Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^e série, t. 49, 2016, p. 947 à 970

THÉORIE DE SEN ET VECTEURS LOCALEMENT ANALYTIQUES

PAR LAURENT BERGER AND PIERRE COLMEZ

RÉSUMÉ. – Nous généralisons la théorie de Sen à des extensions K_∞/K dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p-adique de dimension quelconque. Pour cela, nous remplaçons l'espace des vecteurs K-finis de Sen par celui des vecteurs localement analytiques de Schneider et Teitelbaum. On obtient alors un espace vectoriel sur le corps des vecteurs localement analytiques de $\hat{K}_\infty$. Nous décrivons ce corps en portant une attention particulière au cas d'une extension de Lubin-Tate.

ABSTRACT. – We generalize Sen theory to extensions K_∞/K whose Galois group is a p-adic Lie group of arbitrary dimension. To do so, we replace Sen's space of K-finite vectors by Schneider and Teitelbaum's space of locally analytic vectors. One then gets a vector space over the field of locally analytic vectors of $\hat{K}_\infty$. We describe this field in general and pay special attention to the case of Lubin-Tate extensions.

1. Introduction

1.1. Descente presque étale

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ et on note $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la norme p-adique.

Si K est une extension finie[(1)] de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, et si $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$, une idée qui s'est avérée fructueuse pour l'étude des représentations p-adiques de G_K, est de dévisser $\overline{\mathbf{Q}}_p$ en introduisant une extension intermédiaire $K \subset K_\infty \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$, telle que K_∞/K ne soit pas trop compliquée, mais quand même profondément ramifiée (voir [11]) de telle sorte que $\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty$ soit presque étale au sens de Faltings. On note H_K le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty)$ et, si K_∞ est une extension galoisienne de K, on note Γ_K le groupe $\mathrm{Gal}(K_\infty/K) = G_K/H_K$. Le fait que l'extension $\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty$ est presque étale a pour conséquence le résultat de descente presque étale suivant (cf. [31]).

(1) Plus généralement, on peut prendre pour K une extension finie de $W(k)[1/p]$ où k est un corps parfait de caractéristique p, et pour $\mathbf{C}_p$ le complété p-adique de $\overline{K}$.

THÉORÈME 1.1. – *Si $d \geqslant 1$, alors $H^1(H_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}_p)) = \{1\}$.*

REMARQUE 1.2. – (i) D'après le théorème d'Ax-Sen-Tate, $\mathbf{C}_p^{H_K}$ est l'adhérence $\hat{K}_\infty$ de K_∞ dans $\mathbf{C}_p$ (autrement dit, c'est le complété de K_∞ pour la norme p-adique). Le th. 1.1 se traduit par le fait que, si X est une $\mathbf{C}_p$-représentation semi-linéaire de dimension finie d de G_K (par exemple si $X = \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, où V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation linéaire de G_K, de dimension d), l'application $\mathbf{C}_p \otimes_{\hat{K}_\infty} X^{H_K} \to X$ est un isomorphisme. En particulier, si K_∞/K est galoisienne, $W = X^{H_K}$ est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension d de Γ_K. On est donc naturellement amené à étudier les $\hat{K}_\infty$-représentations semi-linéaires de dimension finie de Γ_K pour associer des invariants aux $\mathbf{Q}_p$-représentations linéaires de G_K ; c'est exactement ce qu'a fait Sen [31, 34] pour définir les poids de Hodge-Tate d'une représentation quelconque (cf. rem. 1.4 ci-dessous).

(ii) On a le même genre d'énoncé en remplaçant $\mathbf{C}_p$ par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ [18] ou par $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ [9, 4] ou encore par $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$ [13, 2, 16] (et $\hat{K}_\infty$ par les points fixes par H_K de l'anneau correspondant).

On peut, par exemple, prendre pour K_∞ une des extensions suivantes :

— l'extension cyclotomique $K(\mu_{p^\infty})$;

— l'extension de Kummer $K(\sqrt[p^\infty]{\pi})$, où π est une uniformisante de K ;

— la composée $K(\mu_{p^\infty}, \sqrt[p^\infty]{\pi})$ des deux extensions précédentes ;

— une extension de type Lubin-Tate, obtenue en rajoutant à K les points de p^∞-torsion d'un groupe de Lubin-Tate associé à une uniformisante d'un sous-corps de K ;

— une extension galoisienne infiniment ramifiée de groupe de Galois un groupe de Lie p-adique (qui est alors profondément ramifiée, cf. [29] et [11]).

Chacun des exemples ci-dessus a son intérêt propre :

• L'extension la plus utilisée est l'extension cyclotomique, par exemple dans la théorie des (φ, Γ)-modules (cf. [17] et [9]), mais pour beaucoup de questions, il semble naturel d'utiliser d'autres extensions.

• De beaucoup de points de vue, la plus simple serait l'extension de Kummer mais elle n'est pas galoisienne, ce qui pose de sérieux problèmes (elle s'est quand même révélée très utile pour l'étude des représentations semi-stables [7, 22, 1]) et on lui préfère parfois [35, 8] la composée $K(\mu_{p^\infty}, \sqrt[p^\infty]{\pi})$.

• En vue d'une extension de la correspondance de Langlands locale p-adique à $\mathrm{GL}_2(K)$, il semble naturel de considérer une extension de Lubin-Tate associée à une uniformisante de K [23, 20, 3] car cela rend la correspondance pour $\mathrm{GL}_1(K)$ complètement transparente.

• Enfin, pour des applications à la théorie d'Iwasawa non commutative [21, 10, 36], le cadre naturel est celui d'une extension de groupe de Galois un groupe de Lie p-adique arbitraire (ce qui inclut tous les cas précédents à l'exception de l'extension de Kummer).

Malheureusement, si Γ_K est de dimension $\geqslant 2$, certains outils fondamentaux de la théorie cyclotomique manquent à l'appel (comme l'existence des traces normalisées continues sur K_∞ de [33]), ce qui rend la théorie nettement plus délicate, et explique qu'elle soit moins développée. Le but de cet article et de [3] est de suggérer que l'on peut remplacer ces outils manquants par des éléments de la théorie des représentations de Γ_K : le concept de vecteur localement analytique est utilisé dans cet article pour étendre la théorie de Sen ; dans [3], ce concept permet de définir des invariants palliant le manque de surconvergence des (φ, Γ)-modules dans le cas d'une extension de Lubin-Tate.

Dans tout le reste de l'article, *on suppose que* K_∞/K *est galoisienne, que* $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ *est un groupe de Lie p-adique, et que le sous-groupe d'inertie de* Γ_K *est infini* (c'est automatique si $\dim \Gamma_K \geqslant 2$).

1.2. Vecteurs K-finis

Soit W une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K. Si $w \in W$, disons que w est K-*fini* s'il appartient à un sous K-espace vectoriel de dimension finie de W qui est stable par Γ_K. Soit W^{fin} l'ensemble des vecteurs K-finis de W. C'est un sous-K_∞-espace vectoriel de W.

Si $\dim \Gamma_K = 1$, on dispose du résultat suivant de Sen (cf. [31]).

THÉORÈME 1.3. – *On a* $\hat{K}_\infty^{\mathrm{fin}} = K_\infty$ *et, plus généralement, si* W *est une* $\hat{K}_\infty$*-représentation semi-linéaire de dimension finie de* Γ_K*, l'application* $\hat{K}_\infty \otimes_{K_\infty} W^{\mathrm{fin}} \to W$ *est un isomorphisme.*

REMARQUE 1.4. – (i) L'algèbre de Lie de Γ_K agit linéairement sur le K_∞-espace vectoriel W^{fin}. Cette algèbre est de rang 1 sur $\mathbf{Z}_p$ et, si K_∞/K est l'extension cyclotomique, elle admet un générateur canonique $\nabla = \lim_{\gamma\to 1} \frac{\gamma-1}{\chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma)-1}$. L'opérateur de W^{fin} ainsi défini est *l'opérateur de Sen* Θ_{Sen}. Ses valeurs propres sont les *poids de Hodge-Tate* de W.

(ii) Si $W = (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ où V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K et K_∞/K est l'extension cyclotomique, on note $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ l'espace W^{fin} et les *poids de Hodge-Tate de* V sont, par définition, ceux de W. De plus :

• L'application naturelle $\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V) \to \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme de représentations $\mathbf{C}_p$-semi-linéaires de G_K.

• Si on étend Θ_{Sen} par $\mathbf{C}_p$-linéarité à $\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$, alors Θ_{Sen} commute à l'action de G_K et on a

$$\big(\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)\big)^{\Theta_{\mathrm{Sen}}=0} = \mathbf{C}_p \otimes_K (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}.$$

• $\Theta_{\mathrm{Sen}} = 0$ (ce qui équivaut à ce que V soit de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate tous nuls) si et seulement si le sous-groupe d'inertie de G_K agit à travers un quotient fini sur V (cf. § 5 de [30]).

• Θ_{Sen} appartient au sous-$\mathbf{C}_p$-espace vectoriel de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{End}(V)$ engendré par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de l'image de G_K dans $\mathrm{GL}(V)$, et $\mathfrak{g}$ est le plus petit sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathrm{End}(V)$ ayant cette propriété (cf. § 3.2 de [31]).

(iii) L'espace $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ du (ii) admet, si n est assez grand, un unique sous-K_n-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V)$ (avec $K_n = K(\mu_{p^n})$), stable par Γ_K et tel que l'application naturelle $K_\infty \otimes_{K_n} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ soit un isomorphisme (il en est alors de même de l'application $\mathbf{C}_p \otimes_{K_n} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V) \to \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$); ce sous-espace est stable par Θ_{Sen}.

Le fait que W^{fin} n'est pas un objet adapté si $\dim \Gamma_K \geqslant 2$ avait été observé par Sen lui-même. À titre d'exemple, signalons le résultat suivant (prop. 5.3). Soit Γ_K un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $\pm s$ les deux poids de Hodge-Tate de la représentation déduite de $G_K \to \Gamma_K \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

PROPOSITION 1.5. – *Soit Γ_K comme ci-dessus, avec $s \neq 0$, et soit W une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K.*

(i) *Si $W^{\mathrm{fin}} \neq \{0\}$, alors W a un poids de Hodge-Tate qui appartient à $s \cdot \mathbf{Z}$;*

(ii) *Si W^{fin} contient une base de W, alors l'opérateur de Sen de W est semisimple, à valeurs propres dans $s \cdot \mathbf{Z}$.*

1.3. Vecteurs localement analytiques

L'idée principale de cet article est de remplacer W^{fin} par l'espace des vecteurs localement $\mathbf{Q}_p$-analytiques W^{la} dont nous rappelons maintenant la définition.

Soit G un groupe de Lie p-adique (par exemple Γ_K), et soit W un $\mathbf{Q}_p$-espace de Banach qui est une représentation de G. Si $w \in W$, alors suivant le § 7 de [28], nous disons que w est *localement $\mathbf{Q}_p$-analytique* si l'application « orbite » $G \to W$, donnée par $g \mapsto g(w)$, est une fonction localement $\mathbf{Q}_p$-analytique sur G. On note W^{la} l'espace des vecteurs localement $\mathbf{Q}_p$-analytiques de W. On a $W^{\mathrm{fin}} \subset W^{\mathrm{la}}$ d'après un analogue d'un résultat classique de Cartan (§ V.9 de [32]). Notre premier résultat (th. 3.2), qui montre qu'en dimension 1 on retombe sur les objets introduits par Sen, est le suivant.

THÉORÈME 1.6. – *Si $\dim \Gamma_K = 1$ et si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, alors $W^{\mathrm{fin}} = W^{\mathrm{la}}$.*

L'analogue du th. 1.3 dans le cas où Γ_K est de dimension quelconque est le résultat suivant (th. 3.4) qui montre que W^{la} est un invariant fin de W.

THÉORÈME 1.7. – *Si Γ_K est un groupe de Lie p-adique, et si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, l'application naturelle $\hat{K}_\infty \otimes_{\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}} W^{\mathrm{la}} \to W$ est un isomorphisme.*

REMARQUE 1.8. – (i) Le th. 1.7 soulève la question de la description de $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$. On montre facilement (lem. 2.5) que $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ est toujours un corps. Si $\dim \Gamma_K = 1$, alors $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} = K_\infty$ par le th. 1.6, mais si $\dim \Gamma_K \geqslant 2$, alors $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ contient strictement K_∞ (cf. th. 1.9). Nous calculons explicitement $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ dans les cas « Lubin-Tate » (th. 4.2) et « SL_2 » (th. 5.5).

(ii) Le th. 1.7 fait écho au résultat de Schneider et Teitelbaum [28] selon lequel, si W est une représentation admissible de Γ_K, alors W^{la} est dense dans W. On ne peut pas utiliser ce résultat ici car une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de Γ_K n'est pas une représentation admissible de Γ_K. Par exemple, dans le cas de l'extension cyclotomique, $(\mathscr{O}_{\hat{K}_\infty}/p)^{\Gamma_K}$ contient l'image de $\frac{p}{\zeta - 1}$ modulo p, pour toute racine de l'unité ζ d'ordre une puissance de p, et donc est de dimension infinie sur $\mathbf{F}_p$.

