

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. HIRZEBRUCH

**Modulflächen und Modulkurven zur symmetrischen  
Hilbertschen Modulgruppe**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 11, n° 1 (1978), p. 101-165

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1978\\_4\\_11\\_1\\_101\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_1_101_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MODULFLÄCHEN UND MODULKURVEN ZUR SYMMETRISCHEN HILBERTSCHEN MODULGRUPPE

VON F. HIRZEBRUCH

## INHALT

Einleitung.....	101
1. Die Hilbertsche Modulfläche $X(p)$ und die Kurven $F_N$ .....	104
2. Die Kurven $F_N$ und $F_N^*$ auf den desingularisierten Hilbertschen Modulflächen.....	119
3. Numerische Invarianten, exzeptionelle Kurven.....	130
4. Klassifikation.....	143
5. Weitere Beispiele.....	155
Literatur.....	164

## Einleitung

Es sei  $p$  eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{4}$  und  $\mathcal{O}$  der Ring der ganzen Zahlen des Körpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ . Die Gruppe  $SL_2(\mathcal{O})$  operiert auf  $H^2$ , dem Produkt der oberen Halbebene  $H$  der komplexen Ebene mit sich. Der Quotient  $X(p) = H^2/SL_2(\mathcal{O})$  ist eine nicht kompakte komplexe Fläche mit endlich vielen Quotientensingularitäten, die Hilbertsche Modulfläche genannt wird und um 1900 von Hilbert, Hecke und Blumenthal eingeführt wurde. Die Punkte von  $X(p)$  repräsentieren abelsche Varietäten der Dimension 2, die  $\mathcal{O}$  als Endomorphismenring zulassen, jedoch wird dieser Gesichtspunkt in der vorliegenden Arbeit keine Rolle spielen. Das Studium der Hilbertschen Modulflächen wurde von Gundlach und Freitag intensiv weitergeführt (vgl. [7] und die dort angegebene Literatur).

In [7] wurde die Kompaktifizierung  $\overline{X}(p)$  von  $X(p)$  durch  $h(p)$  Spitzen untersucht : Die Spitzen sind singuläre Punkte von  $\overline{X}(p)$ , welche in Zyklen von rationalen Kurven aufgeblasen und dadurch als singuläre Punkte aufgelöst werden können. Da die Quotientensingularitäten leicht aufzulösen sind, kann man durch minimale Desingularisierung aller Singularitäten von  $\overline{X}(p)$  zu einem singularitätenfreien Modell  $Y(p)$  von  $\overline{X}(p)$  übergehen. Die kompakte Fläche  $Y(p)$  ist algebraisch. Sie hat einige exzeptionelle Kurven, die niedergeblasen werden können, was zu der Fläche  $Y^0(p)$  führt, die jedenfalls für  $p > 5$  wohldefiniert ist. Auf  $H^2$  operiert die Involution  $(z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$ , die eine Involution  $T$  von  $Y^0(p)$  induziert, deren Fixpunktmenge eine singularitätenfreie Kurve von  $Y^0(p)$  ist. Die algebraische Fläche  $Y^0(p)/T$  ist deshalb auch singularitätenfrei. Die Flächen  $Y^0(p)$  und  $Y^0(p)/T$  sind einfach-zusammenhängend [18].

Die einfach-zusammenhängenden algebraischen Flächen lassen sich im Sinne der Klassifikation von Enriques und Kodaira in vier grosse Klassen einteilen (I. Rationale Flächen. II. Flächen, die birational äquivalent zu K 3-Flächen sind. III. Flächen, die birational äquivalent zu echt elliptischen Flächen sind. IV. Flächen vom allgemeinen Typ.) (siehe § 4.1). In einer gemeinsamen Arbeit mit van de Ven [8] wurde bewiesen, dass  $Y(p)$  für  $p = 5, 13, 17$  zur Klasse I, für  $p = 29, 37, 41$  zur Klasse II, für  $p = 53, 61, 73$  zur Klasse III and für  $p > 73$  zur Klasse IV gehört. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist die »grobe« Klassifikation der Flächen  $Y^0(p)/T$  (siehe 4.6) :

*Für 24 Primzahlen gehört  $Y^0(p)/T$  zur Klasse I, für 9 Primzahlen zur Klasse II, für 6 Primzahlen zu Klasse III und für alle anderen Primzahlen zur Klasse IV.*

Die Rationalität von  $Y^0(p)/T$  für 24 Primzahlen wurde bereits in [7] bewiesen. Die grobe Klassifikation der Hilbertschen Modulflächen  $Y(D)$  für einen reell-quadratischen Körper beliebiger Diskriminante  $D$  wurde in [9] durchgeführt, während die Flächen  $Y(D)/T$  noch nicht behandelt wurden.

Bei der Untersuchung der Hilbertschen Modulflächen spielen die Modulkurven  $F_N$  eine grosse Rolle [10] : Für gegebenes  $N$  betrachten wir alle Punkte  $(z_1, z_2) \in H^2$ , die einer Gleichung der Form

$$a\sqrt{p}z_1z_2 + \lambda z_2 - \lambda' z_1 + b\sqrt{p} = 0,$$

genügen, wo  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \in \mathcal{O}$ ,  $abp + \lambda\lambda' = N$  und das Tripel  $(a, b, \lambda)$  primitiv ist, also durch keine natürliche Zahl  $> 1$  teilbar sein soll. Diese Menge ist  $SL_2(\mathcal{O})$ -invariant.

Ihr Bild ist eine Kurve in  $X(p)$ , die für  $\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$  nicht leer und für  $N \equiv 0 \pmod{p^2}$

irreduzibel ist (vgl. § 1). Die Kurve kann zu einer kompakten Kurve in  $Y(p)$  erweitert werden. Sie definiert für  $N \geq 5$  eine Kurve  $F_N$  in  $Y^0(p)$  und eine Bildkurve  $F_N^*$  in

$Y^0(p)/T$ . Es werde von nun an  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$  vorausgesetzt ( $N \geq 5$ ) und  $N = N_1 N_2$

gesetzt, wo  $N_1$  nur durch Primzahlen, die quadratische Reste mod  $p$  sind, und  $N_2$  nur durch Primzahlen, die quadratische Nichtreste mod  $p$  sind, teilbar ist. Die Kurve  $F_N$

hat ein singularitätenfreies Modell  $\overline{H}/\Gamma$ , wo  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $PSL_2(\mathbb{R})$  ist, deren Urbild in  $SL_2(\mathbb{R})$  konjugiert zur Gruppe der Einheiten positiver Norm einer

Ordnung einer über  $\mathbb{Q}$  definierten indefiniten Quaternionenalgebra ist, und  $\overline{H}/\Gamma$  die Kompaktifizierung von  $H/\Gamma$  durch endlich viele Spitzen ist. Entsprechend hat  $F_N^*$  ein

singularitätenfreies Modell  $\overline{H}/\Gamma_*$ , wo  $\Gamma_*$  eine Erweiterung vom Index 2 von  $\Gamma$  ist. Die Gruppe  $\Gamma$  ist Untergruppe der Hilbertschen Modulgruppe  $G = SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$ ,

während  $\Gamma_*$  Untergruppe der symmetrischen Hilbertschen Modulgruppe  $G \cup G.T$  ist. In § 1 bestimmen wir allein in Abhängigkeit von dem Zahlenpaar  $N_1, N_2$  die Anzahlen

der inäquivalenten elliptischen Fixpunkte der Ordnung  $m$  von  $\Gamma^*$  und  $\Gamma$ , wobei nur Fixpunkte mit  $m = 2$  oder  $3$  vorkommen, die Anzahl der Spitzen von  $\Gamma$  und die

Geschlechter von  $\overline{H}/\Gamma$  und  $\overline{H}/\Gamma^*$ . Es gibt mindestens 120 Paare  $N_1, N_2$  mit

$N = N_1 N_2 \geq 5$ , für die das Geschlecht von  $\overline{H}/\Gamma_*$  gleich 0 ist, die Kurve also rational ist (vgl. 2.4 Tabelle 3). Jeder elliptische Fixpunkt von  $\Gamma$  entspricht einem Durchgang

von  $F_N$  durch einen elliptischen Fixpunkt von  $G$ , ähnliches gilt für  $\Gamma_*$  und die symmetrische Gruppe  $G \cup G.T$ . Eine Spitze von  $\Gamma$  wird auf eine Spitze von  $G$  abgebildet, man kann dies genau verfolgen und angeben, wie die Kurve  $F_N$  in  $Y(p)$  die rationalen Kurven schneidet, die durch die Auflösung der Spitzen von  $G$  als singuläre Punkte von  $\overline{X(p)}$  entstanden sind. Auf Grund von [10] sind die Schnittpunkte von  $F_N$  und  $F_M$  in  $Y^0(p)$  (für  $N \neq M$ ) und die Doppelpunkte einer Kurve  $F_N$  bekannt. Daraus lässt sich auf das Schnittverhalten der  $F_N^*$  in  $Y^0(p)/T$  schliessen.

Für die Anwendungen muss man den Wert der ersten Chernschen Klasse  $c_1$  von  $Y^0(p)$  auf  $F_N$  kennen, der mit  $c_1[F_N]$  bezeichnet wird und gleich  $-K.F_N$  ist, wenn  $K$  ein kanonischer Divisor von  $Y^0(p)$  ist. Entsprechend ist  $c_1^*[F_N^*]$  zu berechnen, wo  $c_1^*$  die erste Chernsche Klasse von  $Y^0(p)/T$  ist. Dies wird in Paragraph 2 durchgeführt. Jedem Paar  $N_1, N_2$  lässt sich eine Zahl  $c_1^*(N_1, N_2)$  zuordnen, so dass stets  $c_1^*[F_N^*] \geq c_1^*(N_1, N_2)$  ist und das Gleichheitszeichen jedenfalls dann gilt, wenn  $p$  verglichen mit  $N = N_1 N_2$  hinreichend gross ist. In Paragraph 2 schreiben wir  $c_1^*(N)$  statt  $c_1^*(N_1, N_2)$ , da die Aufspaltung  $N = N_1 N_2$  durch die gegebene Primzahl  $p$  festgelegt ist. Man kann übrigens leicht nachrechnen, dass  $-c_1^*(N_1, N_2) + 1 - g^*$  gleich der Dimension des Raumes der Spitzenformen vom Gewicht 4 für die zu  $N_1, N_2$  gehörige Gruppe  $\Gamma_*$  bezüglich des nicht-trivialen Charakters der zweielementigen Gruppe  $\Gamma_*/\Gamma$  ist ( $g^*$  sei das Geschlecht von  $H/\Gamma_*$ ). Diese Tatsache werden wir aber nicht benutzen. Es ist also  $c_1^*(N_1, N_2) \leq 1 - g^*$ . Für  $p \gg N$  ist  $F_N^*$  singularitätenfrei. Wenn  $F_N^*$  singularitätenfrei ist, dann gilt nach der Adjunktionsformel  $F_N^* F_N^* = c_1^*[F_N^*] - (2 - 2g^*)$ . Wir können bei vorgegebenem  $p$  entscheiden, welche  $F_N^*$  singularitätenfreie rationale Kurven der Selbstschnittzahl  $a$ , kurz  $a$ -Kurven genannt, sind. Von besonderem Interesse sind die  $(-1)$ -Kurven (exzeptionelle Kurven) und die  $(-2)$ -Kurven. Für  $p \gg N$  liefern die 17 Paare  $N_1, N_2$  der Tabelle 3 in Paragraph 2 mit  $c_1^*(N_1, N_2) = 1$  und die 30 Paare  $N_1, N_2$  mit  $c_1^*(N_1, N_2) = 0$  exzeptionelle Kurven  $F_N^*$  bzw.  $(-2)$ -Kurven  $F_N^*$  auf den Flächen  $Y^0(p)/T$ , für die  $\binom{N}{p} = 1$  und  $N$  die Zerlegung  $N = N_1 N_2$  hat.

Das arithmetische Geschlecht von  $Y^0(p)/T$  wurde in [7] berechnet. Es hat für genau 24 Primzahlen den Wert 1, nur für diese Primzahlen kann  $Y^0(p)/T$  rational sein. Diese 24 Flächen sind in der Tat rational, wie in [7] bewiesen wurde und in Paragraph 2 erneut gezeigt wird. Für die nicht-rationalen Flächen  $Y^0(p)/T$  und die Flächen, die aus ihnen durch Niederblasen bekannter exzeptioneller Kurven entstehen, kann das Quadrat der ersten Chernschen Klasse (Selbstschnittzahl eines kanonischen Divisors) berechnet werden. Sobald diese Selbstschnittzahl positiv ausfällt, ist die Fläche vom allgemeinen Typ. In Paragraph 3 ergibt sich auf diese Weise, dass  $Y^0(p)/T$  für  $p > 557$  vom allgemeinen Typ ist und für höchstens 15 Primzahlen zur Klasse II oder III gehört.

Die Untersuchung dieser 15 Flächen erfolgt in Paragraph 4, wo mit Hilfe von Kurven  $F_N^*$ , die  $(-2)$ -Kurven sind, und von Kurven der Spitzenauflösungen, die in bestimmten Fällen ebenfalls  $(-2)$ -Kurven auf  $Y^0(p)/T$  liefern, elliptische Konfigurationen konstruiert werden, die als Ausnahmefasern elliptischer Faserungen auftreten. Die Existenz einer solchen Konfiguration garantiert, dass  $Y^0(p)/T$  zur Klasse II oder III gehört. Für diese 15 Flächen können wir minimale Modelle angeben – die Selbstschnittzahl des kanonischen Divisors

ist dann gleich 0 – und nachweisen, dass man in 9 Fällen ein K 3-Fläche und in 6 Fällen eine elliptische Fläche erhält, wo die Fasern kanonische Divisoren sind.

Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden zum grossen Teil während meines Gastaufenthalts am Department of Mathematics der University of California in Berkeley während des Sommers 1973 gefunden. Dem Department in Berkeley danke ich ganz herzlich für eine anregende Zeit konzentrierten Arbeitens. In Berkeley hatte ich Computer-Unterstützung durch D. Lehmer und E. Lehmer, denen herzlich gedankt sei. Profitiert habe ich während diese Zeit auch durch einen Briefwechsel mit M. Eichler. Nach 1973 hatte ich nur wenig Zeit, die Überlegungen weiterzuverfolgen. Jedoch wurden in den gemeinsamen Arbeiten mit D. Zagier ([9], [10]) auch manche Dinge geklärt, die für die vorliegende Arbeit wesentlich sind und die Darstellung erleichtert haben. D. Zagier muss ich für viele Diskussionen und umfangreiche Hilfe durch die Erstellung von Computerprogrammen danken. Ruhe und Konzentration für abschliessende Überlegungen und das Aufschreiben fand ich erst während meines Gastaufenthalts am »Institut des Hautes Études Scientifiques« während der Monate November, Dezember 1977 und Januar 1978. Dem I.H.E.S. vielen Dank! In diesen Dank eingeschlossen ist M<sup>me</sup> J. Martin vom I.H.E.S., die mit Geduld und Sorgfalt und unter Zeitdruck das Manuskript geschrieben hat.

### 1. Die Hilbertsche Modulfläche $X(p)$ und die Kurven $F_N$

1.1. Es sei  $p$  eine Primzahl mit  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und  $\mathcal{O}$  der Ring der ganzen Zahlen in  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ . Die Gruppe  $SL_2(\mathcal{O})$  operiert auf  $H^2$ , dem Produkt der oberen Halbebene von  $\mathbb{C}$  mit sich, und  $H^2/SL_2(\mathcal{O})$  ist die Hilbertsche Modulfläche  $X(p)$ . Der Einfachheit wegen deuten die Bezeichnungen die fest gegebene Primzahl  $p$  nicht immer an. Die Fläche  $X(p)$  ist nicht kompakt. Sie hat eine endliche Anzahl von Quotientensingularitäten, die von den Punkten  $z \in H^2$  herrühren, wo die Isotropiegruppe der Aktion von  $SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$  nicht trivial ist. Für jede natürliche Zahl  $N \geq 1$  soll nun eine Kurve  $F_N$  in  $X(p)$  erklärt werden. Wir betrachten dazu alle Punkte  $(z_1, z_2) \in H^2$ , die einer Gleichung der Form

$$(1) \quad a\sqrt{p}z_1z_2 + \lambda z_2 - \lambda' z_1 + b\sqrt{p} = 0,$$

genügen mit  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \in \mathcal{O}$  und  $\lambda\lambda' + abp = N$ , wobei ferner verlangt werden soll, dass das Tripel  $(a, b, \lambda)$  primitiv, d. h. durch keine natürliche Zahl  $> 1$  teilbar sei. Die Menge der Punkte  $(z_1, z_2)$ , die eine solche Gleichung erfüllen, ist invariant unter  $SL_2(\mathcal{O})$ , und  $F_N$  bezeichnet ihr Bild in  $X(p)$ . Die Kurve  $F_N$  ist offenbar genau dann nicht leer, wenn

$$\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$$

Die Gleichung (1) kann auch in der Form

$$(2) \quad (z_2, 1)A\begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

geschrieben werden, wo  $A$  die Matrix  $\begin{pmatrix} a\sqrt{p} & \lambda \\ -\lambda' & b\sqrt{p} \end{pmatrix}$  ist, welche primitiv, ganzzahlig und schief-hermitesch ist, d. h. der Beziehung  $A' = -A^t$  genügt. Es ist  $N = \det A$ . Die Anzahl der irreduziblen Komponenten der Kurve  $F_N$  in  $X(p)$  ist gleich der Anzahl der

$SL_2(\mathcal{O})$ -Äquivalenzklassen primitiver ganzzahliger schief-hermitescher Matrizen der Determinante  $N$ , wobei  $A_1, A_2$  äquivalent heißen sollen, wenn ein  $T \in SL_2(\mathcal{O})$  mit  $A_2 = \pm {}^t T' A_1 T$  existiert. Wir zitieren zunächst den folgenden Satz von G. Franke [3], der durch Anwendung von Resultaten von Shimura [17] erhalten wurde.

SATZ 1. — Es sei  $\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$ . Die Kurve  $F_N$  ist irreduzibel, wenn  $N \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ .

Sie hat genau zwei Komponenten, wenn  $N \equiv 0 \pmod{p^2}$ .

