point $a \in \mathcal{A}_\lambda$ de $f_* \Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}$, on obtient une intégrale orbitale globale stable :

$$\text{Tr}(\text{Fr}_a, f_* \Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}) = SO_a(\phi_\lambda).$$

Pour pouvoir utiliser des techniques similaires à celles de Ngô [25], on aimerait savoir si $\Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}$ est pervers et pur, comme cela a été formulé par Frenkel et Ngô dans la conjecture 4.1 de [14]. En fait, on démontre que l'on obtient le complexe d'intersection sur $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$, quitte à considérer un certain ouvert. Ceci fait l'objet de notre premier théorème.

On définit un ouvert $\mathcal{A}_\lambda^b \subset \mathcal{A}_\lambda$, soit $\overline{\mathcal{M}}_\lambda^b$ l'ouvert de $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ correspondant. On note toujours $\Delta : \overline{\mathcal{M}}_\lambda^b \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_\lambda$ la flèche naturelle. Le théorème principal est l'énoncé de transversalité du complexe d'intersection de $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ avec la diagonale Δ au-dessus de l'ouvert \mathcal{A}_λ^b :

THÉORÈME 1. – *Soit G un schéma en groupes quasi-déployé sur X , tel que G_{der} est simplement connexe sans facteur simple de type A_{2r} , alors le champ $\overline{\mathcal{M}}_\lambda^b$ est équidimensionnel, on note d sa codimension dans $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ et on a les égalités suivantes :*

$$\Delta^! IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda} = \Delta^*[-d] IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda} = IC_{\overline{\mathcal{M}}_\lambda^b}.$$

Cet ouvert \mathcal{A}_λ^b est suffisamment gros pour pouvoir établir des identités locales. Si l'on part d'une situation locale avec un λ et un discriminant fixé, on peut globaliser cette situation en ajoutant de grands « cocaractères » avec des discriminants transverses en des points auxiliaires pour pouvoir tomber dans l'ouvert \mathcal{A}_λ^b .

Ainsi qu'on le démontre dans [5], le théorème 1 se révèle un outil crucial pour démontrer le lemme fondamental pour l'algèbre de Hecke sphérique par une voie géométrique. Une telle preuve évite d'avoir recours aux réductions usuelles, à la fonction unité de l'algèbre de Hecke et ensuite à l'algèbre de Lie ; ces processus de réduction successives étant de plus entièrement analytiques.

On pose pour la fin de ce paragraphe $\mathcal{O} = k[[\pi]]$ et $F = k((\pi))$. Il s'agit de décrire les classes de $G(\mathcal{O})$ -conjugaison à l'intérieur de $G(F)^{\text{rs}}$. Elles font naturellement intervenir le semigroupe de Vinberg, introduit par Vinberg en caractéristique nulle [33] et par Rittatore en caractéristique p [28], ainsi que l'invariant discriminant.

C'est un schéma affine, normal, intègre qui contient $G_+ := (T \times G)/Z_G$ comme ouvert dense, où l'on plonge le centre Z_G de G antidiagonalement. Expliquons désormais le lien entre les strates de Cartan et le semi-groupe de Vinberg. Soit $\lambda \in X_*(T)^+$, on définit alors un sous-schéma localement fermé $V_G^{\lambda,0}$ de V_G sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$ qui consiste en des paires $(\pi^{-w_0\lambda}, x)$. On a que $x \in K\pi^\lambda K$ si et seulement si $x_+ := (\pi^{-w_0\lambda}, x) \in V_G^{\lambda,0}(\mathcal{O})$. D'après Steinberg [30], on dispose d'un morphisme, dit de « polynôme caractéristique » :

$$\chi : G \rightarrow T/W,$$

le résultat est alors le suivant :

THÉORÈME 2. – *Soient $\gamma, \gamma' \in K\pi^\lambda K \cap G(F)^{\text{rs}}$ telles que $\chi(\gamma) = \chi(\gamma')$.*

Soit $d_+ := \langle 2\rho, \lambda \rangle + d(\gamma)$ où $d(\gamma)$ est la valuation du discriminant de γ . Alors d_+ est un entier positif. De plus, si l'on considère $\gamma_+ := (\pi^{-w_0\lambda}, \gamma) \in V_G^{\lambda,0}(\mathcal{O})$ (resp. γ'_+), alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. γ et γ' sont conjuguées sous $G(\mathcal{O})$.
- ii. $\bar{\gamma}_+$ et $\bar{\gamma}'_+$ sont conjuguées modulo π^{2d_++1} , où $\bar{\gamma}_+$ (resp. $\bar{\gamma}'_+$) désigne les réductions à $V_G^{\lambda,0}(\mathcal{O}/\pi^{2d_++1}\mathcal{O})$.

Passons en revue l'organisation de l'article. On commence par faire des rappels issus de [4] sur le semigroupe de Vinberg V_G ainsi que sur le quotient adjoint χ_+ . Puis, on définit la fibration de Hitchin pour les groupes. Une première définition immédiate de l'espace total de Hitchin s'obtient en prenant le produit fibré le long de la diagonale de Bun_G du champ de Hecke $\overline{\mathcal{A}}_\lambda$. On réinterprète ensuite cette définition en fonction du semi-groupe de Vinberg pour en déduire une définition de la fibration de Hitchin $f_\lambda : \overline{\mathcal{M}}_\lambda \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_\lambda$ sur laquelle agit un champ de Picard $\mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_\lambda$. On s'intéresse alors à l'étude du complexe d'intersection du champ $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$. Dans un premier temps, on introduit l'ouvert transversal $\overline{\mathcal{A}}_\lambda^\diamond \subset \overline{\mathcal{A}}_\lambda$ où la valuation du discriminant est partout inférieure ou égale à un. Pour un tel ouvert, la situation est très simple puisque la fibration f_λ est lisse. On considère donc un ouvert plus gros $\overline{\mathcal{A}}_\lambda^b \subset \overline{\mathcal{A}}_\lambda$ qui contient des polynômes caractéristiques dont la valuation du discriminant local peut-être plus grande que un. On démontre alors le théorème 1 de transversalité sur cet ouvert. Pour obtenir un tel théorème, on commence par construire un modèle local des singularités de l'espace de Hitchin. On utilise ensuite un théorème d'approximation des

polynômes caractéristiques ainsi que des énoncés de relèvements d'Elkik et Gabber-Ramero pour comparer ce modèle local avec la strate $\overline{\text{Gr}}_\lambda$. C'est en étudiant ce résultat d'approximation des polynômes caractéristiques qu'est apparu naturellement le résultat 2. Enfin, en appendice, on donne la preuve d'un théorème de Gabber non publié sur les problèmes de relèvements pour des morphismes finis et plats.

Je remercie très chaleureusement Gérard Laumon et Bao Châu Ngô pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir sur cet article et particulièrement pour leur soutien dans les derniers mois pour m'aider à obtenir le résultat final. J'exprime également ma profonde gratitude à Ofer Gabber pour son concours indispensable concernant les problèmes de relèvement, plus particulièrement l'appendice et l'énoncé 39. Je remercie Yakov Varshavsky de m'avoir suggéré l'amélioration du théorème principal. Enfin, je remercie l'Université de Chicago pour les nombreux séjours que j'ai pu y effectuer.

1. Rappels sur le semi-groupe de Vinberg

Soit k un corps. On considère un groupe connexe réductif \mathbf{G} tel que \mathbf{G}_{der} soit simplement connexe, déployé sur k . On note G une forme quasi-déployée de \mathbf{G} sur un k -schéma X . Soit (\mathbf{B}, \mathbf{T}) une paire de Borel de \mathbf{G} , Δ l'ensemble des racines simples, r le rang semisimple de \mathbf{G} et \mathbf{W} le groupe de Weyl. On commence par construire le semi-groupe de Vinberg V_G sur k . Choisissons une base $\omega'_1, \dots, \omega'_l$ du réseau des caractères :

$$\chi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$$

tels que

$$\forall \alpha \in \Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}, \langle \chi, \check{\alpha} \rangle = 0.$$

Chaque $\omega'_i : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$, $1 \leq i \leq l$, se prolonge de manière unique en un caractère :

$$\omega'_i : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Pour tout indice i , $1 \leq i \leq l$, notons $V_{\omega'_i}$ un espace vectoriel de dimension un sur lequel \mathbf{G} agit par $\omega'_i : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{G}_m$. L'ensemble des poids dominants est stable par translation par les éléments du réseau $\mathbb{Z}\omega'_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega'_l$. Le quotient par ce réseau est un cône saturé non dégénéré de $X^*(\mathbf{T})/(\mathbb{Z}\omega'_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega'_l)$ qui est engendré par $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_r$ que l'on relève en une famille de caractères $\omega_1, \dots, \omega_r$ de \mathbf{T} .

Soit $(\rho_{\omega_i}, V_{\omega_i})$ la représentation irréductible de plus haut poids ω_i . Considérons $\mathbf{G}_+ := (\mathbf{T} \times \mathbf{G})/Z_G$ où le centre Z_G de \mathbf{G} se plonge par $\lambda \rightarrow (\lambda, \lambda^{-1})$ et $\mathbf{T}_+ = (\mathbf{T} \times \mathbf{T})/Z_G$. On a une immersion :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_+ &\rightarrow \prod_{i=1}^r \text{End}(V_{\omega_i}) \times \prod_{i=1}^l \text{Aut}(V_{\omega'_i}) \times \prod_{i=1}^r \mathbb{A}_{\alpha_i} \\ (t, g) &\mapsto (\omega_i(t)\rho_{\omega_i}(g), \omega'_i(tg), \alpha_i(t)). \end{aligned}$$

Ici, $H_G := \prod_{i=1}^r \text{End}(V_{\omega_i}) \times \prod_{i=1}^l \text{Aut}(V_{\omega'_i}) \times \prod_{i=1}^r \mathbb{A}_{\alpha_i}^1$ et H_G^0 sera la même chose où l'on enlève $\{0\}$ dans chaque $\text{End}(V_{\omega_i})$. On pose alors V_G (resp V_G^0) la normalisation de l'adhérence de \mathbf{G}_+ dans H_G (resp H_G^0) et $V_{\mathbf{T}}$ l'adhérence de \mathbf{T}_+ dans V_G , lequel est normal par [6, Cor. 6.2.14]. On a un théorème analogue à celui de Chevalley [4, Prop. 1.3] :

THÉORÈME 3. – *L'application de restriction $\phi : k[V_G]^G \rightarrow k[V_T]^W$ est un isomorphisme de k -algèbres. De plus, V_T/W est le produit d'un espace affine de dimension $2r$ avec un tore, dont les coordonnées sont données par les ω'_i , $(\alpha_i, 0)$, $\chi_i = \text{Tr}(\rho(\omega_i, \omega_i))$.*

On en déduit alors un morphisme

$$\chi_+ : V_G \rightarrow \mathbf{C}_+ := V_T/W.$$

On a également une flèche $\chi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{T}/\mathbf{W} = \mathbb{G}_m^r \times \mathbb{A}^r$, issue du théorème de Chevalley [30, Th. 6.1]. Steinberg a construit une section à cette flèche de la manière suivante ; on commence par supposer que \mathbf{G} est semisimple simplement connexe, dans ce cas $\mathbf{T}/\mathbf{W} = \mathbb{A}^r$. Pour un r -uplet $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbf{T}/\mathbf{W} := \mathbb{A}^r$, on définit :

$$\varepsilon(a_1, \dots, a_r) := \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i}(a_i) n_i,$$

où les $x_{\alpha_i}(a_i)$ sont des éléments du groupe radiciel U_{α_i} et les n_i sont des éléments du normalisateur $N_G(\mathbf{T})$ représentant les réflexions simples s_{α_i} de \mathbf{W} .

Ainsi, $\varepsilon(a) \in \prod_{i=1}^r U_i n_i$ et en utilisant les relations de commutation on a que :

$$\prod_{i=1}^r U_i n_i = U_w w$$

où $w = s_1 s_2 \dots s_r$ et $U_w = \mathbf{U} \cap w \mathbf{U}^- w^{-1}$. Voyons comment on l'étend au cas réductif.

Soit S un sous-tore de \mathbf{T} de telle sorte que $\mathbf{T} = S \times \mathbf{T}_{\text{der}}$, alors $\mathbf{G} = S \mathbf{G}_{\text{der}}$. Le morphisme de Steinberg est donnée par :

$$\chi : \mathbf{G} \rightarrow S \times \mathbb{A}^r,$$

où \mathbb{A}^r est la partie correspondant au quotient adjoint de \mathbf{G}_{der} . Soit le schéma en groupes des centralisateurs :

$$I := \{(g, \gamma) \in \mathbf{G} \times V_G \mid g^{-1} \gamma g = \gamma\},$$

on considère l'ouvert $\mathbf{G}^{\text{reg}} := \{(g, \gamma) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G} \mid \dim I_\gamma = \dim \mathbf{T}\}$ avec I_γ le centralisateur de γ . On a alors le théorème suivant [30, Th. 8.1] et [9, Prop. 2.5] :

PROPOSITION 4. – *Soit $\varepsilon_{G_{\text{der}}}$ la section de Steinberg pour \mathbf{G}_{der} . On pose alors $\varepsilon_G : S \times \mathbb{A}^r \rightarrow$ donnée par*

$$\varepsilon_G(s, a) = s \varepsilon_{G_{\text{der}}}(a).$$

Alors ε_G est une section à χ et tombe dans \mathbf{G}^{reg} .

Voyons comment on construit une section pour le semigroupe de Vinberg V_G . Soit la flèche $\phi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_+$, $t \mapsto (t, t^{-1})$. L'image \mathbf{T}_Δ , le tore antidiagonal est isomorphe à $\mathbf{T}^{\text{ad}} := \mathbf{T}/Z_G$, et on a un isomorphisme canonique donné par :

$$\alpha_\bullet : \mathbf{T}_\Delta \rightarrow \mathbb{G}_m^r.$$

Soit alors ψ l'isomorphisme inverse. Pour $b \in \mathbb{G}_m^r$, on note :

$$\forall 1 \leq i \leq r, \alpha_i(\psi_b) = b_i \text{ et } \psi_b \in \mathbf{T}_\Delta.$$

On définit $\varepsilon_+ : \mathbb{G}_m^r \times (\mathbb{G}_m^r \times \mathbb{A}^r) \rightarrow \mathbf{G}_+$ par :

$$\varepsilon_+(b, a) = \varepsilon_G(a) \psi_b.$$

Dans la suite, on pose $\mathcal{Q}_+ := \mathcal{Q}\mathbf{T}_\Delta$ où $\mathcal{Q} := \varepsilon_G(\mathbf{T}/\mathbf{W})$. On obtient alors le théorème de structure suivant tiré de [4, Thm.2-3] :

THÉORÈME 5. – Soit $V_G^{\text{reg}} := \{\gamma \in V_G \mid \dim I_\gamma = r\}$. La section ε_+ se prolonge en un morphisme $\varepsilon_+ : C_+ \rightarrow V_G^{\text{reg}}$.

De plus, le morphisme χ_+^{reg} est lisse et ses fibres géométriques sont des G -orbites. Enfin, il existe un unique schéma en groupes commutatifs J , lisse sur C_+ et muni d'un morphisme $\chi_+^* J \rightarrow I$, qui est un isomorphisme sur V_G^{reg} .

REMARQUES. – i. Il est à noter que la section ε_+ prolongée au semigroupe de Vinberg dépend fortement de l'ordre des facteurs $U_i n_i$. En effet, un ordre différent amène à des sections qui ne sont plus nécessairement conjuguées, comme on peut le voir au point au point $(0, 0) \in C_+$.

ii. Dans [4], la preuve est faite dans le cas semisimple mais s'étend telle quelle au cas réductif.

On dispose également d'un morphisme, dit d'abélianisation :

$$\alpha : V_G \rightarrow A_G := \mathbb{A}^r$$

donnée par $(t, g) \mapsto (\alpha_i(t))_{1 \leq i \leq r}$.

On passe maintenant au cas quasi-déployé. On considère un épinglage $(\mathbf{B}, \mathbf{T}, \mathbf{x}_+)$ de \mathbf{G} avec $\mathbf{x}_+ = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{x}_\alpha$, où \mathbf{x}_{α_i} est un vecteur propre du sous-espace radiciel $\text{Lie}(\mathbf{U})_\alpha$ de $\text{Lie}(\mathbf{U})$ correspondant à la racine α de \mathbf{T} et où \mathbf{U} est le radical unipotent de \mathbf{B} . Notons $\text{Out}(\mathbf{G})$ le groupe des automorphismes laissant invariant cet épinglage. C'est un groupe discret, éventuellement infini. Il agit sur l'ensemble des racines, en laissant stable l'ensemble Δ des racines simples. Il agit également sur \mathbf{W} de façon compatible avec l'action de \mathbf{W} sur \mathbf{T} . La donnée de la forme quasi-déployée G de \mathbf{G} revient à la donnée d'une flèche

$$\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{G}).$$

où x est un point géométrique du X . On définit alors le semi-groupe de Vinberg de G comme le X -schéma :

$$V_G := \rho \wedge^{\text{Out}(\mathbf{G})} V_G$$

ainsi que l'abélianisé :

$$A_G := \rho \wedge^{\text{Out}(\mathbf{G})} A_G.$$

L'action de $\mathbf{W} \times \text{Out}(\mathbf{G})$ sur \mathbf{T} induit une action de $\text{Out}(\mathbf{G})$ sur C_+ et on définit l'espace des polynômes caractéristiques par :

$$\mathfrak{C}_+ := \rho \wedge^{\text{Out}(\mathbf{G})} C_+.$$

On a des morphismes :

$$\chi_+ : V_G \rightarrow \mathfrak{C}_+.$$

et

$$\alpha : V_G \rightarrow A_G$$

Enfin, la flèche finie plate $\theta_G : V_T \rightarrow C_+$ qui est génériquement étale galoisienne de groupe \mathbf{W} induit une flèche

$$\theta : V_T \rightarrow \mathfrak{C}_+$$

qui est génériquement un toseur sous le schéma en groupes fini étale $W = \rho \wedge^{\text{Out}(\mathbf{G})} \mathbf{W}$.

Il faut maintenant obtenir une section. L'inconvénient de la section de Steinberg ε_+ est qu'elle n'est pas $\text{Out}(\mathbf{G})$ -équivariante. Si l'on regarde seulement la section de Steinberg pour une forme quasi-déployée de \mathbf{G} , on a le résultat suivant dû à Steinberg.

THÉORÈME 6. – [30, Th. 9.4] *Soit G un groupe connexe réductif avec G_{der} simplement connexe, quasi-déployé sur un k -schéma X qui ne contient pas de composante simple de type A_r , r pair, alors la section de Steinberg $\mathcal{Q} = \varepsilon(T/W)$ est définie sur X .*

REMARQUE. – Le même argument que Steinberg [30] donne immédiatement que ε_+ est $\text{Out}(\mathbf{G})$ -équivariante dès que l'on a pas de facteur simple de type A_{2r} .