Soit d la dimension de Γ_K ; il existe alors (§ 27 de [26]) un groupe analytique $\mathbb{G}$ de dimension d, défini sur $\mathbf{Q}_p$, tel que l'on ait $\Gamma_K = \mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$. Si $n \geqslant 1$, on note Γ_n le groupe $\mathbb{G}(p^n \mathbf{Z}_p)$, image de $p^n \mathfrak{g}$ par l'exponentielle (où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de Γ_K et est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang d), et on note K_n le sous-corps $K_\infty^{\Gamma_n}$ de K_∞. L'anneau $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ est la limite inductive des $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$, où l'on a noté $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ l'ensemble des v tels que $g \mapsto g \cdot v$ soit analytique sur Γ_n, et $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ est une K_n-algèbre de Banach ; on note X_n le K_n-espace analytique qu'elle définit. Le résultat suivant (th. 6.1) montre que, après extension des scalaires à $\mathbf{C}_p$, X_n devient une boule de dimension $d - 1$.

THÉORÈME 1.9. – *Soit V une représentation fidèle de Γ_K, et soit $\mathbb{H}$ le sous-groupe à un paramètre de $\mathbb{G}$ engendré par l'opérateur de Sen de V, vu comme élément de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{g}$. Si $n \geqslant 1$, alors $X_n(\mathbf{C}_p) = \mathbb{H}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \backslash \mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$.*

REMARQUE 1.10. – (i) La preuve du théorème montre que $\mathbb{H}$ n'est pas trivial, ce qui se traduit par le fait que $\Theta_{\mathrm{Sen}} \neq 0$. Comme la seule hypothèse que l'on a faite sur Γ_K est que son sous-groupe d'inertie est infini, cela fournit une preuve du théorème de Sen (troisième point du (ii) de la rem. 1.4) selon lequel une représentation de G_K est de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate tous nuls si et seulement si le sous-groupe d'inertie de G_K agit à travers un quotient fini ; cette preuve n'utilise pas les résultats de [29]. Par contre, il n'a pas l'air possible de retrouver, par cette méthode, le résultat plus fin décrivant l'algèbre de Lie de G_K en termes de Θ_{Sen}.

(ii) La méthode permettant de prouver le th. 1.1 peut aussi être utilisée pour montrer que si L est une extension galoisienne de K qui n'est pas profondément ramifiée, alors $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{GL}_d(\hat{L})) = \{1\}$. La non nullité de Θ_{Sen} implique donc que K_∞/K est profondément ramifiée. Autrement dit, on a redémontré, sans utiliser [29], qu'une extension galoisienne de groupe de Galois un groupe de Lie p-adique est profondément ramifiée si et seulement si elle est infiniment ramifiée.

(iii) Comme X_n est défini sur K_n et que $\mathbb{G}$ est défini sur $\mathbf{Q}_p$, on dispose d'actions de G_{K_n} sur $X_n(\mathbf{C}_p)$ et sur $\mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$, mais celles-ci ne sont pas compatibles : il faut tordre l'application naturelle. Notons $\gamma : G_{K_n} \to \Gamma_n = \mathbb{G}(p^n \mathbf{Z}_p)$ la projection naturelle et $\pi : \mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \to X_n(\mathbf{C}_p)$ l'application fournie par le th. 1.9. On a alors

$$\sigma(\pi(x)) = \pi(\gamma(\sigma)\sigma(x)), \quad \text{si } x \in \mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \text{ et } \sigma \in G_{K_n}.$$

Le fait que cette action descende à $\mathbb{H}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \backslash \mathbb{G}(p^n \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$ est une conséquence de ce que Θ_{Sen} commute à G_{K_n}. On remarquera que l'orbite sous G_{K_n} de l'élément neutre de $\mathbb{G}$ est Zariski dense dans $X_n(\mathbf{C}_p)$ (c'est l'image par π de Γ_n), ce qui explique que $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} = \bigcup_{n \geqslant 1} \hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ soit un corps bien que $\bigcap_{n \geqslant 1} X_n(\mathbf{C}_p)$ ne soit pas vide.

1.4. Extensions de type Lubin-Tate

Supposons dans ce qui suit que K_∞ est l'extension de K engendrée par les points de torsion d'un $\mathscr{O}_F$-module formel, avec $F \subset K$ extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$. Par la théorie de Lubin-Tate, le groupe Γ_K s'identifie, via le caractère de Lubin-Tate χ_F, à un sous-groupe ouvert de $\mathscr{O}_F^\times$. La théorie des périodes p-adiques fournit, pour chaque plongement $\tau : F \to \overline{\mathbf{Q}}_p$ différent de l'identité, un élément $u_\tau \in \mathbf{C}_p^\times$ tel que $g(u_\tau) = \tau \circ \chi_F(g) \cdot u_\tau$. Soit $x_\tau = \log(u_\tau)$. Le résultat suivant donne une bonne idée de ce à quoi ressemble $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$; nous renvoyons au th. 4.2 pour un énoncé plus précis mais plus technique.

THÉORÈME 1.11. – *L'anneau $K_\infty[\{x_\tau\}_{\tau \neq \mathrm{Id}}]$ est dense dans $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ pour sa topologie naturelle.*

Si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, alors disons qu'un vecteur $w \in W$ est localement F-analytique si l'application orbite $g \mapsto gw$ est localement F-analytique sur $\Gamma_K \subset \mathscr{O}_F^\times$. On note $W^{F\text{-la}}$ l'espace des vecteurs de W qui sont localement F-analytiques. Le th. 1.11 implique que $\hat{K}_\infty^{F\text{-la}} = K_\infty$. On a alors (th. 4.11).

THÉORÈME 1.12. – *Si K_∞/K est une extension de Lubin-Tate, et si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, alors $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K_\infty} W^{F\text{-la}} \to W^{\mathrm{la}}$ est un isomorphisme.*

On peut donc associer à W le K_∞-espace vectoriel $W^{F\text{-la}}$, qui est alors muni de l'opérateur différentiel K_∞-linéaire ∇_{Id}. Cet opérateur est semblable à Θ_{Sen}.

2. Rappels et compléments

Dans tout cet article, nous utilisons la notation multi-indice. Soit $\mathbf{N} = \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$; si $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d)$ et $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbf{N}^d$, alors $\mathbf{c}^{\mathbf{k}} = c_1^{k_1} \times \cdots \times c_d^{k_d}$. On pose $\mathbf{k}! = k_1! \times \cdots \times k_d!$ et $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_d$. On note $\mathbf{1}_j$ le d-uplet $(k_1, \dots, k_d)$ où $k_i = 0$ si $i \neq j$ et $k_j = 1$. Rappelons qu'un espace LB est un espace vectoriel topologique qui est la limite inductive d'une suite d'espaces de Banach, et que le théorème de l'image ouverte est vrai pour ces espaces (th. 1.1.17 de [15]).

2.1. Vecteurs localement analytiques

Nous faisons tout d'abord quelques rappels et compléments sur les vecteurs localement analytiques. Nous renvoyons par exemple à la monographie [15] pour plus de détails.

Soit G un groupe de Lie p-adique, et soit W un $\mathbf{Q}_p$-espace de Banach qui est une représentation de G. Si $w \in W$, alors suivant le § 7 de [28], disons que w est *localement $\mathbf{Q}_p$-analytique* si l'application orbite $G \to W$, donnée par $g \mapsto g(w)$, est une fonction localement $\mathbf{Q}_p$-analytique sur G. On note W^{la} l'espace des vecteurs localement $\mathbf{Q}_p$-analytiques de W. Si $w \in W^{\mathrm{la}}$, il existe donc un sous-groupe compact ouvert H_w de G, et des coordonnées locales $c_i : H_w \to \mathbf{Z}_p$ qui donnent lieu à une bijection analytique entre H_w et $\mathbf{Z}_p^d$, et une suite $\{w_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d}$ de W telle que $w_{\mathbf{k}} \to 0$ quand $|\mathbf{k}| \to +\infty$, tels que $h(w) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \mathbf{c}(h)^{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}}$ si $h \in H_w$. Si H est un sous-groupe de G, on note $W^{H\text{-an}}$ l'espace des vecteurs de W qui sont globalement analytiques sur H.

Soient G et H deux groupes de Lie p-adiques, et $f : G \to H$ un morphisme analytique de groupes. Si W est une représentation de H, on peut aussi voir W comme une représentation de G. Le résultat suivant est immédiat.

LEMME 2.1. – *Si $w \in W$ est un vecteur localement $\mathbf{Q}_p$-analytique pour H, alors c'est un vecteur localement $\mathbf{Q}_p$-analytique pour G.*

LEMME 2.2. – *Soit G un groupe de Lie p-adique, soient W et X deux $\mathbf{Q}_p$-espaces de Banach, et soit $\pi : W \to X$ une application linéaire continue. Si $f : G \to W$ est une fonction localement $\mathbf{Q}_p$-analytique, alors $\pi \circ f : G \to X$ est localement $\mathbf{Q}_p$-analytique.*

Démonstration. – Si $f(g) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}$, alors $\pi \circ f(g) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} \pi(f_{\mathbf{k}})$. □

PROPOSITION 2.3. – *Soient G un groupe de Lie p-adique, B un G-anneau de Banach, et W un B-module libre de rang fini, muni d'une action compatible de G. Si le B-module W admet une base $w_1, \dots, w_d$ telle que $g \mapsto \mathrm{Mat}(g)$ est une fonction globalement analytique $G \to \mathrm{GL}_d(B) \subset \mathrm{M}_d(B)$, alors*

(i) $W^{H\text{-an}} = \bigoplus_{i=1}^d B^{H\text{-an}} \cdot w_i$ *si H est un sous-groupe de G ;*

(ii) $W^{\mathrm{la}} = \bigoplus_{i=1}^{d} B^{\mathrm{la}} \cdot w_i$.

Démonstration. – Remarquons que l'isomorphisme $W \simeq B^d$ fourni par le choix d'une base de W est un homéomorphisme par le théorème de l'image ouverte. Le (ii) étant une conséquence immédiate du (i), il suffit de prouver le (i). L'inclusion de $\bigoplus_{i=1}^{d} B^{H\text{-an}} \cdot w_i$ dans $W^{H\text{-an}}$ est évidente; montrons l'autre inclusion. Si $w \in W$, on peut écrire $w = \sum_{i=1}^{d} b_i w_i$. Soit $f_i : W \to B$ la fonction $w \mapsto b_i$. Écrivons $\mathrm{Mat}(g) = (m_{i,j}(g))_{i,j}$. Si $h \in H$, alors $h(w) = \sum_{i,j=1}^{d} h(b_i) m_{i,j}(h) w_j$ et si $w \in W^{H\text{-an}}$, alors $h \mapsto f_j(h(w)) = \sum_{i=1}^{d} h(b_i) m_{i,j}(h)$ est une fonction globalement analytique $H \to B$ par le lem. 2.2. Si $\mathrm{Mat}(h)^{-1} = (n_{i,j}(h))_{i,j}$, alors $h(b_i) = \sum_{j=1}^{d} f_j(h(w)) n_{i,j}(h)$ et on en déduit bien que $b_i \in B^{H\text{-an}}$. □

On se donne à présent un sous-groupe compact ouvert G_1 de G, tel que si l'on pose $G_n = G_1^{p^{n-1}}$ pour $n \geqslant 1$, alors G_n est un sous-groupe de G_1 et tel qu'il existe des coordonnées locales $c_i : G_1 \to \mathbf{Z}_p$ telles que $\mathbf{c}(G_n) = (p^n \mathbf{Z}_p)^d$ pour tout $n \geqslant 1$. Un tel sous-groupe existe toujours : il suffit par exemple de se donner un sous-groupe compact ouvert G_0 de G qui est p-valué et saturé (cf. le § 23 de [26] pour la définition, et le § 27 pour l'existence d'un tel G_0) et de poser $G_n = G_0^{p^n}$ (cf. les §§ 23 et 26 de *ibid*).

Si $w \in W^{\mathrm{la}}$, il existe $n \geqslant 1$ tel que $w \in W^{G_n\text{-an}}$ et on peut écrire $g(w) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}}$ si $g \in G_n$ où $\{w_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d}$ est une suite de W telle que $p^{n|\mathbf{k}|} w_{\mathbf{k}} \to 0$. On pose alors $\|w\|_{G_n} = \sup_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \|p^{n|\mathbf{k}|} \cdot w_{\mathbf{k}}\|$. Cette norme coïncide avec la norme déduite de l'inclusion $W^{G_n\text{-an}} \to \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G_n, W)$ et ne dépend donc pas du choix de coordonnées locales. Par le corollaire 3.3.6 de [15], l'inclusion $(W^{G_n\text{-an}})^{G_n\text{-an}} \to W^{G_n\text{-an}}$ est un isomorphisme topologique. Ceci implique en particulier que si $w \in W^{G_n\text{-an}}$, alors $w_{\mathbf{k}} \in W^{G_n\text{-an}}$ pour tout $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d$.

Le lemme ci-dessous est une conséquence immédiate des définitions.

LEMME 2.4. – *Si $w \in W^{G_n\text{-an}}$, alors*
(i) $w \in W^{G_m\text{-an}}$ *pour tout* $m \geqslant n$,
(ii) $\|w\|_{G_{m+1}} \leqslant \|w\|_{G_m}$ *si* $m \geqslant n$,
(iii) $\|w\|_{G_m} = \|w\|$ *si* $m \gg 0$.

L'espace $W^{G_n\text{-an}}$, muni de $\|\cdot\|_{G_n}$, est un espace de Banach. On a $W^{\mathrm{la}} = \bigcup_{n \geqslant 1} W^{G_n\text{-an}}$ et W^{la} est muni de la topologie de la limite inductive ce qui en fait un espace LB.