Die durch (2) definierte Kurve in  $H^2$  ist der Graph der durch die Matrix  $\begin{pmatrix} \lambda' & -b\sqrt{p} \\ a\sqrt{p} & \lambda \end{pmatrix}$  gegebenen gebrochen linearen Transformation von  $H$  in  $H$  und kann deshalb mit  $H$  identifiziert werden (Koordinate  $z_1$ ). Für gegebene Matrix  $A$  soll die Standgruppe  $G_A$  aller  $X \in SL_2(\mathcal{O})$  mit  $A = \pm {}^t X' A X$  bestimmt werden. Für  $A$  werde die Algebra  $\mathcal{Q}_A$  aller  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $X$  mit Koeffizienten in  $Q(\sqrt{p})$  betrachtet, für die

$$(3) \quad {}^t X' A = A X^*,$$

dabei ist  $X^* = (\det X) X^{-1}$ . Es lässt sich dann leicht zeigen, dass  $\mathcal{Q}_A$  eine indefinite Quaternionenalgebra über  $Q$  ist, und zwar gilt

$$(4) \quad \mathcal{Q}_A \cong \left( \frac{p, -N/p}{Q} \right), \quad (N = \det A),$$

(für die Bezeichnung von Quaternionenalgebren vgl. z. B. [14]).

Die Isomorphie (4) beweist man, indem man  $A$  über  $Q(\sqrt{p})$  in die Normalform  $\pm \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & (N/p)\sqrt{p} \end{pmatrix}$  bringt. Die Grundzahl einer indefiniten Quaternionenalgebra über  $Q$  ist Produkt einer geraden Anzahl verschiedener Primzahlen und zwar derjenigen Primzahlen  $r$ , so dass die Algebra über den  $r$ -adischen Zahlen  $Q_r$  ein Schiefkörper ist. Durch die Grundzahl ist die Algebra bis auf Isomorphie festgelegt.

Es werde gesetzt

$$(5) \quad N = p^k N_1 N_2 \quad \text{mit} \quad (N_1 N_2, p) = 1 \quad \text{und} \quad (N_1, N_2) = 1,$$

wo alle Primzahlen, die  $N_1$  teilen, quadratische Reste mod  $p$  und alle Primzahlen, die  $N_2$  teilen, quadratische Nichtreste mod  $p$  sind. Es sei  $N'_2$  der quadratfreie Teil von  $N_2$ .

Für  $\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$  lässt sich dann die Grundzahl  $d$  der Quaternionenalgebra  $\left(\frac{p, -N/p}{Q}\right)$

wie folgt angeben :

$$(6) \quad \begin{cases} d = N'_2, & \text{falls } N \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ d = N'_2, & \text{falls } N \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } \left(\frac{N'_2}{p}\right) = 1, \\ d = p N'_2, & \text{falls } N \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } \left(\frac{N'_2}{p}\right) = -1. \end{cases}$$

In der Algebra  $\mathcal{Q}_A$  werde die Ordnung  $\mathcal{O}_A$  derjenigen Matrizen  $X$  betrachtet, die (3) erfüllen und deren Koeffizienten im Ring  $\mathcal{O}$  der ganzen Zahlen von  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$  liegen. Jede Ordnung hat eine Diskriminante, nämlich die Diskriminante der Normenform der Quaternionenalgebra beschränkt auf die Ordnung. (Für  $X \in \mathcal{Q}_A$  ist die Norm gleich  $\det X$ .) Die Diskriminante ist stets eine Quadratzahl, für  $\mathcal{O}_A$  ist sie gleich  $N^2$ , für jede Maximalordnung von  $\mathcal{Q}_A$  ist sie gleich  $d^2$ .

Es sei  $\mathcal{E}_A$  die Gruppe der Einheiten von  $\mathcal{O}_A$  mit Norm gleich  $+1$ . Die oben erwähnte Standgruppe  $G_A$  der primitiven ganzzahligen schief-hermiteschen Matrix  $A$  ist offensichtlich gleich  $\mathcal{E}_A$  oder eine Erweiterung von  $\mathcal{E}_A$  vom Index 2. Franke [3] beweist, dass  $\mathcal{E}_A = G_A$ , wenn  $N \not\equiv 0 \pmod{p}$ , und  $|G_A : \mathcal{E}_A| = 2$  sonst.

Es sei  $\mathcal{O}_{\max}$  eine Maximalordnung von  $\mathcal{Q}_A$ , die  $\mathcal{O}_A$  enthält, und  $\mathcal{E}_{\max}$  die Gruppe der Einheiten von  $\mathcal{O}_{\max}$  der Norm  $+1$ . Um mehr Informationen über die Standgruppe  $G_A$  zu erhalten, muss der Index von  $\mathcal{E}_A$  in  $\mathcal{E}_{\max}$  bestimmt werden. Er wird von Franke [3] berechnet. Kennt man diesen Index, dann kann man leicht eine Formel für das Volumen von  $H/G_A$  angeben. (In  $H$  wird dabei die  $SL_2(\mathbb{R})$ -invariante Volumenform  $-(2\pi)^{-1} (dx dy / y^2)$  benutzt, welche für frei operierende diskrete Untergruppen von  $SL_2(\mathbb{R})$  mit kompakten Quotienten die Eulersche Zahl des Quotienten liefert.)

Nach Eichler [1] ist nämlich das Volumen von  $H/\mathcal{E}_{\max} = -(1/6)\varphi(d)$ , wo  $d$  die Grundzahl der Quaternionenalgebra ist. Das Volumen von  $H/G_A$  ist dann (man beachte, dass  $-1 \in \mathcal{E}_A$ ) :

$$\text{vol}(H/G_A) = -\frac{1}{6} \varphi(d) \cdot |\mathcal{E}_{\max} : \mathcal{E}_A| \cdot |G_A : \mathcal{E}_A|.$$

Die natürliche Abbildung  $H/G_A \rightarrow F_N$  ( $N = \det A$ ) ist vom Grad 1; sie ist surjektiv nach Satz 1, wenn  $N \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Wenn  $N \equiv 0 \pmod{p^2}$ , dann muss man zwei inäquivalente Matrizen  $A_1, A_2$  der Determinante  $N$  wählen, und  $F_N$  ist dann die Vereinigung der Bilder von  $H/G_{A_1}$  und  $H/G_{A_2}$ . Unter  $\text{vol}(F_N)$  ist natürlich das Volumen von  $H/G_A$  bzw. die Summe der Volumina von  $H/G_{A_1}$  und  $H/G_{A_2}$  zu verstehen. Das Endergebnis der Index- und damit der Voluminaabestimmung lautet wie folgt (siehe [3]).

SATZ 2. — *Das Volumen der Kurve  $F_N$  in der Hilbertschen Modulfläche  $X(p)$  wird (für  $\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$ ) durch folgende Formeln gegeben.*

(i) für  $N \not\equiv 0 \pmod{p}$  :

$$\text{vol}(F_N) = -\frac{1}{6} N \cdot \prod_{q|N_1} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \prod_{q|N_2} \left(1 - \frac{1}{q}\right);$$

(ii) für  $N \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $N \not\equiv 0 \pmod{p^2}$  :

$$\text{vol}(F_N) = -\frac{1}{12} N \left(1 + \left(\frac{N_2}{p}\right) \frac{1}{p}\right) \prod_{q|N_1} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \prod_{q|N_2} \left(1 - \frac{1}{q}\right);$$

(iii) für  $N \equiv 0 \pmod{p^2}$  :

$$\text{vol}(F_N) = -\frac{1}{12} N \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{q|N_1} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \prod_{q|N_2} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

In den vorstehenden Formeln ist das Produkt über alle Primzahlen  $q$  zu nehmen, die  $N_1$  bzw.  $N_2$  teilen.

Wenn  $N_2 = 1$  ist, dann ist in den Fällen (i) und (ii) von Satz 2 die Gruppe  $\mathcal{E}_A$  konjugiert in  $SL_2(\mathbb{R})$  zu  $\Gamma_0(N)$ , vgl. hierzu [7], Paragraph 4.1. Der Fall (i) von Satz 2 wird im folgenden eine besondere Rolle spielen. Wir können die Formel (i) auch in der Form schreiben :

$$(7) \quad \text{vol}(F_N) = -\frac{1}{6} N \prod_{q|N} (1 + \chi_p(q)/q) \quad \text{für} \quad \left(\frac{N}{p}\right) = 1,$$

wo  $\chi_p$  der zum Körper  $Q(\sqrt{p})$  gehörige Charakter ist, also

$$\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right).$$

In [10] wird die Kurve  $T_N$  betrachtet. Sie ist das Bild in  $X(p)$  von allen Punkten  $(z_1, z_2) \in H^2$ , die einer Gleichung (1) mit  $\lambda\lambda' + abp = N$  genügen, wobei nicht mehr verlangt wird, dass das Tripel  $(a, b, \lambda)$  primitiv ist. Natürlich ist

$$(8) \quad T_N = \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ n^2 | N}} F_{N|n^2}.$$

Aus Satz 2 folgt die für alle  $N \geq 1$  gültige Formel (vgl. [3] und [10] 1.5 (46))

$$(9) \quad \text{vol}(T_N) = -\frac{1}{12} \sum_{\substack{d \geq 1 \\ d | N}} (\chi_p(d) + \chi_p(N/d)) d.$$

1.2. Bevor wir die Untersuchung der Kurven  $F_N$  weiterführen, müssen wir an die Theorie der speziellen Punkte von  $H^2$  erinnern ([10] Chap. 1). Hierfür sind einige einfache Begriffe über quadratische Formen nötig.

Für ein orientiertes Gitter (freier  $\mathbb{Z}$ -Modul)  $L$  vom Rang 2 kann eine ganzzahlige quadratische Form  $\varphi : L \rightarrow \mathbb{Z}$  bezüglich einer mit der Orientierung verträglichen  $\mathbb{Z}$ -Basis  $e_1, e_2$  von  $L$  in der Gestalt

$$\varphi(ue_1 + ve_2) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}),$$

geschrieben werden. Die Form wird dann mit  $[\alpha, \beta, \gamma]$  bezeichnet. Ihre Diskriminante ist  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ . Sie heisst primitiv, wenn  $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ . Quadratische Formen sollen stets über orientierten Gittern erklärt sein. Zwei quadratische Formen heissen äquivalent ( $\cong$ ), wenn es einen orientierungserhaltenden Isomorphismus der Gitter gibt, bei dem die beiden Formen ineinander übergeführt werden. Da jede Äquivalenzklasse durch eine Form  $[\alpha, \beta, \gamma]$  über dem kanonisch orientierten Gitter  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  repräsentiert werden kann, sprechen wir auch von  $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenz. Zwei Darstellungen einer Zahl  $N$  durch Formen  $\varphi_1 : L_1 \rightarrow \mathbb{Z}$  und  $\varphi_2 : L_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $\varphi_1(\xi) = N$  und  $\varphi_2(\eta) = N$  heissen entsprechend  $SL_2(\mathbb{Z})$ -äquivalent, wenn es einen orientierungserhaltenden Isomor-



phismus der Gitter  $L_1, L_2$  gibt, der  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  und  $\xi$  in  $\eta$  überführt. Eine Darstellung  $\varphi(\xi) = N$  (für  $\varphi : L \rightarrow Z$ ) heisst primitiv, wenn  $\xi$  in  $L$  durch keine natürliche Zahl  $> 1$  teilbar ist.

Ein Punkt  $z = (z_1, z_2) \in H^2$  wird *speziell* genannt, wenn das Gitter  $\mathcal{M}_z$  aller ganzzahligen, schief-hermiteschen Matrizen  $\begin{pmatrix} a\sqrt{p} & \lambda \\ -\lambda' & b\sqrt{p} \end{pmatrix}$  mit

$$a\sqrt{p}z_1z_2 + \lambda z_2 - \lambda' z_1 + b\sqrt{p} = 0,$$

den Rang 2 hat. Die Gitter  $\mathcal{M}_z$  werden für alle speziellen Punkte  $z$  in kohärenter Weise orientiert ([10], 1.1). Dann ist  $\varphi_z = \det | \mathcal{M}_z$  eine positiv-definite ganzzahlige quadratische Form mit einer durch  $p$  teilbaren Diskriminante. Damit ist den Punkten  $z \in X(p)$ , die von speziellen Punkten  $z \in H^2$  herrühren, eine  $SL_2(Z)$ -Äquivalenzklasse  $\varphi_z$  von ganzzahligen positiv-definiten quadratischen Formen zugeordnet. (Es ist dann klar, was die Aussage  $\varphi_z \cong [\alpha, \beta, \gamma]$  bedeuten soll.) Die Kurve  $T_M$  [siehe (8)] geht durch  $z$  (repräsentiert durch den speziellen Punkt  $z$ ) genau dann, wenn  $\varphi_z$  die Zahl  $M$  darstellt, die Kurve  $F_M$  geht durch  $z$  genau dann, wenn  $\varphi_z$  die Zahl  $M$  primitiv darstellt.

Es sei  $\varphi$  eine positiv-definite ganzzahlige quadratische Form (definiert über einem orientierten Gitter vom Rang 2). In [10] 1.1, Theorem 1 wurde die »Anzahl«  $s(\varphi)$  der Punkte  $z \in X(p)$  bestimmt, die von speziellen Punkten  $z \in H^2$  herrühren, so dass  $\varphi_z$  und  $\varphi$  zueinander  $SL_2(Z)$ -äquivalent sind. Wir geben  $s(\varphi)$  hier nur in einem Spezialfall an. Zunächst eine Bezeichnung. Wenn eine Form  $\psi$  primitiv ist und durch  $p$  teilbare Diskriminante hat, dann stellt  $\psi$  entweder nur quadratische Reste mod  $p$  dar (darunter auch zu  $p$  teilerfremde) oder die durch  $\psi$  dargestellten zu  $p$  teilerfremden Zahlen sind alle quadratische Nichtreste mod  $p$ . Im ersten Fall definiert man  $\chi_p(\psi) = 1$ , im zweiten  $\chi_p(\psi) = -1$ .

Wenn  $\varphi$  primitiv und positiv-definit ist, eine durch  $p$  teilbare Diskriminante  $\Delta$  hat ( $\Delta < 0$ ) und  $\chi_p(\varphi) = 1$ , dann ist

$$(10) \quad s(\varphi) = h'(\Delta/p).$$

Hier ist  $h'$  die modifizierte Klassenzahl ( $h'(-3) = 1/3$ ,  $h'(-4) = 1/2$ ,  $h'(n) = h(n)$  sonst, wo  $h(n)$  für  $n < 0$  die Anzahl der  $SL_2(Z)$ -Äquivalenzklassen primitiver positiv-definiten quadratischer Formen der Diskriminante  $n$  ist. Es ist damit  $h(n) = 0$ , wenn  $n$  keine Diskriminante ist.) In der Formel (10) werden Punkte  $z$ , die eine Quotientensingularität der Ordnung 2 bzw. 3 sind,  $1/2$  mal bzw.  $1/3$  mal gezählt.

Es sei  $\psi$  eine positiv-definite ganzzahlige quadratische Form definiert über dem orientierten Gitter  $Z \oplus Z$ . Mit  $s_0(\psi)$  wurde in [10], 1.3 die »Anzahl« der orientierungserhaltenden Einbettungen  $j : Z \oplus Z \rightarrow \mathcal{M}_z$  mit  $\psi = \varphi_z \circ j$  bezeichnet, wo  $z$  die speziellen Punkte durchläuft. Die Gruppe  $SL_2(\mathcal{O})$  operiert auf  $H^2$ . Jedes Element  $B \in SL_2(\mathcal{O})$  liefert auch einen orientierungserhaltenden Isomorphismus von  $\mathcal{M}_z$  auf  $\mathcal{M}_{Bz}$ , der  $\varphi_z$  in  $\varphi_{Bz}$  überführt (und sich nicht ändert, wenn  $B$  durch  $-B$  ersetzt). Bei der Definition

der Anzahl  $s_0(\psi)$  werden Einbettungen, die bei der erwähnten  $SL_2(\mathcal{O})$ -Aktion ineinander übergehen identifiziert und ausserdem jede Einbettung mit der Multiplizität  $1/|\text{Kern } \pi|$  gezählt, wo  $\pi$  der natürliche Homomorphismus von der Isotropiegruppe  $SL_2(\mathcal{O})_z$  in  $\text{Aut}(\varphi_z)$  ist. Wenn der durch  $z$  bestimmte Punkt  $z \in X(p)$  keine Quotientensingularität ist (d. h.  $SL_2(\mathcal{O})_z = \{ \pm 1 \}$ ), dann werden zwei Einbettungen in  $\mathcal{M}_z$ , die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden jeweils  $1/2$  mal gezählt, und ein Paar solcher Einbettungen gibt für  $s_0(\psi)$  den Beitrag 1. Wir geben  $s_0(\psi)$  wieder nur in einem Spezialfall an (vgl. [10], 1.3, Theorem 2 für die allgemeine Formel).

Wenn die Form  $\psi$  primitiv und positiv-definit ist, eine durch  $p$  teilbare Diskriminante  $\Delta$  hat und  $\chi_p(\psi) = 1$ , dann ist

$$(11) \quad s_0(\psi) = H(-\Delta/p).$$

Dabei ist für  $n > 0$  per definitionem

$$(12) \quad H(n) = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ d^2 | n}} h'(-n/d^2).$$

Bei den obigen speziellen Voraussetzungen über  $\psi$  ist übrigens bei allen Einbettungen  $j : Z \oplus Z \rightarrow \mathcal{M}_z$  stets  $\text{Kern } \pi = SL_2(\mathcal{O})_z$  (vgl. die in 1.1 erwähnte Tatsache :  $\varepsilon_A = G_A$ , wenn  $\det A \not\equiv 0 \pmod{p}$ ), in Uebereinstimmung mit dem Zählen der speziellen Punkte in (10).