À la suite de Donagi-Gaitsgory [11] et Ngô [25, sect. 2.4], on donne une interprétation alternative du centralisateur régulier. On suppose de plus la caractéristique du corps k est première à l'ordre de \mathbf{W} . On a un morphisme fini plat W -équivariant :

$$\theta : V_T \rightarrow \mathcal{C}_+$$

ramifié le long du diviseur $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha \in R} \overline{\text{Ker}(\alpha)}$, où $\overline{\text{Ker}(\alpha)}$ désigne l'adhérence dans V_T de $\text{Ker}(\alpha)$ avec α une racine. Considérons le schéma :

$$\Omega := \prod_{V_T/\mathcal{C}_+} (T \times V_T).$$

Pour tout S -schéma sur \mathcal{C}_+ , les S -points de Ω sont donnés par :

$$\Omega(S) = \text{Hom}_{V_T}(S \times_{\mathcal{C}_+} V_T, T \times V_T) = \theta_*(T \times V_T).$$

Le morphisme $\theta : V_T \rightarrow \mathcal{C}_+$ étant fini plat, on obtient que Ω est représentable. C'est un schéma en groupes lisses et commutatifs de dimension $(r + l) |\mathbf{W}|$ et au-dessus de l'ouvert régulier semi-simple, θ étant fini étale, Ω restreint à cet ouvert est un tore. L'action diagonale de W sur $T \times V_T$ induit une action sur Ω . On considère alors :

$$(1) \quad J^1 = \Omega^W = \left(\prod_{V_T/\mathcal{C}_+} (T \times V_T) \right)^W$$

Comme la caractéristique du corps est première avec l'ordre de W , on a que J^1 est un schéma en groupes lisse sur \mathcal{C}_+ .

PROPOSITION 7. – *On a un morphisme canonique $J \rightarrow J^1$ qui est un isomorphisme au-dessus de $\mathcal{C}_+^{\text{rs}}$.*

Démonstration. – On commence par construire un morphisme de J dans Ω ; par adjonction, il revient au même de construire une flèche

$$\theta^* J \rightarrow T \times V_T$$

au-dessus de V_T . On veut construire une flèche $V_B \rightarrow V_T$, il résulte du principe d'extension de Renner [27, Thm 5.2], qu'il suffit de construire une flèche $f : B_+ \rightarrow T_+$ et une flèche $g : V_T \rightarrow V_T$ telle que $g|_{T_+} = f$. On considère alors la projection $B_+ \rightarrow T_+$ et l'application identité $\text{Id} : V_T \rightarrow V_T$ et l'on obtient une flèche :

$$(2) \quad \phi : V_B \rightarrow V_T.$$

On rappelle que $\tilde{V}_G = \{(g, \gamma) \in G/B \mid g^{-1}\gamma g \in V_B\}$. On définit alors une application $\tilde{V}_G \rightarrow V_T$ donnée par :

$$(g, \gamma) \rightarrow \phi(g^{-1}\gamma g).$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_G^{\text{reg}} & \longrightarrow & V_T \\ p \downarrow & & \downarrow \theta \\ V_G^{\text{reg}} & \longrightarrow & \mathfrak{C}_+. \end{array}$$

Ce diagramme est en fait cartésien. En effet, la flèche χ_+^{reg} est lisse, donc $V_G^{\text{reg}} \times_{\mathfrak{C}_+} V_T$ est lisse au-dessus de V_T , donc normal. La flèche $\iota : \tilde{V}_G^{\text{reg}} \rightarrow V_G^{\text{reg}} \times_{\mathfrak{C}_+} V_T$ est finie car $\tilde{V}_G^{\text{reg}} \rightarrow V_G^{\text{reg}}$ l'est, d'après [4, Cor. 2.15]. De plus, ι est birationnelle car c'est un isomorphisme au-dessus de G_+^{rs} , il résulte alors du Main Theorem de Zariski que ι est un isomorphisme. Il résulte alors de l'isomorphisme entre $\chi_+^* J$ et $I|_{V_G^{\text{reg}}}$, qu'il suffit de construire un morphisme :

$$p^* I|_{V_G^{\text{reg}}} \rightarrow T \times \tilde{V}_G.$$

On commence par rappeler un lemme, de preuve analogue à [25, Lem. 2.4.3] :

LEMME 8. – *Pour tout $(gB, \gamma) \in \tilde{V}_G^{\text{reg}}$, $I_\gamma \subset \text{ad}(g)B$.*

On considère alors le schéma \underline{B} dont la fibre au-dessus de $gB \in G/B$ est gBg^{-1} . En notant $\underline{B}|_{\tilde{V}_G^{\text{reg}}}$, le changement de base à \tilde{V}_G^{reg} , du lemme ci-dessus, on obtient une flèche

$$I|_{\tilde{V}_G^{\text{reg}}} \rightarrow \underline{B}|_{\tilde{V}_G^{\text{reg}}},$$

et donc en changeant à nouveau de base, un morphisme :

$$p^* I|_{V_G^{\text{reg}}} \rightarrow \underline{B}|_{\tilde{V}_G}.$$

Comme on a un morphisme canonique de \underline{B} vers $T \times G/B$, on en déduit une flèche G_+ -équivariante entre

$$p^* I|_{V_G^{\text{reg}}} \rightarrow T \times \tilde{V}_G,$$

qui est un isomorphisme au-dessus du lieu régulier semi-simple. Au-dessus de \tilde{V}_G^{rs} , l'action de W sur I se transporte à $T \times \tilde{V}_G^{\text{rs}}$. Par adjonction, on a une flèche :

$$I|_{V_G^{\text{reg}}} \rightarrow p_*(T \times \tilde{V}_G)$$

qui se factorise par le sous-schéma des points fixes sous W . Par descente, on obtient le morphisme $J \rightarrow J^1$ qui est un isomorphisme au-dessus de $\mathfrak{C}_+^{\text{rs}}$. \square

Considérons le sous-schéma ouvert de J^1 suivant :

DÉFINITION 9. – Soit \tilde{J} le sous-foncteur de J^1 qui à tout \mathfrak{C}_+ -schéma S , associe le sous-ensemble $\tilde{J}(S)$ de $J^1(S)$ des morphismes W -équivariants :

$$f : S \times_{\mathfrak{C}_+} V_T \rightarrow T$$

tels que pour tout point géométrique x de $S \times_{\mathfrak{C}_+} V_T$ stable sous une involution $s_\alpha(x) = x$ attachée à une racine α , on a $\alpha(f(x)) \neq -1$.

LEMME 10. – Le foncteur \tilde{J} est représentable par un sous-schéma ouvert affine de J^1 . De plus, on a les inclusions $J^0 \subset \tilde{J} \subset J^1$.

Démonstration. – On renvoie à [25, Lem. 2.4.6], la seule différence est qu'en lieu et place des hyperplans de racines h_α , il faut considérer l'adhérence dans V_G du $\text{Ker } \alpha$. \square

PROPOSITION 11. – Le morphisme $J \rightarrow J^1$ se factorise via \tilde{J} et induit un isomorphisme entre J et \tilde{J} .

Démonstration. – D'après [25, 2.4.7], la proposition vaut au-dessus de T_+/W . De plus, on sait qu'au-dessus de $\mathfrak{C}_+^{\text{rs}}$, J , J^1 et \tilde{J} sont tous isomorphes au tore T . En particulier, on obtient la proposition sur l'ouvert $\mathfrak{C}_+^{\text{rs}} \cup T_+/W$, lequel est de codimension au moins deux dans \mathfrak{C}_+ , car $\mathfrak{C}_+^{\text{rs}}$ est ouvert dans chaque strate. Comme les schémas J et \tilde{J} sont lisses sur \mathfrak{C}_+ , l'isomorphisme se prolonge, ce qu'on voulait. \square

2. Le champ de Hecke

Soit X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps algébriquement clos k . On note F son corps de fonctions, $|X|$ l'ensemble des points fermés. Pour $x \in |X|$, soit $D_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$ le disque formel en x et $D_x^\bullet = \text{Spec}(F_x)$, le disque formel épointé, d'uniformisante π_x .

Soit \mathbf{G} un groupe connexe réductif déployé tel que \mathbf{G}_{der} soit simplement connexe. On considère une paire de Borel (\mathbf{B}, \mathbf{T}) de \mathbf{G} et on note \mathbf{W} le groupe de Weyl de \mathbf{G} . On suppose que l'ordre de \mathbf{W} est premier avec la caractéristique.

Soit un schéma en groupes G connexe réductif sur X qui se déploie en \mathbf{G} sur un revêtement fini galoisien $X_\rho \rightarrow X$ de groupe Γ . Cela revient à la donnée d'un morphisme :

$$\rho : \Gamma \rightarrow \text{Out}(\mathbf{G}).$$

Le schéma en groupes G est alors muni d'une paire de Borel (B, T) et on considère W le schéma en groupes fini étale obtenu en tordant \mathbf{W} par ρ . On note $X_*(\mathbf{T})^+$ l'ensemble des cocaractères dominants de \mathbf{T} . On désigne par Bun_G le champ des G -torseurs sur X . Le champ Bun_G est algébrique au sens d'Artin ([23] et [19, Prop. 1]).

2.1. Le cas déployé

On suit la présentation faite par Frenkel-Ngô [14]. Les objets considérés ont été introduits par Beilinson-Drinfeld [2].

Pour tout point fermé $x \in X$, considérons le k -schéma en groupes $K_x = \mathbf{G}(\mathcal{O}_x)$ et le ind-schéma en groupes $\mathbf{G}_x := \mathbf{G}(F_x)$, on dispose de la grassmannienne affine en x , $\text{Gr}_x = \mathbf{G}_x/K_x$. Elle admet d'après Lusztig une structure d'ind-schéma ainsi qu'une stratification en K_x -orbites, localement fermées, dite de Cartan, indexée par les cocaractères dominants $X_*(\mathbf{T})^+$. Pour $\lambda \in X_*(\mathbf{T})^+$, on note $\text{Gr}_{\lambda,x}$ une telle strate et $\overline{\text{Gr}}_{\lambda,x}$ son adhérence dans Gr_x . Plus généralement, étant donné un ensemble fini de points fermés $S \subset |X|$, notons

$$\text{Gr}_S := \prod_{s \in S} \text{Gr}_s .$$

Soit $\text{Div}(X)$ le groupe abélien des diviseurs sur X . On considère alors le groupe $\text{Div}(X, \mathbf{T}) = \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(\mathbf{T})$ des diviseurs à coefficients dans les cocaractères de T . On note $\text{Div}^+(X, \mathbf{T}) \subset \text{Div}(X, \mathbf{T})$ le cône formé par les diviseurs dont les coefficients sont dans $X_*(\mathbf{T})^+$. On a alors une action de W sur $\text{Div}(X, \mathbf{T})$ induite par l'action de W sur $X_*(\mathbf{T})$. Pour $\lambda = \sum_{x \in |X|} \lambda_x[x] \in \text{Div}^+(X, \mathbf{T})$, on pose $S = \text{supp}(\lambda) := \{x \in |X| \mid \lambda_x \neq 0\}$ et notons Gr_λ (resp. $\overline{\text{Gr}}_\lambda$) le produit

$$\prod_{s \in S} \text{Gr}_{\lambda_s, s}$$

(resp. $\prod_{s \in S} \overline{\text{Gr}}_{\lambda_s, s}$).

DÉFINITION 12. – On définit le champ de Hecke \mathcal{H}_S , dont le groupoïde des R -points $\mathcal{H}_S(R)$, pour une k -algèbre R , est constitué des triplets (E, E', β) où E, E' sont des \mathbf{G} -torseurs sur $X_R := X \times_k R$ et β un isomorphisme :

$$E|_{X_R - \Gamma_{S,R}} \xrightarrow{\cong} E'|_{X_R - \Gamma_{S,R}} .$$

où $\Gamma_{S,R}$ désigne le graphe des points x de S dans X_R .

On a une flèche

$$\text{inv} : \mathcal{H}_S \rightarrow [K_S \setminus \text{Gr}_S]$$

qui associe à un triplet (E, E', β) la position relative du triplet local $(E_S, E_{S'}, \beta|_{F_S})$, où E_S est la restriction de E à D_S . Pour $\lambda = \sum_{s \in S} \lambda_s[s] \in \text{Div}^+(X, \mathbf{T})$, on note $\text{inv}_S(E, E', \beta) = \lambda$ si la paire (E, E') est en position relative λ .

DÉFINITION 13. – Pour $\lambda = \sum_{s \in S} \lambda_s[s] \in \text{Div}^+(X, \mathbf{T})$, on considère alors le sous-champ fermé $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$, qui est l'image réciproque du fermé $\overline{\text{Gr}}_\lambda$ par la flèche inv .

REMARQUE. – D'après le lemme 3.1 de Varshavsky [32], il résulte que $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ est un champ algébrique localement de type fini sur k .

En particulier, \mathcal{H} a une structure de ind-champ algébrique. On dispose de deux projections p_1 et p_2 :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H}_S & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbf{Bun}_G & & \mathbf{Bun}_G \end{array}$$

où $p_1(E, E', \beta) = E$ et $p_2(E, E', \beta) = E'$. Les fibres de p_1 et p_2 sont des formes tordues de la grassmannienne affine Gr_S . De plus, le sous-champ fermé $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ est fibré au-dessus de \mathbf{Bun}_G en $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$. La proposition suivante, due à Varshavsky [32, A8c], indique que pour la topologie lisse, la fibration est localement triviale :

PROPOSITION 14. – *Il existe un morphisme $V \rightarrow \mathbf{Bun}_G$ lisse à fibres géométriquement connexes tel que $\overline{\mathcal{H}}_\lambda \times_{\mathbf{Bun}_G} V$ est isomorphe à $V \times_k \overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$, le produit fibré se faisant indifféremment pour p_1 ou p_2 .*

En particulier, les projections sont plates, projectives et algébriques au-dessus de \mathbf{Bun}_G .

2.2. Le cas quasi-déployé

La définition du champ de Hecke dans le cas quasi-déployé est due à Frenkel-Ngô [14] et la définition de la grassmannienne affine dans le cas quasi-déployé à Heinloth [19]. On rappelle que l'on a un revêtement fini galoisien de groupe Γ :

$$X_\rho \rightarrow X$$

qui déploie G en \mathbf{G} ainsi que le schéma en tores T en \mathbf{T} . Le schéma en groupes G s'identifie alors à

$$\mathbf{G} \times^\Gamma X_\rho.$$

En particulier un G -torseur sur X est un \mathbf{G} -torseur sur X_ρ , Γ -équivariant, i.e. pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a un isomorphisme

$$i_\gamma : \gamma^*(\tilde{E}) \rightarrow \tilde{E}$$

où γ^* est induit à la fois par l'action de γ sur X_ρ et \mathbf{G} avec une relation de compatibilité $i_{\gamma_1} i_{\gamma_2} = i_{\gamma_1 \gamma_2}$ pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

DÉFINITION 15. – *Soit \mathcal{H}_S le ind-champ classifiant les quadruplets $(\tilde{E}, \tilde{E}', \beta')$, \tilde{E} et \tilde{E}' des G -torseurs Γ -équivariants sur X_ρ , β' un isomorphisme en dehors de $\rho^{-1}(S)$, invariant sous l'action de Γ sur \tilde{E} et \tilde{E}' .*

Pour chaque point géométrique x de S , la restriction de G à D_x est isomorphe à \mathbf{G} . On obtient donc un isomorphisme entre $G|_{D_x}$ et le schéma en groupes constant $\mathbf{G} \times D_x$, bien défini modulo l'action de Γ . En particulier, on obtient que le morphisme $\mathcal{H}_S \rightarrow \mathbf{Bun}_G$ a ses fibres géométriques isomorphes à la grassmannienne affine Gr_S .

De plus, si E et E' sont des G -torseurs sur D_x , muni d'un isomorphisme sur D_x^\bullet , alors $\mathrm{inv}_x(E, E')$ est bien défini comme une orbite $[\lambda] \in [X_*(\mathbf{T})^+/\Gamma]$. Ainsi, pour $\lambda = \sum_{x \in X} [\lambda_x][x]$, où $[\lambda_x]$ désigne une orbite $[X_*(\mathbf{T})^+/\Gamma]$, on peut définir le sous-champ fermé $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ du champ de Hecke \mathcal{H}_S . Il est fibré au-dessus de \mathbf{Bun}_G en l'union $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$ pour λ dans la Γ -orbite de $[\lambda]$. Dans la suite, on note également $\mathrm{Div}^+(X, T)$ l'ensemble des combinaisons formelles $\lambda = \sum_{x \in X} [\lambda_x][x]$ avec $[\lambda_x] \in [X_*(\mathbf{T})^+/\Gamma]$.

3. La fibration de Hitchin

Soit S un ensemble fini de $|X|$ et $\lambda = \sum_{s \in S} [\lambda_s][s]$. On considère le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_S & \longrightarrow & \mathcal{H}_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Bun}_G & \xrightarrow{\Delta} & \text{Bun}_G \times \text{Bun}_G . \end{array}$$

On obtient que $\mathcal{M}_S(k)$ est le groupoïde des couples (E, ϕ) , où E un G -torseur sur X et ϕ une section sur $X - S$ du fibré adjoint

$$\text{Ad}(E) = E \times^G G$$

où G agit sur lui-même par conjugaison, ou si l'on préfère un automorphisme de E au-dessus de $X - S$. Cet espace a été introduit dans l'article de Frenkel-Ngô [14, sect. 4.1]. On obtient alors par changement de base le sous-champ $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ à partir du champ \mathcal{H}_λ . Dans le cas déployé, on a la description adélique suivante :

$$\overline{\mathcal{M}}_\lambda(k) := \mathbf{G}(F) \backslash \{(\gamma, (g_x)) \in \mathbf{G}(F) \times \mathbf{G}(\mathbb{A}) / \mathbf{G}(\mathcal{O}_\mathbb{A}) \mid g_x^{-1} \gamma g_x \in \overline{K_x \pi_x^\lambda K_x}\},$$

où $\mathbf{G}(F)$ agit par $h.(\gamma, (g_x)) = ((h\gamma h^{-1}, (hg_x)))$.

On obtient également, toujours dans le cas déployé, une interprétation modulaire de $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ tirée de [14, sect. 4.5].

LEMME 16. – Pour une k -algèbre R , le groupoïde $\overline{\mathcal{M}}_\lambda(R)$ est donné par les uplets (E, β) où E est un G -torseur sur X_R , β un automorphisme de E sur $X_R - \Gamma_{S,R}$ tel que pour toute représentation irréductible ρ_μ de plus haut poids μ $\rho_\mu(\beta)$ se prolonge en une injection de fibrés vectoriels :

$$\rho_\mu(\beta) : \rho_\mu(E) \rightarrow \rho_\mu(E)(\langle \mu, -w_0 \lambda \rangle),$$

où l'on a poussé le G -torseur E en un fibré vectoriel par $\rho_\mu(E)$.