LEMME 2.5. – *Si W est un anneau, tel que $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ si $x, y \in W$, alors*
(i) $W^{G_n\text{-an}}$ *est un anneau et* $\|xy\|_{G_n} \leqslant \|x\|_{G_n} \cdot \|y\|_{G_n}$ *si* $x, y \in W^{G_n\text{-an}}$,
(ii) *si de plus W est un corps, alors W^{la} est aussi un corps.*

Démonstration. – Écrivons $g(x) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}}$ et $g(y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}$. On a alors

$$g(xy) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{i}+\mathbf{j}=\mathbf{k}} x_{\mathbf{i}} y_{\mathbf{j}} \right),$$

et si $\mathbf{i}+\mathbf{j}=\mathbf{k}$, alors $\|p^{n|\mathbf{k}|} x_{\mathbf{i}} \cdot y_{\mathbf{j}}\| \leqslant \|p^{n|\mathbf{i}|} x_{\mathbf{i}}\| \cdot \|p^{n|\mathbf{j}|} y_{\mathbf{j}}\|$, ce qui implique le (i).

Pour le (ii), soit $w \in W^{G_n\text{-an}} \setminus \{0\}$ avec $g(w) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}}$. On a

$$\frac{1}{g(w)} = \frac{1}{w + \sum_{\mathbf{k} \neq 0^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} \cdot w_{\mathbf{k}}/w}.$$

Ceci implique que $1/w \in W^{G_m\text{-an}}$ dès que $m \geqslant n$ est suffisamment grand pour que l'on ait $\sup_{\mathbf{k}\neq 0^d} \|p^{m|\mathbf{k}|} \cdot w_{\mathbf{k}}/w\| < 1$ de sorte que $g(1/w) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j(\sum_{\mathbf{k}\neq 0^d} \mathbf{c}(g)^{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}}/w)^j/w$. □

L'algèbre de Lie de G, $\mathrm{Lie}(G)$ agit sur W^{la}.

LEMME 2.6. – *Si $D \in \mathrm{Lie}(G)$ et $n \geqslant 1$, alors $D(W^{G_n\text{-an}}) \subset W^{G_n\text{-an}}$, et il existe une constante C_D telle que $\|D(x)\|_{G_n} \leqslant C_D\|x\|_{G_n}$ si $x \in W^{G_n\text{-an}}$.*

Démonstration. – L'espace $W^{G_n\text{-an}}$ est un espace de Banach muni d'une action localement $\mathbf{Q}_p$-analytique de G et le lemme résulte alors de la prop. 3.2 de [27]. □

2.2. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}$ et la théorie de Sen

Nous donnons ici une légère généralisation de la construction de l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}$ de [12]. Soit $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^\times$ un caractère infiniment ramifié (dans [12], χ est le caractère cyclotomique). Soit $H_K = \ker\chi$ et $K_\infty = \overline{\mathbf{Q}}_p^{H_K}$ et $\Gamma_n = \{g \in \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ tels que $\chi(g) \in 1 + p^n\mathbf{Z}_p\}$ et soit $K_n = K_\infty^{\Gamma_n}$.

Soit u une variable et soit $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}$ l'ensemble des séries formelles $f(u) = \sum_{i\geqslant 0} a_i u^i$ telles que $a_i \in \mathbf{C}_p$ et qui ont un rayon de convergence non nul. Si $n \geqslant 1$, l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^n$ est l'ensemble des séries formelles de rayon de convergence p^{-n} de telle sorte que $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^n$. On munit $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^n$ d'une action de G_{K_n} grâce à la formule

$$g(\sum_{i\geqslant 0} a_i u^i) = \sum_{i\geqslant 0} g(a_i)(u + \log\chi(g))^i.$$

THÉORÈME 2.7. – *On a $(\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^n)^{G_{K_n}} = K_n$.*

Démonstration. – La démonstration est tout à fait analogue à celle du (i) du th. 2 de [12] (l'affirmation correspondante quand χ est le caractère cyclotomique). Nous en rappelons brièvement les étapes principales. Par le théorème d'Ax-Sen-Tate, on a $\mathbf{C}_p^{H_K} = \hat{K}_\infty$ de telle sorte que si $f(u) = \sum_{i\geqslant 0} a_i u^i \in (\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^n)^{G_{K_n}}$, alors $a_i \in \hat{K}_\infty$. Le fait que $g(f) = f$ implique que pour tout $i \geqslant 0$, on a $g(a_i) = \sum_{j\geqslant 0} a_{i+j}\binom{i+j}{i}(-\log\chi(g))^j$. Soient $R_m : \hat{K}_\infty \to K_m$ les traces de Tate normalisées pour $m \geqslant n$ (cf. le § 3.1 de [33]). En appliquant R_m à l'équation précédente, on obtient

$$g(R_m(a_i)) = \sum_{j\geqslant 0} R_m(a_{i+j})\binom{i+j}{i}(-\log\chi(g))^j.$$

Le membre de gauche est une fonction de g qui est constante sur Γ_m, alors que le membre de droite est une fonction analytique sur Γ_n. Ces fonctions sont donc constantes sur Γ_n, ce qui fait que $R_m(a_k) = 0$ pour tout $m \geqslant n$ et $k \geqslant 1$. Ceci implique que $f = a_0 \in K_n$. □

Si K_∞/K est l'extension cyclotomique, on peut utiliser l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^n$ pour retrouver [12] les invariants de Sen des $\mathbf{Q}_p$-représentations de G_K (rem. 1.4). Soit V une $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension finie de G_K. Si $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{D}'_{\mathrm{Sen},n}(V)$ le K_n-espace vectoriel

$$\mathrm{D}'_{\mathrm{Sen},n}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^n \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_{K_n}},$$

et on pose $\mathrm{D}'_{\mathrm{Sen}}(V) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{D}'_{\mathrm{Sen},n}(V)$. On peut écrire un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^n$ sous la forme $\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}u + \cdots$, où les $\alpha^{(i)}$ sont des éléments de $\mathbf{C}_p$. Cela permet d'écrire un élément δ

de $\mathrm{D}'_{\mathrm{Sen}}(V)$ sous la forme $\delta^{(0)} + \delta^{(1)}u + \cdots$, où les $\delta^{(i)}$ sont des éléments de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. On a alors le résultat suivant.

PROPOSITION 2.8. – (i) *L'application* $\delta \mapsto \delta^{(0)}$ *induit un isomorphisme de* $K(\mu_{p^\infty})$*-espaces vectoriels de* $\mathrm{D}'_{\mathrm{Sen}}(V)$ *sur* $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ *et de* K_n*-espaces vectoriels de* $\mathrm{D}'_{\mathrm{Sen},n}(V)$ *sur* $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V)$ *si* n *est assez grand.*

(ii) *L'isomorphisme inverse est* $d \mapsto \iota(d) = e^{-u\Theta_{\mathrm{Sen}}} \cdot d$.

3. Théorie de Sen et vecteurs localement analytiques

Dans ce chapitre, nous montrons comment généraliser la théorie de Sen en considérant les vecteurs localement analytiques au lieu des vecteurs finis.

3.1. Vecteurs finis et vecteurs localement analytiques

Soit W une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K. Si $w \in W$, rappelons que l'on dit que w est K*-fini* s'il appartient à un sous K-espace vectoriel de dimension finie de W qui est stable sous Γ_K. Soit W^{fin} l'ensemble des vecteurs K-finis de W. On a le résultat suivant dû à Sen [31].

PROPOSITION 3.1. – *Si* $\dim \Gamma_K = 1$*, et si* W *est une* $\hat{K}_\infty$*-représentation semi-linéaire de dimension finie de* Γ_K*, l'application* $\hat{K}_\infty \otimes_{K_\infty} W^{\mathrm{fin}} \to W$ *est un isomorphisme.*

Nous donnons à présent le lien entre W^{fin} et les vecteurs localement analytiques de W.

THÉORÈME 3.2. – *Si* $\dim \Gamma_K = 1$*, et si* W *est une* $\hat{K}_\infty$*-représentation semi-linéaire de dimension finie de* Γ_K*, alors* $W^{\mathrm{fin}} = W^{\mathrm{la}}$.

Démonstration. – Montrons d'abord l'égalité pour $W = \hat{K}_\infty$. Soient $R_n : \hat{K}_\infty \to K_n$ les traces de Tate normalisées (cf. le § 3.1 de [33]), de telle sorte que si $x \in \hat{K}_\infty$, alors $x = \lim_{n\to+\infty} R_n(x)$. Les applications $\{R_n\}_{n\gg 0}$ commutent avec Γ_K. Soit x un vecteur $\mathbf{Q}_p$-analytique pour un sous-groupe $\Gamma_m \subset \Gamma_K$. Si $k \geqslant 1$, alors $R_{m+k}(x)$ est un vecteur $\mathbf{Q}_p$-analytique pour Γ_m et un vecteur constant pour Γ_{m+k}, et c'est donc un vecteur constant pour Γ_m. Ceci implique que $R_{m+k}(x) \in K_m$ pour tout $k \geqslant 1$, et donc que $x \in K_m$.

Revenons à présent au cas général. Si $w \in W^{\mathrm{fin}}$, alors w vit dans une représentation $\mathbf{Q}_p$-linéaire de dimension finie V_w de Γ_K. Par le théorème de Cartan (cf. la prop. 3.6.10 de [15] ou le § V.9 de [32]), les vecteurs de V_w sont localement $\mathbf{Q}_p$-analytiques, et le lem. 2.2 implique que $w \in W^{\mathrm{la}}$. On a donc $W^{\mathrm{fin}} \subset W^{\mathrm{la}}$.

Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, fixons une base $e_1, \ldots, e_d$ de W^{fin} sur K_∞. Les e_i forment une base de W sur $\hat{K}_\infty$ par le théorème de Sen, et la prop. 2.3 implique que $W^{\mathrm{la}} = \bigoplus_{i=1}^d \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} \cdot e_i$. Comme $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} = K_\infty$, on a $W^{\mathrm{la}} = W^{\mathrm{fin}}$. □

REMARQUE 3.3. – (i) Si Γ_K et W sont comme ci-dessus, les prop. 2.3 et 3.1 et le th. 3.2 impliquent que pour n assez grand, $W^{\Gamma_n\text{-an}}$ est un K_n-espace vectoriel stable par Γ_n et tel que $W = \hat{K}_\infty \otimes_{K_n} W^{\Gamma_n\text{-an}}$. On en déduit que, si $W = (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ où V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K, cet espace n'est autre que l'espace $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V)$ du (iii) de la rem. 1.4.

(ii) On peut retrouver le module $\mathrm{D}^+_{\mathrm{dif},n}(V)$ de la même manière, comme limite projective des $W_k^{\Gamma_n\text{-an}}$, avec $W_k = ((\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$.

3.2. Une généralisation de la théorie de Sen

Nous donnons maintenant notre généralisation du théorème de Sen, quand Γ_K est un groupe de Lie p-adique de dimension quelconque, en utilisant W^{la} et non plus W^{fin}. Rappelons que $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ est un corps par le (2) du lem. 2.5 (on pourrait généraliser de même les résultats de Fontaine pour les $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations, comme suggéré dans le (ii) de la rem. 3.3).

Théorème 3.4. – *Si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, alors l'application $\hat{K}_\infty \otimes_{\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}} W^{\mathrm{la}} \to W$ est un isomorphisme.*

Commençons par montrer que l'on peut remplacer K par une extension finie. Si L est une extension finie de K et $L_\infty = L \cdot K_\infty$, alors Γ_L s'identifie à un sous-groupe de Γ_K.

Lemme 3.5. – *Si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, si L/K est une extension galoisienne finie, si $W_L = \hat{L}_\infty \otimes_{\hat{K}_\infty} W$, et si W_L^{la} est un $\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $W_L^{\mathrm{la}} = \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}} W^{\mathrm{la}}$.*

Démonstration. – L'extension $\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}/\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ est une extension galoisienne finie par la prop. 2.3. On a $W^{\mathrm{la}} = (W_L^{\mathrm{la}})^{\mathrm{Gal}(\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}/\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}})}$ et le lemme résulte de la descente étale (cf. par exemple le § 2.2 de [4]). □

Démonstration du th. 3.4. – Soient $L_\infty = K_\infty(\mu_{p^\infty})$ et $\Delta_K = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$. Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer ou bien que $L_\infty = K_\infty$ (et donc $\Delta_K = \{1\}$) ou bien que le caractère cyclotomique χ_{cyc} induit un isomorphisme de Δ_K sur $1 + 2p^n\mathbf{Z}_p$, avec $n \geqslant 1$.