Die Kurven  $T_M, T_N$  [siehe (8)] haben gemeinsame Komponenten genau dann, wenn  $MN$  eine Quadratzahl ist. Die Schnitte einer Komponente von  $T_M$  mit einer davon verschiedenen Komponente von  $T_N$  sind jedoch stets transversal. In [10], 1.3, Theorem 3 wird die Anzahl dieser transversalen Schnittpunkte von  $T_M, T_N$  in  $X(p)$  bestimmt : Jeder orientierungserhaltenden Einbettung der quadratischen Form  $[M, b, N]$ , wo  $b \in Z$  mit  $b^2 < 4MN$  und  $b^2 \equiv 4MN \pmod{p}$ , in ein Gitter  $\mathcal{M}_z$  (mit  $z \in H^2$  und  $z$  speziell) entspricht ein transversaler Schnitt von  $T_M$  und  $T_N$  in dem Punkte  $z \in X(p)$ , der durch  $z$  gegeben wird. Für die transversale Schnittzahl von  $T_M$  und  $T_N$  in  $X(p)$  hat man deshalb die Formel ([10], 1.3 (35)) :

$$(13) \quad (T_M T_N)_{X(p)}^{\text{tr}} = \sum_{\substack{b \in Z \\ b^2 < 4MN \\ b^2 \equiv 4MN \pmod{p}}} s_0([M, b, N]).$$

Wenn  $(M, N) = 1$  und  $M, N$  quadratische Reste mod  $p$  sind, dann kann (11) angewandt werden, und man bekommt

$$(14) \quad (T_M T_N)_{X(p)}^{\text{tr}} = \sum_{\substack{b \in Z \\ b^2 < 4MN \\ b^2 \equiv 4MN \pmod{p}}} H\left(\frac{4MN - b^2}{p}\right).$$

1.3. Wir beschränken uns im folgenden auf die Untersuchung der Kurven  $F_N$  für  $\left(\frac{N}{p}\right) = \chi_p(N) = 1$ . Die Kurve  $F_N$  ist nach Satz 1 irreduzibel. Sie möge wie in (1) und (2) durch eine primitive ganzzahlige schief-hermitesche Matrix  $A$  der Determinante  $N$

gegeben sein, d. h.  $F_N$  ist das Bild in  $X(p)$  der durch (1) in  $H^2$  gegebenen Kurve. Die Standgruppe  $G_A$  ist eine Untergruppe von  $SL_2(\mathcal{O})$ , sie enthält das Element  $-1$ . Die projektiv gemachte Standgruppe  $\Gamma_A = G_A/\{\pm 1\}$  ist Untergruppe der Hilbertschen Modulgruppe  $SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$ . Um die Kurve  $H/\Gamma_A$  näher untersuchen zu können, ist es erforderlich, die Konjugationsklassen von Elementen endlicher Ordnung in  $\Gamma_A$  zu bestimmen. Ein Element  $\gamma$  der Ordnung  $n \geq 2$  von  $SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$  hat genau einen Fixpunkt  $z \in H^2$ .

Bezüglich geeigneter Koordinaten  $(u, v)$  im Tangentialraum von  $z$  operiert  $\gamma$  in der Weise, dass  $\gamma(u, v) = (\zeta u, \zeta^r v)$ , wo  $\zeta$  eine  $n$ -te Einheitswurzel ist, sowie  $1 \leq r < n$  und  $(n, r) = 1$ . Da  $\Gamma_A$  die Standgruppe des Graphen

$$z_2 = \frac{\lambda' z_1 - b\sqrt{p}}{a\sqrt{p}z_1 + \lambda} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a\sqrt{p} & \lambda \\ -\lambda' & b\sqrt{p} \end{pmatrix}$$

ist, folgt für  $\gamma \in \Gamma_A$ , dass  $r = 1$ . Die Hilbertsche Modulgruppe  $SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$  hat nur Elemente der endlichen Ordnung  $n$  mit  $n = 2$  oder  $n = 3$  (und für  $p = 5$  auch  $n = 5$ , aber dann ist  $r = 2$ ); siehe [15]. Deshalb hat  $\Gamma_A$  nur Elemente endlicher Ordnung mit  $n = 2$  oder  $3$ . Die Anzahl der Konjugationsklassen von Elementen der Ordnung  $2$  bzw.  $3$  in  $\Gamma_A$  hängt wegen Satz 1 nur von  $N$  (und der fest vorgegebenen Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ) ab. Wir bezeichnen diese Anzahlen mit  $a_2(N)$  bzw.  $a_3(N)$  und werden folgenden Satz beweisen.

SATZ 3. — Es sei  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ . Die Anzahl der Konjugationsklassen von Elementen der Ordnung  $2$  bzw.  $3$  in einer zu  $F_N$  gehörigen Standgruppe  $\Gamma_A$  ist gegeben durch

$$(15) \quad \begin{cases} a_2(N) = 0, & \text{wenn } N \equiv 0 \pmod{4}. \text{ Sonst gilt,} \\ a_2(N) = \prod_{\substack{q|N \\ q \text{ Primzahl}}} (1 + \chi_{-4p}(q)); \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} a_3(N) = 0, & \text{wenn } N \equiv 0 \pmod{9}. \text{ Sonst gilt,} \\ a_3(N) = \prod_{\substack{q|N \\ q \text{ Primzahl}}} (1 + \chi_{-3p}(q)). \end{cases}$$

Mit  $\chi_D$  wird dabei der Charakter des quadratischen Zahlkörpers der Diskriminante  $D$  bezeichnet.

*Beweis.* — Die Fixpunkte in  $H$  der Elemente der Ordnung  $2$ , die zu einer bestimmten Konjugationsklasse von  $\Gamma_A$  gehören, bilden das Urbild in  $H$  eines Punktes  $x$  von  $H/\Gamma_A$ . Der Punkt  $x$  geht bei der Abbildung  $H/\Gamma_A \rightarrow X(p)$  in eine Quotientensingularität von  $X(p)$  der Ordnung  $2$  über. Es gibt  $h(-4p)$  Quotientensingularitäten der Ordnung  $2$  in  $X(p)$  (vgl. [15]). Die Hälfte davon kommt von speziellen Punkten von  $H^2$ , wo die zugehörige quadratische Form äquivalent zu  $[p, 0, p]$  ist, also  $N$  nicht darstellen kann (vgl. [10] Example am Schluss von 1.1). Also geht  $F_N$  nicht durch einen solchen Punkt hindurch. Die andere Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung  $2$  kommt von den speziellen Punkten in  $H^2$ , wo die zugehörige quadratische Form  $\varphi$  die Diskriminante  $-4p$  hat und  $\chi_p(\varphi) = 1$  ist. Die Anzahl der  $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen solcher

(positiv-definiten) quadratischen Formen ist  $(1/2)h(-4p)$ . Diese  $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen entsprechen so bijektiv den übrigen  $(1/2)h(-4p)$  Quotientensingularitäten der Ordnung 2 von  $X(p)$  [vgl. (10)]. Das Bild von  $H/\Gamma_A$  in  $X(p)$ , d. h. die Kurve  $F_N$ , geht also nur durch diese Quotientensingularitäten hindurch und zwar folgt jetzt aus Satz 1 und den Ueberlegungen von [10] Chap. 1, die in 1.2 wiederholt wurden, dass  $a_2(N)$  gleich der Anzahl der  $SL_2(\mathbb{Z})$ -inäquivalenten primitiven Darstellungen von  $N$  durch positiv-definite quadratische Formen der Diskriminante  $-4p$  ist. Also ist  $a_2(N)$  gleich der Anzahl der ganzen Ideale von  $\mathbb{Q}(\sqrt{-4p})$ , die primitiv sind, d. h. durch keine natürliche Zahl  $> 1$  teilbar sind, und deren Norm gleich  $N$  ist. Damit ist (15) bewiesen. Der Beweis von (16) geht genauso: Es gibt  $h(-3p)$  Quotientensingularitäten der Ordnung 3 in  $X(p)$ . Die Hälfte davon kommt von speziellen Punkten mit quadratischer Form  $[p, p, p]$  (und hat die oben angegebene tangentielle Darstellung mit  $r = 2$ ). Also geht  $F_N$  nicht durch einen solchen Punkt hindurch. Die übrigen  $(1/2)h(-3p)$  Quotientensingularitäten der Ordnung 3 entsprechen bijektiv den  $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen von positiv-definiten quadratischen Formen  $\varphi$  der Diskriminante  $-3p$  mit  $\chi_p(\varphi) = 1$ . Es ist  $a_3(N)$  gleich der Anzahl der  $SL_2(\mathbb{Z})$ -inäquivalenten primitiven Darstellungen von  $N$  durch Formen der Diskriminante  $-3p$ .

*Bemerkung.* — Da  $\chi_{-4p}(2) = \chi_{-3p}(3) = 0$  und

$$\chi_{-4p}(q) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \quad \text{für } q \text{ ungerade } (q \neq p),$$

$$\chi_{-3p}(q) = \left(\frac{-3}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \quad \text{für } q \neq 3 \text{ und } q \neq p,$$

kann man unter Verwendung der Darstellung von  $N$  als Produkt von  $N_1$  und  $N_2$  [siehe (5)] den Satz 3 auch so formulieren.

1) Wenn  $N \equiv 0 \pmod{4}$  oder  $N_1$  durch eine Primzahl  $q \equiv 3 \pmod{4}$  oder  $N_2$  durch eine Primzahl  $q \equiv 1 \pmod{4}$  teilbar ist, dann  $a_2(N) = 0$ . Anderenfalls

$$a_2(N) = 2^v,$$

wo  $v$  die Anzahl der ungeraden  $N$  teilenden Primzahlen ist.

2) Wenn  $N \equiv 0 \pmod{9}$  oder  $N_1$  durch eine Primzahl  $q \equiv 2 \pmod{3}$  oder  $N_2$  durch eine Primzahl  $q \equiv 1 \pmod{3}$  teilbar ist, dann  $a_3(N) = 0$ . Anderenfalls

$$a_3(N) = 2^\mu,$$

wo  $\mu$  die Anzahl der  $N$  teilenden von 3 verschiedenen Primzahlen ist.

1.4. Wir betrachten wieder den Fall  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ . Die Matrix  $A$  sei wie in 1.3 gewählt.

Die Abbildung  $H/\Gamma_A \rightarrow F_N$  ist also surjektiv vom Grad 1. Die Kurve  $F_N$  kann Doppelpunkte in  $X(p)$  haben. Sie kommen her von speziellen Punkten in  $H^2$ , wo die zugehörige quadratische Form mehrere ( $SL_2(\mathbb{Z})$ -inäquivalente) Darstellungen von  $N$  besitzt. Die Kurve  $H/\Gamma_A$  ist singularitätenfreies Modell von  $F_N$ . Wir wollen jetzt die Anzahl der

Spitzen von  $\Gamma_A$  bestimmen, d. h. die Anzahl der Punkte, durch die  $H/\Gamma_A$  zu einer kompakten Kurve  $\overline{H/\Gamma_A}$  kompaktifiziert wird. Diese Zahl, die wiederum nur von  $N$  und der gegebenen Primzahl  $p$  abhängt, werde mit  $\sigma(N)$  bezeichnet und auch Anzahl der Spitzen von  $F_N$  genannt. Um  $\sigma(N)$  zu bestimmen, betrachten wir die Kompaktifizierung  $\overline{X(p)}$  von  $X(p)$  durch  $h(p)$  Spitzen [7]. Die Fläche, die entsteht, wenn wir diese Spitzen von  $\overline{X(p)}$ , welche alle singuläre Punkte von  $\overline{X(p)}$  sind, auflösen, soll mit  $\tilde{X}(p)$  bezeichnet werden. Die Kurve  $F_N$  kann zu einer Kurve in  $\tilde{X}(p)$  erweitert werden, welche auch  $F_N$  genannt werden möge. Die Kurve  $\overline{H/\Gamma_A}$  ist singularitätenfreies Modell für die erweiterte Kurve  $F_N$ . Offensichtlich ist  $\sigma(N)$  gleich der Anzahl der irreduziblen Zweige (irreduziblen Kurvenkeime) von  $F_N$  in Punkten des Kurvensystems  $\tilde{X}(p) - X(p) = \bigcup S_k$ . Die Kurven  $S_k$  sind zyklisch angeordnet in  $h(p)$  Zyklen [7]. Dem Schnittpunkt von  $S_{k-1}$  und  $S_k$  ist ein in diesem Punkt zentriertes lokales Koordinatensystem  $u_k, v_k$  zugeordnet, sowie eine quadratische Form  $[N_{k-1}, M_k, N_k]$  der Diskriminante  $p$ . In diesem Koordinatensystem wird  $S_{k-1}$  durch  $u_k = 0$  und  $S_k$  durch  $v_k = 0$  gegeben. Den ganzen Idealen  $b$  von  $Q(\sqrt{p})$ , deren Norm  $N(b)$  gleich  $N$  ist, entsprechen Tripel  $(k | s, t)$  mit  $s \geq 0, t \geq 0$  und

$$s^2 N_{k-1} + st M_k + t^2 N_k = N.$$

Ein solches Tripel wiederum liefert eine lokale Kurve  $u_k^t = v_k^s$ , die in  $T_N$  enthalten ist (vgl. [7] 4.1, [9] 3.3 und [10] 1.4 (43)). Dabei ist  $(s, t) = n(b)$ , wo  $n(b)$  per definitionem die natürliche Zahl sein soll, so dass  $b$  durch  $n(b)$  teilbar und  $b/n(b)$  ein primitives Ideal ist, also durch keine natürliche Zahl  $> 1$  teilbar ist. Es sind dann

$$u_k^{t/n(b)} = \zeta v_k^{s/n(b)},$$

wo  $\zeta$  eine primitive  $n(b)$ -te Einheitswurzel ist, irreduzible Kurvenzweige von  $F_N$  und alle irreduziblen Kurvenzweige von  $F_N$  in Punkten von  $\tilde{X}(p) - X(p)$  können so erhalten werden. Also ist

$$(17) \quad \sigma(N) = \sum_{N(b)=N} \varphi(n(b)).$$

Die Summation ist über alle ganzen Ideale von  $Q(\sqrt{p})$  mit Norm  $N$ .

Es folgt, dass  $\sigma(N) \neq 0$  genau dann, wenn  $N_2$  ein Quadrat ist, d. h. wenn die Grundzahl der Quaternionenalgebra  $\mathcal{Q}_A$  gleich 1 ist. Wenn  $N_2$  kein Quadrat ist, dann ist  $H/\Gamma_A$  kompakt und  $F_N$  eine kompakte Kurve in der nichtkompakten Fläche  $X(p)$ . Das Ergebnis (17) lässt sich so umformulieren.

**SATZ 4.** — Es sei  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ . Wie in (5) sei  $N = N_1 N_2$ , wo  $N_1$  nur durch Primzahlen, die quadratische Reste, und  $N_2$  nur durch Primzahlen, die quadratische Nichtreste mod  $p$  sind, teilbar ist. Die Kurve  $F_N$  ist in  $X(p)$  kompakt (d. h.  $F_N$  hat keine Spitzen), wenn  $N_2$  kein Quadrat ist. Wenn  $N_2$  ein Quadrat ist, dann gilt für die Anzahl der Spitzen

$$(18) \quad \sigma(N) = \sum_{d|N_1} \varphi((d, N_1/d)) \cdot \varphi(\sqrt{N_2}).$$

*Beweis.* — Die durch (17) gegebene zahlentheoretische Funktion  $\sigma(N)$  ist multiplikativ, ebenso die rechte Seite von (18). Es genügt deshalb (18) zu beweisen, wenn  $N = N_1 = q^r$  mit  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$  oder  $N = N_2 = q^{2r}$  mit  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ . Im ersten Fall sei  $(q) = \mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ . Die Ideale  $b$  in (17) sind dann  $\mathfrak{q}^i(\mathfrak{q}')^j$  mit  $i+j = r$ . Es ist aber  $n(\mathfrak{q}^i(\mathfrak{q}')^j) = q^{\min(i,j)} = (q^i, q^j)$ . Damit folgt (18) für  $N = N_1 = q^r$ . Wenn  $N = N_2 = q^{2r}$ , dann ist  $b = (q^r)$  das einzig mögliche Ideal in (17), was wiederum (18) ergibt.

1.5. Wir haben in 1.4 die kompakte Fläche  $\tilde{X}(p)$  betrachtet, die übrigens noch nicht singularitätenfrei ist, da die Quotientensingularitäten nicht aufgelöst wurden. Für  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$  wurde die irreduzible Kurve  $F_N$  in  $\tilde{X}(p)$  und ihr singularitätenfreies Modell  $\overline{H/\Gamma_A}$  untersucht. Auf Grund der Sätze 2, 3, 4 kann die Eulersche Zahl des singularitätenfreien Modells, die wir mit  $e(N)$  bezeichnen wollen ( $e(N) = 2 - 2g(N)$ , wo  $g(N)$  das Geschlecht ist), mit Hilfe einer klassischen Formel (vgl. z. B. [7], 4.3, (21)) berechnet werden.

SATZ 5. — Es sei  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ . Die Eulersche Zahl  $e(N)$  des singularitätenfreien Modells der (kompakten) irreduziblen Kurve  $F_N$  auf der Modulfläche  $\tilde{X}(p)$  wird durch folgende Formel gegeben

$$(19) \quad e(N) = \text{vol}(F_N) + \frac{a_2(N)}{2} + \frac{2}{3} a_3(N) + \sigma(N),$$

wo  $\text{vol}(F_N)$ ,  $a_2(N)$ ,  $a_3(N)$ ,  $\sigma(N)$  in Satz 2 (i), Satz 3 und Satz 4 bestimmt wurden.

In der Bezeichnung  $\text{vol}(F_N)$ ,  $a_2(N)$ ,  $a_3(N)$ ,  $\sigma(N)$ ,  $e(N)$  ist die Abhängigkeit von  $p$  nicht mehr zum Ausdruck gebracht. Durch die Primzahl  $p$  wird die Darstellung von  $N$  als Produkt  $N_1 N_2$  geregelt, in der Tat hängen dann  $\text{vol}(F_N)$ ,  $\dots$ ,  $e(N)$  nur von dem Zahlenpaar  $N_1, N_2$  ab. Wir geben jetzt in zwei Tabellen einige Werte von  $\text{vol}$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $\sigma$ ,  $e$  in Abhängigkeit von  $N_1, N_2$  an. Für die Rechnung ist es nützlich festzustellen, dass

$$\text{vol}(F_N) = -\frac{1}{6} \mu(N_1) \cdot \varphi(N_2),$$

wo  $\mu(N_1)$  der Index von  $\Gamma_0(N_1)$  in  $SL_2(\mathbb{Z})$  ist, und

$$\sigma(N) = \sigma_0(N_1) \cdot \varphi(\sqrt{N_2}),$$

wo  $\sigma_0(N_1)$  die Anzahl der Spitzen von  $H/\Gamma_0(N_1)$  ist und  $\varphi(\sqrt{N_2})$  gleich 0 gesetzt wird, wenn  $N_2$  kein Quadrat ist. Die Werte von  $\mu$  und  $\sigma_0$  wurden nämlich in [2] tabelliert. In den beiden folgenden Tabellen werden in vier zusätzlichen Spalten weitere Werte angegeben. Diese werden später erläutert. In den Tabellen sind Paare  $N_1, N_2$  ausgewählt, die eine besondere Rolle spielen werden.