Le lien avec le semi-groupe de Vinberg apparaît grâce au lemme suivant :

LEMME 17. – Un élément $g \in \mathbf{G}(F_x)$ appartient à l'orbite $K \pi_x^\lambda K$ (resp. $\overline{K_x \pi_x^\lambda K_x}$) si et seulement si pour tout cocaractère dominant $\omega \in X^*(\mathbf{T})^+$, le plus grand des ordres des pôles des coefficients de la matrice $\rho_\omega(g)$ est égal à $\langle \omega, -w_0 \lambda \rangle$ (resp. inférieur ou égal et égal pour les représentations de dimension un) où w_0 est l'élément long du groupe de Weyl. De plus, l'élément $g_+ = (\pi^{-w_0 \lambda}, g)$ est dans $V_G^0(\mathcal{O}_x)$ (resp. $V_G(\mathcal{O}_x)$).

Démonstration. – Le plus grand des ordres des pôles est invariant à gauche et à droite par K_x , en particulier il suffit de regarder celui de π_x^λ , cet ordre est égal à $\langle \omega, -w_0 \lambda \rangle$. Inversement, les entiers $\langle \omega, -w_0 \lambda \rangle$ déterminent uniquement λ .

Enfin, comme l'élément g_+ est dans $\mathbf{G}_+(F_x)$ et que pour tout $\omega \in X^*(\mathbf{T})^+$, $\rho_\omega(g_+) \in \text{End } V_\omega(\mathcal{O}_x)$, la continuité donne le résultat voulu. La preuve pour $\overline{K_x \pi_x^\lambda K_x}$ est analogue. \square

3.0.1. *Construction d'un \mathbf{T} -torseur.* – On commence par traiter le cas déployé. Choisissons une base $\omega'_1, \dots, \omega'_l$ du réseau des caractères $X^*(\mathbf{T})$ telle que

$$\forall \alpha \in \Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}, \quad \langle \chi, \check{\alpha} \rangle = 0.$$

Chaque $\omega'_{i'} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$, $1 \leq i' \leq l$, se prolonge de manière unique en un caractère

$$\omega'_{i'} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Pour tout indice i' , $1 \leq i' \leq l$, notons $V_{\omega'_{i'}}$ un espace vectoriel de dimension un sur lequel \mathbf{G} agit par $\omega'_{i'} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{G}_m$.

L'ensemble des poids dominants est stable par translation par les éléments du réseau $\mathbb{Z}\omega'_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega'_l$.

Le quotient par ce réseau est un cône saturé non dégénéré de $X^*(\mathbf{T})/(\mathbb{Z}\omega'_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega'_l)$ qui est engendré par $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_r$ que l'on relève en une famille de caractères $\omega_1, \dots, \omega_r$ de \mathbf{T} . Pour tout $\omega \in X^*(\mathbf{T})$ et $\mu \in \text{Div}^+(X, \mathbf{T})$, l'accouplement

$$(3) \quad \langle \omega, \mu \rangle = \sum_{x \in |X|} \langle \omega, \mu_x \rangle [x]$$

définit un diviseur effectif sur la courbe. On note $|\langle \omega, \mu \rangle|$ le degré de ce diviseur.

Pour $x \in |X|$, on rappelle que $X_*(T) = \mathbf{T}(F_x)/\mathbf{T}(\mathcal{O}_x)$. Soit $\mu \in X_*(T)^+$, on choisit un relèvement $\tilde{\mu} : \text{Spec}(F_x) \rightarrow \mathbf{T}$. On considère alors la flèche composée notée de la même manière :

$$\tilde{\mu} : \text{Spec}(F_x) \rightarrow \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_{\text{ad}}.$$

Comme μ est dominant, on obtient que pour toute racine simple α , on a $\langle \alpha, \mu \rangle \geq 0$. En particulier, la flèche $\tilde{\mu}$ se prolonge en un morphisme :

$$\tilde{\mu} : \text{Spec}(\mathcal{O}_x) \rightarrow A_{\mathbf{G}}.$$

En particulier, en oubliant le choix du relèvement, on obtient une flèche :

$$\mu : \text{Spec}(\mathcal{O}_x) \rightarrow [A_{\mathbf{G}}/\mathbf{T}],$$

où \mathbf{T} agit par les racines simples et s'identifie au centre du groupe \mathbf{G}_+ . Pour $\mu = \sum_{s \in S} \mu_s [s] \in \text{Div}^+(X, \mathbf{T})$, quitte à choisir un scindage du tore et en raisonnant composante par composante, on obtient ainsi un \mathbf{T} -torseur $E_{\mathbf{T}}(\mu)$ sur X avec une section $\phi \in H^0(X, E_{\mathbf{T}} \times^{\mathbf{T}} A_{\mathbf{G}})$. La donnée de ce \mathbf{T} -torseur revient à la donnée d'un morphisme

$$\mu : X \rightarrow [A_{\mathbf{G}}/\mathbf{T}].$$

où l'on rappelle que $A_{\mathbf{G}}$ désigne la base du morphisme d'abélianisation

$$\alpha : V_{\mathbf{G}} \rightarrow A_{\mathbf{G}} := \mathbb{A}^r$$

donné par les racines simples de \mathbf{G} .

Montrons comment l'on passe au cas quasi-déployé. On veut construire une flèche

$$[\mu] : X \rightarrow [A_{\mathbf{G}}/Z_+]$$

à partir d'une combinaison formelle $\mu = \sum_{x \in X} [\mu_x][x] \in \text{Div}^+(X, T)$. La donnée d'une telle flèche revient à la donnée d'un T -torseur $E_T(\mu)$ et d'une section $\phi \in H^0(X, A_{\mathbf{G}} \wedge^T E_T(\mu))$. Le T -torseur $E_T(\mu)$ est un \mathbf{T} -torseur E' sur X_{ρ} , Γ -équivariant et une section de

$H^0(X, A_G \wedge^T E_T(\mu))$ correspond à la donnée d'une section $\phi' \in H^0(X_\rho, A_G \wedge^T E')$ qui est Γ -invariante pour l'action de Γ sur $A_G \wedge^T E'$. On écrit alors

$$\mu := \sum_{x \in X} \sum_{y|\kappa(y)=x} \left(\sum_{\sigma \in \Gamma} \sigma \mu_x \right) [y],$$

qui est un diviseur sur X_ρ et $\kappa : X_\rho \rightarrow X$. Le cas déployé fournit alors un \mathbf{T} -torseur E' sur X_ρ avec une section $\phi' \in H^0(X_\rho, A_G \wedge^T E')$. Comme le tosseur et sa section sont Γ -équivalents, on en déduit une flèche :

$$\mu : X \rightarrow [A_G/Z_+].$$

3.0.2. *Une autre définition de $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$.* – On fixe $\lambda = \sum_{s \in S} \lambda_s [s] \in \text{Div}^+(X, T)$. Le groupe $\text{Div}(X, T)$ est muni d'une action du groupe de Weyl W , on considère alors l'élément $-w_0 \lambda \in \text{Div}^+(X, T)$ où w_0 est l'élément long du groupe de Weyl. En vertu de la section précédente, on obtient une flèche :

$$-w_0 \lambda : X \rightarrow [A_G/Z_+].$$

On a le morphisme d'abélianisation $\alpha : V_G \rightarrow A_G$ qui est équivariant par rapport à l'action du centre Z_+ de G_+ , d'où l'on obtient une flèche :

$$\alpha : [V_G/Z_+] \rightarrow [A_G/Z_+].$$

Posons alors $V_G^\lambda := (-w_0 \lambda)^* [V_G/Z_+]$. On obtient un espace fibré sur X . Le semi-groupe de Vinberg admet un ouvert lisse V_G^0 (cf. sect.1) et on note de la même manière $V_G^{\lambda,0}$ l'espace tiré sur X par la flèche $-w_0 \lambda$. On déduit la caractérisation alternative de $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$:

PROPOSITION 18. – *L'espace de Hitchin $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ se réinterprète comme le champ des sections*

$$\text{Hom}_X(X, [V_G^\lambda/G])$$

où G agit sur V_G^λ par conjugaison. Il classifie les couples (E, ϕ) avec E un G -torseur sur X et ϕ une section de l'espace fibré au-dessus de X

$$V_G^\lambda \times^G E.$$

On a également l'ouvert \mathcal{M}_λ qui classifie les sections

$$h_{(E,\phi)} : X \rightarrow [V_G^{\lambda,0}/G].$$

Démonstration. – Pour simplifier, on suppose de plus G déployé. On construit une flèche de $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ vers $\text{Hom}(X, [V_G^\lambda/G])$. Soit R une k -algèbre et $(E, \beta) \in \overline{\mathcal{M}}_\lambda(R)$. La section β est un automorphisme de E en dehors de $X_R - \bigcup_{s \in S} \Gamma_{s \times \text{Spec } R}$ qui se prolonge en une injection de fibrés vectoriels sur X_R . Fixons $s \in S$, regardons la section autour du voisinage formel épointé $D_s^\bullet \times R$, quitte à localiser sur R , on peut supposer que le tosseur $E_{D_s^\bullet \times R}$ est trivial. En particulier, β induit pour toute représentation irréductible (ρ_ω, V_ω) de plus haut poids ω , une injection de fibrés vectoriels :

$$\rho_\omega(\beta) : V_\omega \rightarrow V_\omega(\langle \omega, -w_0 \lambda \rangle)$$

et donc en multipliant par $\pi_S^{-w_0\lambda}$, on obtient un point $\phi_S \in V_G^\lambda(R[[\pi_S]])$ tel que $\rho_\omega(\phi_S) = \pi_S^{-w_0\lambda} \rho_\omega(\beta)$. Il ne reste plus qu'à recoller ϕ_S avec $\beta_{X_R - \bigcup_{s \in S} \Gamma_s \times \text{Spec } R}$ pour obtenir une section $\phi' \in H^0(X_R, V_G^\lambda)$, d'où une flèche

$$\overline{\mathcal{M}}_\lambda \rightarrow \text{Hom}(X, [V_G^\lambda/G]).$$

Il faut maintenant construire une flèche dans le sens inverse dont on laissera au lecteur le soin de vérifier qu'elles sont réciproques l'une de l'autre. Étant donné une paire (E, ϕ) avec une section $\phi \in H^0(X_R, V_G^\lambda \times^G E)$, en dehors du graphe des points de S , on a $\lambda_x = 0$, donc ϕ est un automorphisme de $E|_{X_R - \Gamma_{S, \text{Spec } R}}$ et localement en les points de S , comme $\phi \in V_G^{\lambda_s}(R[[\pi_s]])$, sa partie abélienne est donnée par $\pi_s^{-w_0\lambda}$, et donc en multipliant par $\pi_s^{-w_0\lambda}$, on obtient une injection au niveau des fibrés vectoriels qui prolonge la section sur $X_R - \Gamma_{S, \text{Spec } R}$. \square

DÉFINITION 19. – On définit également l'ouvert régulier $\mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}}$ de \mathcal{M}_λ par le champ des sections :

$$\mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}} := \text{Hom}_X(X, [V_G^{\lambda, \text{reg}}/G]).$$

avec $V_G^{\lambda, \text{reg}} = (-w_0\lambda)^*[V_G^{\text{reg}}/Z_+]$ et où $V_G^{\text{reg}} \subset V_G$ désigne le lieu où la dimension du centralisateur est minimale.

Passons à la définition de la base de cette fibration. On a le morphisme de Steinberg

$$\chi_+ : V_G \rightarrow \mathfrak{C}_+$$

ainsi qu'un morphisme de projection $p_1 : [\mathfrak{C}_+/Z_+] \rightarrow [A_G/Z_+]$ qui est lisse de dimension relative r toujours d'après le théorème 3. On note \mathfrak{C}_+^λ le changement de base à X . On définit alors la base de Hitchin \mathcal{A}_λ comme le champ des sections

$$h_a : X \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda.$$

Grâce au morphisme de Steinberg χ_+ , on a un morphisme de Hitchin

$$f : \overline{\mathcal{M}}_\lambda \rightarrow \mathcal{A}_\lambda$$

donné par $f(E, \phi) = \chi_+(\phi)$.

REMARQUE. – À ce stade, il est important de remarquer que $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ peut être vide si l'on n'impose pas de conditions sur λ . Le cas déployé est suffisant pour l'explication qui suit. On a une suite exacte de la forme :

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{\text{der}} \longrightarrow \mathbf{G} \xrightarrow{\det_{\mathbf{G}}} \mathbb{G}_m^l \longrightarrow 1.$$

En particulier, étant donné un point $(E, \phi) \in \overline{\mathcal{M}}_\lambda(k)$ en considérant $\det_{\mathbf{G}}(\phi)$, cela fournit l -fonctions sur la courbe X dont le degré en vertu du lemme 17, est $\deg\langle \omega'_i, -w_0\lambda \rangle$. Cela impose donc que :

$$\forall 1 \leq i \leq l, \deg\langle \omega'_i, -w_0\lambda \rangle = 0,$$

hypothèse que l'on fera par la suite systématiquement. Dans ce cas, la base de Hitchin pour le groupe \mathbf{G} est donné par :

$$\mathcal{A}_\lambda = \prod_{j=1}^l (H^0(X, \mathcal{O}_X(\langle \omega'_j, -w_0\lambda \rangle)) - \{0\}) \times \prod_{i=1}^r H^0(X, \mathcal{O}_X(\langle \omega_i, -w_0\lambda \rangle)).$$

En particulier, une condition nécessaire pour que $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ soit non vide est que pour tout $1 \leq j \leq l$, le diviseur $\langle \omega'_j, -w_0\lambda \rangle$ soit linéairement équivalent à zéro.

3.1. Le champ de Picard

Le centralisateur régulier va permettre d'obtenir une action d'un champ de Picard sur les fibres de Hitchin. On a construit une section de Steinberg ε_+ et un centralisateur régulier J qui est un schéma en groupes commutatif et lisse muni d'un morphisme :

$$\chi_+^* J \rightarrow I$$

qui est un isomorphisme sur l'ouvert V_G^{reg} constitué des éléments conjugués à $\varepsilon_+(\mathfrak{C}_+)$ et I le schéma des centralisateurs des éléments de V_G dans G . On tire alors le centralisateur régulier J en un schéma $J^\lambda := (-w_0\lambda)^* J$ sur \mathfrak{C}_+^λ . Pour tout S -point de \mathcal{A}_λ , on a une flèche $h_a : X \times S \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda$. Posons $J_a := h_a^* J^\lambda$ l'image réciproque de J^λ sur \mathfrak{C}_+^λ .

DÉFINITION 20. – *On considère le groupoïde de Picard $\mathcal{P}_a(S)$ des J_a -torseurs sur $X \times S$. Quand a varie, cela définit un groupoïde de Picard \mathcal{P} au-dessus de \mathcal{A}_λ .*

La flèche $\chi_+^* J \rightarrow I$ induit pour tout S -point (E, ϕ) au-dessus de a une flèche

$$J_a \rightarrow \text{Aut}_{X \times S}(E, \phi) = h_{E, \phi}^* I$$

avec I le schéma des centralisateurs des éléments de V_G dans G . On en déduit alors une action du groupoïde de Picard $\mathcal{P}_a(S)$ sur le groupoïde $\overline{\mathcal{M}}_\lambda(a)(S)$, et donc une action de \mathcal{P} sur $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$. De même que pour les fibres de Springer affines [4, Prop. 3.6], l'orbite régulière est un toseur sous \mathcal{P} .

PROPOSITION 21. – *L'ouvert $\mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}}$ est un toseur trivial sous l'action de \mathcal{P} .*

Démonstration. – La preuve est la même que pour les fibres de Springer affines [4, Prop. 3.6] et le toseur est trivialisé par la section de Steinberg ε_+ . \square

3.2. Les ouverts $\mathcal{A}_\lambda^\heartsuit$ et $\mathcal{A}_\lambda^\diamond$

Commençons par introduire des ouverts de \mathcal{A}_λ pour lesquels on aura plus de prise sur la fibration de Hitchin. Ils seront étudiés de manière approfondie dans le chapitre suivant. On rappelle que l'on a un morphisme fini plat W -équivariant :

$$V_T \rightarrow \mathfrak{C}_+.$$

ramifié le long du diviseur discriminant $\mathfrak{D}_+ = \bigcup_{\alpha \in R} \overline{\text{Ker}(\alpha)}$. On note toujours $\mathfrak{D}_+ \subset \mathfrak{C}_+$ l'image dans \mathfrak{C}_+ que l'on tire ensuite sur \mathfrak{C}_+^λ en un diviseur $\mathfrak{D}_\lambda := (-w_0\lambda)^* \mathfrak{D}_+$ (on tire de même V_T en V_T^λ).

DÉFINITION 22. – On définit l'ouvert génériquement régulier semisimple $\mathcal{H}_\lambda^\heartsuit \subset \mathcal{A}_\lambda$ constitué des $a \in \mathcal{A}_\lambda$ tels que $a(X) \notin \mathfrak{D}_\lambda$ ainsi que l'ouvert transversal $\mathcal{H}_\lambda^\diamond$ constitué des $a \in \mathcal{A}_\lambda$ qui intersectent transversalement le diviseur discriminant \mathfrak{D}_λ .

REMARQUE. – En particulier, on a l'inclusion :

$$\mathcal{H}_\lambda^\diamond \subset \mathcal{H}_\lambda^\heartsuit.$$

On a une flèche $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbf{G})$ d'image Γ . Soit $W' := W \rtimes \Gamma$, pour $a \in \mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$, on a une section $h_a : X \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda$. On pose \tilde{X}_a le revêtement fini plat obtenu en tirant par h_a le revêtement

$$X_\rho \times V_T^\lambda \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda.$$

L'ouvert $\mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$ a la propriété agréable que le champ de Picard est lisse au-dessus de celui-ci.

PROPOSITION 23. – Pour tout $a \in \mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$,

$$H^0(X, \text{Lie}(J_a)) = \text{Lie}(Z_G)^\Gamma.$$

Le champ de Picard $\mathcal{P}^\heartsuit := \mathcal{P} \times_{\mathcal{A}_\lambda} \mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$ est lisse sur $\mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$. Si, de plus G n'a pas de tore déployé central et si Γ est d'ordre premier à la caractéristique, alors \mathcal{P}_a est un champ de Picard de Deligne-Mumford.

Démonstration. – De la description galoisienne, on déduit que le groupe $H^0(X, \text{Lie}(J_a))$ s'identifie aux sections W -équivalentes :

$$s : \tilde{X}_a \rightarrow \mathfrak{t}.$$

Comme on a vu que \tilde{X}_a est une courbe propre géométriquement connexe et réduite,

$$H^0(\tilde{X}_a, \mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$$

et donc en prenant les W' -invariants, on déduit de l'annulation $\mathfrak{t}_{\text{der}}^{W'}$, que

$$H^0(X, \text{Lie}(J_a)) = \text{Lie}(Z_G)^\Gamma.$$

Le schéma J_a est un schéma en groupes commutatif et lisse, l'obstruction à déformer un J_a -torseur est dans le $H^2(X, \text{Lie}(J_a))$, qui est nul comme X est une courbe. En particulier, \mathcal{P}_a est lisse. Enfin, comme la dimension du H^0 est constante, on en déduit que la dimension de l'espace tangent reste constante, d'où la lissité de $\mathcal{P} \times_{\mathcal{A}_\lambda} \mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$ sur $\mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$. De plus, on a :

$$H^0(X, J_a) = \mathbf{T}^{W \rtimes \Gamma}$$

lequel est fini non-ramifié si G n'a pas de tore central et Γ premier à la caractéristique et donc sous cette hypothèse \mathcal{P}_a est bien de Deligne-Mumford. \square

COROLLAIRE 24. – L'ouvert régulier $\mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}, \heartsuit}$ est lisse au-dessus de $\mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$.