Soit $X = \hat{L}_\infty \otimes_{\hat{K}_\infty} W$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W) = (X^{\mathrm{Gal}(L_\infty/K(\mu_{p^\infty}))})^{\mathrm{fin}}$ le module de Sen cyclotomique associé à W. Par la théorie de Sen classique, on a $X = \hat{L}_\infty \otimes_{K(\mu_{p^\infty})} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W)$ ce qui fait que $X^{\mathrm{la}} = \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K(\mu_{p^\infty})} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W)$ par la prop. 2.3. On a donc

$$W^{\mathrm{la}} = (\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K(\mu_{p^\infty})} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W))^{\Delta_K}.$$

Si $L_\infty = K_\infty$ (et donc $\Delta_K = \{1\}$), cela permet de conclure. Si $L_\infty \neq K_\infty$, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 3.6. – *Quitte à remplacer K par une extension finie, on peut trouver $z \in \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}$ tel que $g(z) = z + \log \chi_{\mathrm{cyc}}(g)$ pour tout $g \in \Delta_K$.*

Admettons le lemme et terminons la démonstration du théorème. Choisissons $z_0 \in L_\infty$ assez proche de z pour que la série $\exp((z_0 - z)\Theta_{\mathrm{Sen}})$ converge vers un opérateur de $\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K(\mu_{p^\infty})} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W)$. Choisissons aussi une base $e_1, \dots, e_d$ de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W)$ sur $K(\mu_{p^\infty})$. Quitte à augmenter K, on peut supposer que $z_0 \in K$, et que $f_i = \exp((z_0 - z)\Theta_{\mathrm{Sen}}) \cdot e_i$ est fixe par Δ_K pour tout i (en effet, f_i est tué par Θ_{Sen} et donc fixe par un sous-groupe ouvert de Δ_K que l'on peut supposer être égal à Δ_K quitte à augmenter K). On a alors $\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K(\mu_{p^\infty})} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W) = \bigoplus_{i=1}^d \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \cdot f_i$ avec $f_i \in W^{\mathrm{la}}$, et donc

$$X^{\mathrm{la}} = \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K(\mu_{p^\infty})} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W) = \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}} (\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K(\mu_{p^\infty})} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W))^{\Delta_K} = \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}} W^{\mathrm{la}}.$$

Ceci implique que $X = \hat{L}_\infty \otimes_{\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}} W^{\mathrm{la}}$ et, en prenant les points fixes sous Δ_K, que $W = \hat{K}_\infty \otimes_{\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}} W^{\mathrm{la}}$. □

Démonstration du lem. 3.6. – Soit V une $\mathbf{Q}_p$-représentation fidèle de Γ_K, de dimension finie (si $\dim V = d$, cela équivaut, modulo le choix d'une base de V à se donner une injection de Γ_K dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$). On peut voir V comme une représentation de G_K et il résulte de l'isomorphisme ci-dessus, appliqué à $W = \hat{K}_\infty \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, que

$$\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = (\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K(\mu_{p^\infty})} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V))^{\Delta_K}.$$

L'opérateur Θ_{Sen} sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ n'est pas nul et, quitte à remplacer K par une extension finie, on peut supposer que K contient ses valeurs propres. Il y a alors deux cas :

• Θ_{Sen} a une valeur propre non nulle s. En décomposant une base de V sur une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ dans laquelle la matrice de Θ_{Sen} est sous forme de Jordan, on en déduit l'existence de $x_s \in \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}$ tel que l'on ait $\chi_{\mathrm{cycl}}(g)^s g(x_s) = x_s$, pour tout g dans un sous-groupe ouvert de Δ_K (que l'on peut supposer être égal à Δ_K en remplaçant K par une extension finie). Si on écrit x_s sous la forme $x_s^0(1+y)$, avec $|y|_p < 1$ et $\log x_s^0 = 0$, alors la série $-\frac{1}{s}\log(1+y)$ converge dans $\hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}$ d'après le lemme 2.4, et sa somme vérifie les propriétés voulues.

• Toutes les valeurs propres de Θ_{Sen} sont nulles. La décomposition d'une base de V comme ci-dessus fournit alors directement un élément tel que $g(z) = z + \log \chi_{\mathrm{cyc}}(g)$ pour tout g dans un sous-groupe ouvert de Δ_K. □

3.3. Remarques sur la théorie de Schneider-Teitelbaum

D'après [28], si on se place dans la catégorie des représentations admissibles de Γ_K, le foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{la}}$ a de bonnes propriétés : il est exact et Π^{la} est dense dans Π. Si on sort du cadre admissible, la situation est nettement moins agréable, comme on peut le prouver en utilisant le th. 3.2.

Plaçons-nous dans le cas de l'extension cyclotomique et posons $U = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p}$. On a $H^1(H_K, U) = 0$ par le th. IV.3.1 de [13]. La suite exacte $0 \to \mathbf{Q}_p(1) \to U \to \mathbf{C}_p \to 0$ induit, en prenant les points fixes sous l'action de H_K, la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}_p(1) \to U^{H_K} \to \hat{K}_\infty \to H^1(H_K, \mathbf{Q}_p(1)) \to 0.$$

Or $(U^{H_K})^{\mathrm{la}}$ est réduit à $\mathbf{Q}_p(1)$ (en effet, si $x \in U^{H_K}$ est localement analytique, son image dans $\hat{K}_\infty$ appartient à K_∞ et donc est fixe par un élément $\gamma \neq 1$ de Γ_K, et comme la valeur propre de γ sur $\mathbf{Q}_p(1)$ n'est pas 1, on peut trouver $x' \in x + \mathbf{Q}_p(1)$ qui est fixe par γ, ce qui implique $x' \in K_\infty$ et donc $x' = 0$ puisque $\varphi(x') = px'$). En particulier $(U^{H_K})^{\mathrm{la}}$ n'est pas dense dans U^{H_K} ce qui prouve que la densité de Π^{la} dans Π n'est pas assurée si on sort du cadre admissible.

Maintenant, $H^1(H_K, \mathbf{Q}_p(1))$ est une représentation admissible de Γ_K : son dual est $H^1(G_K, \mathbf{Z}_p[\![\Gamma_K]\!][\frac{1}{p}])$, qui est un $\mathbf{Z}_p[\![\Gamma_K]\!][\frac{1}{p}]$-module libre de rang $d = [K : \mathbf{Q}_p]$ à des $\mathbf{Q}_p$-espaces de dimension finie près, et donc $H^1(H_K, \mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathscr{C}^0(\Gamma_K, \mathbf{Q}_p)^d$ à des $\mathbf{Q}_p$-espaces de dimension finie près. Cette description prouve que $H^1(H_K, \mathbf{Q}_p(1))^{\mathrm{la}}$ contient des vecteurs non localement constants, contrairement à $\hat{K}_\infty$. L'exactitude du foncteur $W \mapsto W^{\mathrm{la}}$ peut donc être mise en défaut si on se permet des représentations non admissibles.

4. Calcul de $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ dans le cas Lubin-Tate

Dans ce chapitre, nous considérons le cas où K_∞ est engendré par les points de torsion d'un groupe de Lubin-Tate.

4.1. Extensions de Lubin-Tate

Soit $F \subset K$ tel que l'extension $F/\mathbf{Q}_p$ est galoisienne finie et soit $h = [F : \mathbf{Q}_p]$. Soit E l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Soit LT un $\mathscr{O}_F$-module formel associé à une uniformisante π_F de $\mathscr{O}_F$ et soit F_∞ l'extension de F engendrée par les points de π_F^n-torsion de LT pour $n \geqslant 1$. Soient $H_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$ et $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. Par la théorie de Lubin-Tate (le th. 2 de [25]), Γ_F est isomorphe à $\mathscr{O}_F^\times$, via le caractère de Lubin-Tate $\chi_F : \Gamma_F \to \mathscr{O}_F^\times$. Si $\tau \in \mathrm{E}$, soit $\chi_F^\tau = \tau \circ \chi_F$.

THÉORÈME 4.1. – *Si $\tau \neq \mathrm{Id}$, alors il existe un élément $u_\tau \in \hat{F}_\infty^\times$ tel que $g(u_\tau) = \chi_F^\tau(g) \cdot u_\tau$ si $g \in \Gamma_F$. Si $\tau = \mathrm{Id}$, alors il n'existe pas de tel élément.*

Démonstration. – Voir le § 3.2 de [19] pour le cas $\tau \neq \mathrm{Id}$ et le § 3.4 de ibid. pour $\tau = \mathrm{Id}$ (remarquons ceci dit que ces résultats remontent à Tate, voir le § 4 de [33]). □

Soit $G_n = 1 + p^n \mathscr{O}_F$ pour $n \geqslant 1$. On pose $F_n = F_\infty^{G_n}$ (de sorte que $F_n = F(\mathrm{LT}[\pi_F^{en}])$ où e est l'indice de ramification absolu de F). La fonction log donne lieu à un isomorphisme analytique de groupes $\log : G_n \to p^n \mathscr{O}_F$ pour $n \geqslant 1$. Si $g \in G_n$, soit $\ell(g) = \log(g)$. Si $\tau \in \mathrm{E}$, alors on dispose de la « dérivation dans la direction τ » qui est un élément $\nabla_\tau \in F \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Lie}(\Gamma_F)$. On peut le construire de la manière suivante (d'après le § 3.1 de [14]). Si W est une F-représentation de G_n et si $w \in W^{\mathrm{la}}$, alors il existe $m \gg 0$ et des éléments $\{w_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^{\mathrm{E}}}$ tels que si $g \in G_m$, alors $g(w) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^{\mathrm{E}}} \ell(g)^{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}}$, où $\ell(g)^{\mathbf{k}} = \prod_{\tau \in \mathrm{E}} \tau \circ \ell(g)^{k_\tau}$. On pose alors $\nabla_\tau(w) = w_{\mathbf{1}_\tau}$, la dérivée de w dans la direction du plongement τ. Si $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^{\mathrm{E}}$, et si on pose $\nabla^{\mathbf{k}}(w) = \prod_{\tau \in \mathrm{E}} \nabla_\tau^{k_\tau}(w)$, alors $w_{\mathbf{k}} = \nabla^{\mathbf{k}}(w)/\mathbf{k}!$.

On dit que $w \in W^{\mathrm{la}}$ est *F-analytique* si l'on a $\nabla_\tau(w) = 0$ pour tout $\tau \neq \mathrm{Id}$. Ceci équivaut à l'existence d'une suite $\{w_k\}_{k \geqslant 0}$ telle que $g(w) = \sum_{k \geqslant 0} \ell(g)^k w_k$ pour g assez proche de 1, et donc au fait que l'application orbite $g \mapsto gw$ est localement F-analytique sur Γ_K. On note $W^{F\text{-la}}$ les vecteurs F-analytiques de W.

4.2. Vecteurs localement $\mathbf{Q}_p$-analytiques

Le corps $\hat{F}_\infty^{\mathrm{la}}$ est un sous-corps de $\hat{F}_\infty$ qui contient F_∞. Si $F \neq \mathbf{Q}_p$, alors les éléments u_τ du th. 4.1 sont des exemples d'éléments de $\hat{F}_\infty^{\mathrm{la}}$ qui sont localement $\mathbf{Q}_p$-analytiques mais pas localement constants. Rappelons que le choix de $\log(p) \in \mathbf{Q}_p$ détermine un morphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$-équivariant $\log : \mathbf{C}_p^\times \to \mathbf{C}_p$. Soit alors $x_\tau = \log(u_\tau)$, de telle sorte que $g(x_\tau) = x_\tau + \log \chi_F^\tau(g)$ si $g \in \Gamma_F$. Pour tout plongement $\tau \in \mathrm{E} \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et $n \geqslant 1$, soit $x_{n,\tau}$ un élément de F_∞ tel que $\|x_\tau - x_{n,\tau}\| \leqslant p^{-n}$. Par le lem. 2.4, il existe $r(n) \geqslant 1$ tel que $x_{n,\tau} \in F_{r(n)}$ et tel que si $m \geqslant r(n)$, alors $x_\tau \in \hat{F}_\infty^{G_m\text{-an}}$ et $\|x_\tau - x_{n,\tau}\|_{G_m} = \|x_\tau - x_{n,\tau}\|$. On peut supposer que la suite $\{r(n)\}_{n \geq 1}$ est croissante. Soit $K_n = K \cdot F_n$. Si $m \geqslant r(n)$ et $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^{\mathrm{E} \setminus \{\mathrm{Id}\}}}$ est une suite d'éléments de K_m telle que $p^{n|\mathbf{k}|} a_{\mathbf{k}} \to 0$ quand $|\mathbf{k}| \to +\infty$, alors $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}} \to 0$ dans $\hat{K}_\infty^{G_m\text{-an}}$ et donc la série $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^{\mathrm{E} \setminus \{\mathrm{Id}\}}} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}}$ converge vers un élément de $\hat{K}_\infty^{G_m\text{-an}}$. Notons $K_m\{\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\}\}_n$ l'ensemble des sommes de ces séries, de sorte que $K_m\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n \subset \hat{K}_\infty^{G_m\text{-an}} \subset \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$. On a aussi une inclusion $K_{r(n)}\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n \subset K_{r(n+1)}\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_{n+1}\}\}_{n+1}$.

THÉORÈME 4.2. – *L'application* $\bigcup_{n\geqslant 1} K_{r(n)}\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n \to \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ *est un isomorphisme d'espaces LB.*

COROLLAIRE 4.3. – *Si* $x \in \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$*, alors* $\nabla_{\mathrm{Id}}(x)=0$*, et donc* $\hat{K}_\infty^{F\text{-la}} = K_\infty$.

REMARQUE 4.4. – (i) La description de $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ fournie par le th. 4.2 est analogue à ce qui se passe pour l'anneau local d'un point de Berkovich de type IV.

(ii) En utilisant une version forte du théorème d'Ax-Sen-Tate (si L est un sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}}_p$, et si $x \in \mathbf{C}_p$ vérifie $v_p(g(x)-x) \geqslant N$, pour tout $g \in G_L$, alors il existe $a \in L$ tel que $v_p(x-a) \geqslant N-1/(p-1) \geqslant N-1$, cf. [24]), on peut montrer que $r(n)=n+1$.