1.6. Die Involution  $T : (z_1, z_2) \rightarrow (z_2, z_1)$  von  $H^2$  induziert Involutionen von  $X(p)$ ,  $\overline{X}(p)$  und  $\tilde{X}(p)$ , die auch mit  $T$  bezeichnet werden sollen. Dabei geht die Kurve  $F_N$  in sich über. Nach [16] und [7] 5.4 besteht die Fixpunktmenge von  $T$  auf  $\tilde{X}(p)$  aus  $F_1 \cup F_p$ , einem isolierten Fixpunkt  $l$  auf  $X(p)$ , falls  $p \equiv 1 \pmod{8}$ , und einem isolierten

TABELLE 1

$N_1$	$N_2$	-6 vol	$a_2$	$a_3$	$\sigma$	$e$	$c_1$	$f$	$e^*$	$c_1^*$
1	1	1	1	1	1	2	1			
2	1	3	1	0	2	2	1	2	2	
3	1	4	0	1	2	2	1	2	2	
4	1	6	0	0	3	2	1	2	2	
1	4	2	0	2	1	2	1	2	2	
5	1	6	2	0	2	2	0	2	2	1
1	6	2	2	2	0	2	0	2	2	1
6	1	12	0	0	4	2	0	2	2	1
7	1	8	0	2	2	2	0	2	2	1
8	1	12	0	0	4	2	0	2	2	1
1	9	6	2	0	2	2	0	2	2	1
9	1	12	0	0	4	2	0	2	2	1
1	10	4	0	4	0	2	0	2	2	1
11	1	12	0	0	2	0	-2	4	2	1
3	4	8	0	2	2	2	0	2	2	1
1	14	6	2	0	0	0	-2	4	2	1
1	15	8	0	2	0	0	-2	4	2	1
1	16	8	0	2	2	2	0	2	2	1
5	4	12	0	0	2	0	-2	4	2	1
1	24	8	0	2	0	0	-2	4	2	1
1	26	12	0	0	0	-2	-4	6	2	1
1	36	12	0	0	2	0	-2	4	2	1

Fixpunkt  $P_0$  auf derjenigen Kurve  $S_0 \subset \tilde{X}(p) - X(p)$ , für die  $T(S_0) = S_0$ . Die Kurve  $F_4$  (und keine andere Kurve  $F_N$ ) geht durch  $P_0$ . Vgl. hierzu 1.4 und [7] 5.5. Der Punkt  $l$  ist eine Quotientensingularität der Ordnung 2. Bläst man diese auf in eine rationale Kurve  $L$  der Selbstschnittzahl  $-2$ , dann hat das auf die Auflösung angehobene  $T$  zwei isolierte Fixpunkte auf  $L$ , die in [7] 5.4 (8) mit  $P_3$  und  $P_4$  bezeichnet wurden. Man beachte jedoch, dass wir hier in  $\tilde{X}(p)$  arbeiten, wo die Quotientensingularitäten noch nicht aufgelöst wurden. Die Involution  $T$  induziert für jeden speziellen Punkt  $z$  einen Isomorphismus  $\mathcal{M}_z \rightarrow \mathcal{M}_{Tz}$ , der die Orientierung *umkehrt* und  $\varphi$  in  $\varphi_{Tz}$  überführt. Wenn  $z$  einen Fixpunkt von  $T$  in  $X(p)$  repräsentiert und  $B$  ein Element von  $SL_2(\theta)$  ist mit  $B(Tz) = z$ , dann induziert  $BT$  einen orientierungsumkehrenden Automorphismus  $t$  von  $\mathcal{M}_z$  mit  $\varphi_z \circ t = \varphi_z$ .

Zu einer quadratischen Form  $\varphi$  definiert auf dem orientierten Gitter  $M$  kann man die Form  $\varphi'$  betrachten, die auf dem umgekehrt orientierten Gitter  $M$  erklärt ist, aber mit  $\varphi$  als Funktion  $M \rightarrow Z$  übereinstimmt. Die Form  $\varphi$  (und auch ihre Klasse) heisst ambig, wenn  $\varphi$  und  $\varphi'$  orientierungserhaltend äquivalent sind, d. h. wenn es einen orientierungsumkehrenden Automorphismus  $t$  von  $M$  gibt, der die Funktion  $\varphi : M \rightarrow Z$  in sich überführt. Wenn  $\text{Aut}(\varphi) = \{\pm 1\}$ , dann ist  $t$  bis auf Multiplikation mit  $-1$  eindeutig bestimmt.

Wenn der spezielle Punkt  $z \in H^2$  einen Fixpunkt von  $T$  in  $X(p)$  repräsentiert, dann ist  $\varphi_z$  ambig und  $t : \mathcal{M}_z \rightarrow \mathcal{M}_z$  ist (bis auf Multiplikation mit  $-1$ ) jedenfalls dann

TABELLE 2

$N_1$	$N_2$	-6 vol	$a_2$	$a_3$	$\sigma$	$e$	$c_1$	$f$	$e^*$	$c_1^*$
10	1	18	2	0	4	2	-2	2	2	0
12	1	24	0	0	6	2	-2	2	2	0
13	1	14	2	2	2	2	-2	2	2	0
14	1	24	0	0	4	0	-4	4	2	0
15	1	24	0	0	4	0	-4	4	2	0
16	1	24	0	0	6	2	-2	2	2	0
17	1	18	2	0	2	0	-4	4	2	0
2	9	18	2	0	4	2	-2	2	2	0
19	1	20	0	2	2	0	-4	4	2	0
1	21	12	4	0	0	0	-4	4	2	0
1	22	10	2	4	0	2	-2	2	2	0
23	1	24	0	0	2	-2	-6	6	2	0
1	25	20	0	2	4	2	-2	2	2	0
7	4	16	0	4	2	2	-2	2	2	0
3	10	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
5	6	12	4	0	0	0	-4	4	2	0
1	34	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
1	35	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
9	4	24	0	0	4	0	-4	4	2	0
1	38	18	2	0	0	-2	-6	6	2	0
1	39	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
1	40	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
7	6	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
11	4	24	0	0	2	-2	-6	6	2	0
1	54	18	2	0	0	-2	-6	6	2	0
1	56	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
1	60	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
11	6	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
1	84	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
1	90	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0

eindeutig bestimmt, wenn  $\varphi_z$  eine zu  $p$  teilerfremde Zahl darstellt. (Die Diskriminante von  $\varphi_z$  ist durch  $p$  teilbar.)

Wir wollen jetzt an das Verhalten der Quotientensingularitäten der Ordnung 2 und 3 unter  $T$  erinnern. Der Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 2 ist die Form  $[p, 0, p]$  zugeordnet (siehe 1.3, Beweis von Satz 3). Sie ist ambig. Eine solche Quotientensingularität liegt auf  $F_p$ , ist also ein Fixpunkt von  $T$ . Die andere Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 2 entspricht bijektiv den  $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen positiv-definiten quadratischer Formen der Diskriminante  $-4p$  mit  $\chi_p(\varphi) = 1$ . Hiervon ist die Klasse von  $[1, 0, p]$  ambig, sie ist die einzige ambige Klasse mit  $\chi_p(\varphi) = 1$ , wenn  $p \equiv 5 \pmod{8}$ . Die entsprechende Quotientensingularität  $e$  ist der Schnittpunkt von  $F_1$  und  $F_p$  in  $X(p)$ , also Fixpunkt von  $T$ . Für  $p \equiv 1 \pmod{8}$  kommt noch eine ambige Klasse hinzu, nämlich die von  $[2, 2, (1/2)(1+p)]$ . Diese Form stellt weder 1 noch  $p$  dar. Die entsprechende Quotientensingularität ist der oben erwähnte isolierte Fixpunkt  $l$  von  $T$  in  $X(p)$ . Die Kurve  $F_2$  geht durch  $l$ . Die übrigen Quotien-



tensingularitäten der Ordnung 2 mit  $\chi_p(\varphi_z) = 1$  werden durch T paarweise miteinander vertauscht. Für die quadratischen Formen entspricht dies der Isomorphie  $\varphi_{Tz} \simeq \varphi'_z$ . Sie sind alle nicht ambig.

Zur Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 3 gehört die Form  $[p, p, p]$ . Sie ist ambig. Eine solche Quotientensingularität liegt auf  $F_p$ , ist also ein Fixpunkt von T. Die andere Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 3 entspricht bijektiv den  $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen positiv-definiter quadratischer Formen  $\varphi$  der Diskriminante  $-3p$  mit  $\chi_p(\varphi) = 1$ . Die Klasse von  $[1, 1, (1/4)(3p+1)]$  ist ambig, und sie ist die einzige ambige Klasse, wenn  $p \equiv 2 \pmod{3}$ . Die entsprechende Quotientensingularität  $b_1$  liegt auf  $F_1$ , ist also ein Fixpunkt von T. Für  $p \equiv 1 \pmod{3}$  kommt noch eine ambige Klasse hinzu, nämlich die von  $[3, 3, (1/4)(p+3)]$ . Diese Form stellt  $p$  dar. Die entsprechende Quotientensingularität  $b_2$  liegt also auf  $F_p$  und ist ein Fixpunkt von T.

Der Punkt  $b_2$  ist ein Schnittpunkt von  $F_3$  und  $F_p$  in  $X(p)$ . Die übrigen Quotientensingularitäten der Ordnung 3 mit  $\chi_p(\varphi) = 1$  werden durch T paarweise miteinander vertauscht.

Die erwähnten ambigen Klassen, welche die 1 darstellen, entsprechen den Hauptidealklassen von  $\mathbb{Q}(\sqrt{-4p})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3p})$ , während die zusätzlichen ambigen Klassen Idealklassen entsprechen, die in  $\mathbb{Q}(\sqrt{-4p})$  bzw.  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3p})$  durch ein ganzen Ideal der Norm 2 bzw. 3 repräsentiert werden können.

Die Kurve  $F_N$  auf  $\tilde{X}(p)$  wird durch die Involution T von  $\tilde{X}(p)$  in sich übergeführt. Es gibt nur endlich viele Fixpunkte auf  $F_N$ , sofern  $N \neq 1$  und  $N \neq p$ . Wir beschränken uns wieder auf den Fall  $\binom{N}{p} = 1$  mit  $N > 1$  und betrachten ein singularitätenfreies Modell  $\overline{H/\Gamma_A}$  von  $F_N$ . Die Involution T lässt sich auf  $\overline{H/\Gamma_A}$  anheben. Es sei  $f(N)$  die Anzahl der Fixpunkte auf  $\overline{H/\Gamma_A}$ . Ihre Anzahl wird durch folgenden Satz bestimmt.

SATZ 6. — Es sei  $\binom{N}{p} = 1$  und  $N \geq 5$ . Für die Involution T auf einem singularitätenfreien Modell  $\overline{H/\Gamma_A}$  von  $F_N$  gilt dann

- (i) T vertauscht paarweise die Spitzen, d. h. die Punkte von  $\overline{H/\Gamma_A} - H/\Gamma_A$ ;
- (ii) T vertauscht paarweise die Punkte von  $H/\Gamma_A$ , die von Punkten in H mit nicht-trivialer Isotropiegruppe von  $\Gamma_A$  herrühren;
- (iii) die Anzahl der Fixpunkte  $f(N)$  von T auf  $\overline{H/\Gamma_A}$  ist gegeben durch

$$(20) \quad \begin{cases} f(N) = h(-4N), & \text{wenn } N \not\equiv 3 \pmod{4}, \\ f(N) = h(-4N) + h(-N), & \text{wenn } N \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

[in diesem Fall ist  $h(-4N) = h(-N)$ , wenn  $N \equiv 7 \pmod{8}$ , und  $h(-4N) = 3h(-N)$ , wenn  $N \equiv 3 \pmod{8}$ ];

- (iv) bei der Abbildung  $H/\Gamma_A \rightarrow X(p)$  gehen die Fixpunkte von T auf  $\overline{H/\Gamma_A}$  in  $f(N)$  Schnittpunkte von  $F_N$  mit  $F_p$  über und zwar in die  $h(-4N)$  Punkte von  $X(p)$ , die von speziellen

Punkten  $z \in H^2$  mit  $\varphi_z \simeq [p, 0, N]$  herrühren und darüberhinaus für  $N \equiv 3 \pmod{4}$  in die  $h(-N)$  Punkte von  $X(p)$ , die von speziellen Punkten  $z \in H^2$  mit  $\varphi_z \simeq [p, p, (1/4)(p+N)]$  herrühren.

*Beweis.* — Die in 1.4 angegebenen Kurvenzweige  $u_k^{t/n(b)} = \zeta v_k^{s/n(b)}$  entsprechen den Paaren  $(b, \zeta)$  bestehend aus einem Ideal positiver Norm von  $Q(\sqrt{p})$  und einer primitiven  $n(b)$ -ten Einheitswurzel. Bei der Involution geht  $b$  in  $b'$  über. Wenn  $b = b'$ , dann  $b = (n)$  oder  $b = (n\sqrt{p})$ , wo  $n$  eine natürliche Zahl ist. In diesem Fall geht die primitive  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta$  bei der Involution in  $\zeta^{-1}$  über. Nur die Paare  $((1), 1)$ ,  $((2), -1)$ ,  $((\sqrt{p}), 1)$ ,  $((\sqrt{p}), -1)$  bleiben fest. Es folgt, dass unter allen  $F_N$  nur  $F_1, F_4, F_p, F_{4p}$  eine Spitze haben, die bei  $T$  invariant ist. Damit ist (i) bewiesen.

Die folgende triviale Bemerkung über quadratische Formen wird nützlich sein. Es sei  $\varphi : M \rightarrow Z$  eine positiv-definite ganzzahlige quadratische Form. Die Elemente  $e_1, e_2 \in M$  seien  $Z$ -linear unabhängig. Es sei  $t$  ein Automorphismus von  $M$ , der die Orientierung ändert, mit  $\varphi \circ t = \varphi$  und  $t(e_1) = \pm e_1$ . Dann gilt  $t(e_2) = \mp e_2$  genau dann, wenn  $\varphi | Z e_1 + Z e_2$  gegeben wird durch  $[\varphi(e_1), 0, \varphi(e_2)]$ .

Wir betrachten jetzt die gegebene Kurve  $F_N$  mit  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$  und  $N \geq 5$  und eine weitere Kurve  $F_M$ . (Es sei  $M \neq N$ ; die Zahl  $M$  braucht nicht zu  $p$  teilerfremd zu sein.) Auf den singularitätenfreien Modellen von  $F_M$  und  $F_N$  möge es Fixpunkte von  $T$  geben, die in  $X(p)$  in ein und denselben Punkt  $z$  übergehen. (Dabei sind die Fixkurven  $F_1$  und  $F_p$  als  $F_M$  zugelassen.) Der Punkt  $z$  kommt dann von einem speziellen Punkt  $z \in H^2$ , und es gibt Elemente  $e_1, e_2 \in \mathcal{M}_z$  mit  $\varphi_z(e_1) = M, \varphi_z(e_2) = N$ , so dass für den (bis auf Multiplikation mit  $-1$  wohlbestimmten) orientierungsumkehrenden Automorphismus  $t$  von  $\mathcal{M}_z$  gilt :  $t(e_1) = \pm e_1$  und  $t(e_2) = \mp e_2$ . Die Form  $\varphi_z | Z e_1 + Z e_2$  wird dann nach vorstehender trivialer Bemerkung gegeben durch  $[M, 0, N]$ . Sie hat Diskriminante  $-4MN$ . Da die Diskriminante von  $\varphi_z$  durch  $p$  teilbar ist, folgt  $M \equiv 0 \pmod{p}$ . Deshalb kann ein Fixpunkt der Involution  $T$  des singularitätenfreien Modells  $H/\Gamma_A$  von  $F_N$  bei der natürlichen Abbildung  $H/\Gamma_A \rightarrow X(p)$  nicht in  $F_1 \cup \{l\} \cup \{b_2\}$  abgebildet werden, da sonst  $M = 1$  bzw.  $2$  bzw.  $3$  genommen werden könnte. Also wird ein solcher Fixpunkt in  $F_p$  abgebildet und zwar auf einen regulären Punkt von  $X(p)$ , da den auf  $F_p$  liegenden Quotientensingularitäten (abgesehen von  $e = F_1 \cup F_p$  und  $b_2$ ) als speziellen Punkten die Form  $[p, 0, p]$  bzw.  $[p, p, p]$  zugeordnet ist, die  $N$  nicht darstellt. Es folgt, dass die in (ii) angegebenen Punkte von  $H/\Gamma_A$  nicht Fixpunkte der Involution  $T$  von  $H/\Gamma_A$  sein können.

Der Beweis von (iii) lässt sich jetzt zu Ende führen. Wir betrachten die Form  $\psi = [p, 0, N]$  definiert auf  $Z \oplus Z$  und die in 1.2 besprochenen Einbettungen  $j : Z \oplus Z \rightarrow \mathcal{M}_z$  mit  $\varphi_z \cdot j = \psi$ . Wenn eine solche Einbettung gegeben ist, dann repräsentiert  $z$  in  $X(p)$  einen Punkt von  $F_p$ , also einen Fixpunkt der Involution  $T$  von  $X(p)$ . Setzt man  $j(1, 0) = e_1$  und  $j(0, 1) = e_2$ , dann gilt für den (bis auf Multiplikation mit  $-1$ ) wohlbestimmten orientierungsumkehrenden Automorphismus  $t$  von  $\mathcal{M}_z$  die Gleichung  $t(e_1) = \pm e_1$ , da  $F_p$  Fixkurve ist, und nach der trivialen Bemerkung auch  $t(e_2) = \mp e_2$ .

Die Einbettung  $j$  liefert deshalb einen Fixpunkt von  $T$  auf dem singularitätenfreien Modell von  $F_N$ , sofern  $e_2$  ein primitives Element von  $\mathcal{M}_2$  ist, und jeder Fixpunkt kann so erhalten werden. Also gilt nach 1.2 :

$$\begin{aligned} f(N) &= h(-4N), & \text{wenn } N \equiv 0 \pmod{4}, \\ f(N) &= h(-4N) + h(-N), & \text{wenn } N \not\equiv 0 \pmod{4}, \end{aligned}$$

wie zu beweisen war [vgl. 1.2 (11), (12)]. Die in (iii) angegebene Beziehung zwischen  $h(-4N)$  und  $h(-N)$  folgt aus einer klassischen Formel (vgl. [10], 1.2, Prop. 1). Zu (iv) ist nur festzustellen, dass nach 1.2 (10) :

$$s([p, 0, N]) = h(-4N) \quad \text{und} \quad s\left(\left[p, p, \frac{1}{4}(p+N)\right]\right) = h(-N)$$

und dass  $[p, p, (1/4)(p+N)]$  die Form  $[p, 0, N]$  darstellt. Es ist übrigens  $[p, p, (1/4)(p+N)] \simeq [N, N, (1/4)(p+N)]$ .