Démonstration. – D'après la proposition 21, $\mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}, \heartsuit}$ est un toseur sous \mathcal{P}^\heartsuit et comme \mathcal{P}^\heartsuit est lisse sur $\mathcal{H}_\lambda^\heartsuit$, on conclut. \square

En général, la fibration de Hitchin n'a aucune raison d'être lisse. Néanmoins, la situation est plus agréable au-dessus de l'ouvert transversal $\mathcal{H}_\lambda^\diamond$.

PROPOSITION 25. – Soit $\mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}, \diamond}$ la restriction à $\mathcal{H}_\lambda^\diamond$ de $\mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}}$ et $f^\diamond : \mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}, \diamond} \rightarrow \mathcal{H}_\lambda^\diamond$, alors on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}, \diamond} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_\lambda \\ f^\diamond \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{H}_\lambda^\diamond & \longrightarrow & \mathcal{H}_\lambda, \end{array}$$

en particulier, pour tout $a \in \mathcal{H}_\lambda^\diamond$, on déduit $\overline{\mathcal{M}}_\lambda(a) = \mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}}(a)$.

Démonstration. – On suit la preuve de [24, Prop. 4.2]. Pour démontrer que le carré est cartésien, il suffit de voir qu’au-dessus de $\mathcal{H}_\lambda^\diamond$, on a l’égalité $\overline{\mathcal{M}}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda^{\text{reg}}$. En particulier, il suffit de montrer qu’étant donné une section $h_{(E, \phi)} : X \rightarrow [V_G^\lambda / G]$ tel que $\chi_+(\phi) \in \mathcal{H}_\lambda^\diamond$, alors la section $h_{(E, \phi)}$ se factorise par $[V_G^{\lambda, \text{reg}} / G]$. Le problème étant local, on peut supposer que E est trivial et se restreindre à $X = \text{Spec}(k[[\pi]])$. La section revient alors à une flèche :

$$\phi : \text{Spec}(k[[\pi]]) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{V_G^{\lambda, x}})$$

On note ϕ^\sharp le morphisme entre les anneaux locaux et \mathfrak{m}_x l’idéal maximal de $\mathcal{O}_{V_G^{\lambda, x}}$. Par localité de ϕ^\sharp , on a que $(\phi^\sharp)^{-1}(\pi k[[\pi]]) = \mathfrak{m}_x$. On doit montrer que $x \in V_G^{\lambda, \text{reg}}$. S’il n’est pas régulier, alors d’après [4, Prop.2.19] :

$$\mathfrak{D}_\lambda \in \mathfrak{m}_x^2,$$

puisque la fonction discriminant s’annule au moins à l’ordre deux en un point non régulier. En particulier, l’image du discriminant dans $k[[t]]$ est de valuation au moins deux, ce qui contredit le fait que $a \in \mathcal{H}_\lambda^\diamond$. \square

DÉFINITION 26. – Pour un entier N et $\lambda \in \text{Div}^+(X, T)$, on dit que $\lambda \succ N$ si, pour tout $\omega \in X^*(T)^+$ non nul, on a :

$$|\langle \omega, -w_0 \lambda \rangle| \geq N,$$

où $\langle \omega, -w_0 \lambda \rangle$ est le diviseur défini dans (3).

Maintenant, il faut s’assurer que l’ouvert $\mathcal{H}_\lambda^\diamond$ est bien non vide, ce qui fait l’objet de la proposition suivante, de preuve identique à celle de Ngô [25, Prop. 4.7.1] :

PROPOSITION 27. – Supposons $\lambda \succ 2g$, alors l’ouvert $\mathcal{H}_\lambda^\diamond$ est non vide.

4. Énoncé des théorèmes principaux

Dans cette section on souhaite calculer le complexe d’intersection de l’espace total de Hitchin $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$. Au-dessus de l’ouvert $\mathcal{H}_\lambda^\diamond$, la fibration de Hitchin était lisse, il s’agit maintenant de l’étudier sur un ouvert plus gros que $\mathcal{H}_\lambda^\diamond$ qui prendra en compte les singularités de l’espace de Hitchin. Cet ouvert sera suffisamment gros pour les applications locales telles que lemme fondamental.

4.1. Le théorème de transversalité

On note F le corps de fonctions de notre courbe projective lisse géométriquement connexe X de genre g définie sur un corps algébriquement clos k . Soit G une forme quasi-déployée de \mathbf{G} sur X , où \mathbf{G} est connexe réductif avec \mathbf{G}_{der} simplement connexe. On suppose que G se déploie sur un revêtement étale galoisien $X_\rho \rightarrow X$ de groupe Γ et G n'a pas de facteurs simples de type A_{2r} .

On considère un diviseur $\lambda \in \text{Div}^+(X, T)$ et on note $S = \text{supp}(\lambda)$. On dispose du diviseur discriminant \mathfrak{D}_λ sur \mathfrak{C}_+^λ . En considérant la flèche :

$$ev : X \times \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda,$$

on obtient un fibré en droites en tirant le diviseur \mathfrak{D}_λ qui est de degré constant δ . En particulier, pour tout $a \in \mathcal{A}_\lambda$, on pose $\Delta(a) := a^* \mathfrak{D}_\lambda$, qui est un diviseur effectif de degré constant δ . On considère le schéma $X^{(\delta)} := X^\delta / \mathfrak{S}_\delta$ qui classe les diviseurs effectifs D de degré δ sur X , où \mathfrak{S}_δ est le groupe symétrique à δ éléments. D'après la discussion précédente, on obtient une flèche :

$$\Phi : \mathcal{A}_\lambda \rightarrow X^{(\delta)},$$

donnée par $a \mapsto \Delta(a)$. Pour un point fermé $x \in X(k)$, on note $\Delta_x(a)$ le discriminant local en x , i.e. le tiré en arrière sur le disque formel en x et on pose $d_x(a) = \text{val}(\Delta_x(a))$. Pour un entier $d \in \mathbb{N}$, on a un morphisme :

$$\phi_d : X \times X^{(\delta-d-1)} \rightarrow X^{(\delta)}$$

qui à une paire (x, D) associe le diviseur $(d+1)[x] + D$. Cette flèche étant propre, on en déduit que le complémentaire de son image dans $X^{(\delta)}$,

$$U_d := \{D \in X^{(\delta)} \mid \forall x \in X, m_x(D) \leq d\},$$

est ouvert, où $m_x(D)$ désigne la multiplicité de D en x . En prenant l'image réciproque par l'application Φ , on obtient donc que :

$$\mathcal{A}_\lambda^{\leq d} := \{a \in \mathcal{A}_\lambda \mid \forall x \in X, d_x(a) \leq d\}$$

est ouvert. Pour tout $a \in \mathcal{A}_\lambda$, on a une décomposition en somme de diviseurs :

$$\Delta(a) = \Delta_{\text{tr}}(a) + \Delta_{\text{sing}}(a),$$

où $\Delta_{\text{sing}}(a) = \sum_{x \mid d_x(a) \geq 2} d_x(a)[x]$. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} d_{\text{sing}} : \mathcal{A}_\lambda &\rightarrow \mathbb{N} \\ a &\mapsto \text{deg}(\Delta_{\text{sing}}(a)). \end{aligned}$$

On a alors le lemme suivant :

LEMME 28. – *La fonction d_{sing} est semi-continue supérieurement, i.e. pour tout $d \in \mathbb{N}$, le sous-schéma de \mathcal{A}_λ constitué des $a \in \mathcal{A}_\lambda$ tels que $d_{\text{sing}}(a) \leq d$ est ouvert.*

Démonstration. – Soit $d \in \mathbb{N}$, on considère la fonction :

$$\begin{aligned} m_{\text{sing}} : X^{(\delta)} &\rightarrow \mathbb{N} \\ D &\mapsto \sum_{x \mid m_x(D) \geq 2} m_x(D). \end{aligned}$$

Pour obtenir le lemme, il suffit de voir que le sous-schéma :

$$V_d := \{D \in X^{(\delta)} \mid m_{\text{sing}}(D) \leq d\}$$

est ouvert, puis de prendre l'image réciproque par Φ . Le problème étant local sur $X^{(\delta)}$ pour la topologie étale, on peut supposer que $X = \mathbb{A}^1$ et dans ce cas $X^{(\delta)} = \{P \in k[t] \mid \deg P = \delta\}$. Tout polynôme $P \in X^{(\delta)}$ admet une décomposition :

$$P = P_{\text{trnv}} P_{\text{sing}}$$

où P_{trnv} est à racines simples. La fonction m_{sing} est donnée par :

$$\forall P \in X^{(\delta)}, m_{\text{sing}}(P) = \deg P_{\text{sing}} = \delta - |\{\text{racines simples de } P\}|.$$

Montrons que le nombre de racines simples croît par généralisation ; il s'agit relever une racine simple $x_s \in k$ de la réduction $P_s \in k[t]$ d'un polynôme $P \in k[[\pi]][t]$ en une racine simple $x \in k[[\pi]][t]$ de P , ce qui est précisément le lemme de Hensel. \square

Pour définir le bon ouvert, un autre invariant est nécessaire. On rappelle que l'on a $\lambda = \sum_{x \in X} \lambda_x [x]$ et $S = \text{supp}(\lambda)$. On fixe un point fermé $t \in X$, tel que $\lambda_t \neq 0$, il va jouer le rôle de point auxiliaire. On note alors $S_0 = S - \{t\}$. Pour chaque point fermé $x \in S_0$, on a un schéma V^{λ_x} au-dessus de $D_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$ le voisinage formel autour de x . Ce schéma est lisse en fibre générique. Soit alors l'entier

$$e'_x := e_{V^{\lambda_x}/\mathcal{O}_x}^{\text{Elk}},$$

où l'on renvoie à la définition 38. Cet entier mesure la singularité du schéma V^{λ_x} , il est à noter que si $\lambda_x = 0$, alors $e'_x = 0$, puisqu'à ce moment-là, on tombe dans le groupe. On note $e_x = \max(\langle 2\rho, \lambda_x \rangle, e'_x)$ et $e = \sum_{x \in S_0} e_x$. On considère alors l'ouvert suivant :

DÉFINITION 29. – On rappelle que l'on a fixé un point fermé $t \in X$, tel que $\lambda_t \neq 0$. Pour un entier $d \in \mathbb{N}$, on définit le sous-schéma $\mathcal{A}_\lambda^{b, \leq d} \subset \mathcal{A}_\lambda^{\leq d}$ constitué des $a \in \mathcal{A}_\lambda^{\leq d}$ tels que :

- $d_t(a) = 0$,
- $3d_{\text{sing}}(a) + (e + 2d + 1) |S_0| + 2g - 2 < \lambda$.

PROPOSITION 30. – Le sous-schéma $\mathcal{A}_\lambda^{b, \leq d} \subset \mathcal{A}_\lambda^{\leq d}$ est ouvert.

Démonstration. – La première condition est clairement ouverte. Pour la deuxième, cela résulte du fait que la fonction d_{sing} est semi-continue et que $\mathcal{A}_\lambda^{\leq d}$ est déjà ouvert. \square

REMARQUES. – Cet ouvert $\mathcal{A}_\lambda^{b, \leq d}$ peut sembler artificiel, mais pour les applications au lemme fondamental il est suffisant. En effet, on aura en un point x de la courbe un cocaractère dominant λ_x et un discriminant local d_x ; pour globaliser le problème il suffira de prendre le λ_t aussi grand que l'on veut, de telle sorte que l'inégalité

$$3d_{\text{sing}}(a) + (e + 2d + 1) |S_0| + 2g - 2 < \lambda,$$

puisse être remplie.

- Pour $x \in S_0$, on a pris $e_x = \max(\langle 2\rho, \lambda_x \rangle, e'_x)$, mais il semble raisonnable de penser qu'on a l'inégalité :

$$\langle 2\rho, \lambda_x \rangle \leq e'_x.$$

Néanmoins, dans la suite, elle ne sera pas nécessaire.

On forme alors le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_\lambda^{b, \leq d} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_\lambda^{b, \leq d} & \longrightarrow & \mathcal{H}_\lambda. \end{array}$$

On pose

$$\overline{\mathcal{M}}_\lambda^b = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{M}}_\lambda^{b, \leq d},$$

le théorème principal est alors le suivant :

THÉORÈME 31. – *Le champ $\overline{\mathcal{M}}_\lambda^b$ est équidimensionnel, soit m sa codimension dans $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$, alors on a l'égalité suivante entre les complexes d'intersections :*

$$(\Delta^b)^*[-m]IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda} = IC_{\overline{\mathcal{M}}_\lambda^b}.$$

On a également $(\Delta^b)^!IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda} = IC_{\overline{\mathcal{M}}_\lambda^b}$.

- REMARQUES.** – i. Cet énoncé est une variante faible de la conjecture 4.1 de Frenkel-
Ngô [14].
ii. Ce théorème va s'obtenir en montrant qu'une certaine flèche vers la grassmannienne
affine est lisse.

On rappelle que l'on a $S = \text{supp}(\lambda)$. D'après [22, Prop. 1.10-1.14], pour tout diviseur $N = \sum_{i \in S} n_i [x_i]$ avec des n_i suffisamment grands par rapport à λ , on dispose d'une flèche lisse :

$$g : \overline{\mathcal{H}}_\lambda \rightarrow [\overline{\text{Gr}}_\lambda / G_N].$$

où $G_N := \text{Res}_{N/k} G$ est la restriction à la Weil de G à N . On obtient donc une flèche composée :

$$g^b : \overline{\mathcal{M}}_\lambda^b \rightarrow [\overline{\text{Gr}}_\lambda / G_N]$$

Dans la définition 29, on a fixé un point auxiliaire $t \in X$ tel que $\lambda_t \neq 0$. Comme en ce point, on impose au polynôme caractéristique d'être régulier semisimple, l'image de f^b va tomber dans l'ouvert

$$U := \text{Gr}_{\lambda_t} \times \prod_{s \neq t} \overline{\text{Gr}}_{\lambda_s}.$$

Posons $\overline{\mathcal{H}}'_\lambda := g^{-1}(U)$, $\overline{\text{Gr}}'_\lambda := \prod_{s \neq t} \overline{\text{Gr}}_{\lambda_s}$ et $p : U \rightarrow \overline{\text{Gr}}'_\lambda$. On considère alors la flèche g^b composée avec p :

$$\theta^b : \overline{\mathcal{M}}_\lambda^b \rightarrow [\overline{\text{Gr}}'_\lambda / G'_N]$$

avec $G'_N := \text{Res}_{N-n_t[t]/k} G$. La proposition est la suivante :

PROPOSITION 32. – *La flèche θ^b est lisse.*

On démontre cette proposition dans la section 5.

LEMME 33. – *Le théorème 31 se déduit de la proposition 32.*

Démonstration. – En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_\lambda & \longrightarrow & \overline{\mathcal{N}}'_\lambda \\ & \searrow \theta^b & \downarrow p \circ g \\ & & [\overline{\text{Gr}}'_\lambda / G'_N] \end{array}$$

où les flèches θ^b et $p \circ g$ sont lisses et $\overline{\mathcal{N}}'_\lambda$ est ouvert dans $\overline{\mathcal{N}}_\lambda$. □

4.2. Rappels sur des résultats d’Elkik et Gabber-Ramero

Les résultats de ce paragraphe sont tirés d’Elkik [12] et de Gabber-Ramero [16]. On suit la présentation de Temkin [31, 3.2.1] et l’on commence par des généralités sur les idéaux jacobiens. On introduit deux idéaux, celui d’Elkik et celui de Gabber-Ramero qui vont mesurer la singularité d’un morphisme. Les deux seront utiles puisque l’idéal d’Elkik se calcule plus aisément et celui de Gabber-Ramero, étant canonique, permet d’avoir des énoncés avec des preuves plus intrinsèques, notamment le lemme 36. L’idéal d’Elkik sert particulièrement dans l’énoncé 40.

Soit A un anneau et $Q := A[X_1, \dots, X_N]$. On considère un idéal de type fini $J \subset Q$ et on pose $B = Q/J$. Soit (f_1, \dots, f_q) un système de générateurs de $J \subset Q$. Pour chaque entier p et chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p \leq q$, posons $|\alpha| = p$. Soit $J_\alpha \subset J$ le sous-idéal engendré par $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_p})$ et Δ_α l’idéal engendré par les déterminants des mineurs d’ordre p de la matrice jacobienne $(\partial f_{\alpha_i} / \partial X_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq N)$. Soit également l’idéal :

$$(J_\alpha : J) := \{f \in A[X_1, \dots, X_N] \mid fJ \subset J_\alpha\}.$$

On pose alors :

$$H_{B/A}^{\text{Elk}} := \sum_{p \geq 0} \sum_{|\alpha|=p} \Delta_\alpha (J_\alpha : J).$$

L’inconvénient de cet idéal est qu’il dépend du choix des équations et que cet idéal ne contient pas naturellement J . On introduit donc une version plus intrinsèque tirée de Gabber-Ramero [16]. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on fait la définition suivante :

DÉFINITION 34. – Soit l’idéal $H_A(Q, J) := \text{Ann}_Q \text{Ext}_B^1(L_{B/A}, J/J^2)$ où $L_{B/A}$ est le complexe cotangent défini par Illusie [20].

REMARQUES. – Comme $J \subset H_A(Q, J)$, on peut voir $V(H_A(Q, J))$ comme un sous-schéma de $\text{Spec}(B)$ d’idéal $\mathbf{H}_{B/A} = H_A(Q, J)B$.

– D’après [16, 5.4.3 (iii)], l’idéal $\mathbf{H}_{B/A}$ est le plus grand idéal qui annule tout module de la forme $\text{Ext}_B^1(L_{B/A}, N)$ pour tout B -module N et donc ne dépend que de $A \rightarrow B$.

D’après [16, 5.4.2] on a les assertions suivantes :

PROPOSITION 35. – i. Le lieu d’annulation de $\mathbf{H}_{B/A}$ est précisément le lieu singulier de

$$f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A).$$

En particulier, si f est lisse, $\mathbf{H}_{B/A} = B$.

ii. Soit $A \rightarrow A'$ et $B' = B \otimes_A A'$ alors $\mathbf{H}_{B/A} B' \subset \mathbf{H}_{B'/A'}$

iii. *On a la comparaison suivante entre l'idéal d'Elkik et celui de Gabber-Ramero :*

$$H_{B/A}^{\text{Elk}} \subset H_{B/A}.$$

REMARQUE. – En particulier, on voit que l'idéal de Gabber-Ramero raffine l'idéal d'Elkik de même qu'il grossit par changement de base.