Remarquons pour commencer que le corps K_∞ est un F_∞-espace vectoriel de dimension finie r, et il existe donc $n \gg 0$ et des éléments $k_1,\dots,k_r$ de K_n, tels que $K_\infty = \bigoplus_{i=1}^r F_\infty \cdot k_i$. On a alors $\hat{K}_\infty = \bigoplus_{i=1}^r \hat{F}_\infty \cdot k_i$ et donc $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} = \bigoplus_{i=1}^r \hat{F}_\infty^{\mathrm{la}} \cdot k_i$ par la prop. 2.3. Afin de décrire $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$, il est donc suffisant de déterminer $\hat{F}_\infty^{\mathrm{la}}$. Nous montrons donc le th. 4.2 pour $K=F$. Avant cela, établissons quelques résultats préliminaires.

Soit W une représentation de Γ_F. Si $n \geqslant 1$, soit $W\{\{T\}\}_n$ l'espace vectoriel des séries formelles $\sum_{k\geqslant 0} a_k T^k$ avec $a_k \in W$, et $p^{nk}a_k \to 0$ quand $k \to +\infty$. On munit $W\{\{T\}\}_n$ d'une action de G_n par la formule $g(T)=T+\ell(g)$, et en faisant agir G_n sur les coefficients. Comme $\ell(g) \in p^n\mathscr{O}_F$ si $g \in G_n$, cette action est bien définie.

Si $w \in W$ est un vecteur F-analytique sur G_n avec $n \geqslant 1$, alors il existe une suite $\{w_k\}_{k\geqslant 0}$ de W, avec $p^{nk}w_k \to 0$ quand $k \to +\infty$, telle que $g(w) = \sum_{k\geqslant 0} \ell(g)^k w_k$ si $g \in G_n$. Soit $C(w)$ l'élément de $W\{\{T\}\}_n$ donné par $C(w)=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k w_k T^k$.

LEMME 4.5. – *Si* $w \in W$ *est* F*-analytique sur* G_n*, alors* $C(w) \in W\{\{T\}\}_n^{G_n}$.

Démonstration. – Si $g \in G_n$, alors $g(C(w)) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k g(w_k)(T+\ell(g))^k$. Comme w est F-analytique sur G_n, w_k l'est aussi et on a $g(w_k) = \sum_{j\geqslant 0}\ell(g)^j w_{j+k}\binom{k+j}{j}$ avec $w_i = \nabla^i(w)/i!$ pour $i \geqslant 0$. On a donc

$$\begin{aligned} g(C(w)) &= \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k g(w_k)(T+\ell(g))^k \\ &= \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \sum_{j\geqslant 0}\ell(g)^j w_{j+k}\binom{k+j}{j} \sum_{i+\ell=k} T^i \ell(g)^\ell \binom{k}{i} \\ &= \sum_{i\geqslant 0}(-1)^i T^i \sum_{m\geqslant i}\ell(g)^{m-i} w_m \binom{m}{i} \sum_{j+\ell=m-i}(-1)^\ell\binom{m-i}{\ell} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{j+\ell=m-i}(-1)^\ell\binom{m-i}{\ell} = (1-1)^{m-i} = 0$ sauf si $m=i$, on a finalement $g(C(w)) = \sum_{i\geqslant 0}(-1)^i T^i w_i = C(w)$. □

LEMME 4.6. – *Si* $n \geqslant 1$ *et* $m \geqslant r(n)$*, alors il existe* $x_n \in p^n\mathscr{O}_{\hat{F}_\infty}$ *tel que* $g(x_n) = x_n + \sum_{\tau\neq \mathrm{Id}} \log \chi_F^\tau(g)$ *si* $g \in G_{n+m}$.

Démonstration. – Si $x = \sum_{\tau\neq\mathrm{Id}} x_\tau$, alors $g(x) = x + \sum_{\tau\neq\mathrm{Id}}\log\chi_F^\tau(g)$ pour $g \in G_n$ avec $n \geqslant 1$. Il suffit alors de prendre $x_n = x - \sum_{\tau\neq\mathrm{Id}} x_{n+m,\tau}$ pour $m \geqslant r(n)$. □

Soit $\chi : \Gamma_F \to \mathbf{Z}_p^\times$ le caractère $g \mapsto \chi(g) = \prod_{\tau\in \mathrm{E}} \chi_F^\tau(g) = \mathrm{N}_{F/\mathbf{Q}_p}(\chi_F(g))$. Soit $\hat{F}_\infty\{\{U\}\}_m$ l'anneau des séries formelles $\sum_{k\geqslant 0} a_k U^k$ avec $a_k \in \hat{F}_\infty$, et $p^{mk}a_k \to 0$ quand $k\to+\infty$. On définit une action de G_m sur $\hat{F}_\infty\{\{U\}\}_m$ par $g(U) = U + \log\chi(g)$.

Proposition 4.7. – *Si $m\geqslant 1$, alors $\hat{F}_\infty\{\{U\}\}_m^{G_m} = F_m$.*

Démonstration. – Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^m$ l'anneau dont la construction est rappelée au § 2.2.

L'anneau $\hat{F}_\infty\{\{U\}\}_m$ admet de manière évidente une injection $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_m)$-équivariante dans $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^m$ et la proposition suit du th. 2.7. □

Corollaire 4.8. – *L'ensemble des vecteurs F-analytiques de $\hat{F}_\infty^{G_n\text{-an}}$ est F_n.*

Démonstration. – Soit $x \in \hat{F}_\infty$ un vecteur F-analytique sur G_n. Son image $C(x)$ dans $\hat{F}_\infty\{\{T\}\}_n$ est fixée par G_n par le lem.4.5 appliqué à $W = \hat{F}_\infty$. Soit x_n comme dans le lem.4.6. L'application $\hat{F}_\infty\{\{T\}\}_n \to \hat{F}_\infty\{\{U\}\}_n$ donnée par $T\mapsto U - x_n$ est bien définie comme $x_n \in p^n\mathscr{O}_{\hat{F}_\infty}$, et c'est une bijection G_{n+m}-équivariante. En appliquant la prop. 4.7 à l'image de $C(x)$ dans $\hat{F}_\infty\{\{U\}\}_{m+n}$, on trouve que $x \in F_{n+m}$. Un vecteur analytique sur G_n et constant sur G_{n+m} est constant sur G_n, et donc $x\in F_n$. □

Démonstration du th. 4.2. – Soit z un élément de $\hat{F}_\infty^{G_\ell\text{-an}}$ avec $\ell\geqslant 1$, et $z_{\mathbf{k}} = \nabla^{\mathbf{k}}(z)/\mathbf{k}!$ si $\mathbf{k}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}}$. Par les lem. 2.6 et 2.4, on a $z_{\mathbf{k}} \in \hat{F}_\infty^{G_\ell\text{-an}}$ pour tout $\mathbf{k}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}}$ et il existe une constante n telle que $\|z_{\mathbf{k}}\|_{G_m} \leqslant p^{(n-1)|\mathbf{k}|}\|z\|_{G_\ell}$ quel que soit $m\geqslant \ell$. Si $m\geqslant \max(r(n),\ell)$ et $\mathbf{i}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}$, alors la série

$$y_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} (-1)^{|\mathbf{k}|}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}+\mathbf{i}}\binom{\mathbf{k}+\mathbf{i}}{\mathbf{k}}$$

converge dans $\hat{F}_\infty^{G_m\text{-an}}$. Comme $g(x_\tau - x_{n,\tau}) = (x_\tau - x_{n,\tau}) + \tau\circ\ell(g)$ pour $g\in G_m$, on a

$$\nabla_\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}} = \begin{cases} k_\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}-\mathbf{1}_\tau} & \text{si } k_\tau\geqslant 1,\\ 0 & \text{si } k_\tau = 0.\end{cases}$$

Cette formule, et le fait que

$$y_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} (-1)^{|\mathbf{k}|}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}+\mathbf{i}}\binom{\mathbf{k}+\mathbf{i}}{\mathbf{k}} = \frac{1}{\mathbf{i}!}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} (-1)^{|\mathbf{k}|}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}}\frac{\nabla^{\mathbf{k}}(\nabla^{\mathbf{i}}(z))}{\mathbf{k}!},$$

impliquent que $\nabla_\tau(y_{\mathbf{i}}) = 0$ pour tout $\tau\neq\mathrm{Id}$ et $\mathbf{i}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}$. Les éléments $y_{\mathbf{i}}$ sont donc des vecteurs localement F-analytiques de $\hat{F}_\infty^{G_m\text{-an}}$. Ils appartiennent à F_m par le cor. 4.8.

La formule définissant $y_{\mathbf{i}}$ et le fait que $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\|_{G_m} \leqslant p^{-n}$ impliquent que l'on a $\|y_{\mathbf{i}}\|_{G_m}\leqslant p^{(n-1)|\mathbf{i}|}\|z\|_{G_\ell}$, et donc que la série $\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} y_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{i}}$ converge dans $\hat{F}_\infty^{G_m\text{-an}}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} y_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{i}} &= \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} (-1)^{|\mathbf{k}|}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}+\mathbf{i}}\binom{\mathbf{k}+\mathbf{i}}{\mathbf{k}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{i}}\\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} z_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{j}}\sum_{\mathbf{k}+\mathbf{i}=\mathbf{j}}(-1)^{|\mathbf{k}|}\binom{\mathbf{j}}{\mathbf{k}}\\ &= z_0.\end{aligned}$$

On en déduit que $z = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} y_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{i}}$, et donc que $z\in F_m\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n$.

L'application $\bigcup_{n\geqslant 1} F_{r(n)}\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n \to \hat{F}_\infty^{\mathrm{la}}$ est une bijection continue entre espaces LB, et donc un isomorphisme d'espaces LB par le théorème de l'image ouverte. □

4.3. Vecteurs localement F-analytiques

Nous supposons toujours que K_∞ est engendré par les points de torsion d'un $\mathscr{O}_F$-module formel. Soit $W^{F\text{-la}}$ l'espace des vecteurs localement F-analytiques d'une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire W de dimension finie de Γ_K. Rappelons que $W\{\{T\}\}_n$ est l'espace vectoriel des séries $\sum_{k\geqslant 0} w_k T^k$ où $p^{nk}w_k \to 0$ dans W. Cet espace est muni d'une action de G_n comme au début du § 4.2.

LEMME 4.9. – *L'application $K_{n+k} \otimes_{K_n} W\{\{T\}\}_n^{G_n} \to W\{\{T\}\}_{n+k}^{G_{n+k}}$ est injective.*

Démonstration. – Si $\sum_{i=1}^r a_i w_i$ est un élément de longueur minimale ayant pour image 0, alors il en est de même pour $\sum_{i=1}^r g(a_i)w_i$ si $g \in G_n$ de telle sorte que $a_i \in K_n \cdot a_1$, et l'application est bien injective. □

COROLLAIRE 4.10. – *L'application $K_{n+k} \otimes_{K_n} W^{G_n\text{-an},F\text{-la}} \to W^{G_{n+k}\text{-an},F\text{-la}}$ est injective.*

Démonstration. – L'application $C : W^{G_n\text{-an},F\text{-la}} \to W\{\{T\}\}_n$ donnée comme précédemment par $x \mapsto \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k x_k T^k$ envoie $W^{G_n\text{-an},F\text{-la}}$ dans $W\{\{T\}\}_n^{G_n}$ par le lem. 4.5. Elle est manifestement injective, et le corollaire suit du lem. 4.9. □

THÉORÈME 4.11. – *Si W est une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K, alors l'application $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K_\infty} W^{F\text{-la}} \to W^{\mathrm{la}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. – Montrons d'abord que $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K_\infty} W^{F\text{-la}} \to W^{\mathrm{la}}$ est injective. Si elle ne l'est pas, alors soit $\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i = 0$ une relation non triviale de longueur minimale, avec $\alpha_i \in \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ et $x_i \in W^{F\text{-la}}$. On peut supposer que $\alpha_1 = 1$. Si $\tau \in \mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}$, alors $\nabla_\tau(x_i) = 0$ et donc $\sum_{i=2}^r \nabla_\tau(\alpha_i)x_i = 0$. Cette relation étant plus courte, on a $\nabla_\tau(\alpha_i) = 0$ pour tout $\tau \in \mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}$, et donc α_i appartient à $\hat{K}_\infty^{F\text{-la}} = K_\infty$. La relation était donc triviale.