*Bemerkungen* : 1) Die Zahl  $f(N)$  ist unabhängig von der Aufspaltung  $N = N_1 N_2$ , also auch unabhängig von der Quaternionenalgebra  $\mathcal{Q}_A$  der Grundzahl  $N'_2$  (siehe 1.1). Es hat sich für alle Fälle die Zahl ergeben, die von der Erweiterung der Gruppe

$$\Gamma_0(N) \quad \text{zu} \quad \Gamma_*(N) = \Gamma_0(N) \cup \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 0 & -N^{-1/2} \\ N^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

bekannt ist [4]. Dieses Ergebnis von Fricke entspricht  $N_2 = 1$  (vgl. [7], 5.3, Remark). Die Werte von  $h(-4N)$  wurden in [2] tabelliert für die Berechnung des Geschlechts von  $\overline{H/\Gamma_*(N)}$ .

2) Da  $F_2, F_3, F_4$  das Geschlecht 0 haben (vgl. Tabelle 1) ist  $f(2) = f(3) = f(4) = 2$ . Für das singularitätenfreie Modell von  $F_2$  wird einer der Fixpunkte von  $T$  auf  $l$  abgebildet, der andere auf denjenigen Punkt  $z_2$  in  $X(p)$  mit  $\varphi_{z_2} \simeq [p, 0, 2]$ . Für  $F_3$  wird einer der Fixpunkte auf  $b_2$  abgebildet, der andere auf denjenigen Punkt  $z_3$  in  $X(p)$  mit  $\varphi_{z_3} \simeq [p, 0, 3]$ . Für  $F_4$  bleibt eine Spitze fest, der andere Fixpunkt wird auf denjenigen Punkt  $z_4$  in  $X(p)$  abgebildet mit  $\varphi_{z_4} \simeq [p, 0, 4]$ . Man beachte, dass  $s([p, 0, 2]) = h(-8)$ ,  $s([p, 0, 3]) = h(-12)$ ,  $s([p, 0, 4]) = h(-16)$  und dass diese Klassenzahlen gleich 1 sind.

Für die Kurve  $F_N$  von  $\tilde{X}(p)$  mit  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$  und  $N > 1$  haben wir ein singularitätenfreies Modell  $\overline{H/\Gamma_A}$  benutzt. In der Fläche  $\tilde{X}(p)/T$  sind Kurven  $F_N^*$  als Bilder der  $F_N$  definiert. Die Kurve  $F_N^*$  hat das singularitätenfreie Modell  $\overline{(H/\Gamma_A)}/T$ , dessen Eulerzahl wir mit  $e^*(N)$  bezeichnen wollen. Es ist dann

$$(21) \quad e^*(N) = \frac{1}{2}(e(N) + f(N)).$$

In den Tabellen 1, 2 von 1.6 wurden in einigen Fällen die Werte von  $f(N)$  und  $e^*(N)$  angegeben. In diesen Beispielen ist stets  $e^* = 2$ . Wie wir sehen werden, gibt es noch viele andere Fälle mit  $e^* = 2$ . Es ist aber  $\lim e^*(N) = -\infty$  für  $N \rightarrow \infty$ .

## 2. Die Kurven $F_N$ und $F_N^*$ auf den desingularisierten Hilbertschen Modulflächen

2.1. Aus der Hilbertschen Modulfläche  $X(p) = H^2/SL_2(\mathcal{O})$  entsteht durch Hinzufügung von  $h(p)$  Spitzen die kompakte Fläche  $\overline{X(p)}$ , die endlich viele singuläre Punkte hat, nämlich die erwähnten Spitzen und die Quotientensingularitäten von  $X(p)$ . Löst man die Spitzen auf, dann erhält man die in 1.4 eingeführte Fläche  $\tilde{X}(p)$ . Die singularitätenfreie algebraische Fläche, die aus  $\tilde{X}(p)$  durch Auflösung der Quotientensingularitäten in der kanonischen minimalen Weise entsteht, soll  $Y(p)$  genannt werden ([7], [8]). Die Kurven  $F_N$  und  $T_N$  lassen sich auch als Kurven in  $Y(p)$  auffassen.

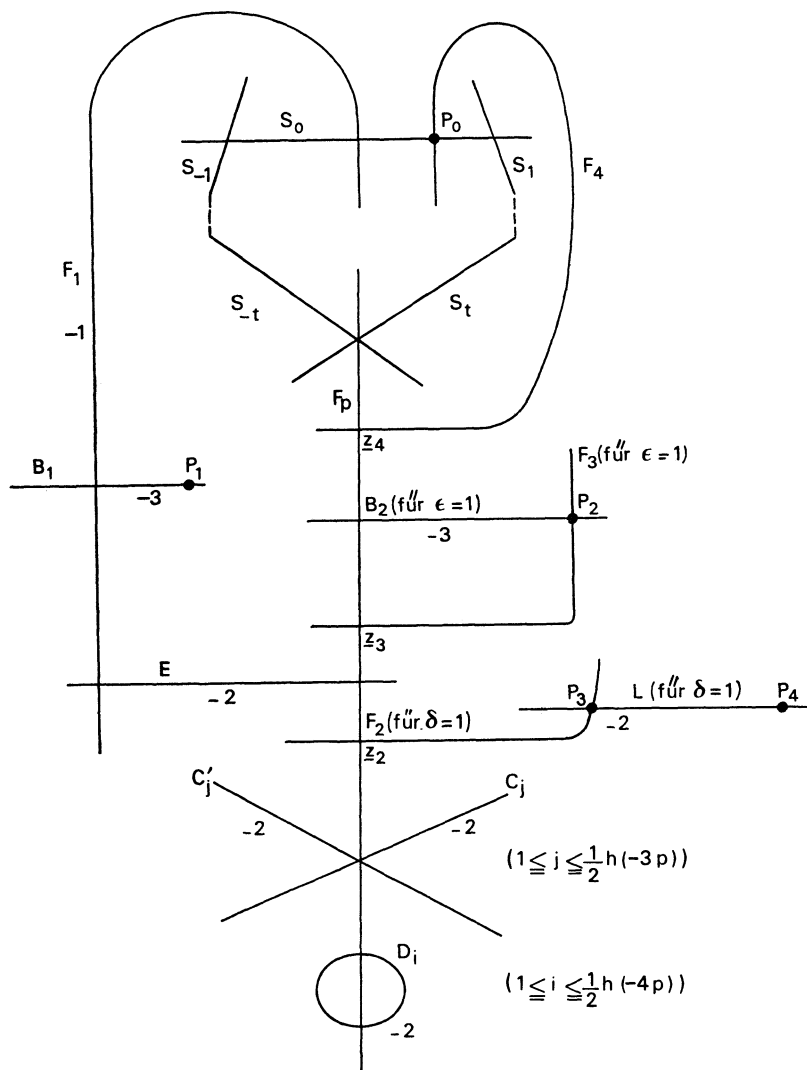
In 1.6 wurden die Quotientensingularitäten und ihr Verhalten unter der Involution  $T$  beschrieben. Auf der Fläche  $Y(p)$  operiert  $T$  ebenfalls. Auf  $Y(p)$  hat man die folgende grundlegende  $T$ -symmetrische Konfiguration von Kurven ([7], 5.3, (8) und [8], II). Bei der Beschreibung spielt die Restklasse von  $p$  modulo 24 eine Rolle. Es werde deshalb wie in [7] gesetzt :

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 & \quad \text{für } p \equiv 1 \pmod{3} & \quad \text{und} & \quad \varepsilon = 0 & \quad \text{für } p \equiv 2 \pmod{3}, \\ \delta = 1 & \quad \text{für } p \equiv 1 \pmod{8} & \quad \text{und} & \quad \delta = 0 & \quad \text{für } p \equiv 5 \pmod{8}. \end{aligned}$$

In dieser Konfiguration sind alle irreduziblen Kurven singularitätenfrei (bis auf  $p = 5$ , wo  $t = 0$  und  $S_0$  einen Doppelpunkt hat und auch  $F_4$  einen Doppelpunkt hat). Alle Kurven bis auf  $F_p$  sind rational. Im einzelnen entsteht diese Konfiguration so :

Die Auflösung der Hauptspitze wurde eingezeichnet. Die Kurven sind mit  $S_k$  bezeichnet ( $k \bmod (2t+1)$ ) mit  $T(S_k) = S_{-k}$ . Die zugehörigen Ideale  $b$ , siehe 1.4, sind genau die Hauptideale. Die Zyklen von Kurven  $S_k$ , die zu den anderen Spitzen gehören, werden durch  $T$  paarweise vertauscht. Sie sind nicht in die Konfiguration eingetragen. Die Kurven  $F_2, F_3$  treffen die Zyklen der Spitzenaufösungen in jeweils 2 Punkten, da  $\sigma(2) = \sigma(3) = 2$ . Diese Schnittpunkte wurden nicht eingezeichnet. Auch die weiteren Schnittpunkte von  $F_4$  mit den Zyklen (für  $\delta = 1$  und  $\sigma(4) = 3$ ) und mit  $V_j, V'_j$  für  $\delta = 0$  sind nicht berücksichtigt. Für die folgenden Ausführungen vergleiche 1.6.

Jede Quotientensingularität der Ordnung 2 mit zugehöriger quadratischer Form  $[p, 0, p]$  wird aufgeblasen in eine Kurve  $D_i$  der Selbstschnittzahl  $-2$  mit  $T(D_i) = D_i$ . Jede Quotientensingularität der Ordnung 3 mit zugehöriger quadratischer Form  $[p, p, p]$  wird aufgeblasen in zwei Kurven  $C_j, C'_j$  der Selbstschnittzahl  $-2$ , die unter der Involution  $T$  vertauscht werden ( $T(C_j) = C'_j$ ). Man beachte, dass in diesem Fall  $r = 2$  ist (vgl. 1.3). Die Quotientensingularität  $e$  der Ordnung 2 (quadratische Form  $[1, 0, p]$ ) wird aufgeblasen in eine Kurve  $E$  der Selbstschnittzahl  $EE = -2$ . Die Quotientensingularität  $l$  der Ordnung 2 wird aufgeblasen in eine Kurve  $L$  mit  $LL = -2$ , auf der  $T$  die



$$\begin{array}{l} \frac{-2}{U_i \ (1 \leq i \leq ((1/2)h(-4p) - 1 - \delta)/2)}, \quad \frac{-2}{U'_i} \\ \frac{-3}{V_j \ (1 \leq j \leq ((1/2)h(-3p) - 1 - \epsilon)/2)}, \quad \frac{-3}{V'_j} \end{array}$$

isolierten Fixpunkte  $P_3, P_4$  hat. Durch  $P_3$  geht die Kurve  $F_2$ . Die Quotientensingularitäten  $b_1, b_2$  der Ordnung 3 werden aufgeblasen in Kurven  $B_1, B_2$  der Selbstschnittzahl  $-3$ , auf denen T jeweils einen isolierten Fixpunkt  $P_1$  bzw.  $P_2$  hat. Durch  $P_2$  geht die Kurve  $F_3$ . Die übrigen Quotientensingularitäten der Ordnung 2 bzw. 3 treten in Paaren auf. Sie werden aufgelöst in Kurven  $U_i, U'_i$  bzw.  $V_j, V'_j$  der Selbstschnittzahl  $-2$

bzw.  $-3$ , die unter  $T$  paarweise miteinander vertauscht werden ( $T(U_i) = U'_i$  und  $T(V_j) = V'_j$ ).

2.2. Es soll der Wert der ersten Chernschen Klasse  $c_1$  von  $Y(p)$  auf  $F_N$  berechnet werden. Das wurde im wesentlichen in [7] 4.3 durchgeführt, allerdings waren dort nur Kurven  $F_N$  mit  $N_2 = 1$  betrachtet worden.

Die duale Homologieklassse von  $c_1$  kann als Element  $\gamma$  von  $H_2(Y(p), \mathbb{R})$  aufgefasst werden. Dann gilt ([7], 3.2, (9), 4.3) :

$$(1) \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{1}{3}(B_1 + B_2) + \frac{1}{3} \sum_j (V_j + V'_j) + \sum S_k,$$

wo  $k$  alle Zyklen durchläuft, die auftretenden Kurven als Homologieklassen aufgefasst werden und  $\gamma_0$  eine Homologieklassse des regulären Ortes  $X_0$  von  $X(p)$  ist, deren duale Kohomologieklassse in  $X_0$  durch eine geschlossene Differentialform  $\tilde{\gamma}_0$  mit kompaktem Träger repräsentiert werden kann. Die Form  $\tilde{\gamma}_0$  wird durch »Abschneiden« aus

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}(y_1^{-2} dx_1 dy_1 + y_2^{-2} dx_2 dy_2), \quad z_j = x_j + iy_j,$$

erhalten ([7], 3.4). Die Form  $\omega$  ist die  $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ -invariante Chernsche Form. Da die Kurven  $F_N$  von Graphen gebrochener linearer Transformationen (1.3) herrühren, ist

$$(2) \quad \int_{F_N} \omega = 2 \text{vol}(F_N),$$

und die Form  $\tilde{\gamma}_0$  ist so beschaffen, dass

$$(3) \quad \gamma_0 \cdot F_N = \int_{F_N} \tilde{\gamma}_0 = \int_{F_N} \omega = 2 \text{vol}(F_N).$$

Der Wert von  $c_1$  auf der Kurve  $F_N \subset Y(p)$  werde mit  $c_1[F_N]$  bezeichnet. Der Einfachheit halber werde wieder  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$  vorausgesetzt. Dem Beweis des Satzes 3 im 1.3 entnimmt man, dass

$$a_3(N) = F_N \cdot (B_1 + B_2 + \sum (V_j + V'_j)).$$

Aus (1) und (3) folgt

$$(4) \quad c_1[F_N] = 2 \text{vol}(F_N) + \frac{1}{3} a_3(N) + F_N \sum S_k.$$

Die Schnittzahlsumme  $\sum F_N S_k$  kann nach 1.4 bestimmt werden : Jede Spitze von  $F_N$  mit dem Kurvenkeim

$$u_k^{t/n(b)} = \zeta v_k^{s/n(b)},$$

liefert für diese Summe den Beitrag  $(s+t)/n(b)$ , der stets  $\geq 1$  ist. Für das ganze Ideal  $b$  von  $Q(\sqrt{p})$  mit  $N(b) = N$  definieren wir die nicht negative Zahl

$$(5) \quad \rho(b) = (s+t)/n(b) - 1$$

und erhalten

$$F_N \sum S_k = \sigma(N) + \sum_{\substack{b \\ N(b)=N}} \varphi(n(b)) \rho(b).$$

Aus 1.5 (19) folgt

$$(6) \quad c_1[F_N] = 2e(N) - a_2(N) - a_3(N) - \sigma(N) + \rho(N),$$

wo per definitionem

$$\rho(N) = \sum_{\substack{b \\ N(b)=N}} \varphi(n(b)) \rho(b).$$

Wir definieren

$$(7) \quad c_1(N) = 2e(N) - a_2(N) - a_3(N) - \sigma(N).$$

Für eine Spitze von  $F_N$  mit dem oben angegebenen Kurvenkeim ist bei der üblichen Aufspaltung  $N = N_1 N_2$  die Zahl  $N_2$  eine Quadratzahl ( $N_2 = r^2$ ). Wir haben

$$N = s^2 N_{k-1} + st M_k + t^2 N_k \quad \text{mit } r|s \text{ und } r|t.$$

(Der Leser möge die Faktoren  $N_1, N_2$  der Aufspaltung von  $N$  nicht mit den  $N_k$  der Spitzenauflösungen verwechseln.) Da  $M_k^2 - 4 N_{k-1} N_k = p$ , gilt  $M_k \geq \sqrt{p+4}$ ; deshalb verschwindet  $s$  oder  $t$ , wenn  $N_1 < \sqrt{p+4} + 2$ . Der Kurvenkeim ist dann regulär, schneidet  $S_k$  transversal und geht nicht durch einen Schnittpunkt  $S_{j-1} \cap S_j$ .

**DEFINITION.** — Die Kurve  $F_N$  heisst transversal in den Spitzen, wenn  $F_N$  die Kurve  $\cup S_k$  ( $k$  durchläuft alle Zyklen) transversal schneidet, d. h.  $F_N$  in jedem Punkt von  $\cup S_k$  regulär ist, nicht durch die Doppelpunkte von  $\cup S_k$  geht und jedes  $S_k$  in endlich vielen Punkten transversal schneidet.

Die vorstehenden Ueberlegungen ergeben

**SATZ 1.** — Es sei  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ . Für die Kurve  $F_N$  auf der Fläche  $Y(p)$  gilt

$$c_1[F_N] \underset{\text{Def}}{\geq} c_1[N] = 2e(N) - a_2(N) - a_2(N) - a_3(N) - \sigma(N).$$

Die Kurve  $F_N$  ist transversal in den Spitzen genau dann, wenn für jedes ganze Ideal  $b$  von  $Q(\sqrt{p})$  mit  $N(b) = N$  gilt:  $\rho(b) = 0$ . Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn  $c_1[F_N] = c_1(N)$ . Wenn  $N_2$  kein Quadrat ist oder  $N_1 < \sqrt{p+4} + 2$ , dann ist  $F_N$  transversal in den Spitzen und somit  $c_1[F_N] = c_1(N)$ .

Die Tabellen 1, 2 in 1.6 geben den Wert von  $c_1(N)$  in einigen Fällen an ( $N = N_1 N_2$ ).

2.3. Aus 1.2 (13) folgt, dass die Kurven  $F_M, F_N$  in  $X(p)$  die transversale Schnittzahl 0 haben, wenn kein  $b \in \mathbb{Z}$  existiert mit  $b^2 < 4MN$  und  $b^2 \equiv 4MN \pmod{p}$ . Da  $(1/p)(b^2 - 4MN)$  eine Diskriminante ist, ergibt sich, dass die transversale Schnittzahl

in  $X(p)$  verschwindet, wenn  $MN < 3p/4$ . Im folgenden sei  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ . Wenn  $4MN - b^2 = 3p$ , dann ist  $[M, b, N]$  bis auf Äquivalenz die einer wohlbestimmten Quotientensingularität  $z$  der Ordnung 3 zugeordnete quadratische Form und  $F_M, F_N$  schneiden sich in  $z$  transversal. Entsprechendes gilt, wenn  $4MN - b^2 = 4p$ , dann schreiben sich  $F_M, F_N$  in einer Quotientensingularität  $z$  der Ordnung 2 : Bläst man  $z$  auf in eine Kurve der Selbstschnitzzahl  $-3$  bzw.  $-2$ , dann zeigen  $F_M, F_N$  auf  $Y(p)$  folgendes Verhalten

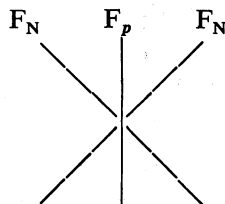
$$(8) \quad \frac{F_M}{-3} \Big| \frac{F_N}{-3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F_M}{-2} \Big| \frac{F_N}{-2}.$$

Die transversale Schnittzahl in  $Y(p) - \cup S_k$  ist also bereits 0, wenn  $MN < 7p/4$ . Wenn  $a_3(N) = 0$  bzw.  $a_2(N) = 0$ , dann kann eine Situation (8) nicht auftreten. Wir bemerken auch noch, dass  $F_M$  und  $F_N$  sich in  $X(p)$  nicht in einer Quotientensingularität der Ordnung 2 schneiden können, wenn  $MN < p$ ; sie können sich dann in  $X(p)$  höchstens in einer Quotientensingularität der Ordnung 3 schneiden. Bei diesen Überlegungen war  $M = N$  zugelassen.