Pour tout $a := (a_1, \dots, a_N) \in A^N$, soit $\mathfrak{p}_a \subset F$ l'idéal engendré par $(X_1 - a_1, \dots, X_N - a_N)$. Pour le lemme suivant, on considère $A = R[[\pi]]$ avec un anneau local artinien R , d'idéal maximal \mathfrak{m} , de corps résiduel k , I un idéal tel que $I \cdot \mathfrak{m} = 0$ et $\bar{R} = R/I$. On conserve les notations de la définition 34.

LEMME 36. – *Soient n, h deux entiers positifs avec $n > 2h$. On considère un morphisme*

$$f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A).$$

On suppose que l'on a une section $\sigma : \text{Spec} A/\pi^n I \rightarrow \text{Spec}(B)$ telle que sur le corps résiduel le conducteur de f en $\sigma(\text{Spec}(k))$ est égal à h . Alors, il existe une section $\tilde{\sigma} : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ qui relève la restriction σ_0 de σ à $\text{Spec} A/\pi^{n-h} I$.

REMARQUE. – Ce lemme est une version infinitésimale du lemme 5.4.8 de Gabber-Ramero.

Démonstration. – On suit la preuve de [16, Lem. 5.4.8].

On a un morphisme $\sigma : \text{Spec} A/\pi^n I \rightarrow \text{Spec}(B)$, on note σ_0 sa restriction au sous-schéma fermé $\text{Spec} A/\pi^{n-h} I$. Il faut relever σ_0 en $\tilde{\sigma} : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$.

D'après [16, 3.2.16], l'obstruction à l'existence d'un relèvement de σ en un morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ gît dans $\text{Ext}_B^1(L_{B/A}, \pi^n I)$. On note $\omega \in \text{Ext}_B^1(L_{B/A}, \pi^n I)$ cette obstruction. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi^n I & \xrightarrow{\alpha} & \pi^{n-h} I \\ \beta \downarrow & \swarrow \gamma & \\ \pi^n I & & \end{array}$$

où α est l'inclusion de $\pi^n I \subset \pi^{n-h} I$, β est la multiplication par π^h et γ l'isomorphisme donné par la multiplication par π^h . Comme la structure de B -module est induite par l'extension des scalaires de σ , on a $\mathfrak{p}_a \cdot \omega = 0$. De plus, il résulte de la remarque de la définition 34 que $H_A(Q, J) \cdot \omega = 0$. Comme $\pi^h \in (H_A(Q, J) + \mathfrak{p}_a)/\mathfrak{m}$, il existe un élément $x \in \mathfrak{m}$ tel que $x + \pi^h \in H_A(Q, J) + \mathfrak{p}_a$, d'où

$$(x + \pi^h) \cdot \omega = 0.$$

Or, comme on a $I \cdot \mathfrak{m} = 0$, on déduit $(x + \pi^h) \cdot \omega = \pi^h \omega = \text{Ext}_B^1(L_{B/A}, \beta)(\omega) = 0$ et donc en particulier $\text{Ext}_B^1(L_{B/A}, \alpha)(\omega) = 0$. Comme cette classe est précisément l'obstruction à l'existence de $\tilde{\sigma}$, cela conclut. \square

REMARQUE. – La preuve du lemme montre qu'il suffit de considérer l'idéal $H' \supset H_{B/A}$ qui est le plus grand idéal qui annule les modules $\text{Ext}^1(L_{B/A}, N)$ où N est tué par π . L'avantage de considérer cet idéal est qu'il vérifie $H'/\mathfrak{m} = H_{B_0/A_0}$, où l'indice zéro indique la réduction modulo l'idéal maximal. Pour ne pas multiplier les idéaux, on se limitera à ceux déjà introduits.

On tire la définition suivante de [31, 3.2.5] :

DÉFINITION 37. – Soit A un anneau, $\pi \in A$ qui n'est pas un diviseur de zéro tel que A soit π -adiquement complet. Soit $f : X = \text{Spec}(B) \rightarrow Y = \text{Spec}(A)$ un morphisme de présentation finie fidèlement plat. On définit le conducteur de f comme étant le plus petit entier r (possiblement infini) tel que $\pi^r \in H_{B/A}$. En particulier, le conducteur est fini si f est lisse sur le complémentaire de $V(\pi)$.

REMARQUE. – D'après la proposition 35, le conducteur ne grandit pas après changement de base.

En plus, du conducteur de Gabber-Ramero, on aura besoin de l'invariant d'Elkik.

DÉFINITION 38. – Sous les mêmes hypothèses, on définit l'entier $e_{B/A}^{\text{Elk}}$ comme étant le plus petit entier tel que :

$$\pi^r \in H_{B/A}^{\text{Elk}}.$$

REMARQUE. – On a immédiatement que le conducteur h de Gabber-Ramero est plus petit que l'entier $e_{B/A}^{\text{Elk}}$.

On suppose de même que pour le lemme 36 que R est artinien avec les mêmes notations, à savoir un idéal I et \mathfrak{m} tels que $I \cdot \mathfrak{m} = 0$.

PROPOSITION 39. – Soient B, B' deux $R[[\pi]]$ -algèbres finies plates, étales sur $R((\pi))$. On pose $\bar{B} := B/\mathfrak{m}B$. Soit h le conducteur de Gabber-Ramero de $\bar{B}/k[[\pi]]$, on considère un entier $n > 2h$. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\bar{v} : B/\pi^n IB \rightarrow B'/\pi^n IB'$, alors il existe un isomorphisme $v : B \rightarrow B'$ qui est congru à \bar{v} modulo $\pi^{n-h}I$.

Démonstration. – La preuve est la même que [31, Prop. 3.3.1] en remplaçant [16, 5.4.13] par le lemme 36 et en utilisant l'idéal H' de la remarque qui fait suite à la preuve du lemme 36, au lieu de $H_{B/A}$. \square

4.3. Un résultat de Denef-Loeser-Sebag

Sans restreindre la généralité, on peut se limiter au cas où $S_0 = \{x\}$ est réduit à un point et $\lambda = \lambda_x[x]$. Soit $\mathcal{O} := \mathcal{O}_x$ de corps résiduel k , d'uniformisante π et F son corps de fractions. On note V^λ le schéma sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$. De même, on a :

$$e = e_x = \max(e_{V^\lambda/\mathcal{O}}^{\text{Elk}}, (2\rho, \lambda)).$$

Enfin, on note $K := G(\mathcal{O})$. On aura besoin à la suite de Denef-Loeser [10], de considérer un idéal auxiliaire. Pour X un schéma réduit pur de dimension r , soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel avec Y lisse, on considère l'idéal jacobien :

$$\text{Jac}_f = \text{Fitt}_0(\Omega_{Y/X}^1).$$

Une autre façon de décrire cet idéal est de considérer la flèche :

$$df : f^*\Omega_X^r \rightarrow \Omega_Y^r,$$

comme Y est lisse, Ω_Y^r est localement libre de rang un et l'image de df est de la forme $\text{Jac}_f \otimes \Omega_Y^r$. Soit R un anneau artinien et X un schéma plat, réduit, de dimension r sur $R[[\pi]]$. Pour $e \in \mathbb{N}$, on pose :

$$X^{(e)}(R[[\pi]]) := X(R[[\pi]]) \setminus \pi_e^{-1}(X_{\text{sing}}(\mathcal{O}/\pi^{e+1}\mathcal{O})).$$

où π_e est la flèche de réduction modulo π^{e+1} et X_{sing} , le lieu singulier de X .

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de $R[[\pi]]$ -schémas, birationnel sur $R((\pi))$, avec Y lisse, on considère le sous-ensemble :

$$\Delta_{e,e'} := \{y \in Y(R[[\pi]]) \mid \pi^e \in \text{Jac}_f(y), h(y) \in X^{(e')}(R[[\pi]])\}.$$

On a la proposition suivante tirée de Sebag [29, Lem. 7.2.1], due à Denef-Loeser [10] en caractéristique nulle

PROPOSITION 40. – *Il existe une constante c_X qui dépend que de X telle que, pour tout triplet d'entiers (n, e, e') avec $n \geq \max(e, c_X e')$, $z \in \Delta_{e,e'}$ et $x \in X(R[[\pi]])$ tel que $h(z) = x[\pi^{n+1}]$, il existe $y \in Y(R[[\pi]])$ tel que $h(y) = x$ et $z = y[\pi^{n-e+1}]$.*

Les remarques suivantes sont très importantes pour le reste de la preuve.

- REMARQUES.** – i. Dans Sebag, la proposition est énoncée pour R un corps, la preuve s'étend telle quelle une fois que l'on a remplacé la condition $\text{val}(\text{Jac}_f(y)) = e$ par $\pi^e \in \text{Jac}_f(y)$.
- ii. Il semble raisonnable de conjecturer que l'on peut remplacer ces invariants jacobiens par ceux plus fins obtenus avec les idéaux de Gabber-Ramero.
- iii. En vertu de la preuve de [29, 4.3.25], la constante $c_X e'$ revient précisément à considérer la valuation de z par rapport à l'idéal $H_{X/R}^{\text{Elk}}$ au lieu de $\text{Jac}_{X/R}$. En particulier, dans le cas du schéma V^λ , on peut remplacer $c_X e'$ par $e_{V^\lambda/\mathcal{O}}^{\text{Elk}}$.

On déduit de cette proposition le corollaire suivant :

COROLLAIRE 41. – Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in V^\lambda(R)$ tels que $\gamma_1 = \gamma_2 [\pi^{e+1}]$, on considère alors le morphisme de $R[[\pi]]$ -schémas :

$$\phi : G \rightarrow V^\lambda$$

donnée par $g \mapsto \gamma_2 g$, alors il existe $k \in K(R)$ tel que :

$$\gamma_1 = k\gamma_2.$$

Démonstration. – On rappelle que l'on prend $e := \max(e_{V^\lambda/\mathcal{O}}^{\text{Elk}}, \langle 2\rho, \lambda \rangle)$. Le jacobien de ϕ est donné par $\det(\gamma_2) = \pi^{\langle 2\rho, \lambda \rangle} \in \text{Jac}_\phi$ et $\langle 2\rho, \lambda \rangle \leq e$. On applique alors la proposition 40, avec $f = \phi$, $x = \gamma_1$, $z = 1$, $e_{V^\lambda/R[[\pi]]}^{\text{Elk}} = c_X e'$ d'après la remarque (ii). \square

5. La flèche global-local

Dans cette section, on démontre la proposition 32. Sauf mention explicite, on suppose dans ce paragraphe que G est semisimple simplement connexe déployé. On explique dans la section 5.4, les modifications nécessaires pour le cas général. Il suffit donc, en vertu de [18, IV. 4. 17.14.2], de vérifier le critère infinitésimal pour un anneau local artinien R d'idéal maximal \mathfrak{m} , de corps résiduel k et I un idéal de R tel que $I \cdot \mathfrak{m} = 0$ et $\bar{R} = R/I$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $S_0 = \{x\}$. Les données sont alors les suivantes :

- une paire $(\bar{E}, \bar{\phi}) \in \overline{\mathcal{M}}_\lambda^{b, \leq d}(\bar{R})$,
- une égalité dans \bar{R} entre $(\bar{E}_x, \bar{\phi}_x)$ et $(\bar{E}_0, \bar{\gamma})$ où l'on peut supposer quitte à localiser que E_0 est trivial,
- le choix d'une paire (E_0, γ_1) , $\gamma_1 \in V_x^\lambda(R)$ qui relève $(\bar{E}_0, \bar{\gamma})$.

Il s'agit de relever la paire $(\bar{E}, \bar{\phi})$ en (E, ϕ) qui s'envoie sur (E_0, γ_1) modulo action à gauche par G'_N et à droite par K_{S_0} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout point fermé x de X , on note $K_x^n := \text{Ker}(G(\mathcal{O}_x) \rightarrow G(\mathcal{O}_x/\pi^{n+1}\mathcal{O}_x))$.

5.1. Réduction à un problème semi-local

On a le diviseur discriminant $\Delta(\bar{a}) \subset X_{\bar{R}}$ de la paire $(\bar{E}, \bar{\phi})$. En regardant la réduction au corps résiduel $\Delta_0(\bar{a})$ de $\Delta(\bar{a})$, on a une décomposition :

$$\Delta_0(\bar{a}) = \Delta_{0, \text{tr}}(\bar{a}) + \Delta_{0, \text{sing}}(\bar{a})$$

et on note alors $S' := \text{supp}(\Delta_{0, \text{sing}}(\bar{a})) \cup \{x\}$. On considère l'anneau semi-local complété aux points de S' , $\hat{\mathcal{O}}_{X, S'}$ d'anneau total de fractions $F_{S'}$. On note alors $(\bar{E}_{S'}, \bar{\phi}_{S'})$ la paire restreinte au voisinage formel $D_{S'}$, de S' dans $X_{\bar{R}}$, qui s'identifie à $R \hat{\times} \hat{\mathcal{O}}_{X, S'}$.

LEMME 42. – Soit un relèvement local $(E_{S'}, \phi_{S'})$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S'}) \hat{\times} R$ de $(\bar{E}_{S'}, \bar{\phi}_{S'})$ avec

$$\forall s, s' \in S', \chi_+(\phi_s) = \chi_+(\phi_{s'}) = a \in \mathcal{F}_\lambda^{b, \leq d}(R),$$

alors il existe une paire $(E, \phi) \in \overline{\mathcal{M}}_\lambda^b(R)$ qui relève $(\bar{E}, \bar{\phi})$ et telle que :

- $a = \chi_+(\phi)$.
- $(E, \phi)|_{D_{S'}} = (E_{S'}, \phi_{S'})$.

Démonstration. – Sur l'ouvert $(X-S')_{\bar{R}}$, la paire restreinte $(\bar{E}_{X-S'}, \bar{\phi}_{X-S'})$ est transverse, en particulier, le même argument que la lissité de la flèche :

$$\mathcal{M}_\lambda^\diamond \rightarrow \mathcal{A}_\lambda^\diamond,$$

permet de relever la paire $(\bar{E}_{X-S'}, \bar{\phi}_{X-S'})$ en une paire $(E_{X-S'}, \phi_{X-S'})$ avec $\chi_+(\phi) = a'$. De plus, on a un isomorphisme $\bar{\beta}$ entre $(\bar{E}_{S'}, \bar{\phi}_{S'})$ et $(\bar{E}_{X-S'}, \bar{\phi}_{X-S'})$ sur $\text{Spec}(\bar{R} \hat{\otimes} F_{S'})$, qui revient à la donnée d'une trivialisation d'un certain J_a -torseur sur $\text{Spec}(R \hat{\otimes} F_{S'})$. Ce J_a -torseur s'obtient en tirant le J -torseur universel $G \times V_G^{\lambda, \text{reg}} \rightarrow V_G^{\lambda, \text{reg}} \times_{\mathfrak{e}_+^\lambda} V_G^{\lambda, \text{reg}}$, où J est le centralisateur régulier. Comme J_a est lisse, par la propriété de relèvement infinitésimal, on obtient alors sur $\text{Spec}(R \hat{\otimes} F_{S''})$ un isomorphisme :

$$\beta : (E, \phi) \rightarrow (E_{X-S'}, \phi_{X-S'}).$$

Maintenant, on recolle à la Beauville-Laszlo [1] le triplet $((E_{X-S'}, \phi_{X-S'}), (E_{S'}, \phi_{S'}), \beta)$, ce qu'on voulait. \square

Il résulte de ce lemme qu'il suffit de relever la paire semi-locale $(\bar{E}_{S'}, \bar{\phi}_{S'})$.

5.2. De nécessaires petits lemmes

Dans ce paragraphe, on énonce divers lemmes qui seront nécessaires pour démontrer le relèvement.

LEMME 43. – Soit R un anneau, soit $I \subset R$ un idéal de carré nul et $\bar{R} = R/I$. Soit $\bar{\gamma} \in V_G^\diamond(\bar{R}[[\pi]])$ (i.e. génériquement régulier semi-simple), $\gamma \in V_G(R[[\pi]])$ un relèvement de $\bar{\gamma}$ et $a = \chi_+(\gamma)$. On suppose qu'il existe $\bar{g} \in G(\bar{R}((\pi)))$

$$\bar{\gamma} = \bar{g}^{-1} \varepsilon_+(\bar{a}) \bar{g}$$

alors il existe $g \in G(R((\pi)))$ un relèvement de \bar{g} tel que :

$$\gamma := g^{-1} \varepsilon_+(a) g.$$

Démonstration. – Soit $a := \chi_+(\gamma)$. On forme le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_J & \longrightarrow & G \times G_+^{\text{rs}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(R((\pi))) & \xrightarrow{(\gamma, \varepsilon_+(a))} & G_+^{\text{rs}} \times_{\mathfrak{e}_+^{\text{rs}}} G_+^{\text{rs}} \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est donnée par $(g, x) \mapsto (x, gxg^{-1})$, laquelle est un toseur sous le centralisateur régulier, qui est ici un schéma en tores puisque l'on est au-dessus du lieu régulier semi-simple. On obtient donc un J_a -torseur H_J sur $\text{Spec}(R((\pi)))$, qui est lisse comme J_a est un schéma en tores. Pour obtenir le lemme, il faut montrer que ce toseur est trivial. Or, sur $R((\pi))$ on a une section, qui se relève alors sur $R((\pi))$ par lissité. \square

Les fibres de Springer que l'on considère ne dépendent que du centralisateur régulier :

LEMME 44. – Soit une k -algèbre A . Soit $g \in G(A((\pi)))$ et $a \in \mathfrak{e}_+^\lambda(A[[\pi]])^\diamond$ alors $g^{-1} \varepsilon_+(a) g \in V_G^\lambda(A[[\pi]])$ si et seulement si $(\pi^{-w_0 \lambda}, g^{-1} J_a(A[[\pi]]) g) \in V_G^\lambda(A[[\pi]])$.

Démonstration. – C'est la même preuve que [25, Lem. 3.5.3] en utilisant le fait que l'isomorphisme entre les centralisateurs :

$$\mathrm{ad}(g)^{-1} : J_{a,F} \rightarrow I_{\gamma,F},$$

avec $\gamma = g^{-1}\varepsilon_+(a)g$ s'étend en un morphisme de schémas sur \mathcal{O} . \square

On termine le paragraphe par l'introduction des revêtements caméraux qui contrôlent la fibre de Springer, dans la mesure où ils déterminent le centralisateur régulier.

5.2.1. *Les revêtements caméraux.* – Soit R local artinien d'idéal maximal \mathfrak{m} , $I \subset R$ un idéal tel que $I\mathfrak{m} = 0$. $\bar{R} := R/I$ et $k = R/\mathfrak{m}$. Soient des entiers n, d avec $n > 2d$. Soient $a, a' \in \mathfrak{C}_+^\lambda(R[[\pi]])^\heartsuit := \mathfrak{C}_+^\lambda(R[[\pi]]) \cap \mathfrak{C}_+^{\lambda,rs}(R((\pi)))$ tels que :

- la réduction sur le corps résiduel du discriminant $\Delta_0(a)$ est de valuation inférieure ou égale à d ,
- $a = a' [\pi^n I]$.