Montrons à présent que $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} \otimes_{K_\infty} W^{F\text{-la}} \to W^{\mathrm{la}}$ est surjective. L'injectivité implique que $\dim_{K_\infty} W^{F\text{-la}}$ est de dimension finie et donc, par le cor. 4.10, que l'application $K_\infty \otimes_{K_m} W^{G_m\text{-an},F\text{-la}} \to W^{F\text{-la}}$ est un isomorphisme si $m \gg 0$. Si $z \in W^{G_\ell\text{-an}}$ pour $\ell \geqslant 1$, alors les mêmes arguments que dans la preuve du th. 4.2 montrent qu'il existe n et $m \geqslant \max(r(n),\ell)$ tels que les séries

$$y_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} (-1)^{|\mathbf{k}|}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}+\mathbf{i}} \binom{\mathbf{k}+\mathbf{i}}{\mathbf{k}}$$

convergent dans $W^{G_m\text{-an}}$ pour tout $\mathbf{i}$, que $y_{\mathbf{i}}$ est localement F-analytique, et que l'on a $z = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{N}^{\mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}}} y_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{i}}$ dans $W^{G_m\text{-an}}$. Comme $W^{G_m\text{-an},F\text{-la}}$ est de dimension finie sur K_m, ceci implique que $z \in \hat{K}_\infty^{G_m\text{-an}} \otimes_{K_m} W^{G_m\text{-an},F\text{-la}}$ et la surjectivité en découle. □

Pour terminer, remarquons que $W^{F\text{-la}}$ peut être construit à partir de la théorie de Sen classique associée au caractère $\chi = \mathrm{N}_{F/\mathbf{Q}_p}(\chi_F) : \Gamma_K \to \mathbf{Z}_p^\times$. Plus précisément, il existe un isomorphisme $S : W^{F\text{-la}} \to K_\infty \otimes_{K_\infty^\chi} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^\chi(W)$, qui vérifie $S \circ \nabla_{\mathrm{Id}} = \Theta_{\mathrm{Sen}}^\chi \circ S$. On a $S(x) = \exp(\alpha\nabla_{\mathrm{Id}})(x)$ où $\alpha \in \pi_F^n \mathscr{O}_{\hat{K}_\infty}$ est tel que $g(\alpha) - \alpha = \log \chi(g)/\chi_F(g)$ pour $g \in \Gamma_m$ avec m et $n \gg 0$.

4.4. Le cas de l'extension de Kummer

Si $n \geqslant 1$, soient $\omega \in K^*$ pas une racine de l'unité, $\omega_n = \omega^{1/p^n}$ et $K_n = K(\omega_n, \zeta_{p^n})$, et soit $K_\infty = \bigcup_{n\geqslant 1} K_n$. Si $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, on a une suite exacte $0 \to \mathbf{Z}_p \to \Gamma_K \to \mathbf{Z}_p^\times$, l'image de la flèche de droite étant un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$. Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(K_\infty/K(\zeta_{p^\infty}))$ un générateur topologique. Si $g \mapsto c(g)$ dénote le cocycle de Kummer associé à ω, alors K_∞ est le noyau de $g \mapsto \left(\begin{smallmatrix}\chi(g) & c(g)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Comme $H^1(G_K, \mathbf{C}_p(1)) = \{0\}$, il existe $\alpha \in \mathbf{C}_p$ tel que $c(g) = g(\alpha)\chi(g) - \alpha$. Ceci implique que $g(\alpha) = \alpha/\chi(g) + c(g)/\chi(g)$, et donc que $\alpha \in \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$. Dans des notations analogues à celles du § 4.1, on a le résultat suivant.

Proposition 4.12. – *On a* $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}} = \bigcup_{n\geqslant 1} K_{r(n)}\{\{\alpha - \alpha_n\}\}_n$.

Démonstration. – Donnons une idée rapide de la démonstration. Soit $x \in \hat{K}_\infty^{G_n\text{-an}}$ et soit ∇_τ l'opérateur différentiel associé à τ. Soit $y_i = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k (\alpha - \alpha_m)^k \nabla_\tau^{k+i}(x)\binom{k+i}{k}$ comme dans la preuve du th. 4.2. Les mêmes arguments montrent qu'il existe $m \geqslant n$ tel que $y_i \in \hat{K}_\infty^{G_m\text{-an}}$ pour tout i, et que $x = \sum_{i\geqslant 0} y_i(\alpha - \alpha_m)^i$ dans $\hat{K}_\infty^{G_m\text{-an}}$. On a $\nabla_\tau(y_i) = 0$ et donc $y_i \in \widehat{K_m(\zeta_{p^\infty})}^{\mathrm{la}}$. On en déduit que $y_i \in K_m$, et le résultat. □

5. Calcul de $\hat{K}_\infty^{\mathrm{fin}}$ et $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ dans le cas SL_2

Dans ce chapitre, on s'intéresse à présent au cas où Γ_K est isomorphe à un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$, de sorte que $\mathrm{Lie}(\Gamma_K) = \mathfrak{sl}_2$, un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 3.

5.1. Vecteurs finis et poids de Hodge-Tate

Dans tout ce chapitre, par « représentation » de $\mathfrak{sl}_2$, on entend représentation $\mathbf{Q}_p$-linéaire de dimension finie. Le résultat suivant est classique.

Proposition 5.1. – *Soit V la représentation standard de $\mathfrak{sl}_2$.*
(i) *Si X est une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_2$, alors $X = \mathrm{Sym}^k V$ avec $k \geqslant 0$;*
(ii) *Toute représentation de $\mathfrak{sl}_2$ est somme directe de représentations irréductibles ;*

Démonstration. – Le (ii) est dans le § 6.2 de [5], le (i) dans le § 1.3 de [6]. □

Si X est une représentation de Γ_K, alors par la théorie de Lie, X est aussi muni d'une action compatible de $\mathfrak{sl}_2$. L'isomorphisme entre Γ_K et un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$ se traduit par l'existence d'un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension 2, sur lequel Γ_K agit par des automorphismes de déterminant 1. L'espace V muni de l'action correspondante de $\mathfrak{sl}_2$ est alors la représentation standard de $\mathfrak{sl}_2$ comme ci-dessus.

Comme on a un morphisme $G_K \to \Gamma_K$, une représentation de Γ_K est aussi une représentation de G_K. Les poids de Hodge-Tate de V sont s et $-s$ avec $s \in \overline{\mathbf{Q}}_p$. On suppose que $s \neq 0$ (on obtient un exemple de telle représentation en partant d'une forme modulaire f de poids $k \geqslant 2$, non CM et non ordinaire en p, et en tordant la restriction à $G_{\mathbf{Q}_p(\mu_{2p})}$ de la représentation V_f associée à f par $(\det V_f)^{-(k-1)/2}$; on a alors $s = \frac{k-1}{2}$). Les poids de Hodge-Tate de $\mathrm{Sym}^k V$ sont alors $\{-ks, -(k-2)s, \dots, ks\}$ si $k \geqslant 0$.

Corollaire 5.2. – *Si X est une représentation de G_K qui se factorise par Γ_K, alors l'opérateur de Sen de X est semisimple, à valeurs propres dans $s \cdot \mathbf{Z}$.*

Démonstration. – Cela suit des remarques précédentes et de la prop. 5.1. □

PROPOSITION 5.3. – *Soit W une $\hat{K}_\infty$-représentation semi-linéaire de dimension finie de Γ_K.*

(i) *Si $W^{\mathrm{fin}} \neq \{0\}$, alors W a un poids de Hodge-Tate qui appartient à $s \cdot \mathbf{Z}$;*

(ii) *Si W^{fin} contient une base de W, alors l'opérateur de Sen de W est semisimple, à valeurs propres dans $s \cdot \mathbf{Z}$.*

Démonstration. – Soit $x \in W^{\mathrm{fin}}$. Par la prop. 5.1, il existe une représentation irréductible $Y(x) \subset W^{\mathrm{fin}}$ de $\mathfrak{sl}_2$ telle que $Y(x)$ contient x. Par la prop. 5.1, $Y(x) = \mathrm{Sym}^k V$ pour un $k \geqslant 0$. Il existe une extension finie L de K tel que $Y(x)$ est stable sous l'action de Γ_L, et les poids de Hodge-Tate de $Y(x)$ sont donc dans $s \cdot \mathbf{Z}$.

Le (i) résulte de ce que l'on a une application non nulle $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} Y(x) \to \mathbf{C}_p \otimes_{\hat{K}_\infty} W$, et le (ii) de ce que l'on a une application surjective $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\mathrm{fin}} \to \mathbf{C}_p \otimes_{\hat{K}_\infty} W$ et du fait que $W^{\mathrm{fin}} = \bigcup_{x \in W^{\mathrm{fin}}} Y(x)$. □

Écrivons $V = \mathbf{Q}_p e_1 \oplus \mathbf{Q}_p e_2$ de telle sorte que l'action de Γ_K dans la base (e_1, e_2) soit compatible avec l'isomorphisme entre Γ_K et un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Les poids de Hodge-Tate de $\mathrm{Sym}^2 V$ sont $-2s$, 0 et $2s$, et il existe donc un plongement de $\mathrm{Sym}^2 V$ dans $\mathbf{C}_p$. Soient

$$x_1 = e_1 \otimes e_1 \qquad x_2 = e_2 \otimes e_2 \qquad y = \frac{e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1}{2} \qquad \delta = \frac{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1}{2}.$$

les éléments correspondants de $\mathbf{C}_p$, avec $\mathrm{Sym}^2 V = \mathbf{Q}_p x_1 \oplus \mathbf{Q}_p x_2 \oplus \mathbf{Q}_p y$ et $\det V = \mathbf{Q}_p \delta$, ce qui fait que $\delta \in K^\times$ puisque $\det V$ est la représentation triviale, car $\Gamma_K \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

PROPOSITION 5.4. – *On a*

$$\hat{K}_\infty^{\mathrm{fin}} = \bigoplus_{k \geqslant 0} (K_\infty \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Sym}^{2k} V) = K_\infty[x_1, x_2, y]/(y^2 - x_1 x_2 - \delta^2).$$

Démonstration. – Soit $x \in \hat{K}_\infty^{\mathrm{fin}}$. Par la prop. 5.1, il existe une représentation irréductible $Y(x) \subset \hat{K}_\infty^{\mathrm{fin}}$ de $\mathfrak{sl}_2$ telle que $Y(x)$ contient x. Par la prop. 5.1, $Y(x)$ est isomorphe à $\mathrm{Sym}^n V$ pour un $n \geqslant 0$. Il existe un sous-groupe ouvert Γ_L de Γ_K tel que $Y(x)$ est stable sous l'action de Γ_L et comme il existe une injection G_L-équivariante de $Y(x)$ dans $\mathbf{C}_p$, l'un des poids de Hodge-Tate de $Y(x)$ est nul, et donc n est pair ; on pose $n = 2k$. Comme $\mathrm{Sym}^{2k} V$ n'a qu'un seul poids de Hodge-Tate nul, l'injection G_L-équivariante $\mathrm{Sym}^{2k} V \to \mathbf{C}_p$ est unique à multiplication par un élément de $L^\times$ près. On a donc $x \in K_\infty \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Sym}^{2k} V$, et le résultat s'en déduit en exprimant $\mathrm{Sym}^{2k} V$ en termes de $\mathrm{Sym}^2 V$ et $\det V$. □

5.2. Vecteurs localement analytiques

Nous calculons à présent $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$. Pour $i = 1, 2$, soit $\{x_{i,n}\}_{n \geqslant 1}$ une suite avec $x_{i,n} \in K_\infty$ telle que $\|x_i - x_{i,n}\| \leqslant p^{-n}$. Soit $r(n)$ tel que $x_{i,n} \in K_{r(n)}$ et tel que si $m \geqslant r(n)$, alors $x_i \in \hat{K}_\infty^{G_m\text{-an}}$ et $\|x_i - x_{i,n}\|_{G_m} = \|x_i - x_{i,n}\|$. On peut supposer que la suite $\{r(n)\}_{n \geqslant 1}$ est croissante. Si $m \geqslant r(n)$, on note $K_m\{\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\}\}_n$ l'espace des séries $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^2} a_{\mathbf{k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}}$ avec $a_{\mathbf{k}} \in K_m$ tels que $p^{n|\mathbf{k}|} a_{\mathbf{k}} \to 0$. Les éléments de $K_m\{\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\}\}_n$ sont des éléments de $\hat{K}_\infty^{G_m\text{-an}} \subset \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$, et on a une inclusion $K_{r(n)}\{\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\}\}_n \subset K_{r(n+1)}\{\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n+1}\}\}_{n+1}$.

THÉORÈME 5.5. – *L'application* $\bigcup_{n\geqslant 1} K_{r(n)}\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n \to \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ *est un isomorphisme d'espaces LB.*

EXEMPLE 5.6. – On a bien $y \in \bigcup_{n\geqslant 1} K_{r(n)}\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n$, ce que l'on peut voir comme suit. On a $y^2 = \delta^2 + x_1x_2$. Si $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de K_∞ qui tend vers y, alors

$$y = \pm y_n \sqrt{1 + \frac{\delta^2 + ((x_1 - x_{1,n}) + x_{1,n})((x_2 - x_{2,n}) + x_{2,n}) - y_n^2}{y_n^2}},$$

et il suffit de développer et d'utiliser la formule $\sqrt{1+X} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{1/2}{k}X^k$, le résultat convergeant dans $K_{r(n)}\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n$ pour $n \gg 0$.

Soit $L_\infty = K_\infty(\mu_{p^\infty})$ et $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. On note ∇ le générateur habituel de l'algèbre de Lie de $\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$. Le groupe Γ_L est un groupe de Lie p-adique de dimension 4, dont l'algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbf{Q}_p\nabla$. Soient $D_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2$ et $D_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2$ et $H = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2$, de sorte que $[D_1, D_2] = H$.

LEMME 5.7. – *On a* $D_1(x_1) = D_2(x_2) = 2y$ *et* $D_1(x_2) = D_2(x_1) = 0$.

Soient ∂_1, ∂_2 et $J : \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}} \to \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}$ les opérateurs $\partial_i = 1/2y\cdot D_i$ et $J = x_1D_1 - x_2D_2 + yH$. On a $\partial_i = d/dx_i$ sur $L_\infty[x_1, x_2]$ et $J = 4y^3\cdot[\partial_1, \partial_2]$. On peut donc voir J comme un opérateur de « courbure ».