Wenn  $M \neq N$  und  $M < \sqrt{p}, N < \sqrt{p}$ , dann sind  $F_M$  und  $F_N$  in  $Y(p)$  disjunkt. Die Kurven treffen sich nämlich auch in Punkten von  $\cup S_k$  nicht (vgl. 2.2 Satz 1) : Schneiden sie die gleiche Kurve  $S_k$ , dann ist  $M = t_1^2 N_k$  und  $N = t_2^2 N_k$ . Die Kurve  $S_k$  (gegeben durch  $v_k = 0$ ) hat die laufende Koordinate  $u_k$ , und  $F_M \cap S_k$  bzw.  $F_N \cap S_k$  entspricht vermöge  $u_k$  der Menge der  $t_1$ -ten bzw.  $t_2$ -ten primitiven Einheitswurzeln.

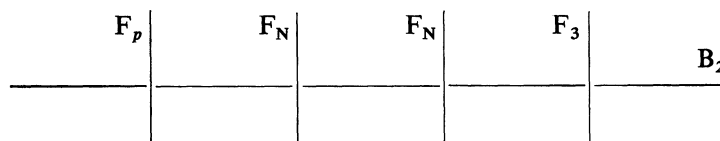
Die Kurve  $F_N$  hat keine Doppelpunkte in  $X(p)$ , wenn  $N < p/4$ . Die Bedingung  $0 < 4N^2 - x^2 \equiv 0 \pmod{p}$  ist nämlich unter der Annahme  $N < p/4$  nicht erfüllbar. Insbesondere geht  $F_N$  dann durch  $a_2(N)$  verschiedene Quotientensingularitäten der Ordnung 2 und  $a_3(N)$  verschiedene Quotientensingularitäten der Ordnung 3 (vgl. 1.3). Für  $N \geq 4$  bedeutet dies, dass genau  $a_2(N)/2$  verschiedene Kurvenpaare  $U_i, U'_i$  von  $F_N$  transversal geschnitten werden und entsprechendes für  $a_3(N)/2$  Kurvenpaare  $V_j, V'_j$  gilt. Wir werden diese Kurvenpaare oft auch  $U_N, U'_N$  und  $V_N, V'_N$  nennen (versehen mit einem Index, der von 1 bis  $a_2(N)/2$  bzw.  $a_3(N)/2$  läuft).

Wenn  $N > p/4$  und  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ , dann hat  $F_N$  Doppelpunkte in  $X(p)$ . Man betrachte nämlich die quadratische Form  $[N, 2N - p, N]$  der Diskriminante  $-(4N - p)p$ . Diese Form ist ambig, sie ist äquivalent zu  $[N, p, p]$ . Da  $s_0([N, p, p]) = H(4N - p)$  [siehe 1.2, (11)] erhält man auf diese Weise  $H(4N - p)$  Doppelpunkte von  $F_N$  in  $X(p)$ , die auf  $F_p$  liegen. Wenn  $H(4N - p)$  keine ganze Zahl ist, bedeutet dies, dass einer der Doppelpunkte der Punkt  $b_2$  ist (siehe 1.6). In  $Y(p)$  hat man  $[H(4N - p)]$  Doppelpunkte mit jeweils einer Konfiguration





Wenn  $H(4N-p)$  nicht ganz ist, kommt eine Konfiguration hinzu.



Wenn  $p/4 < N < p/2$ , dann hat  $F_N$  keine weiteren Doppelpunkte in  $X(p)$  bzw.  $Y(p)$ .

2.4. Es sei  $Y$  eine singularitätenfreie algebraische Fläche. Die auf  $Y$  liegende Kurve  $D$  heisst *exceptionell*, wenn sie singularitätenfrei, irreduzibel und rational ist und wenn  $DD = -1$ . Für jede singularitätenfreie Kurve  $D$  gilt die Adjunktionsformel

$$c_1[D] - DD = e(D),$$

wo  $c_1$  die erste Chernsche Klasse von  $Y$  und  $e(D)$  die Eulersche Zahl ist. Deshalb kann die Bedingung  $DD = -1$  in der Definition einer exceptionellen Kurve durch  $c_1[D] = 1$  ersetzt werden.

Auf Grund von 1.6 Tabelle 1 und 2.2 Satz 1, sowie 2.3 sind  $F_1, F_2$  ( $\delta = 1$ ),  $F_3$  ( $\varepsilon = 1$ ) exceptionelle Kurven auf  $Y(p)$ , und  $F_4$  ist eine exceptionelle Kurve auf  $Y(p)$  für  $p \neq 5$ . In  $Y(5)$  hat  $F_4$  genau einen Doppelpunkt. Für  $p \geq 13$  sind die reduziblen Kurven  $F_1 \cup E \cup B_1, F_2 \cup L, F_3, F_4$  disjunkt in  $Y(p)$ . Dies folgt aus 2.3. Die Kurven  $F_1, E, B_1, F_2, L, F_3, F_4$  (es handelt sich um  $4 + 2\delta + \varepsilon$  Kurven) können sukzessive niedergeblasen werden. Die so erhaltene algebraische Fläche wird  $Y^0(p)$  genannt (vgl. [7], 5.5. Dort wurde  $Y^0(p)$  nur für  $p \geq 29$  eingeführt. Wir haben die Fläche  $Y^0(p)$  hier für  $p \geq 13$  definiert). Für  $p \geq 13$  sind die Kurven  $F_1, F_2, F_3, F_4$  auch in  $X(p)$  disjunkt, mit einer Ausnahme für  $p = 13$ : Die Kurven  $F_3$  und  $F_4$  schneiden sich in der Quotientensingularität  $b_2$  (vgl. 2.3), wo  $F_4$  einen Doppelpunkt hat. Auf  $Y^0(13)$  hat deshalb  $B_2$  einen Doppelpunkt. Es sei im folgenden stets  $p \geq 13$ .

Die Involution  $T$  operiert auch auf  $Y^0(p)$ . Das Bild der Kurve  $F_N$  ( $N \geq 5$ ) in  $Y^0(p)$  soll mit  $F_N^0$  bezeichnet werden. Die (singularitätenfreie) Fixpunktmenge von  $T$  auf  $Y^0(p)$  ist  $F_p^0$ . Es gibt keine isolierten Fixpunkte. Deshalb ist  $Y^0(p)/T$  eine *singularitätenfreie* algebraische Fläche. Die erste Chernsche Klasse von  $Y^0(p)$  werde mit  $c_1^0$ , die von  $Y^0(p)/T$  mit  $c_1^*$  bezeichnet. Das Bild von  $F_N^0$  in  $Y^0(p)/T$  soll  $F_N^*$  heissen. (Eine Konfusion mit dem Schluss von 1.6, wo wir das Bild von  $F_N$  in  $\tilde{X}(p)/T$  ebenfalls  $F_N^*$  genannt haben, ist nicht zu befürchten.) Für  $N \neq p$  gilt (vgl. [7] 5.1 und 5.7):

$$(9) \quad c_1^*[F_N^*] = \frac{1}{2}(c_1^0[F_N^0] + F_N^0 \cdot F_p^0).$$

Wir wollen  $c_1^*[F_N^*]$  für  $N \geq 5$  und  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$  berechnen. Wenn die Schnitzzahlen von  $F_N$  mit  $F_1$  und  $F_2$  in  $X(p)$  verschwinden und sich  $F_N$  mit  $F_3$  und  $F_4$  in  $X(p)$  höchstens in Quotientensingularitäten der Ordnung 3 schneidet, dann ist  $c_1^*[F_N^0] = c_1[F_N]$ , da  $F_N$  in  $Y(p)$  die beim Uebergang zu  $Y^0(p)$  niederzublasenden Kurven nicht schneidet. Nach 2.3 sind diese Bedingungen erfüllt, wenn  $N < 7p/16$ . In jedem Fall ist

$c_1^0 [F_N^0] \geq c_1 [F_N]$ . Die Schnittzahl  $F_N^0 F_p^0$  ist grösser oder gleich der in 1.6 Satz 6 angegebenen Zahl  $f(N)$ . Wir können jetzt folgenden Satz beweisen.

SATZ. 2. — Es sei  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$  und  $N \geq 5$ . Für die Kurve  $F_N^*$  auf der Hilbertschen Modulfläche  $Y^0(p)/T$  (mit  $p \geq 13$ ) gilt

$$(10) \quad c_1^* [F_N^*] \geq \frac{1}{2}(c_1 [F_N] + f(N)),$$

wo die Zahl  $f(N)$  in 1.6 (20) angegeben ist. Wenn  $N < p/4$ , dann ist

$$c_1^* [F_N^*] = \frac{1}{2}(c_1 [F_N] + f(N)).$$

*Beweis.* — Die Ungleichung (10) folgt aus (9). Die Schnittzahl von  $F_N$  und  $F_p$  in  $X(p)$  kann nach Formel 1.2 (14) berechnet werden. Wenn  $4Np - b^2$  durch  $p$  teilbar sein soll, dann muss  $b = rp$  sein ( $r \in \mathbb{Z}$ ). Aber  $4N - r^2 p$  ( $r^2 \geq 1$ ) ist negativ für  $N < p/4$ . Also tragen zur Schnittzahl von  $F_N$  und  $F_p$  in  $X(p)$  nur die in 1.6 besprochenen Schnittpunkte bei, welche den Fixpunkten von  $T$  auf dem singularitätenfreien Modell von  $F_N$  entsprechen. Da  $F_N$  (für  $N < 7p/16$ ) die auf  $Y(p)$  niederzublasenden Kurven nicht schneidet, ist die Schnittzahl von  $F_N$  und  $F_p$  auf  $Y(p)$  gleich der von  $F_N^0$  und  $F_p^0$  auf  $Y^0(p)$ . Die Kurven  $F_N$  und  $F_p$  schneiden sich in Punkten von  $\cup S_k$  höchstens in  $S_t \cap S_{-t}$  (siehe 2.1, Fig. 1). Zu diesem Eckpunkt gehört die quadratische Form  $[N_t, M_{t+1}, N_t]$  (vgl. 1.4) der Diskriminante  $p$ , für die  $2N_t + M_{t+1} = p$ . Es handelt sich also um die Form  $[(p-1)/4, (p+1)/2, (p-1)/4]$ . Die Kurve  $T_M$  mit minimalem  $M$ , die durch diesen Eckpunkt hindurchgeht, ist  $F_p$ . Deshalb ist  $F_N^0 \cdot F_p^0 = f(N)$  für  $N < p/4$ .

DEFINITION :

$$(11) \quad c_1^*(N) = \frac{1}{2}(c_1(N) + f(N)).$$

Die Zahl  $c_1(N)$  wurde in 2.2 (7) definiert. In die Tabellen 1, 2 von 1.6 wurde auch  $c_1^*$  aufgenommen. Wegen 2.2 Satz 1 und 2.3 erhalten wir :

KOROLLAR. — Es sei  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$  und  $N \geq 5$  und wie üblich  $N = N_1 N_2$ . Für die Kurve  $F_N^*$  auf der Fläche  $Y^0(p)/T$  (mit  $p \geq 13$ ) gilt

$$c_1^* [F_N^*] \geq c_1^*(N).$$

Wenn  $N_2$  kein Quadrat ist oder  $N_1 < \sqrt{p+4} + 2$  und wenn ferner  $N < p/4$ , dann ist  $F_N^*$  singularitätenfrei in  $Y^0(p)/T$  und

$$c_1^* [F_N^*] = c_1^*(N).$$

Wenn  $N > p/4$ , dann

$$(12) \quad c_1^* [F_N^*] \geq c_1^*(N) + [H(4N - p)].$$

Wenn  $N_2$  kein Quadrat ist oder  $N_1 < \sqrt{p+4}+2$  und wenn ferner  $p/4 < N < 7p/16$ , dann ist  $F_N^*$  singularitätenfrei in  $Y^0(p)/T$  und

$$(13) \quad c_1^*[F_N] = c_1^*(N) + [H(4N-p)].$$

*Beweis.* — Es muss nur noch zu (12) und (13) etwas gesagt werden. Die Formel (12) folgt aus der Existenz der in 2.3 erwähnten auf  $F_p$  liegenden Doppelpunkte von  $F_N$ . Die Voraussetzungen zu (13) implizieren, dass  $F_N$  transversal durch die Spitzen geht und also  $c_1[F_N] = c_1(N)$ . Wegen  $N < 7p/16$  ist  $c_1[F_N] = c_1^0[F_N^0]$  und wegen  $N < p/2$  gibt es keine weiteren Doppelpunkte von  $F_N$  und auch keine weiteren Schnittpunkte von  $F_N$  mit  $F_p$ , als die in 2.3 erwähnten, also ist  $F_N^0 F_p^0 = f(N) + 2[H(4N-p)]$  und (9) impliziert (13). Jeder der Doppelpunkte von  $F_N^0$  ergibt nach Teilung durch  $T$  einen regulären Punkt von  $F_N^*$ . Die Kurve  $F_N^*$  berührt  $F_p^*$  in  $[H(4N-p)]$  Punkten.

2.5. Die Kurve  $F_N^*$  (mit  $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ ) hat das am Schluss von 1.6 besprochen singularitätenfreie Modell mit der Eulerzahl  $e^*(N)$ . Es ist nicht schwer zu zeigen, dass  $e^*(N)$  und  $c_1^*(N)$  nach  $-\infty$  streben, wenn  $N \rightarrow \infty$ . Die Werte von  $e^*(N)$ ,  $c_1^*(N)$  hängen von dem Zahlenpaar  $N_1, N_2$  mit  $N = N_1 N_2$  ab, wo die Aufspaltung von  $N$  in diese beiden Faktoren durch  $p$  bestimmt wird. Es wäre nützlich alle Paare  $N_1, N_2$  zu kennen, für die  $e^* = 2$  oder  $e^* = 0$ . D. Zagier hat vor einigen Jahren auf meinen Wunsch mit Hilfe des Hewlett-Packard Computers am I.H.E.S. die Paare  $(N_1, N_2)$  mit  $e^* = 2$  oder  $e^* = 0$  für  $N \leq 809$  bestimmt. In den folgenden Tabellen geben wir diese Paare an nach den Werten von  $c_1^*$  geordnet (und zwar nur für  $N \geq 5$ , da die Kurven  $F_N$  mit  $N \leq 4$  in  $Y(p)$  niedergeblasen wurden). In jeder  $c_1^*$ -Spalte stehen die zugehörigen Paare  $N_1, N_2$ . In die Tabellen 1, 2 von 1.6 wurden die Paare  $N_1, N_2$  mit  $e^* = 2$  und  $c_1^* = 1$  bzw.  $c_1^* = 0$  aufgenommen.

Die Fälle  $e^* = 2$  mit  $N = N_1$  (also  $N_2 = 1$ ) sind wohlbekannt. Das singularitätenfreie Modell ist hier  $\overline{H/\Gamma_*}(N)$  (vgl. 1.6 Bemerkung 1). Die in der Tabelle 3 angegebenen 34 Fälle sind die einzigen  $N$  mit  $N \geq 5$  und  $e(H/\Gamma_*(N)) = 2$  (vgl. [7], 5.7; die Abschätzungen in [6] wurden durch Kluit [12] ergänzt). Ebenso enthält Tabelle 4 alle Fälle mit  $e^* = 0$  und  $N_2 = 1$ .

Vermutlich sind die Tabellen 3, 4 vollständig, d. h. enthalten alle Paare  $N_1, N_2$  mit  $e^* = 2$  oder 0. Um dies zu beweisen sind jedoch weitere Abschätzungen erforderlich.

2.6. In der Hilbertschen Modulfläche  $Y^0(p)/T$  (mit  $p \geq 13$ ) sind die Kurven  $F_N^*$  ( $N = N_1 N_2$ ) exzeptionell (2.4), wenn das Paar  $N_1, N_2$  zu den in der ersten Spalte von Tabelle 3 angegebenen 17 Fällen gehört und wenn ferner  $F_N^*$  singularitätenfrei und  $c_1^*(F_N^*) = c_1^*(N) = 1$ . Nach 2.4 Korollar treffen diese Bedingungen zu, wenn  $p$  hinreichend gross ist.

Die Hilbertsche Modulfläche  $Y(p)$  ist einfach-zusammenhängend [18], also auch  $Y^0(p)$  und ebenfalls  $Y^0(p)/T$ , da die Involution  $T$  auf  $Y^0(p)$  nicht frei operiert.

Eine einfach-zusammenhängende algebraische Fläche  $Y$  ist rational, d. h. birational äquivalent zur projektiven Ebene, wenn es eine irreduzible Kurve  $D$  auf  $Y$  gibt mit  $c_1[D] \geq 1$ , die nicht exzeptionell ist. Hierbei bezeichnet  $c_1$  die erste Chernsche Klasse von  $Y$ . Dieses Rationalitätskriterium wurde in [7], [8] und [9] häufig benutzt. Ein

TABELLE 3

$e^* = 2$  (Geschlecht 0)

$c_1^* = 1$	$c_1^* = 0$	$c_1^* = -1$	$c_1^* = -2$	$c_1^* = -3$	$c_1^* = -4$	$c_1^* = -5$	$c_1^* = -6$	$c_1^* = -7$
5 1	10 1	18 1	24 1	39 1	36 1	3 25	50 1	1 159
1 6	12 1	20 1	26 1	49 1	71 1	41 4	1 119	1 206
6 1	13 1	21 1	32 1	2 25	21 4		1 194	
7 1	14 1	25 1	35 1	59 1	1 95		37 6	
8 1	15 1	27 1	41 1	1 69	5 22		23 10	
1 9	16 1	29 1	5 9	1 81	1 111		1 276	
9 1	17 1	31 1	47 1	1 87	1 134			
1 10	2 9	1 33	1 49	1 94	1 146			
11 1	19 1	4 9	1 55	29 4	29 6			
3 4	1 21	1 46	7 9		31 6			
1 14	1 22	3 16	3 22		1 204			
1 15	23 1	1 51	7 10					
1 16	1 25	13 4	19 4					
5 4	7 4	1 62	13 6					
1 24	3 10	1 64	5 16					
1 26	5 6	17 4	1 86					
1 36	1 34	1 74	1 100					
	1 35	1 96	1 104					
	9 4		11 10					
	1 38		19 6					
	1 39		1 126					
	1 40		1 132					
	7 6		1 140					
	11 4		1 144					
	1 54		1 150					
	1 56							
	1 60							
	11 6							
	1 84							
	1 90							

ähnliches Kriterium besagt, dass die einfach-zusammenhängende Fläche  $Y$  rational ist, wenn es zwei verschiedene exzeptionelle Kurven auf  $Y$  gibt, die sich schneiden. In [7] wurden alle Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  bestimmt, für die  $Y^0(p)/T$  rational sind. Man kann Rationalitätsbeweise in mannigfacher Weise mit Hilfe der angegebenen Kriterien führen. Zum Beispiel gilt.