Considérons le revêtement caméral X_a défini par le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_a & \longrightarrow & V_T^\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(R[[\pi]]) & \xrightarrow{a} & \mathfrak{C}_+^\lambda \end{array}$$

ainsi que $X_{a'}$ le revêtement caméral de a' . On rappelle que V_T^λ et \mathfrak{C}_+^λ sont des schémas tirés sur $\mathrm{Spec}(R[[\pi]])$ par la flèche $-w_0\lambda$. On note \bar{a} la réduction à $\bar{R}[[\pi]]$ et $X_{\bar{a}}$ la réduction à $\bar{R}[[\pi]]$ du revêtement caméral (et de même pour a').

LEMME 45. – *Le revêtement caméral X_a est Gorenstein.*

Démonstration. – Le morphisme $a : \mathrm{Spec}(R[[\pi]]) \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda$ est une immersion régulière, en tant que section d'un fibré vectoriel. Par changement de base plat, la flèche $X_a \rightarrow V_T^\lambda \rightarrow V_T$ est une immersion régulière. Il suffit de montrer que V_T est Gorenstein. On peut supposer le groupe semisimple simplement connexe, puisqu'il suffit ensuite d'ajouter un tore central. Dans ce cas, le cône associé C^* à V_T est engendré par les vecteurs $(\alpha_i, 0)$ et (ω_i, ω_i) d'après [28, 5.2] et il résulte de [21, Lem I.22] que l'on peut écrire :

$$C^* \cap X^*(T_+)^+ = \bigcap H_{\sigma_i}^+$$

où $H_{\sigma_i}^+ := \{x \in X^*(T_+) \mid \sigma_i(x) \geq 0\}$ et $\sigma_i = (\check{\omega}_i, \check{\omega}_i)$ où $(\check{\omega}_i)_{1 \leq i \leq r}$ désigne la base duale associée à la base $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$. On obtient alors un morphisme injectif :

$$\sigma : C^* \cap X^*(T_+)^+ \rightarrow \mathbb{N}^r$$

donné par $x \mapsto \sigma_i(x)$. De plus, l'élément $z = \sum_{i=1}^r (\alpha_i, 0)$ vérifie que $\sigma(z) = (1, \dots, 1)$. On conclut alors par le lemme suivant tiré de [7, Lem. 2.(iii)] :

LEMME 46. – Soit $M \subset \mathbb{Z}^n$ un monoïde affine positif, i.e. un monoïde affine où le seul élément inversible est 0, on suppose que le groupe engendré par M est \mathbb{Z}^n . Soit $\text{cn}(M)$ le cône de M tel que $\text{cn}(M) = \bigcap_{i=1}^s H_{\sigma_i}^+$ où $H_{\sigma_i}^+ := \{x \in \mathbb{Q}^n \mid \sigma_i(x) \geq 0\}$ avec σ_i une forme linéaire à coefficients rationnels. On considère l'application :

$$\sigma : M \rightarrow \mathbb{Z}^s$$

donnée par $a \mapsto (\sigma_1(a), \dots, \sigma_s(a))$. Alors $X := \text{Spec}(k[M])$ est Gorenstein si et seulement si il existe $y \in \text{int}(M) := M \cap \text{int}(\text{cn}(M))$ tel que $\sigma(y) = (1, \dots, 1)$. \square

On commence avec un cas particulier d'un théorème non publié de Gabber [15] :

THÉORÈME 47. – On considère la réduction au corps résiduel du revêtement caméral $X_a \otimes_R k \rightarrow \text{Spec}(k[[\pi]])$. Soit h le conducteur de la flèche et d la valuation du discriminant, alors on a $h \leq d$.

REMARQUE. – Ce théorème assure qu'il suffit de considérer l'invariant discriminant pour les problèmes de relèvement, quitte à grossir la borne; il évite d'avoir à calculer l'invariant h plus fin.

Démonstration. – On donne la preuve en appendice. \square

PROPOSITION 48. – Au-dessus de $\text{Spec}(R[[\pi]])$, on a un isomorphisme $v : X_{a'} \rightarrow X_a$ qui est congru à l'identité modulo l'idéal $\pi^{n-d}I$.

Démonstration. – C'est une application de la proposition 39 et du théorème 47. \square

Cela implique le résultat correspondant sur les fibres de Springer :

PROPOSITION 49. – Il existe $k \in K^{n-d}(R)$ avec $\bar{k} = 1$ tel que la multiplication à gauche induit un isomorphisme entre les fibres de Springer affines :

$$k : \mathfrak{X}_{a'} \rightarrow \mathfrak{X}_a.$$

Démonstration. – Il résulte de la description galoisienne que J_a et $J_{a'}$ sont entièrement déterminés par les revêtements caméraux. On rappelle que $a = a' [\pi^n I]$, donc en particulier, les centralisateurs sont les mêmes modulo I . En particulier, l'isomorphisme v , donné par le lemme 48 entre les revêtements caméraux, induit un isomorphisme :

$$v : J_{a'} = I_{\varepsilon'_0} \rightarrow I_{\varepsilon_0} = J_a,$$

avec dont la réduction modulo I vérifie $\bar{v} = Id$. Ici, les éléments ε_0 et ε'_0 sont les sections de Steinberg de a et a' . On obtient alors un élément $v(\varepsilon'_0) \in I_{\varepsilon_0}$ tel que $\varepsilon_0 = v(\varepsilon'_0) [\pi^{n-d}I]$, en particulier $v(\varepsilon'_0)$ tombe dans l'ouvert $V_x^{\lambda, \text{reg}}(R)$ et donc $I_{\varepsilon_0} = I_{v(\varepsilon'_0)}$. On obtient alors deux sections :

$$\varepsilon_0, v(\varepsilon'_0) : R[[\pi]] \rightarrow V^{\lambda, \text{reg}}$$

qui ont même polynôme caractéristique et sont égales modulo $\pi^{n-d}I$. La flèche $G \times V^{\lambda, \text{reg}} \rightarrow V^{\lambda, \text{reg}} \times_{\mathfrak{e}_+} V^{\lambda, \text{reg}}$ est un morphisme lisse, il existe alors $k \in K^{n-d}(R)$ avec $\bar{k} = 1$ tel que

$$k^{-1} \varepsilon_0 k = v(\varepsilon'_0)$$

et on en déduit un isomorphisme :

$$\mathrm{ad}(k)^{-1}(J_a) = J_{a'}.$$

On conclut alors par le lemme 44. \square

5.3. Construction du relèvement

On commence par montrer que la paire $(\bar{E}_{S'}, \bar{\phi}_{S'})$ est isomorphe en fibre générique à sa section de Steinberg. On note $\bar{a} = \chi_+(\bar{\phi})$ et $\bar{\gamma}_0 := \varepsilon_+(\bar{a})$, on rappelle que

$$S' = \mathrm{supp}(\Delta_{0,\mathrm{sing}}(\bar{a})) \cup \{x\}.$$

Quitte à localiser pour la topologie étale sur R , on peut supposer de plus que $\bar{E}_{S'}$ est trivial, la section $\bar{\phi}_{S'}$ correspond alors à la donnée d'une famille :

$$(\bar{\gamma}_s)_{s \in S'} \in V_s^{\lambda_s}(\bar{R}[[\pi_{S'}]]).$$

Il existe d'après le lemme 43 une famille $(\bar{g}_s)_{s \in S'}$ telle que :

$$(4) \quad \forall s \in S'', \bar{g}_s^{-1} \bar{\gamma}_0 \bar{g}_s = \bar{\gamma}_s.$$

En particulier, en considérant la fibre de Springer affine :

$$\mathfrak{X}_{\bar{a},s} := \{g \in G(\bar{R}((\pi_s)))/K_s(\bar{R}) \mid \bar{g}_s^{-1} \bar{\gamma}_0 \bar{g}_s \in V_s^{\lambda_s}(\bar{R}[[\pi_s]])\},$$

pour $s \in S'$, on obtient que la famille $(\bar{g}_s)_{s \in S'}$ est dans le produit $\prod_{s \in S'} \mathfrak{X}_{\bar{a},s}$. Il est à noter que pour $s \in S'$ avec $s \neq x$, $\bar{\gamma}_s \in K_s(\bar{R})$. On commence par une assertion de surjectivité, fondamentale à notre propos, on rappelle que $S_0 = \mathrm{supp}(\lambda) - \{t\}$ où t est le point auxiliaire et que on peut supposer que $S_0 = \{x\}$.

PROPOSITION 50. – *On considère un schéma en groupes G semisimple simplement connexe sur X . Soit $a \in \mathcal{A}_\lambda^{b, \leq d}(k)$, on a alors $\lambda > 2g - 2 + (e + 2d + 1) |S_0| + 3d_{\mathrm{sing}}(a)$. Considérons le diviseur sur X :*

$$\Delta_{\mathrm{sing}}(a) = \sum_{x \in X} d_x[x],$$

et $S' := \mathrm{supp}(\Delta_{\mathrm{sing}}(a)) \cup \{x\}$, alors la flèche :

$$\mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathfrak{C}_{+,x,e+2d}^\lambda \bigoplus_{s \in S' - \{x\}} \mathfrak{C}_{+,s,2d_s}^\lambda$$

est lisse surjective et $\mathcal{A}_\lambda^{b, \leq d}$ est non vide.

REMARQUE. – On a pris $3d_{\mathrm{sing}}(a)$ puisque l'on rappelle que $\mathfrak{C}_{+,s,2d_s}^\lambda$ désigne des polynômes caractéristiques modulo $2d_s + 1$.

Démonstration. – En passant au revêtement étale $\kappa : X_\rho \rightarrow X$ et comme G est semisimple, \mathfrak{C}_+^λ devient isomorphe à

$$\kappa^* \mathfrak{C}_+^\lambda = \bigoplus_{i=1}^r \kappa^* \mathcal{O}_X(\langle \omega_i, -w_0 \lambda \rangle).$$

Comme \mathfrak{C}_+^λ est un facteur direct de $\kappa_* \kappa^* \mathfrak{C}_+^\lambda$, il suffit de montrer la surjectivité de la flèche :

$$H^0(X_\rho, \kappa^* \mathfrak{C}_+^\lambda) \rightarrow \kappa^* \mathfrak{C}_{+,x,e+2d}^\lambda \bigoplus_{s \in S' - \{x\}} \mathfrak{C}_{+,s,2d_s}^\lambda.$$

L'assertion de surjectivité résulte alors de Riemann-Roch et de l'inégalité pour tout i ,

$$\langle \omega_i, -w_0\lambda \rangle \geq 2g - 2 + (e + 2d + 1)|S_0| + 3d_{\text{sing}}(a).$$

Enfin, il suffit de reprendre la preuve de [25, Lem. 4.7.2] pour obtenir la non-vacuité. \square

REMARQUE. – Pour la partie locale correspondant à x du polynôme, on aurait pu se contenter de $\mathfrak{C}_{+,x,e+d}$ au lieu de $\mathfrak{C}_{+,x,e+2d}$, mais pour pouvoir être sous les hypothèses de 5.2.1, il fallait un entier supérieur à $2d$.

On peut passer à la preuve de la proposition 32 :

Démonstration. – On note $a'_x = \chi_+(\gamma_1)$. En les points $s \in S'$ avec $s \neq x$, on a $\bar{\gamma}_s \in K_s(\bar{R})$, en particulier, on peut relever à notre guise cet élément local en un élément

$$\gamma'_s \in K_s(R) \text{ et } a'_s := \chi_+(\gamma'_s).$$

Évidemment a'_s n'a aucune raison d'être dans $\mathcal{A}_\lambda^{b,\leq d}(R)$, il faut donc approximer cet élément. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A}_\lambda \\ & \nearrow \bar{a} & \downarrow \\ \text{Spec}(\bar{R}) & \longrightarrow \text{Spec}(R) \xrightarrow{(a'_s)_{s \in S'}} \mathfrak{C}_{+,x,e+2d}^\lambda & \bigoplus_{s \in S', s \neq x} \mathfrak{C}_{+,s,2d_s}^\lambda \end{array}$$

D'après la proposition 50, il existe alors un relèvement $a \in \mathcal{A}_\lambda^{b,\leq d}(R)$ de \bar{a} tel que :

$$a = a'_x [\pi_x^{e+2d+1}] \text{ et } a = a'_s [\pi_s^{2d_s+1}]$$

pour $s \in S' - \{x\}$. On applique alors le lemme 49 pour dire qu'il existe une famille $(k_x, (k_s)_{s \neq x}) \in K_x^e \times \prod_{S' - \{x\}} K_s^{d_s}$ égale à l'identité modulo \bar{R} telle que la multiplication à gauche induit un isomorphisme entre les fibres de Springer affines :

$$\prod_{s \neq x} \mathfrak{X}_{a'_s, s} \times \mathfrak{X}_{a'_x, x} \rightarrow \prod_{s \neq x} \mathfrak{X}_{a, s} \times \mathfrak{X}_{a, x}.$$

La famille $((\gamma'_s)_{s \in S'})$ définit d'après le lemme 43 une famille

$$(g_s)_{s \in S'} \in \prod_{s \in S'} \mathfrak{X}_{a'_s, s}$$

qui relève la famille $(\bar{g}_s)_{s \in S'}$ définie par l'équation 4. On pose alors pour $s \in S'$

$$\gamma_s = g_s^{-1} k_s^{-1} \varepsilon_+(a) k_s g_s.$$

Pour conclure, il faut voir que γ_x diffère de γ_1 par un élément de K_x . On a déjà $\gamma_x = \gamma_1 [\pi^{e+1}]$ et on applique le corollaire 41, ce qui conclut. \square

REMARQUE. – L'élément $k \in K_x$ tel que $\gamma_x = k\gamma_1$ vérifie automatiquement $\bar{k} = 1$, puisqu'en réduction γ_x et γ_1 sont égaux.

5.4. Le cas réductif et quasi-déployé

Expliquons maintenant comment on étend le théorème 31 au cas réductif et quasi-déployé. On commence par conserver l’assertion de semisimplicité, mais on montre l’énoncé pour un groupe quasi-déployé sans facteur simple de type A_{2r} . Tout d’abord, on a besoin d’une assertion de surjectivité global-local au niveau des polynômes caractéristiques. Cela fait l’objet de la proposition 50 qui a été prouvée dans le cas quasi-déployé. Enfin, les énoncés et les preuves s’étendent tels quels à partir du cas déployé, étant donné que l’on dispose d’une section de Steinberg et en remplaçant $\overline{\text{Gr}}_\lambda$ par $\prod_{\sigma \in \Gamma} \overline{\text{Gr}}_{\sigma\lambda}$ pour $\lambda \in \text{Div}^+(X, \mathbf{T})$.

En revanche, pour le cas réductif, cela nécessite plus de modifications. On traite le cas déployé, le cas quasi-déployé étant analogue. On rappelle que l’on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_{\text{der}} \longrightarrow \mathbf{G} \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m^l \longrightarrow 1.$$

On considère le champ de Hecke $\mathcal{H}_{\det(\lambda)}$ pour le groupe \mathbb{G}_m^l . On a alors une flèche :

$$\det : \overline{\mathcal{H}}_\lambda \rightarrow \mathcal{H}_{\det(\lambda)}$$

donnée par $(E, E', \beta) \mapsto (\det(E), \det(E'), \det(\beta))$, où l’on pousse les toiseurs par la flèche \det . De même, on peut considérer un espace de Hitchin $\mathcal{M}_{\det(\lambda)}$ pour \mathbb{G}_m^l et on obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_\lambda & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}}_\lambda \\ \det \downarrow & & \downarrow \det \\ \mathcal{M}_{\det(\lambda)} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\det(\lambda)}. \end{array}$$

On considère alors $\overline{\mathcal{H}}'_\lambda := \mathcal{M}_{\det(\lambda)} \times_{\mathcal{H}_{\det(\lambda)}} \overline{\mathcal{H}}_\lambda$. Dans un premier temps, on compare les complexes d’intersection de $\overline{\mathcal{H}}'_\lambda$ et $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$. On commence par le lemme suivant :

LEMME 51. – *La flèche $\mathcal{M}_{\det(\lambda)} \rightarrow \mathcal{H}_{\det(\lambda)}$ est lisse. En particulier, le complexe d’intersection de $\overline{\mathcal{H}}'_\lambda$ s’obtient par tiré-en-arrière de celui de $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$.*

Démonstration. – Le champ $\mathcal{M}_{\det(\lambda)}$ classe les paires (\mathcal{F}, ϕ) constituées d’un \mathbb{G}_m^l -torseur et d’une section $\phi \in \prod_{i=1}^l (H^0(X, \mathcal{O}_X(\omega'_i, -w_0\lambda))) - \{0\}$.

Le champ $\mathcal{H}_{\det(\lambda)}$ classe les uplets $(\mathcal{F}, \mathcal{F}', (\phi_i)_{1 \leq i \leq l})$ constituées de deux \mathbb{G}_m^l -torseurs et d’isomorphismes $\phi_i : (\omega'_i)_* \mathcal{F} \rightarrow (\omega'_i)_* \mathcal{F}'(\omega'_i, -w_0\lambda)$, pour $1 \leq i \leq l$, où l’on a poussé les toiseurs par ω'_i . En particulier, on obtient que la projection suivant le premier toiseur :

$$p_1 : \mathcal{H}_{\det(\lambda)} \rightarrow \text{Bun}_{\mathbb{G}_m^l}$$

est un isomorphisme. La flèche $\mathcal{M}_{\det(\lambda)} \rightarrow \text{Bun}_{\mathbb{G}_m^l}$ consiste alors en l’oubli de la section $\phi \in \prod_{i=1}^l (H^0(X, \mathcal{O}_X(\omega'_i, -w_0\lambda))) - \{0\}$ et est donc lisse. \square

On a besoin d’un modèle local. Considérons la flèche :

$$\overline{K\pi^\lambda K} \xrightarrow{\det} \prod_{i=1}^l \pi_S^{\langle \omega'_i, \lambda \rangle} \mathcal{O}_S^*.$$

On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \overline{K\pi^\lambda K}^{\text{glob}} & \longrightarrow & \overline{K\pi^\lambda K} \\ \downarrow & & \downarrow \text{det} \\ \prod_{i=1}^l (H^0(X, \mathcal{O}_X(\omega'_i, \lambda))) - \{0\} & \longrightarrow & \prod_{i=1}^l \pi_S^{\langle \omega'_i, \lambda \rangle} \mathcal{O}_S^* \end{array}$$

et on pose

$$\overline{\text{Gr}}_\lambda^{\text{glob}} := \overline{K\pi^\lambda K}^{\text{glob}} / K_{\text{der}},$$

où $K_{\text{der}} = \prod_{x \in X} G_{\text{der}}(\mathcal{O}_x)$. La flèche det induit une flèche

$$\overline{\text{Gr}}_\lambda^{\text{glob}} \rightarrow \prod_{i=1}^l (H^0(X, \mathcal{O}_X(\omega'_i, \lambda))) - \{0\},$$

la fibre est alors isomorphe à $\overline{\text{Gr}}_\lambda$, car étant donné $f \in \prod_{i=1}^l (H^0(X, \mathcal{O}_X(\omega'_i, \lambda))) - \{0\}$, comme le corps résiduel est algébriquement clos et la caractéristique première à l'ordre de W (l'hypothèse nécessaire sur la caractéristique porte en fait sur $Z_{G_{\text{der}}}$, mais on vérifie à l'aide des tables que l'ordre de $Z_{G_{\text{der}}}$ divise l'ordre de W), la flèche de projection fournit un isomorphisme :

$$\{\gamma \in \overline{\text{Gr}}_\lambda^{\text{glob}} \mid \det(\gamma) = f\} \rightarrow \overline{\text{Gr}}_\lambda := \overline{K\pi^\lambda K} / K.$$

La proposition suivante permet alors de comparer les complexes d'intersection de $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ et de $\overline{\text{Gr}}_\lambda^{\text{glob}}$.