LEMME 5.8. – *Il existe* $z \in \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}$ *tel que* $J(z) = 1$ *et* $\nabla(z) = s \neq 0$.

Démonstration. – La représentation $V(s)$ de $G_{K(\mu_{p^n})}$ existe pour $n \gg 0$. Elle a un poids de Hodge-Tate nul et s'envoie donc dans $\mathbf{C}_p$. Si w désigne l'image de $e_1(s)$, alors $w \in \hat{L}_\infty^{\mathrm{la}}$ et $J(w) = w\delta$ et $\nabla(w) = sw$. Si $z = \log(w)/\delta$, alors $J(z) = 1$ et $\nabla(z) = s$. □

Démonstration du th. 5.5. – Soit $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de L_∞ telle que $z_n \to z$. Quitte à modifier la définition de $r(n)$, on peut supposer que $z_n \in L_{r(n)}$ et que si $m \geqslant r(n)$, alors $z \in \hat{L}_\infty^{G_m\text{-an}}$ et $\|z - z_n\|_{G_m} = \|z - z_n\|$. Si $y \in \hat{L}_\infty^{G_q\text{-an}}$ pour un $q \geqslant 1$, alors par les lemmes 2.6 et 2.4, il existe une constante h telle que $\|J^k(y)/k!\|_{G_\ell} \leqslant p^{(h-1)k}\|y\|_{G_q}$ quels que soient $\ell \geqslant q$ et $k \geqslant 0$. Si $\ell \geqslant \max(q, r(h))$ et $i \geqslant 0$, alors la série

$$c_i(y) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k(z - z_h)^k \cdot \frac{J^{k+i}(y)}{(k+i)!}\binom{k+i}{i}$$

converge dans $\hat{L}_\infty^{G_\ell\text{-an}}$ vers un élément qui satisfait $\|c_i(y)\|_{G_\ell} \leqslant p^{(h-1)i}\|y\|_{G_q}$. On a donc $y = \sum_{i\geqslant 0} c_i(y)(z - z_h)^i$ dans $\hat{L}_\infty^{G_\ell\text{-an}}$, et de plus $J(c_i(y)) = 0$ si $i \geqslant 0$.

Si $c \in \hat{L}_\infty^{G_\ell\text{-an}}$ vérifie $J(c) = 0$, alors $\partial_1\partial_2(c) = \partial_2\partial_1(c)$. Par les lemmes 2.6 et 2.4, il existe une constante n telle que $\|\partial^{\mathbf{k}}(c)/\mathbf{k}!\|_{G_m} \leqslant p^{(n-1)|\mathbf{k}|}\|c\|_{G_\ell}$ pour $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^2$ et $m \geqslant \ell$. Si $\mathbf{j} \in \mathbf{N}^2$ et $m \geqslant \max(\ell, r(n))$, posons dans $\hat{L}_\infty^{G_m\text{-an}}$

$$a_{\mathbf{j}}(c) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^2}(-1)^{|\mathbf{k}|}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)^{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial^{\mathbf{k}+\mathbf{j}}(c)}{(\mathbf{k}+\mathbf{j})!}\binom{\mathbf{k}+\mathbf{j}}{\mathbf{j}}.$$

Les mêmes arguments que précédemment montrent que $c = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{N}^2} a_{\mathbf{j}}(c)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{j}}$ dans $\hat{L}_\infty^{G_m\text{-an}}$. Par ailleurs, on a $D_1(a_{\mathbf{j}}(c)) = D_2(a_{\mathbf{j}}(c)) = 0$ et donc aussi $H(a_{\mathbf{j}}(c)) = 0$ puisque $H = [D_1, D_2]$, ce qui fait qu'il existe $m' \gg 0$ tel que

$$a_{\mathbf{j}}(c) \in (\hat{L}_\infty^{D_1,D_2,H})^{G_m\text{-an}} = \widehat{K_{m'}(\mu_{p^\infty})}^{G_m\text{-an}} = K_m(\mu_{p^m}),$$

la dernière égalité résultant du th. 3.2. Les coefficients $a_{\mathbf{j}}(c_i(y))$ appartiennent donc tous à $K_m(\mu_{p^m})$ et dans $\hat{L}_\infty^{G_m\text{-an}}$, on a

$$y = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{N}^2, i\in\mathbf{N}} a_{\mathbf{j}}(c_i(y))(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{j}}(z-z_h)^i.$$

Si l'on suppose à présent que $y \in \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$, alors $\nabla(y) = 0$. On a par ailleurs

$$\nabla(y) = s \cdot \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{N}^2, i\geqslant 1} i \cdot a_{\mathbf{j}}(c_i(y))(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{j}}(z-z_h)^{i-1},$$

ce qui fait que $a_{\mathbf{j}}(c_i(y)) = 0$ si $i \neq 0$. On a aussi $\mathrm{Tr}_{K_\infty(\mu_{p^m})/K_\infty}(y) = [K_\infty(\mu_{p^m}) : K_\infty] \cdot y$ et donc $y = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{N}^2} y_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)^{\mathbf{j}}$ avec $y_{\mathbf{j}} = [K_\infty(\mu_{p^m}) : K_\infty]^{-1} \cdot \mathrm{Tr}_{K_\infty(\mu_{p^m})/K_\infty}(a_{\mathbf{j}}(c_0(y)))$, qui appartient à K_m.

L'application $\bigcup_{n\geqslant 1} K_{r(n)}\{\{\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\}\}_n \to \hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ est une bijection continue entre espaces LB, et donc un isomorphisme d'espaces LB par le théorème de l'image ouverte. □

6. Structure de $\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ dans le cas général

Dans ce chapitre, nous ne faisons pas d'hypothèse sur le groupe de Lie Γ_K. Comme Γ_K est un groupe de Lie p-adique compact, de dimension finie, il existe (§ 27 de [26]) un groupe analytique $\mathbb{G}$, défini sur $\mathbf{Q}_p$, tel que l'on ait $\Gamma_K = \mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de Γ_K ; c'est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang la dimension d de Γ_K.

Si $n \geqslant 1$, on note Γ_n le groupe $\mathbb{G}(p^n\mathbf{Z}_p)$, image de $p^n\mathfrak{g}$ par l'exponentielle, et on note K_n le sous-corps $K_\infty^{\Gamma_n}$ de K_∞. L'anneau $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ est une K_n-algèbre de Banach ; on note X_n le K_n-espace analytique qu'elle définit. Nous allons prouver que X_n devient une boule de dimension $d-1$ quand on étend les scalaires à un corps assez gros. Pour énoncer le résultat précisément, nous allons devoir introduire certains sous-groupes à un paramètre de $\mathbb{G}$. Disons que $\mathfrak{a} \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{g}$ est *primitif* si $(\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{g})/\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}\mathfrak{a}$ est sans torsion (et donc est libre, de rang $d-1$, sur $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$). Si $\mathfrak{a}$ est primitif, on note $\mathbb{H}_\mathfrak{a}$ le sous-groupe à un paramètre qu'il définit : si $n \geqslant 1$, alors $\mathbb{H}_\mathfrak{a}(p^n\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p})$ est l'image de $p^n\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ par l'application $t \mapsto \exp(t\mathfrak{a})$.

THÉORÈME 6.1. – *Il existe $m \in \mathbf{N}$ et $\mathfrak{a} \in \mathscr{O}_{\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{g}$, primitif, tel que, si $n \geqslant 1$ et si L est un sous-corps de $\mathbf{C}_p$ contenant $\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})$, alors $X_n(L) = \mathbb{H}_\mathfrak{a}(p^n\mathscr{O}_L)\backslash\mathbb{G}(p^n\mathscr{O}_L)$.*

REMARQUE 6.2. – (i) Il résulte de la description ci-dessus que, si L est un sous-corps complet de $\mathbf{C}_p$ contenant $\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})$, alors $X_n \otimes L$ est une boule de dimension $d-1$: si $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{d-1}$ sont tels que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{d-1}$ forment une base de $\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{g}$ sur $\mathscr{O}_L$, alors $(x, y_1, \dots, y_{d-1}) \mapsto \exp(x\mathfrak{a})\exp(y_1\mathfrak{b}_1)\cdots\exp(y_{d-1}\mathfrak{b}_{d-1})$ induit un isomorphisme d'espaces analytiques de $B(0,p^{-n})^d$ sur $\mathbb{G}(p^n\cdot)$, et donc $(y_1, \dots, y_{d-1}) \mapsto \exp(y_1\mathfrak{b}_1)\cdots\exp(y_{d-1}\mathfrak{b}_{d-1})$ induit un isomorphisme d'espaces analytiques de $B_{d-1}(0,p^{-n})$ sur X_n.

(ii) On en déduit que $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ est un anneau de séries en $d-1$ variables. Plus exactement, si L est comme ci-dessus, et si on note $L[\![X_1,\dots,X_{d-1}]\!]_{>0}$ l'anneau des germes de fonctions analytiques en 0 (i.e., des séries de rayon de convergence non nul), il existe un isomorphisme de $L[\![X_1,\dots,X_{d-1}]\!]_{>0}$ sur $L\hat{\otimes}\hat{K}_\infty^{\mathrm{la}}$ envoyant le sous-anneau des séries de rayon de convergence $\geqslant p^{-n}$ sur $L\hat{\otimes}\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$.

(iii) On peut démontrer le résultat précédent à la main, si K_∞/K est une extension Lubin-Tate (comme au § 4), ou si Γ_K est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (comme au § 5). Il suffit d'utiliser les th. 4.2 et 5.5 en prenant pour variables $X_i = 1\otimes x_i - x_i\otimes 1 \in \mathbf{C}_p\otimes_{K_n}\hat{K}_\infty^{G_n\text{-an}}$, avec $n\gg 0$ et $i\in \mathrm{E}\setminus\{\mathrm{Id}\}$ dans le cas Lubin-Tate et $i\in\{1,2\}$ dans le cas $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

Démonstration du th. 6.1. – Le point de départ de la description de X_n est l'identification

$$\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}} = \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\hat{K}_\infty)^{\Gamma_n} = \big(\hat{K}_\infty\hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)\big)^{\Gamma_n},$$

l'action de Γ_n sur $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\hat{K}_\infty)$ étant donnée par $(h\cdot\phi)(g) = h\cdot\phi(h^{-1}g)$: dans un sens, on envoie $x\in\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ sur la fonction ϕ_x définie par $\phi_x(g) = g\cdot x$, dans l'autre sens on envoie ϕ sur $\phi(1)$. L'action de Γ_n sur $\hat{K}_\infty^{\Gamma_n\text{-an}}$ correspond, via cette identification, à l'action $(\gamma,\phi)\mapsto\gamma*\phi$ sur $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\hat{K}_\infty)$, avec $(\gamma*\phi)(g) = \phi(g\gamma)$. Nous allons appliquer la théorie de Sen classique, telle qu'elle est présentée dans [12] et [4], à la grosse représentation $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)$.

On fixe un plongement de Γ_K dans $\mathrm{GL}_N(\mathbf{Z}_p)$, pour un certain N. Si $k\in\mathbf{N}$, on note V_k l'espace des $\phi:\Gamma_K\to\mathbf{Q}_p$ qui sont la restriction d'un polynôme de degré $\leqslant k$ sur $M_N(\mathbf{Z}_p)$, et on note $\mathscr{C}^{\mathrm{alg}}(\Gamma_K)$ la réunion (croissante) des V_k. (Contrairement à ce que la notation suggère, cet espace dépend en général du plongement de Γ_K dans un $\mathrm{GL}_N(\mathbf{Z}_p)$.) Comme l'espace des polynômes de degré $\leqslant k$ est stable par $\mathrm{GL}_N(\mathbf{Z}_p)$, il l'est a fortiori par Γ_K, et chaque V_k peut être vu comme une représentation de G_K agissant à travers Γ_K.

Si $n\in\mathbf{N}$, l'espace $\mathscr{C}^{\mathrm{alg}}(\Gamma_K)$ est dense dans $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)$ qui est donc son complété pour la norme induite. On note T_k la boule unité de V_k pour cette norme ; c'est l'intersection de V_k avec la boule unité $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)^0$ de $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)$. Si $a\geqslant 1$, alors Γ_{n+a} agit trivialement sur $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)^0/p^a$ et donc aussi sur T_k/p^a. On choisit $a\geqslant v_p(12p)$, on choisit $m\in\mathbf{N}$ assez grand (i.e., $m\geqslant n(K_{n+a})$, où l'entier $n(L)$ est celui utilisé dans le § 4.1 de [4]), et on pose $M = K_{n+a}(\mu_m)$. On note H_M et Γ_M les groupes $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty(\mu_{p^m}))$ et $\mathrm{Gal}(K_\infty(\mu_{p^m})/M)$. Alors $H_M\subset H_K$ et Γ_M s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de Γ_n (et même de Γ_{n+a}).