SATZ 3. — *Es sei  $p$  eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{4}$  und  $p \geq 13$ . Es sei  $N$  eine natürliche Zahl  $\geq 5$  mit  $\binom{N}{p} = 1$  und  $N = N_1 N_2$ , wo  $N_1$  nur durch quadratische Reste mod  $p$  und  $N_2$  nur durch Primzahlen, welche quadratische Nichtreste mod  $p$  sind, teilbar ist. Wenn  $p < 4N$  und*

$$c_1^*(N) + H(4N - p) > 1,$$

TABELLE 4

$e^* = 0$  (Geschlecht 1)

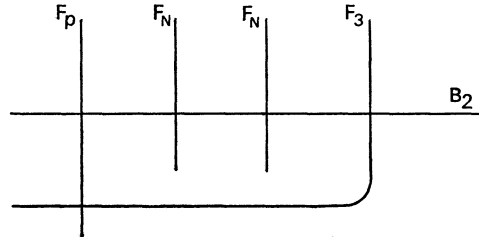
$c_1^* = -2$	$c_1^* = -3$	$c_1^* = -4$	$c_1^* = -5$	$c_1^* = -6$	$c_1^* = -7$	$c_1^* = -8$	$c_1^* = -9$	$c_1^* = -10$
2 15	22 1	28 1	34 1	30 1	79 1	48 1	54 1	75 1
3 14	1 58	33 1	38 1	40 1	83 1	56 1	81 1	10 9
		37 1	53 1	44 1	1 196	63 1	101 1	95 1
		2 21	25 4	45 1		64 1	1 324	1 121
		43 1	1 106	51 1		65 1		1 143
		1 57	1 122	55 1		89 1		19 9
		15 4		61 1		5 21		13 15
		1 65		2 33		13 9		49 4
		5 14		8 9		1 129		59 4
		1 82		1 77		35 4		19 14
		1 88		11 9		9 16		29 10
		9 10		7 15		7 22		
		13 4		27 4		1 166		
		17 6		7 16		11 16		
		5 24		1 118		13 14		
		23 6		3 40		1 220		
		1 156		31 4		1 224		
		1 210		13 10		41 6		
				1 135		1 260		
				1 136		11 24		
				25 6		1 294		
				1 152		1 306		
				1 160		1 330		
				7 24		1 336		
				17 10		1 360		
				5 36		1 390		
				1 198				
				1 216				
				1 234				
				1 240				

---

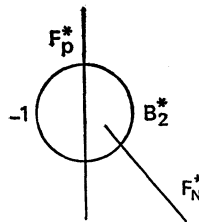
$c_1^* = -11$	$c_1^* = -12$	$c_1^* = -13$	$c_1^* = -14$	$c_1^* = -15$	$c_1^* = -16$
2 49	119 1	1 314	1 215		17 22
131 1	5 46		7 33		
	11 21				
	17 15				
	7 60				
	71 6				
	1 510				
	1 546				

dann ist die algebraische Fläche  $Y^0(p)/T$  rational. Wenn  $e^*(N) \neq 2$ , dann kann man bereits aus der Ungleichung  $c_1^*(N) + H(4N-p) > 0$  auf die Rationalität von  $Y^0(p)/T$  schliessen.

*Beweis.* — Wenn  $H(4N-p)$  eine ganze Zahl ist, dann folgt die Behauptung nach dem Rationalitätskriterium wegen 2.4 (12). Wenn  $H(4N-p)$  nicht ganz ist, dann gibt es nach 2.3 die Konfiguration



Auf  $Y^0(p)$  wird  $B_2$  eine singularitätenfreie Kurve der Selbstschnittzahl  $-2$  (auf  $Y^0(13)$  hat sie einen Doppelpunkt, und es ist  $c_1^0[B_2] = 2$ , woraus die Rationalität von  $Y^0(13)$  und  $Y^0(13)/T$  ohnehin folgt). Auf  $Y^0(p)/T$  hat man die Konfiguration



Dabei ist das Bild  $B_2^*$  eine exzeptionelle Kurve in  $Y^0(p)/T$ . Wird  $B_2^*$  niedergeblasen, dann wird  $F_N^*$  eine Kurve auf einer neuen Fläche, so dass der Wert der ersten Chernschen Klasse dieser Fläche auf der Kurve *größer* als  $c_1^*(N) + [H(4N-p)]$  ist. Das Rationalitätskriterium kann wieder angewandt werden.

2.7. Es sei  $p$  eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{8}$ . Wir wollen Satz 3 auf  $F_N^*$  mit  $N = 64$  (d. h. hier  $N_1 = 64, N_2 = 1$ ) anwenden. Es ist  $e^*(N) = 0$  und  $c_1^*(N) = -8$  (siehe Tabelle 4). Für die Primzahlen  $p = 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137$  ist  $H(256-p) = 15, 14, 8, 11, 10, 10, 10$ . Also sind die Flächen  $Y^0(p)/T$  für diese sieben Primzahlen, abgesehen von vielleicht  $p = 73$ , rational. Für  $p = 73$  schneidet  $F_{64}^*$  die exzeptionelle Kurve  $F_9^*$  dreifach, da  $4 \cdot 9 \cdot 64 - 25^2 = 73 \cdot 23$  und  $h(-23) = 3$ . Daraus folgt die Rationalität von  $Y^0(73)/T$ .

Es sei jetzt  $p$  eine Primzahl  $\equiv 5 \pmod{8}$ . Wir wenden Satz 3 auf  $F_N^*$  mit  $N = 64$  an ( $N_1 = 1, N_2 = 64$ ). Es ist  $e^*(N) = 2$  und  $c_1^*(N) = -1$ .

Für die Primzahlen  $p = 13, 29, 37, 53, 61, 101, 109, 149, 157, 173, 181, 197, 229$  ist  $H(256-p) = 4 \frac{1}{3}, 5, 4, 4, 4, 4, 2 \frac{1}{3}, 3, 3, 3, 2 \frac{1}{3}, 3, 1 \frac{1}{3}$ . Also sind diese Flächen  $Y^0(p)/T$  rational, abgesehen vielleicht im Falle von  $p = 229$ . Aber  $F_{64}^*$  und  $F_{20}^*$  schneiden sich in  $Y(229)$ , da  $4 \cdot 64 \cdot 20 - 51^2 = 229 \cdot 11$ . Daraus folgt die Rationalität von  $Y^0(229)/T$ , da  $F_{20}^*(N_1 = 5, N_2 = 4)$  und  $F_{64}^*$  nach 2.4 Korollar und dem Beweis von Satz 3 exzeptionelle Kurven auf derjenigen Fläche sind, die sich aus  $Y^0(229)/T$  durch Niederblasen von  $B_2^*$  ergibt.

Für  $p = 269, 293, 317$  betrachten wir die Kurve  $F_{144}^*$  mit  $N_1 = 1, N_2 = 144$  und  $e^* = 2, c_1^* = -2$ . Es ist  $H(576-p) = 3$ , bzw. 3 bzw. 4. Also ist die Fläche  $Y^0(317)/T$  rational. Da [64, 77, 144] die Diskriminante  $-269.115$  hat und  $h(-115) = 2$ , schneiden sich  $F_{64}^*$  und  $F_{144}^*$  auf  $Y^0(269)/T$  in 2 Punkten; wenn  $F_{144}^*$  exzeptionell ist, dann kann es niedergeblasen werden und  $F_{64}^*(c_1^*(64) = -1)$  wird eine Kurve mit Doppelpunkt auf einer neuen Fläche  $Y'$  mit  $c_1'[F_{64}^*] = 1$ , wo  $c_1'$  die erste Chernsche Klasse von  $Y'$  ist. Also ist dann  $Y^0(269)/T$  rational. (Wenn  $F_{144}^*$  nicht exzeptionell wäre, würde die Rationalität sofort folgen. Aber es ist leicht zu kontrollieren, dass  $F_{144}^*$  exzeptionell ist.) Das gleiche Argument ergibt die Rationalität von  $Y^0(293)/T$ . Nämlich, die Diskriminante von [64, 101, 144] ist  $-293.91$  und  $h(-91) = 2$ .

Die Hilbertschen Modulflächen  $Y(p)$  sind genau für  $p = 5, 13, 17$  rational ([7], [8]). (Die Rationalität von  $Y(5)$  folgt zum Beispiel aus der Tatsache dass  $F_4$  auf  $Y(5)$  einen Doppelpunkt hat.) Also sind auch schon deshalb  $Y(5)/T, Y^0(13)/T$  und  $Y^0(17)/T$  rational. Die vorstehenden Rationalitätsbeweise wurden gebracht als Anwendungsbeispiele für das Schnittverhalten der  $F_N$  in den Hilbertschen Modulflächen. Dabei wurde  $p = 5$  nur deshalb ausgeschlossen, weil  $Y^0(5)$  nicht definiert werden konnte. Wir erhalten erneut folgenden Satz (vgl. [7], 5.8).

**SATZ 4.** — *Es sei  $p$  eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{4}$ . Es sei  $G_T$  die symmetrische Hilbertsche Modulgruppe für  $Q(\sqrt{p})$ , d. h.  $G_T = G \cup G.T$ , wo  $G = \text{SL}_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$ . Dann ist die Fläche  $\overline{H^2/G_T}$  genau dann rational, wenn  $p < 193$  oder  $p = 197, 229, 269, 293, 317$ .*

Die Fläche  $\overline{H^2/G_T}$  ist natürlich als  $\overline{H^2/G}/T$  definiert. Sie hat Singularitäten. Für  $p \geq 13$  ist  $Y^0(p)/T$  ein singularitätenfreies Modell dieser Fläche.

Rationalität ist auch für singuläre Flächen wohldefiniert. Die Rationalität von  $\overline{H^2/G_T}$  ist äquivalent dazu, dass der Körper der meromorphen Funktionen auf  $H^2$ , die automorph bezüglich  $G_T$  sind, eine rein transzendente Erweiterung von  $C$  ist. Die Rationalität wurde für die in Satz 4 erwähnten 24 Primzahlen vorstehend erneut nachgewiesen. Diese sind die einzigen Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  mit rationaler Hilbertscher Modulfläche  $\overline{H^2/G_T}$ , weil für alle anderen  $p$  das arithmetische Geschlecht  $\chi(Y_0(p)/T)$  grösser als 1 ist (vgl. § 3).

Es ist amüsant, weitere Rationalitätsbeweise zu finden. Zum Beispiel ist  $Y^0(197)/T$  rational, weil

$$4.26.36 - 1^2 = 19.197,$$

und sich deshalb die exzeptionellen Kurven  $F_{26}^*$  und  $F_{36}^*$  auf  $Y^0(197)/T$  schneiden.

### 3. Numerische Invarianten, exzeptionelle Kurven

3.1. Die Berechnung der numerischen Invarianten der Hilbertschen Modulflächen  $X(p), \tilde{X}(p), Y(p), Y^0(p), Y^0(p)/T$  wurde in [7] durchgeführt (vgl. auch [9]). Es soll dabei  $p$  weiterhin eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{4}$  sein. Es sei  $K = Q(\sqrt{p})$ . Die  $\zeta$ -Funktion von  $K$  wird mit  $\zeta_K$  bezeichnet. Mit  $e$  wird die Eulersche Zahl angedeutet. Wir erinnern

kurz an die Berechnung der Eulerschen Zahl für die verschiedenen Flächen. Es ist (für  $p \geq 13$ , was stets vorausgesetzt wird)

$$(1) \quad e(X(p)) = 2\zeta_K(-1) + \frac{1}{2}h(-4p) + \frac{2}{3}h(-3p),$$

$$(2) \quad e(\tilde{X}(p)) = e(X(p)) + l(p).$$

In (1) ist  $2\zeta_K(-1)$  das Volumen von  $X(p)$  normiert im Sinne des Gauss-Bonnetschen Satzes. Ferner sind  $(1/2)h(-4p)$  und  $(2/3)h(-3p)$  die Beiträge der Quotientensingularitäten von  $X(p)$ . Die Zahl  $l(p)$  gibt die Anzahl der Kurven in der Auflösung der Spitzen an, d. h. die Anzahl der irreduziblen Komponenten von  $\tilde{X}(p) - X(p) = \cup S_k$ . Von der Konstruktion der Auflösungen her weiss man, dass  $l(p)$  gleich der Anzahl der reduzierten quadratischen Irrationalitäten  $w$  der Diskriminante  $p$  ist (»reduziert« bedeutet:  $0 < w' < 1 < w$ ). Diese reduzierten Irrationalitäten sind in Zyklen angeordnet, den Auflösungszyklen entsprechend. Es ist

$$(3) \quad w_k = \frac{M_k + \sqrt{p}}{2N_k}, \quad w_k = b_k - \frac{1}{w_{k+1}} \quad (b_k = [w_k] + 1).$$

Die natürlichen Zahlen  $M_k, N_k$  wurden bereits in 1.4 benutzt. Die Selbstschnittzahl der Kurve  $S_k$  ist  $-b_k$ .

Für  $l(p)$  wurde in [9] 4.2 (10) eine Formel angegeben

$$(4) \quad l(p) = \sum_{\substack{1 \leq k < \sqrt{p} \\ k \text{ ungerade}}} \sigma_0\left(\frac{p-k^2}{4}\right).$$

Hierbei ist  $\sigma_r(n)$  die Summe der  $r$ -ten Potenzen der Teiler von  $n$ . Die Formel (4) ist analog zur Siegelschen Formel (vgl. [7] 1.4 (11)) :

$$(5) \quad 2\zeta_K(-1) = \frac{1}{15} \sum_{\substack{1 \leq k < \sqrt{p} \\ k \text{ ungerade}}} \sigma_1\left(\frac{p-k^2}{4}\right).$$

Die Auflösung der Quotientensingularitäten ergibt

$$(6) \quad e(Y(p)) = e(\tilde{X}(p)) + h(-4p) + \frac{3}{2}h(-3p),$$

und das Niederblasen von  $F_1, E, B_1, F_2, L, F_3, F_4$  (siehe 2.4 und die Figur in 2.1) impliziert

$$(7) \quad e(Y^0(p)) = e(Y(p)) - 4 - 2\delta - \varepsilon.$$

Die Involution  $T$  operiert auf  $Y^0(p)$  mit  $F_p^0$  als Fixkurve und keinen weiteren Fixpunkten (2.4). Es ist deshalb

$$(8) \quad e(Y^0(p)/T) = \frac{1}{2}(e(Y^0(p)) + e(F_p^0)).$$



Die Kurve  $F_p^0$  ist isomorph zu  $\overline{H/\Gamma_*(p)}$ . Man hat

$$(9) \quad \begin{cases} e(\overline{H/\Gamma_0(p)}) = -\frac{p+1}{6} + \frac{4}{3}\varepsilon + 3, \\ e(\overline{H/\Gamma_*(p)}) = \frac{1}{2}(e(\overline{H/\Gamma_0(p)}) + h(-4p)). \end{cases}$$

Die in (9) angegebenen Werte sind  $e$  und  $e^*$  (vgl. 1.5 (19) und 1.6 (21)) für das Zahlenpaar  $N_1 = p, N_2 = 1$ . Jedoch kommt  $\Gamma_*(p)$  hier anders zustande als im Falle einer Zahl  $N$  mit  $\binom{N}{p} = 1$ . Die Stabgruppe  $G_A$  einer schief-hermiteschen Matrix  $A$  der Determinante  $p$  ist eine Erweiterung von  $\mathcal{E}_A$  von Index 2 (siehe 1.1). Dies entspricht dem Uebergang von  $\Gamma_0(p) \simeq \mathcal{E}_A$  zu  $\Gamma_*(p) \simeq G_A$ . Die  $h(-4p)$  Fixpunkte von  $\Gamma_*(p)/\Gamma_0(p)$  auf  $H/\Gamma_0(p)$  werden abgebildet auf die  $h(-4p)/2$  Quotientensingularitäten von  $X(p)$  der Ordnung 2, die auf  $F_p$  liegen.

Sie haben alle die quadratische Form  $[p, 0, p]$  [und sind Doppelpunkte von  $F_p$  in  $X(p)$ ]. Sie werden aufgelöst durch die Kurven  $D_i$  (Figur in 2.1). Aus den vorstehenden Formeln (1), (2), (6)-(9) folgt

$$(10) \quad e(Y^0(p)/T) = \zeta_K(-1) + h(-4p) + \frac{13}{12}h(-3p) + \frac{1}{2}l(p) - \frac{p+1}{24} - \frac{5}{4} - \frac{\varepsilon}{6} - \delta.$$

Das arithmetische Geschlecht  $\chi(Y)$  einer singularitätenfrei algebraischen Fläche  $Y$  ist per definitionem  $1 - q + p_g$ , wo  $q$  die Irregularität (halbe erste Bettische Zahl) und  $p_g$  das geometrische Geschlecht (Dimension des Raumes der holomorphen 2-Formen) ist.

Die Hilbertschen Modulflächen  $Y^0(p), Y^0(p)/T$  sind einfach-zusammenhängend. Ihr arithmetisches Geschlecht  $\chi = 1 + p_g$  wurde in [7] berechnet.

$$(11) \quad \chi(Y^0(p)) = \frac{1}{4}e(X(p)),$$

$$(12) \quad \chi(Y^0(p)/T) = \frac{1}{2} \left( \chi(Y^0(p)) + \frac{1}{4}c_1^0[F_p^0] \right),$$

wobei 
$$c_1^0[F_p^0] = -\frac{p+1}{6} + \frac{4}{3}\varepsilon + 2\delta + 5.$$

Für die Berechnung von  $c_1^0[F_p^0]$  kann man die Methoden von 2.2 verwenden, muss aber beim Uebergang von  $c_1[F_p]$  in  $Y(p)$  zu  $c_1^0[F_p^0]$  in  $Y^0(p)$  genau beachten, wie die niederzublasenden Kurven  $F_p$  schneiden (siehe Figur in 2.1).