PROPOSITION 52. – *La fibration $\overline{\mathcal{H}}_\lambda \rightarrow \text{Bun}_G$ est localement isomorphe pour la topologie lisse, à $\overline{\text{Gr}}_\lambda^{\text{glob}} \times_k \text{Bun}_G$.*

Démonstration. – La preuve est la même que [32, A8.c]. \square

Pour obtenir le théorème 31, on construit, comme dans la proposition 32, une flèche de $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ vers $\overline{\text{Gr}}_\lambda^{\text{glob}}$; la preuve de la lissité des flèches est alors analogue, comme on garde la condition globale au niveau des déterminants.

6. Le lemme de conjugaison

Dans cette section, on démontre un énoncé de conjugaison, intéressant pour lui-même. On le reformule d'une manière légèrement différente partant d'un élément $x \in K\pi^\lambda K \cap G(F)^{\text{rs}}$ au lieu de considérer directement un élément dans $V_G^{\lambda,0}(\mathcal{O})^\heartsuit$. Dans cette section, on note $F := k((\pi))$ d'anneau d'entiers \mathcal{O} et de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique première à l'ordre de W .

Soit $x \in G(F)$, on rappelle que l'élément $x_+ = (\pi^{-w_0\lambda}, x)$ est dans $V_G^\lambda(\mathcal{O})$ (resp. $V_G^{\lambda,0}(\mathcal{O})$) si et seulement si $x \in \overline{K\pi^\lambda K}$ (resp. $K\pi^\lambda K$). Soit $a_+ = \chi_+(x_+)$, la valuation d du discriminant $\mathfrak{D}_\lambda(a_+)$ est donnée par la formule [4, (7)] :

$$d := \text{val}(\mathfrak{D}_\lambda(a_+)) = \langle 2\rho, \lambda \rangle + d_0$$

avec

$$d_0 = \text{val}(\det(\text{Id} - \text{ad}_x : \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_x(F) \rightarrow \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_x(F))).$$

Il est à noter que d_0 peut-être négatif et que d est un entier positif. Soit Z un schéma lisse sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$ et $z \in Z(\mathcal{O})$, on définit :

$$T_z Z(\mathcal{O}) := z^* T_{Z/\mathcal{O}},$$

où $T_{Z/\mathcal{O}}$ est le faisceau tangent relatif de Z/\mathcal{O} . Le \mathcal{O} -module $T_z Z(\mathcal{O})$ est un \mathcal{O} -module libre de type fini comme Z est lisse sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$. De plus, pour un entier $N \in \mathbb{N}$, soit $z_N \in Z(\mathcal{O}/\pi^N \mathcal{O})$ l'image de $z \in Z(\mathcal{O})$, alors on a :

$$T_{z_N} Z_N = T_z Z(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\pi^N \mathcal{O})$$

où Z_N est le k -schéma de type fini dont les points pour une k -algèbre A sont donnés par :

$$Z_N(A) = Z(A \otimes_k (\mathcal{O}/\pi^N \mathcal{O})).$$

Enfin, si on considère une extension finie E de F , d'anneau d'entiers \mathcal{O}_E , on forme alors le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z_E & \xrightarrow{\pi_E} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(\mathcal{O}_E) & \xrightarrow{\pi_E} & \text{Spec}(\mathcal{O}). \end{array}$$

On a alors $T_{Z_E/\mathcal{O}_E} = \pi_E^* T_{Z/\mathcal{O}}$ et l'égalité :

$$T_z Z_E(\mathcal{O}_E) = T_z Z(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_E.$$

THÉORÈME 53 (Lemme de conjugaison). – Soit $\lambda \in X_*(T)^+$. Soient $x_+, y_+ \in V^{\lambda,0}(\mathcal{O})^\heartsuit$ tels que $a_+ = \chi_+(x_+) = \chi_+(y_+)$ et $d = \text{val}(\mathfrak{D}_\lambda(a_+))$. Soit un entier $n > 2d$, on suppose que :

$$x_+ = y_+ [\pi^n],$$

alors il existe $k \in K_{n-d-1}$ tel que :

$$k x_+ k^{-1} = y_+.$$

6.1. Espace tangent à l'ouvert lisse V^0

Soit l'application $\xi : G \otimes F \rightarrow V^{\lambda,0} \otimes F$ donnée par $g \mapsto g x_+$. Cette application induit un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$(5) \quad d\xi : \mathfrak{g}(F) \rightarrow T_{x_+} V^{\lambda,0}(F).$$

Comme x_+ est un \mathcal{O} -point, on a une application \mathcal{O} -linéaire :

$$d\xi : \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \rightarrow T_{x_+} V^{\lambda,0}(\mathcal{O}),$$

dont la fibre générique est (5).

LEMME 54. – On a la formule suivante pour l'indice relatif :

$$[T_{x_+} V^{\lambda,0}(\mathcal{O}) : d\xi \mathfrak{g}(\mathcal{O})] = \langle 2\rho, \lambda \rangle.$$

Démonstration. – On considère le réseau :

$$\mathfrak{q}(\mathcal{O}) = (d\xi)^{-1}T_{x_+}V^{\lambda,0}(\mathcal{O})$$

de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(F)$. En écrivant $x = (k_1)^{-1}\pi^\lambda k_2$ avec $k_1, k_2 \in K$, on a $gx \in K\pi^\lambda K$ si et seulement si :

$$g \in \text{Ad}_{k_1}(K\pi^\lambda K\pi^{-\lambda}).$$

Le calcul de l'espace tangent en l'identité de $K\pi^\lambda K\pi^{-\lambda}$ donne alors :

$$\mathfrak{g}(\mathcal{O}) + \text{ad}(\pi^\lambda)(\mathfrak{g}(\mathcal{O})) = \mathfrak{g}(\mathcal{O}) + (\mathfrak{t}(\mathcal{O}) \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \pi^{(\alpha,\lambda)} \mathfrak{g}_\alpha(\mathcal{O}) \oplus \pi^{-(\alpha,\lambda)} \mathfrak{g}_{-\alpha}(\mathcal{O})).$$

On en déduit donc l'égalité :

$$\mathfrak{q}(\mathcal{O}) = \text{ad}_{k_1}(\mathfrak{t}(\mathcal{O}) \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha(\mathcal{O}) \oplus \pi^{-(\alpha,\lambda)} \mathfrak{g}_{-\alpha}(\mathcal{O})).$$

En particulier, l'indice relatif de $\mathfrak{q}(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ est :

$$[\mathfrak{q}(\mathcal{O}) : \mathfrak{g}(\mathcal{O})] = \langle 2\rho, \lambda \rangle,$$

ce qui conclut. □

On considère l'application :

$$(6) \quad \phi : G \otimes F \rightarrow V^{\lambda,0} \otimes F$$

donnée par $g \mapsto gx_+g^{-1}$ et l'application induite au niveau des espaces tangents $\mathfrak{g}(F) \rightarrow T_{x_+}V^{\lambda,0}(F)$. En composant par $(d\xi)^{-1} : T_{x_+}V^{\lambda,0}(F) \rightarrow \mathfrak{g}(F)$, on obtient un endomorphisme de $\mathfrak{g}(F)$ donné par :

$$\psi = (d\xi)^{-1} \circ d\phi = \text{Id} - \text{ad}_x$$

où le membre de droite est la différentielle de l'application $g \mapsto gxg^{-1}x^{-1}$. Comme $\text{Id} - \text{ad}_x$ est trivial sur $\mathfrak{g}_x(F)$ et que $x \in G(F)^{\text{rs}}$, il induit un automorphisme sur $\mathfrak{g}^x(F) := \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_x(F)$:

$$(7) \quad \psi^x : \mathfrak{g}^x(F) \rightarrow \mathfrak{g}^x(F)$$

dont la valuation du déterminant est égale à d_0 . Comme $x_+ \in V^{\lambda,0}(\mathcal{O})$, on dispose d'une application de $\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ vers $T_{x_+}V^{\lambda,0}(\mathcal{O})$. En composant par $(d\xi)^{-1}$, on obtient une application \mathcal{O} -linéaire :

$$d\xi^{-1} \circ d\phi : \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathfrak{q}(\mathcal{O}).$$

Elle induit alors une application \mathcal{O} -linéaire :

$$\psi^x : \mathfrak{g}^x(\mathcal{O}) \rightarrow \mathfrak{q}^x(\mathcal{O})$$

avec $\mathfrak{g}^x(\mathcal{O}) := \mathfrak{g}(\mathcal{O})/\mathfrak{g}_x(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{q}^x(\mathcal{O}) := \mathfrak{q}(\mathcal{O})/\mathfrak{q}_x(\mathcal{O})$, dont la fibre générique est (7).

LEMME 55. – L'indice relatif de $\mathfrak{q}^x(\mathcal{O})$ et $\psi^x(\mathfrak{g}^x(\mathcal{O}))$ est majoré par d , i.e. :

$$[\mathfrak{q}^x(\mathcal{O}) : \psi^x(\mathfrak{g}^x(\mathcal{O}))] \leq d.$$

Démonstration. – Cela résulte de l'inégalité :

$$[\mathfrak{q}^x(\mathcal{O}) : \mathfrak{g}^x(\mathcal{O})] \leq [\mathfrak{q}(\mathcal{O}) : \mathfrak{g}(\mathcal{O})] = \langle 2\rho, \lambda \rangle$$

et de l'égalité $\text{val}(\det(\psi^x)) = d_0$. □

6.2. Un calcul d'indice pour le centralisateur régulier

Considérons $\gamma_0 := \varepsilon_+(a_+)$. Il existe alors $g \in G(F)$ tel que $x_+ = \text{Ad}(g)^{-1}\gamma_0$. On obtient alors un isomorphisme en fibre générique

$$\text{Ad}(g)^{-1} : J_{a_+} \otimes F = I_{\gamma_0} \otimes F \rightarrow I_{x_+} \otimes F.$$

On rappelle que l'on regarde les centralisateurs dans G . Cette flèche induit un isomorphisme au niveau des espaces tangents :

$$(8) \quad \text{ad}(g)^{-1} : \text{Lie}(J_{a_+})(F) \rightarrow \mathfrak{g}_x(F).$$

Comme en vertu de la proposition 5, l'isomorphisme sur F donné par $\text{Ad}(g)^{-1}$, se prolonge en une flèche $J_{a_+} \rightarrow I_{x_+} \rightarrow G \otimes \mathcal{O}$, on obtient alors une application \mathcal{O} -linéaire :

$$\text{ad}(g)^{-1} : \text{Lie}(J_{a_+})(\mathcal{O}) \rightarrow \mathfrak{g}_x(\mathcal{O}) := \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{g}_x(F),$$

dont la fibre générique est (8). Considérons le morphisme canonique de schémas sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$:

$$(9) \quad \nu := \chi_+ \circ \xi \circ \text{Ad}(g)^{-1} : J_{a_+} \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda.$$

Considérons le modèle de Néron $J_{a_+}^b$ de J_{a_+} . Par la propriété universelle du modèle de Néron, on a un morphisme canonique :

$$\iota : J_{a_+} \rightarrow J_{a_+}^b$$

qui induit l'identité sur $\text{Spec}(F)$.

LEMME 56. – *Il existe un morphisme de schémas $\nu^b : J_{a_+}^b \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda$ tel que $\nu^b \circ \iota = \nu$.*

Démonstration. – Pour $w \in W$ d'ordre l , on considère $E = F(\pi^{1/l})$ et $\mathbb{Z}_l := \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. On rappelle que la caractéristique est première à l'ordre de W . On note τ_E le générateur de $\text{Gal}(E/F)$ et $\pi_E : \text{Spec}(\mathcal{O}_E) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O})$. Il résulte alors de [17, sect. 7.1-8.1] qu'il existe un élément $w \in W$ d'ordre l , tel que le schéma $J_{a_+}^b$ s'identifie à :

$$(10) \quad (\pi_{E,*}T)^{\mathbb{Z}_l}$$

avec \mathbb{Z}_l qui agit par $w\tau_E$ et l'extension E/F déploie le tore $J_{a_+}(F)$. En particulier il existe $t_+ \in T_+^\lambda(E)$ et $h \in G(E)$ tel que $x_+ = h^{-1}t_+h$. Comme la flèche $V_T^\lambda \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda$ est finie, il résulte du critère valuatif de propreté que $t_+ \in V_T^\lambda(\mathcal{O}_E) \cap T_+(E)$. On a alors une flèche

$$(11) \quad \zeta : T \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_E \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_E$$

donnée par $\gamma \rightarrow \chi_+(\gamma t_+)$. On fait agir \mathbb{Z}_l sur $\mathfrak{C}_+^\lambda \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_E$ par $\text{Id} \times \tau_E$. Comme cette flèche entrelace l'action de $w\tau_E$ sur $T \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_E$ avec l'action de τ_E sur $\mathfrak{C}_+^\lambda \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_E$, on obtient en prenant les points fixes sous \mathbb{Z}_l , une flèche :

$$\nu^b : J_{a_+}^b \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda.$$

Enfin, les flèches $\nu^b \circ \iota$ et ν étant les mêmes en fibres génériques, elles sont égales. \square

La flèche $\nu^b : J_{a_+}^b \rightarrow \mathfrak{C}_+^\lambda$ induit une application \mathcal{O} -linéaire :

$$d\nu^b : \text{Lie } J_{a_+}^b(\mathcal{O}) \rightarrow T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O})$$

qui est un isomorphisme en fibre générique, comme x_+ est génériquement régulier semi-simple.

LEMME 57. – On a la formule suivante pour l'indice relatif :

$$[T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O}) : dv^b(\text{Lie } J_{a_+}^b(\mathcal{O}))] = \frac{d+c}{2}$$

où $c = \text{rg } T - \text{rg}_F J_{a_+}(F)$.

Démonstration. – On calcule cet indice après extension des scalaires à \mathcal{O}_E . On a l'application linéaire :

$$\text{Id}_E \otimes dv^b : \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \text{Lie } J_{a_+}^b(\mathcal{O}) \rightarrow T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O}_E)$$

qui est la restriction de la différentielle de la flèche (11) :

$$d\zeta : \mathfrak{t}(\mathcal{O}_E) \rightarrow T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O}_E)$$

au sous-espace $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \text{Lie } J_{a_+}^b(\mathcal{O})$. Il résulte alors de la description (10) et de [3, Lem. 3] que :

$$\dim_k \left(\frac{\mathfrak{t}(\mathcal{O}_E)}{\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}} \text{Lie } J_{a_+}^b(\mathcal{O})} \right) = \frac{lc}{2}$$

d'où l'on déduit la formule suivante pour l'indice :

$$[T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O}) : dv^b(\text{Lie } J_{a_+}^b(\mathcal{O}))] = \frac{1}{l} [T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O}_E) : d\zeta(\mathfrak{t}(\mathcal{O}_E))] + \frac{1}{l} \frac{lc}{2}.$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer la formule suivante :

$$[T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O}_E) : d\zeta(\mathfrak{t}(\mathcal{O}_E))] = \frac{ld}{2}.$$

On s'est ramené au cas déployé et on peut supposer $\mathcal{O} = \mathcal{O}_E$ et $t_+ \in V_T^\lambda(\mathcal{O}) \cap T_+(F)^{\text{rs}}$. En reprenant les notations de (11), on regarde la flèche :

$$d\zeta : \mathfrak{t}(\mathcal{O}) \rightarrow T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O})$$

qui est un isomorphisme en fibre générique. On écrit $t_+ = (\pi^{-w_0\lambda}, t)$. On identifie alors la base de Steinberg pour G , $\mathfrak{C} = \mathbb{A}^r$ au fermé $\{1\} \times \mathbb{A}^r \subset \mathfrak{C}_+$. Pour $\gamma \in T(\mathcal{O}_E)$, on a l'égalité :

$$\chi_+(\gamma t_+) = \pi^{-w_0\lambda} \cdot \chi(\gamma t),$$

où χ est le morphisme de Steinberg pour G et où l'on fait agir le tore central Z_+ de G_+ par :

$$z.(1, a_\bullet) = (\alpha_\bullet(z), \pi^{(\omega_\bullet, -w_0\lambda)} a_\bullet).$$

En particulier, cette égalité implique la factorisation suivante pour $d\zeta$:

$$d\zeta = d\rho_{-w_0\lambda} \circ d\chi_t,$$

où l'on a noté $\rho_{-w_0\lambda}$ le morphisme de schémas qui se déduit de l'action de $-w_0\lambda$. Maintenant, on a d'après Steinberg [30, Lem. 8.2] la formule suivante :

$$[T_a(\mathfrak{C}(\mathcal{O})) : d\chi_t \mathfrak{t}(\mathcal{O})] = \frac{d_0}{2}$$

avec $a = \chi(t)$ et on a de plus :

$$[T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O}) : \rho_{-w_0\lambda}(T_a \mathfrak{C}_+(\mathcal{O}))] = \langle \rho, \lambda \rangle.$$

En faisant la somme de ces deux valuations, on obtient que l'indice $[T_{a_+} \mathfrak{C}_+^\lambda(\mathcal{O}) : d\zeta(\mathfrak{t}(\mathcal{O}))]$ est donné par :

$$\langle \rho, \lambda \rangle + \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2}. \quad \square$$

On a besoin d'une description alternative de J_a^b .

PROPOSITION 58. – Soit \tilde{X}_a^b la normalisation de \tilde{X}_a . Alors le modèle de Néron J_a^b admet la description galoisienne suivante :

$$J_a^b = \prod_{\tilde{X}_a^b/\tilde{X}} (T \times \tilde{X}_a^b)^W.$$

On écrit $X_a = \text{Spec}(\mathcal{O}_a)$ et $\tilde{X}_a = \text{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_a)$.