Soit $\mathbf{A}_{\mathrm{Sen}}^m$ l'anneau des entiers de $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}^m$. On note $\mathbf{A}_{\mathrm{Sen},M}^m$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m$ les points fixes de ces anneaux sous l'action de H_M. Comme T_k est fixe par H_K, on a $(\mathbf{A}_{\mathrm{Sen}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_k)^{G_M} = (\mathbf{A}_{\mathrm{Sen},M}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_k)^{\Gamma_M}$, et les résultats du § 3.3 de [4] et le th. 2 de [12] impliquent que, pour tout k, on a un isomorphisme

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_{\mathscr{O}_M}(\mathbf{A}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_k)^{\Gamma_M} = \mathbf{A}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_k.$$

L'isomorphisme $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_M(\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_{\mathbf{Q}_p}V_k)^{\Gamma_M} = \mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_{\mathbf{Q}_p}V_k$ est donc une isométrie, et de même pour $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_M(\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_{\mathbf{Q}_p}V_\infty)^{\Gamma_M} = \mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_{\mathbf{Q}_p}V_\infty$, si $V_\infty = \mathscr{C}^{\mathrm{alg}}(\Gamma_K)$ muni de la norme induite par celle de $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)$. Posons $D_\infty = (\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m\otimes_{\mathbf{Q}_p}V_\infty)^{\Gamma_M}$. En passant aux complétés, on trouve que $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}^m\hat{\otimes}_M\hat{D}_\infty = \mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}\hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)$. En prenant les points fixes sous Γ_M, on en déduit que $\hat{D}_\infty = \big(\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}\hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)\big)^{\Gamma_M}$, et donc que

$$\mathbf{B}^m_{\mathrm{Sen},M}\hat{\otimes}_M\big(\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}\hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)\big)^{\Gamma_M} = \mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}\hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p).$$

Soit $\theta_g = \frac{d}{du}\otimes 1\otimes 1$ et $\theta_d = 1\otimes\frac{d}{du}\otimes 1$ agissant sur le membre de gauche. Via l'isomorphisme ci-dessus $\theta_g+\theta_d$ devient l'opérateur $\frac{d}{du}\otimes 1$ agissant sur le membre de droite, et son noyau est donc $\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})\hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p) = \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\hat{K}_\infty(\mu_{p^m}))$. Sur ce noyau, θ_g (égal à $-\theta_d$) induit une dérivation D, et on obtient donc, en prenant l'intersection des noyaux de θ_g et θ_d, la relation

$$\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})\hat{\otimes}_M\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\hat{K}_\infty(\mu_{p^m}))^{\Gamma_M} = \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\hat{K}_\infty(\mu_{p^m}))^{D=0}.$$

Enfin, on peut faire une descente étale de M à K_n et obtenir

$$\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})\hat{\otimes}_{K_n}\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\hat{K}_\infty)^{\Gamma_n} = \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\hat{K}_\infty(\mu_{p^m}))^{D=0}.$$

(Ce résultat est une version de l'identité $\mathbf{C}_p\otimes_K(\mathbf{C}_p\otimes_{\mathbf{Q}_p}V)^{G_K} = (\mathbf{C}_p\otimes_{K_n}\mathrm{D}_{\mathrm{Sen},n}(V))^{\Theta_{\mathrm{Sen}}=0}$, cf. rem. 1.4.)

Par ailleurs, on peut faire agir Γ_n trivialement sur $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen},M}$ et $\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})$ et par $(\gamma*\phi)(g)=\phi(g\gamma)$ sur $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{Q}_p)$. Cette action commute à celles de θ_g, θ_d et à l'action précédente de Γ_n ; elle commute donc aussi à D. Autrement dit, D est invariante par translation à droite. Elle est donc de la forme $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\phi(e^{t\mathfrak{a}}g)-\phi(g)\big)$, pour un certain $\mathfrak{a}\in\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathfrak{g}$.

Une comparaison de ce qui se passe pour n et $n+1$ montre que $\mathfrak{a}$ ne dépend pas de n, et on peut donc faire descendre l'isomorphisme ci-dessus à $\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})$, où m est indépendant de n, et on peut ensuite étendre les scalaires à tout sous-corps complet L de $\mathbf{C}_p$ contenant $\hat{K}_\infty(\mu_{p^m})$. Soit $\mathbb{H}_{\mathfrak{a}}$ le groupe à un paramètre défini par un multiple primitif de $\mathfrak{a}$. Le noyau de D s'identifie aux fonctions analytiques sur $\mathbb{G}(p^n\mathscr{O}_L)$, constantes modulo multiplication à gauche par $\mathbb{H}_{\mathfrak{a}}(p^n\mathscr{O}_L)$, ce qui permet de conclure. □

PROPOSITION 6.3. – *L'élément $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{C}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathfrak{g}$ fourni par le th. 6.1 vérifie $\mathfrak{a}=0$ sur $\hat{K}^{\mathrm{la}}_\infty$, et n'est autre que l'opérateur Θ_{Sen} associé à la représentation V_1.*

Démonstration. – Il s'agit d'un exercice de traduction reposant sur le dictionnaire du §2.2 et en particulier la prop. 2.8 dont nous reprenons les notations. Soit $\phi\in V_1$. On peut décomposer ϕ dans une base $\iota(d_1),\dots,\iota(d_N)$ de $\mathrm{D}'_{\mathrm{Sen}}(V_1)$, où $d_1,\dots,d_N$ est une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V_1)$, sous la forme $\phi=\sum_{i=1}^N\alpha_i\iota(d_i)$ avec $\alpha_i\in\mathbf{B}^m_{\mathrm{Sen}}$. Alors ϕ est tué par $\theta_g+\theta_d$, et on a $D(\phi)=-\sum_{i=1}^N\alpha_i\frac{d}{du}(\iota(d_i))=\sum_{i=1}^N\alpha_i e^{-u\Theta_{\mathrm{Sen}}}\cdot\Theta_{\mathrm{Sen}}(d_i)$. De plus, comme $\phi\in V_1\subset\mathbf{C}_p\otimes_{\mathbf{Q}_p}V_1$, il est constant vu comme fonction de u, et donc $\phi=\sum_{i=1}^N\alpha_i^{(0)}d_i$. De même, $D(\phi)$ est constant comme fonction de u et donc $D(\phi)=\sum_{i=1}^N\alpha_i^{(0)}\Theta_{\mathrm{Sen}}(d_i)$. Il en résulte que $D=\Theta_{\mathrm{Sen}}$ sur $\mathbf{C}_p\otimes_{\mathbf{Q}_p}V_1$. Le résultat s'en déduit. □

REMARQUE 6.4. – (i) Comme $D\neq 0$ puisqu'il est induit par $1\otimes\frac{d}{du}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}\otimes\mathbf{B}_{\mathrm{Sen}}$, on en déduit que $\Theta_{\mathrm{Sen}}\neq 0$.

(ii) On a

$$\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(X_n(\mathbf{C}_p),\mathbf{C}_p) = \mathbf{C}_p\hat{\otimes}_{K_n}\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\Gamma_n,\mathbf{C}_p)^{\Gamma_n} = \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{G}(p^n\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}),\mathbf{C}_p)^{D=0}.$$

Si $\sigma\in G_{K_n}$, l'action de $\sigma\otimes 1$ au milieu devient l'action standard $(\sigma\cdot\phi)(x)=\sigma(\phi(\sigma^{-1}(x)))$ à gauche, mais à droite cette action standard est tordue par l'action de Γ_n, et est donnée par la formule $(\sigma \star \phi)(x) = \sigma\big(\phi(\sigma^{-1}(\gamma(\sigma)^{-1}x))\big)$, où l'on a noté $\gamma : G_K \to \Gamma_K$ l'application naturelle (cette formule est celle que l'on a utilisée pour $x \in \Gamma_n = \mathbb{G}(p^n\mathbf{Z}_p)$, auquel cas $\sigma^{-1}(\gamma(\sigma)^{-1}x) = \gamma(\sigma)^{-1}x$; elle est donc vraie pour tout x par prolongement analytique). On en déduit, en notant $\pi : \mathbb{G}(p^n\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \to X_n(\mathbf{C}_p)$ l'application fournie par le th. 6.1, que l'on a

$$\sigma(\pi(x)) = \pi(\gamma(\sigma)\sigma(x)), \quad \text{si } x \in \mathbb{G}(p^n\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}) \text{ et } \sigma \in G_{K_n}.$$

(iii) La formule ci-dessus passe au quotient par $\mathbb{H}_{\mathfrak{a}}$ car $D = \Theta_{\mathrm{Sen}}$ et Θ_{Sen} commute à l'action de G_K sur $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{g} \subset \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{End}(V_1)$, ce qui se traduit par $\gamma(\sigma)\sigma(\mathfrak{a})\gamma(\sigma)^{-1} = \mathfrak{a}$, pour tout $\sigma \in G_{K_n}$ (avec $\sigma = \sigma \otimes 1$ sur $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{End}(V_1)$).

(iv) On pourra comparer l'élément $\mathfrak{a}$ à celui qui est fourni par le th. 12 de [31].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beilinson, F. Tavares Ribeiro, On a theorem of Kisin, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **351** (2013), 505–506.

[2] L. Berger, Construction de (φ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires, *Algebra Number Theory* **2** (2008), 91–120.

[3] L. Berger, Multivariable (φ, Γ)-modules and locally analytic vectors, prépublication arXiv:1312.4753.

[4] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, *Astérisque* **319** (2008), 303–337.

[5] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chapitre I : Algèbres de Lie*, Hermann, 1960.

[6] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VIII : Algèbres de Lie semi-simples déployées*, Hermann, 1975.

[7] C. Breuil, Schémas en groupes et corps des normes, prépublication `http://www.math.u-psud.fr/~breuil/PUBLICATIONS/groupesnormes.pdf`, 1998.

[8] X. Caruso, Représentations galoisiennes p-adiques et (φ, τ)-modules, *Duke Math. J.* **162** (2013), 2525–2607.

[9] F. Cherbonnier, P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. math.* **133** (1998), 581–611.

[10] J. Coates, Fragments of the GL_2 Iwasawa theory of elliptic curves without complex multiplication, in *Arithmetic theory of elliptic curves (Cetraro, 1997)*, Lecture Notes in Math. **1716**, Springer, Berlin, 1999, 1–50.

[11] J. Coates, R. Greenberg, Kummer theory for abelian varieties over local fields, *Invent. math.* **124** (1996), 129–174.

[12] P. Colmez, Sur un résultat de Shankar Sen, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **318** (1994), 983–985.

[13] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, *Ann. of Math.* **148** (1998), 485–571.

[14] M. De Ieso, Espaces de fonctions de classe C^r sur $\mathscr{O}_F$, *Indag. Math. (N.S.)* **24** (2013), 530–556.

[15] M. Emerton, Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups, prépublication arXiv:math/0405137.

[16] L. Fargues, J.-M. Fontaine, Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique, prépublication `http://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/Courbe_fichier_principal.pdf`, 2011.

[17] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. **87**, Birkhäuser, 1990, 249–309.

[18] J.-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, *Astérisque* **295** (2004), 1–115.

[19] L. Fourquaux, Applications $\mathbf{Q}_p$-linéaires, continues et Galois-équivariantes de $\mathbf{C}_p$ dans lui-même, *J. Number Theory* **129** (2009), 1246–1255.

[20] L. Fourquaux, B. Xie, Triangulable $\mathscr{O}_F$-analytic (ϕ_q, Γ)-modules of rank 2, *Algebra Number Theory* **7** (2013), 2545–2592.

[21] M. Harris, p-adic representations arising from descent on abelian varieties, *Compositio Math.* **39** (1979), 177–245.

[22] M. Kisin, Crystalline representations and F-crystals, in *Algebraic geometry and number theory*, Progr. Math. **253**, Birkhäuser, 2006, 459–496.

[23] M. Kisin, W. Ren, Galois representations and Lubin-Tate groups, *Doc. Math.* **14** (2009), 441–461.

[24] J. Le Borgne, Optimisation du théorème d'Ax-Sen-Tate et application à un calcul de cohomologie galoisienne p-adique, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **60** (2010), 1105–1123.

[25] J. Lubin, J. Tate, Formal complex multiplication in local fields, *Ann. of Math.* **81** (1965), 380–387.

[26] P. Schneider, *p-adic Lie groups*, Grundl. math. Wiss. **344**, Springer, 2011.

[27] P. Schneider, J. Teitelbaum, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), 443–468.

[28] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, *Invent. math.* **153** (2003), 145–196.

[29] S. Sen, Ramification in p-adic Lie extensions, *Invent. math.* **17** (1972), 44–50.

[30] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, *Ann. of Math.* **97** (1973), 160–170.

[31] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. math.* **62** (1980/81), 89–116.

[32] J-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Lecture Notes in Math. **1500**, Springer, 2006.

[33] J. Tate, p-divisible groups, in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, 1967, 158–183.

[34] J. Tate, Lettre du 23 juillet 1973, in *Correspondance Serre-Tate* (P. Colmez, J-P. Serre, éds.), Documents mathématiques **14**, Soc. math. France, 2015, 469–472.

[35] F. Tavares Ribeiro, An explicit formula for the Hilbert symbol of a formal group, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **61** (2011), 261–318.

[36] O. Venjakob, On the Iwasawa theory of p-adic Lie extensions, *Compositio Math.* **138** (2003), 1–54.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 2015 ;
accepté, après révision, le 21 août 2015.)

Laurent Berger
École normale supérieure de Lyon
UMPA
UMR 5669 du CNRS
46 Allée d'Italie
69364 LYON Cedex 07
et
Institut Universitaire de France
E-mail: laurent.berger@ens-lyon.fr
URL: perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/

Pierre Colmez
UMR 7586 du CNRS
Université Pierre et Marie Curie
Institut de Mathématiques de Jussieu
Équipe de théorie des nombres
4, place Jussieu
75005 Paris Cedex 05
E-mail: pierre.colmez@imj-prg.fr
URL: www.math.jussieu.fr/~colmez/