COROLLAIRE 59. – On en déduit une autre formule pour la dimension de $\mathcal{P}(J_a)$:

$$\dim \mathcal{P}(J_a) = \dim_{\bar{k}}(\mathfrak{t}_+ \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}_a^b/\tilde{\mathcal{O}}_a) = \frac{d-c}{2}.$$

Démonstration. – La preuve de la première égalité est la même que [25, Cor. 3.8.3] et la dernière égalité résulte de [4, Cor.3.9] \square

PROPOSITION 60. – On considère la flèche $d\nu : \text{Lie } J_{a_+}(\mathcal{O}) \rightarrow T_{a_+} \mathfrak{e}_+^\lambda(\mathcal{O})$. Alors, on a la formule suivante pour les indices relatifs :

$$[T_{a_+} \mathfrak{e}_+^\lambda(\mathcal{O}) : d\nu(\text{Lie } J_{a_+}(\mathcal{O}))] = d.$$

Démonstration. – La proposition résulte de la conjonction du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} J_{a_+} & \xrightarrow{\iota} & J_{a_+}^b \\ & \searrow \nu & \downarrow \nu^b \\ & & \mathfrak{e}_+^\lambda(\mathcal{O}) \end{array}$$

du lemme 57 ainsi que du fait 59 :

$$[\text{Lie } J_{a_+}^b(\mathcal{O}) : d\iota(\text{Lie } J_{a_+}(\mathcal{O}))] = \frac{d-c}{2}.$$

En faisant la somme, le lemme suit. \square

COROLLAIRE 61. – Soit $Z \in d\xi(\mathfrak{q}_x(\mathcal{O})) \subset T_{x_+} V^{\lambda,0}(\mathcal{O})$. On suppose

$$d\chi_{+,x_+}(Z) = 0 [\pi^{m+d}].$$

Alors, il existe $Z' \in T_{x_+} V^{\lambda,0}(\mathcal{O})$ tel que $Z = \pi^m Z'$.

Démonstration. – On rappelle que $\nu = \chi_+ \circ \xi \circ \text{Ad}(g)^{-1}$ et que l'application

$$\xi \circ \text{Ad}(g)^{-1} : J_{a_+} \rightarrow V^{\lambda,0}$$

est définie sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$. Il résulte alors de la proposition 60 qu'il existe $Z_1 \in \text{Lie } J_{a_+}(\mathcal{O})$ tel que :

$$d\nu(\pi^m Z_1) = d\chi_{+,x_+}(d\xi \circ \text{ad}(g)^{-1}(\pi^m Z_1)) = d\chi_{+,x_+}(Z).$$

Or, comme x_+ est génériquement régulier semisimple, on a un isomorphisme :

$$d\chi_{+,x_+} : d\xi(\mathfrak{g}_x(F)) \rightarrow T_{a_+} \mathfrak{e}_+^\lambda(F).$$

Ainsi, en posant $Z_2 = d\xi \circ \text{ad}(g)^{-1}(Z_1) \in T_{x_+} V^{\lambda,0}(\mathcal{O}) \cap d\xi(\mathfrak{g}_x(F))$, on obtient :

$$Z = \pi^m Z_2. \quad \square$$

6.3. Fin de la preuve

On peut maintenant passer à la preuve du théorème 53 :

Démonstration. – On raisonne par approximations successives, en montrant qu'on peut trouver un élément $k \in K_{n-d-1}$ tel :

$$kx_+k^{-1} = y_+ [\pi^{n+1}].$$

On pourra donc construire une suite d'éléments de K_{n-d-1} qui converge vers un élément $k_0 \in K_{n-d-1}$ qui vérifiera :

$$k_0x_+k_0^{-1} = y_+.$$

Dans l'anneau $\mathcal{O}/\pi^{n+1}\mathcal{O}$, l'idéal $I = (\pi^{n-d})$ est de carré nul car $2(n-d) > n$. Soit $k \in K_{n-d-1}$. On a alors une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi^{n-d}\mathfrak{g}(\mathcal{O}/\pi^{n+1}\mathcal{O}) \longrightarrow G(\mathcal{O}/\pi^{n+1}\mathcal{O}) \longrightarrow G(\mathcal{O}/\pi^{n-d}\mathcal{O}) \longrightarrow 1.$$

Ainsi, l'image de k dans $G(\mathcal{O}/\pi^{n+1}\mathcal{O})$ définit un élément $\pi^{n-d}X \in \pi^{n-d}\mathfrak{g}(\mathcal{O}/\pi^{n+1}\mathcal{O})$. On le relève alors en un élément de $\pi^{n-d}\mathfrak{g}(\mathcal{O})$, noté de la même manière. De même π^n étant de carré nul dans $\mathcal{O}/\pi^{2n}\mathcal{O}$, l'égalité

$$x_+ = y_+ [\pi^n]$$

fournit l'existence d'un élément $\pi^n C \in \pi^n T_{x_+} V^{\lambda,0}(\mathcal{O}/\pi^{2n}\mathcal{O})$. Comme $\chi_+(x_+) = \chi_+(y_+)$, on obtient :

$$(12) \quad d\chi_{+,x_+}(C) = 0 [\pi^n]$$

Par lissité de $V^{\lambda,0}$, on peut relever $\pi^n C$ en un élément de $T_{x_+} V^{\lambda,0}(\mathcal{O})$, noté de la même manière. En reprenant les notations de (6), on cherche à résoudre l'équation :

$$\phi(k) = y_+ [\pi^{n+1}],$$

ce qui se réécrit alors comme :

$$\pi^{n-d} d\phi(X) = \pi^n C [\pi^{n+1}]$$

soit :

$$(13) \quad d\phi(X) = \pi^d C [\pi^{d+1}]$$

Maintenant, en appliquant le lemme 55, il résulte qu'il existe $X \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ et $Z \in d\xi(\mathfrak{q}_x(\mathcal{O}))$ tel que :

$$(14) \quad d\phi(X) = \pi^d C + Z.$$

Pour pouvoir résoudre l'équation (13), il ne reste plus qu'à montrer que :

$$Z = 0 [\pi^{d+1}].$$

Il résulte de l'égalité $\chi_+ \circ \phi = \chi_+$ que $d\chi_{+,x_+}(d\phi(X)) = 0$. Ainsi, en appliquant $d\chi_{+,x_+}$ à l'équation (14) et en utilisant l'égalité (12), on trouve :

$$d\chi_{+,x_+}(Z) = 0 [\pi^{n+d}].$$

Maintenant il résulte du corollaire 61 que $Z = \pi^n Z_2$, avec $Z_2 \in T_{x_+} V^{\lambda,0}(\mathcal{O})$. Comme $n > d + 1$, on a une solution à l'équation (13), ce qui conclut la preuve du théorème 53. \square

Appendice : Un théorème de Gabber

Dans cet appendice, on donne la preuve du théorème 47, que l'on obtient comme cas particulier de résultats généraux obtenus par Gabber. On suit les notes de Gabber qu'il nous a aimablement communiquées. Rappelons l'énoncé du théorème 47. Soit k algébriquement clos de caractéristique première à l'ordre de W . Soit $\mathcal{O} = k[[\pi]]$, F son corps de fractions et $X = \text{Spec}(\mathcal{O})$. On considère $a \in \mathfrak{e}_+^\lambda(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{e}_+^{\text{rs}}(F)$ et $X_a \rightarrow X$ le revêtement caméral correspondant.

THÉORÈME 62. – *Soit h le conducteur de la flèche $X_a \rightarrow X$ et d la valuation du discriminant de a , alors on a $h \leq d$.*

On obtient cet énoncé comme le corollaire d'un résultat plus général sur les anneaux. Soit A un anneau commutatif, B une A -algèbre finie localement libre. On considère l'extension :

$$1 \longrightarrow J \longrightarrow C := B \otimes_A B \xrightarrow{m} B \longrightarrow 1$$

entre C -modules. L'annulateur de cette extension est $m^{-1}(m(\text{Ann}_C(J)))$ et donc si on pose $\mathcal{D} := m(\text{Ann}_C(J))$, on a que \mathcal{D} annule tous les groupes

$$(15) \quad \text{Ext}_C^i(B, -) = 0, \text{ pour } i > 0.$$

Soit $b \in B$, comme B est un A -module de type fini localement libre, on peut considérer alors l'endomorphisme de A -modules :

$$\mu_b : B \rightarrow B,$$

donné par la multiplication par b et on pose $\text{Tr}(b) := \text{Tr}(\mu_b)$. Soit le A -module $B^* := \text{Hom}_A(B, A)$. Il admet une structure de B -modules par :

$$b.f(x) = f(bx),$$

où $f \in B^*$ et $b, x \in B$. On considère alors le morphisme de A -modules :

$$\tau_{B/A} : B \rightarrow B^* := \text{Hom}_A(B, A)$$

donnée par $b \mapsto \text{Tr}(b.)$, où $\text{Tr}(b.)$ est la forme linéaire donnée par $y \mapsto \text{Tr}(by)$. On a également un morphisme A -linéaire, que l'on peut voir comme une forme bilinéaire :

$$t_{B/A} : B \otimes_A B \rightarrow A.$$

défini par l'égalité $t_{B/A}(b_1 \otimes b_2) = \tau_{B/A}(b_1)(b_2)$ pour $b_1, b_2 \in B$. On considère alors l'idéal *différente* :

$$\delta_{B/A} := \text{Ann}_B(\text{Coker}(\tau_{B/A})).$$

L'énoncé est le suivant :

PROPOSITION 63 (Gabber). – *On a les inclusions :*

- (i) $\mathcal{D} \subset \delta_{B/A} \subset \text{Ann}_B(\text{Ker}(\tau_{B/A}))$.
- (ii) $\text{Ann}_B(\text{Ker}(\tau_{B/A}))\delta_{B/A} \subset \mathcal{D}$.
- (iii) *L'application $\tau_{B/A}$ est injective si et seulement si B/A est étale sur un ouvert qui contient les idéaux faiblement associés ([26, Déf. 10.63.1]).*

Démonstration. – Commençons par montrer (i). La forme bilinéaire induite par la trace donne que $\text{Im}(\tau_{B/A})$ est orthogonale à $\text{Ker}(\tau_{B/A})$, d'où l'inclusion $\delta_{B/A} \subset \text{Ann}_B(\text{Ker}(\tau_{B/A}))$. Montrons l'autre inclusion, on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} h : B \otimes_A B &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_A(B, B^*) \\ b_1 \otimes b_2 &\mapsto (\phi \mapsto \phi(b_1)b_2) \end{aligned}$$

qui se restreint en un isomorphisme :

$$(16) \quad h_1 : \text{Ann}_C(J) \rightarrow \text{Hom}_B(B^*, B).$$

Si $x \in \text{Ann}_C(J)$, par additivité de la trace d'un endomorphisme d'une suite exacte de modules de type fini localement libres (cf. [16, Prop. 4.1.4]), si $B \otimes_A B$ est considérée comme une B -algèbre par la flèche $b \mapsto 1 \otimes b$, on a :

$$\text{Tr}(x) = m(x).$$

En appliquant cette remarque, on obtient que pour $\phi \in \text{Hom}_A(B, B^*)$ qui correspond à un élément $h_1^{-1}(\phi) \in \text{Ann}_C(J)$, la composition des flèches :

$$B \xrightarrow{\phi} B^* \xrightarrow{\tau_{B/A}} B,$$

est donnée par la multiplication par $m(h_1^{-1}(\phi))$. Ainsi, on déduit l'inclusion

$$\mathcal{D} \subset \delta_{B/A}.$$

Montrons (ii), si $x \cdot \text{Ker}(\tau_{B/A}) = 0$ et $y \cdot \text{Coker}(\tau_{B/A}) = 0$ alors la multiplication par y induit un morphisme B -linéaire :

$$B^* \rightarrow B / \text{Ker}(\tau_{B/A})$$

et la multiplication par x induit une application B -linéaire :

$$B / \text{Ker}(\tau_{B/A}) \rightarrow B.$$

On obtient alors en vertu de l'isomorphisme (16), un élément de $\text{Ann}_C(J)$ et donc :

$$xy \in \mathcal{D}.$$

Enfin, la dernière assertion résulte de [13]. □

On déduit donc de cette proposition que si B/A est étale sur un ouvert qui contient les idéaux faiblement associés, alors on a :

$$(17) \quad \delta_{B/A} = \mathcal{D}.$$

PROPOSITION 64 (Gabber). – *Supposons B/A étale sur un ouvert qui contient les idéaux faiblement associés et soit $H_{B/A}$ l'idéal introduit dans 34, alors on a l'inclusion :*

$$\delta_{B/A} \subset H_{B/A}.$$

Démonstration. – On choisit alors une algèbre polynomiale P sur A telle que $B = P/I$ et on considère l'extension de A -algèbres :

$$(18) \quad 0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow P/I^2 \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Soit $x \in \delta_{B/A} := \text{Ann}_B(\text{Coker } \tau_{B/A})$, en choisissant un relèvement, il induit donc par multiplication une application :

$$x : I/I^2 \rightarrow I/I^2.$$

indépendante du choix du relèvement. On a de plus une application :

$$\partial : I/I^2 \rightarrow B \otimes_A \Omega_{P/A}^1.$$

Il résulte alors de [16, 5.4.4] que $x \in H_{B/A}$ si et seulement si l'application $x : I/I^2 \rightarrow I/I^2$ se factorise par ∂ .

On pousse alors cette extension par x et on obtient une suite exacte de A -algèbres :

$$(19) \quad 0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow Q \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

L'obstruction à relever l'identité $B \rightarrow B$ en un morphisme de A -algèbres $B \rightarrow P/I^2$ est donnée par l'approche avec la cohomologie de Hochschild par un élément de

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^2(B, I/I^2)$$

(cf.[8, Ch XIV. Thm.2.1]). Or, on a $\mathcal{D} = \delta_{B/A}$ et d'après 15, que \mathcal{D} tue tous les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(B, -)$, pour $i > 0$. En particulier, x tue l'obstruction et la suite exacte (19) se scinde et fournit une dérivation de Q dans I/I^2 . Maintenant, on obtient que la composition

$$I/I^2 \rightarrow B \otimes_A \Omega_{P/A}^1 \rightarrow B \otimes_A \Omega_{Q/A}^1 \rightarrow I/I^2$$

est la multiplication par x , ce que l'on souhaitait. \square

On peut maintenant passer à la preuve du théorème 62 :

Démonstration. – Posons $A = \mathcal{O}$ et $B = \Gamma(X_a, \mathcal{O}_{X_a})$. On vient de voir $\delta_{B/A} \subset H_{B/A}$. Maintenant, comme la courbe camérale est Gorenstein d'après 45, on sait que l'idéal discriminant est contenu dans l'idéal différent, lui-même dans l'idéal de Gabber-Ramero, d'où l'on déduit $h \leq d$, ce qu'on voulait. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEAUVILLE, Y. LASZLO, Un lemme de descente, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), 335–340.
- [2] A. BEĪLINSOŃ, V. DRINFELD, Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves, prépublication <http://math.uchicago.edu/mitya/langlands.html>, 1999.
- [3] R. BEZRUKAVNIKOV, The dimension of the fixed point set on affine flag manifolds, *Math. Res. Lett.* **3** (1996), 185–189.
- [4] A. BOUTHIER, Dimension des fibres de Springer affines pour les groupes, *Transform. Groups* **20** (2015), 615–663.
- [5] A. BOUTHIER, Géométrisation du lemme fondamental pour l'algèbre de Hecke, prépublication arXiv:1502.07148.
- [6] M. BRION, S. KUMAR, *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, Progr. in Math. **231**, Birkhäuser, 2005.

- [7] W. BRUNS, T. RÖMER, h -vectors of Gorenstein polytopes, *J. Combin. Theory Ser. A* **114** (2007), 65–76.
- [8] H. CARTAN, S. EILENBERG, *Homological algebra*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1999.
- [9] C. DE CONCINI, A. MAFFEL, A generalized Steinberg section and branching rules for quantum groups at roots of 1, prépublication arXiv:1107.0248.
- [10] J. DENEFF, F. LOESER, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, *Invent. math.* **135** (1999), 201–232.
- [11] R. Y. DONAGI, D. GAITSGORY, The gerbe of Higgs bundles, *Transform. Groups* **7** (2002), 109–153.
- [12] R. ELKIK, Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **6** (1973), 553–603.
- [13] H. FLANDERS, Tensor and exterior powers, *J. Algebra* **7** (1967), 1–24.
- [14] E. FRENKEL, B. C. NGÔ, Geometrization of trace formulas, *Bull. Math. Sci.* **1** (2011), 129–199.
- [15] O. GABBER, notes personnelles.
- [16] O. GABBER, L. RAMERO, *Almost ring theory*, Lecture Notes in Math. **1800**, Springer, Berlin, 2003.
- [17] M. GORESKY, R. KOTTWITZ, R. MACPHERSON, Codimensions of root valuation strata, *Pure Appl. Math. Q.* **5** (2009), 1253–1310.
- [18] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, EGA IV, *Publ. Math. IHÉS* **4**, **20**, **24**, **28**, **32** (1960–1967).
- [19] J. HEINLOTH, Uniformization of \mathcal{G} -bundles, *Math. Ann.* **347** (2010), 499–528.
- [20] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et déformations. I*, Lecture Notes in Math. **239**, Springer, Berlin-New York, 1971.
- [21] L. LAFFORGUE, Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires, *Jpn. J. Math.* **9** (2014), 1–68.
- [22] V. LAFFORGUE, Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale, prépublication arXiv:1209.5352.
- [23] G. LAUMON, L. MORET-BAILLY, *Champs algébriques*, *Ergebn. Math. Grenzg.* **39**, Springer, Berlin, 2000.
- [24] B. C. NGÔ, Fibration de Hitchin et endoscopie, *Invent. math.* **164** (2006), 399–453.
- [25] B. C. NGÔ, Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie, *Publ. Math. IHÉS* **111** (2010), 1–169.
- [26] S. PROJECT, <http://stacks.math.columbia.edu/tag/0546>.
- [27] L. E. RENNER, *Linear algebraic monoids*, *Encyclopaedia of Math. Sciences* **134**, Springer, Berlin, 2005.
- [28] A. RITTATORE, Monoïdes algébriques et variétés sphériques, thèse de doctorat, Institut Fourier, Grenoble, 1997.
- [29] J. SEBAG, Intégration motivique sur les schémas formels, *Bull. Soc. Math. France* **132** (2004), 1–54.
- [30] R. STEINBERG, Regular elements of semisimple algebraic groups, *Publ. Math. IHÉS* **25** (1965), 49–80.

- [31] M. TEMKIN, Functorial desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero : the nonembedded case, *Duke Math. J.* **161** (2012), 2207–2254.
- [32] Y. VARSHAVSKY, Moduli spaces of principal F -bundles, *Selecta Math. (N.S.)* **10** (2004), 131–166.
- [33] E. B. VINBERG, On reductive algebraic semigroups, in *Lie groups and Lie algebras : E. B. Dynkin's Seminar*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **169**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 145–182.

(Manuscrit reçu le 23 octobre 2014 ;
accepté, après révision, le 23 février 2016.)

Alexis BOUTHIER
UC Berkeley
Department of Mathematics
970 Evans Hall
Berkeley, CA 94720, USA
E-mail: abouthier@berkeley.edu