Für eine algebraische Fläche  $Y$  mit erster Chernscher Klasse  $c_1$  hat man die Noethersche Formel

$$(13) \quad \chi(Y) = \frac{1}{12}(c_1^2[Y] + e(Y)).$$

Das arithmetische Geschlecht ist eine birationale Invariante ( $g, p_g$  sind sogar birational invariant), während  $e(Y)$  beim Aufblasen um 1 steigt und  $c_1^2[Y]$  um 1 abnimmt.

Aus (10), (12) und (13) ergibt sich (wir schreiben  $c_1^2$  statt  $(c_1^*)^2$ , obwohl die erste Chernsche Klasse von  $Y^0(p)/T$  in 2.4 mit  $c_1^*$  bezeichnet wurde) :

$$(14) \quad c_1^2(Y^0(p)/T) = 2\zeta_K(-1) - \frac{h(-4p)}{4} - \frac{1}{12}h(-3p) - \frac{1}{2}l(p) - \frac{5p}{24} + \frac{13}{6}\varepsilon + 4\delta + 8 + \frac{13}{24}.$$

Dies ist die Formel 2.5 (39) von [9].

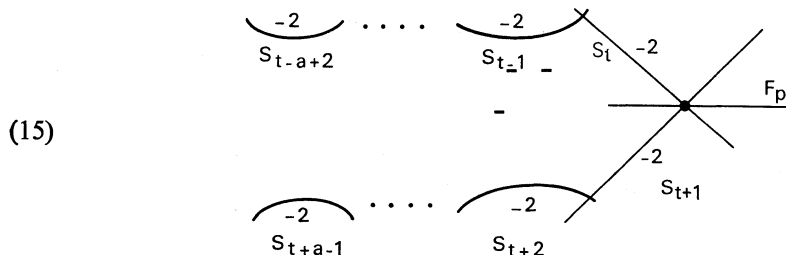
3.2. Es werde daran erinnert, dass wir eine feste Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{4}$  gewählt haben und stets  $p \geq 13$  voraussetzen, da  $Y^0(p)$  für  $p = 5$  nicht gebildet werden kann. Die Konfiguration der Figur in 2.1 liegt auf  $Y(p)$ . Wir betrachten ihr Bild in  $Y^0(p)/T$ . Dabei haben  $S_j, S_{-j}$  dieselbe Bildkurve, die wir  $S_j^*$  nennen. Ebenso haben  $C_j, C'_j$  die gleiche Bildkurve. Sie soll  $C_j^*$  heissen. Entsprechend sind  $U_i^*$  und  $V_j^*$  definiert, wobei wir auch wie in 2.3 die Bezeichnung  $U_N^*$  bzw.  $V_N^*$  verwenden wollen. Schliesslich sollen natürlich  $D_i^*$  und  $B_2^*$  die Bildkurven von  $D_i$  und  $B_2$  sein. Die übrigen in der Figur ange deuteten Kurven wurden beim Uebergang von  $Y(p)$  zu  $Y^0(p)$  niedergeblasen. Zunächst stellen wir fest, dass  $C_j^*$  eine exzeptionelle Kurve ist, die  $F_p^*$  berührt, und dass  $D_i^*$  eine exzeptionelle Kurve ist, die  $F_p^*$  in zwei Punkten transversal schneidet. Damit können in  $Y^0(p)/T$  jedenfalls  $(1/2)(h(-4p) + h(-3p))$  Kurven niedergeblasen werden. Die so entstehende Fläche heisse  $(Y^0(p)/T)'$ .

Wir wollen  $(Y^0(p)/T)'$  für  $p = 13$  und  $p = 17$  genauer ansehen.

$p$	$6\zeta_K(-1)$	$h(-4p)$	$h(-3p)$	$l$	$e(Y^0(p))$	$e(F_p^0)$	$e(Y^0(p)/T)$	$e((Y^0(p)/T)')$
13.....	1	2	4	3	10	2	6	3
17.....	2	4	2	5	10	2	6	3

Wir wissen, dass  $Y^0(p)$  und  $Y^0(p)/T$  in diesen beiden Fällen rational sind. Die einzige rationale Fläche mit Eulerscher Zahl 3 ist aber die projektive Ebene  $P_2(C)$ . Also ist  $(Y^0(p)/T)'$  für  $p = 13, 17$  isomorph zu  $P_2(C)$ . Die Fläche  $Y^0(13)$  ist die minimal desingularisierte doppelte Ueberlagerung von  $P_2(C)$  entlang einer Kurve 4-ter Ordnung mit einem Doppelpunkt und zwei Spitzen. Dasgleiche trifft zu für  $Y^0(17)$ , nur dass hier der Verzweigungsort einer Kurve 4-ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und einer Spitze ist.

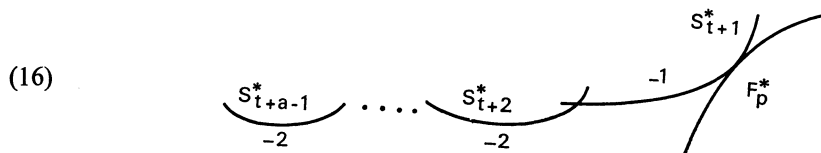
Jetzt wieder zurück zur allgemeinen Situation. Der Zykel der Hauptspitze (siehe Figur in 2.1) hat  $2t+1$  Kurven, die mit  $S_k$  bezeichnet werden, wo  $k \bmod 2t+1$  zu betrachten ist. Es ist also  $S_{t+i} = S_{-t+i-1}$  und  $S_{t+i}^* = S_{t-i+1}^*$ . Auf  $Y(p)$  haben die Kurven  $S_{t+1}, S_{t+2}, \dots, S_{t+a-1}$  die Selbstschnitzzahl  $-2$ , wo  $a = [(1+\sqrt{p})/2]$ . Man hat also die folgende Konfiguration auf  $Y(p)$  :



Diese Teilkonfiguration der Figur nennt man den »Schwanz« der Hauptspitze (vgl. [7] 5.4 (9), (13) und [9] 5.4). Dem Schnittpunkt von  $S_{t+k}$  und  $S_{t+k-1}$  ist die quadratische Form  $[N_{t+k-1}, M_{t+k}, N_{t+k}]$  zugeordnet mit

$$N_{t+k} = \frac{1}{4}(p - (2k-1)^2), \quad M_{t+k} = 2N_{t+k} + (2k-1) \quad (1 \leq k \leq a-1).$$

Die Kurve  $S_{t+k}$  und die dazu symmetrische Kurve  $T(S_{t+k}) = S_{t-k+1}$  werden von  $F_{(p-(2k-1)^2)/4}$  transversal geschnitten (vgl. 1.4). Für  $p = 13$  und  $p = 17$  ist  $a = 2$  und  $(p-1)/4 = 3$  bzw.  $= 4$ . Dies führt beim Uebergang zu  $Y^0(p)$  zu einem Rationalitätsbeweis für  $Y^0(13)$  und  $Y^0(17)$ , da  $S_{t+1}$  und  $S_t$  exzeptionelle Kurven von  $Y^0(13)$  bzw.  $Y^0(17)$  werden, die sich schneiden. Für  $p \geq 29$ , was wir im folgenden voraussetzen wollen, schneiden die Kurven, welche beim Uebergang von  $Y(p)$  zu  $Y^0(p)$  niedergeblasen werden, die Kurven  $S_i$  der Konfiguration (15) nicht, weil  $(p-(2a-3)^2)/4 \geq 5$ . Also existiert die Konfiguration (15) in unveränderter Weise auch auf  $Y^0(p)$ . Man hat deshalb auf  $Y^0(p)/T$  folgende Konfiguration



Die Konfiguration (16) bleibt auch in  $(Y^0(p)/T)'$  bestehen. Die Kurven  $S_{t+1}^*, \dots, S_{t+a-1}^*$  können in  $(Y^0(p)/T)'$  sukzessive wiedergeblasen werden, das Resultat ist eine algebraische Fläche, die wir  $Y_T(p)$  nennen wollen. Dieses singularitätenfreie Modell von  $\overline{H^2/G_T}$  (vgl. 2.7, Satz 4) ist also für  $p \geq 29$  wohldefiniert. Es entstand aus  $Y^0(p)/T$  durch Niederblasen von  $(1/2)(h(-4p) + h(-3p)) + a - 1$  Kurven. Formel (14) impliziert für

$p \geq 29$  (siehe [9], 2.5 (40)).

$$(17) \quad c_1^2(Y_T(p)) = 2\zeta_K(-1) + \frac{h(-4p)}{4} + \frac{5}{12}h(-3p) - \frac{1}{2}l(p) - \frac{5p}{24} \\ + \left[ \frac{\sqrt{p-1}}{2} \right] + \frac{13}{6}\varepsilon + 4\delta + 8 + \frac{13}{24},$$

$$(18) \quad c_1^2(Y_T(p)) > 2\zeta_K(-1) - \frac{1}{2}l(p) - \frac{5p}{24} + \frac{\sqrt{p}}{2}.$$

3.3. Für die grobe Klassifikation der Flächen  $Y_T(p)$  ist es entscheidend festzustellen, für welche  $p$  die Chernsche Zahl  $c_1^2(Y_T(p))$  positiv ist. Da

$$(19) \quad 2\zeta_K(-1) > p^{3/2}/180,$$

$$(20) \quad l(p) = O(p),$$

wie leicht aus (4) und (5) folgt (vgl. [9], 4.2, (4) und 4.4, Lemma), ist es wegen (18) klar, dass  $c_1^2(Y_T(p))$  für fast alle  $p$  positiv ist. Genauere Abschätzungen ([9], 4.3) zeigen, dass die rechte Seite für  $p > 1500$  positiv ist. Durch Computer hergestellte Tafeln [19] ergeben dann.

**SATZ 1.** – Für die Hilbertsche Modulfläche  $Y_T(p)$  (definiert für  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und  $p \geq 29$ ) ist die Chernsche Zahl  $c_1^2(Y_T(p))$  für  $p > 821$  positiv und für  $p = 821$  gleich null.

Das arithmetische Geschlecht von  $Y_T(p)$  ist als birationale Invariante gleich dem von  $Y^0(p)/T$  [siehe (12)]. Aus (19) folgt

$$(21) \quad \chi(Y_T(p)) > \frac{p^{3/2}}{1440} - \frac{p+1}{48}.$$

Da Computertafeln [19] für  $p < 10000$  vorliegen, ist leicht festzustellen :

**SATZ 2.** – Für das arithmetische Geschlecht der Hilbertschen Modulfläche  $Y_T(p)$  gilt

$$\chi(Y_T(p)) = 1 \Leftrightarrow p < 193 \text{ oder } p = 197, 229, 269, 293, 317,$$

$$\chi(Y_T(p)) = 2 \Leftrightarrow p = 193, 233, 257, 277, 349, 389, 397, 461, 509,$$

$$\chi(Y_T(p)) = 3 \Leftrightarrow p = 241, 281, 353, 373, 421, 557,$$

$$\chi(Y_T(p)) = 4 \Leftrightarrow p = 313, 653, 677, 773.$$

Nur die Flächen mit  $\chi(Y_T(p)) = 1$  können rational sein. Sie sind in der Tat rational (2.7, Satz 4).

In der folgenden Tabelle befinden sich einige Angaben über die Primzahlen  $p \geq 29$  mit  $\chi(Y_T(p)) = 1$ , insbesondere wird  $c_1^2(Y_T(p))$  angegeben. Für eine rationale Fläche ist der höchste Wert von  $c_1^2$  gleich 9. Er wird angenommen genau dann, wenn die Fläche isomorph zum  $P_2(\mathbb{C})$  ist. In der Tabelle wird  $c_1^2 = 9$  nie erreicht. Es entsteht die Frage, welche Kurven noch niedergeblasen werden können. Darauf gehen wir später ein.

TABELLE 5

$$\chi(Y_T(p)) = 1$$

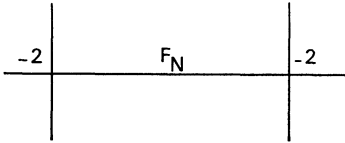
$p$	$6 \zeta_k(-1)$	$h(-4p)$	$h(-3p)$	$l(p)$	$e(Y_0(p))$	$e(F_p^0(p))$	$c_1^*(Y_T(p))$
29.....	3	6	6	5	24	2	7
37.....	5	2	8	7	24	0	7
41.....	8	8	2	11	24	2	6
53.....	7	6	10	7	36	0	5
61.....	11	6	8	11	36	0	4
73.....	22	4	4	21	36	-2	2
89.....	26	12	2	21	46	0	0
97.....	34	4	4	27	46	-4	-1
101.....	19	14	10	11	56	0	0
109.....	27	6	12	17	56	-4	-1
113.....	36	8	6	23	54	-4	-2
137.....	48	8	6	27	62	-6	-4
149.....	35	14	14	15	74	-4	-4
157.....	43	6	16	19	72	-8	-4
173.....	39	14	18	13	82	-6	-4
181.....	57	10	12	25	80	-8	-7
197.....	49	10	22	15	90	-10	-6
229.....	81	10	12	29	92	-12	-10
269.....	83	22	14	21	108	-10	-12
293.....	85	18	22	17	116	-14	-11
317.....	101	10	26	21	122	-20	-13

3.4. Wir betrachten jetzt nur Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , für welche die Hilbertsche Modulfläche nicht rational ist. Die Primzahlen mit  $\chi(Y_T(p)) = 1$  werden also ausgeschlossen. Es sei  $F_N^*$  mit  $\binom{N}{p} = 1$  eine Kurve auf  $Y^0(p)/T$ , so dass das Paar  $(N_1, N_2)$  mit  $N = N_1 N_2$  zur ersten Spalte der Tabelle 3 in 2.6 gehört [d. h.  $c_1^*(N) = 1$ ]. Dann ist  $c_1^*[F_N^*] \geq c_1^*(N) = 1$  (siehe 2.4). Aber in der Tat ist  $F_N^*$  exzeptionell, insbesondere  $c_1^*[F_N^*] = 1$ , weil sonst  $Y^0(p)/T$  rational wäre. Die Kurve  $F_N$  ist also transversal in den Spitzen und schneidet auf  $Y(p)$  keine der Kurven, die beim Uebergang zu  $Y^0(p)$  niedergeblasen wurden, weil sonst  $c_1^*[F_N^*] > 1$  wäre. Es folgt auch, dass zwei derartige exzeptionelle Kurven  $F_M^*, F_N^*$  sich in  $Y^0(p)/T$  nicht schneiden. Die exzeptionelle Kurve  $F_N^*$  schneidet keine der Kurven von  $Y^0(p)/T$ , die beim Uebergang zu  $Y_T(p)$  niedergeblasen wurden, weil sonst in  $Y_T(p)$  der Wert der ersten Chernschen Klasse auf dem Bild von  $F_N^*$  grösser als 1 wäre und man wieder auf die Rationalität von  $Y_T(p)$  schliessen könnte. Die Bilder von Kurven  $F_N^*$  ( $N$  beliebig) in  $Y_T(p)$  wollen wir auch  $F_N^*$  nennen. Wir erhalten so für die Zahlen  $N$  mit  $c_1^*(N) = 1$  exzeptionelle Kurven auf der Fläche  $Y_T(p)$ , die zueinander disjunkt sind.

Für die Kurven  $F_N$  mit  $c_1^*(N) = 1$  gilt

$$(22) \quad a_2(N) = 2, \quad a_3(N) = 0 \quad \text{für } (N_1, N_2) = (5,1), (1,9), (1,14)$$

(vgl. 1.6, Tabelle 1). Jede dieser Kurven  $F_N$  gibt also in  $Y(p)$  Anlass zu einer Konfiguration.

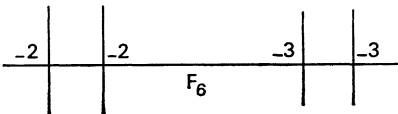
(22') 

Die Kurve  $F_N$  schneidet nämlich Auflösungskurven der Quotientensingularitäten der Ordnung 2, die auf  $F_N$  liegen, genau zweimal transversal (siehe 1.3, Beweis von Satz 3, und 2.3). Die beiden  $(-2)$ -Kurven in (22') können nicht zusammenfallen, sie sind ein Paar  $U_i, U'_i$  (siehe Figur in 2.1).

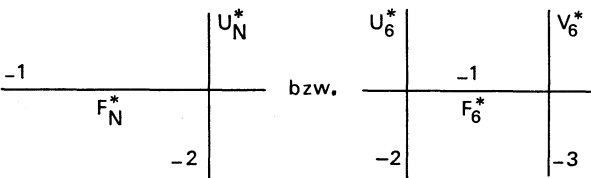
Man hat ferner

(23)  $a_2(6) = 2, \quad a_3(6) = 2 \quad \text{für } (N_1, N_2) = (1,6)$

und auf  $Y(p)$  die Konfiguration [für  $p \equiv 5 \pmod{24}$ ] :

(23') 

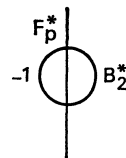
Die  $(-2)$ -Kurven bilden wie vorhin ein Paar  $U_i, U'_i$ . Die  $(-3)$ -Kurven sind ein Paar  $V_j, V'_j$ . Sie können nicht zusammenfallen (2.3). In  $Y^0(p)/T$  und dann auch in  $Y_T(p)$  bilden sich (22') und (23') auf eine Konfiguration

(24) 

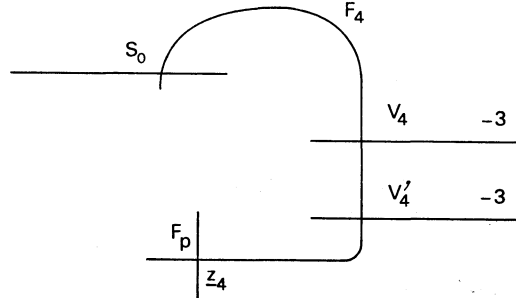
ab. Wir haben uns wie früher (vgl. 2.3) erlaubt, das Bild des Paares  $U_i, U'_i$  von (22') bzw. (23') mit  $U_N^*$  zu bezeichnen, ebenso ist  $V_6^*$  erklärt.

Wir können noch weitere exzeptionelle Kurven in  $Y_T(p)$  angeben.

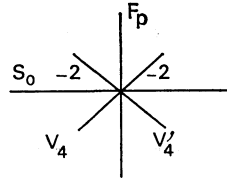
Für  $\varepsilon = 1$  [d. h.  $p \equiv 1 \pmod{3}$ ] wird das Bild von  $B_2$  in  $Y_T(p)$  exzeptionell



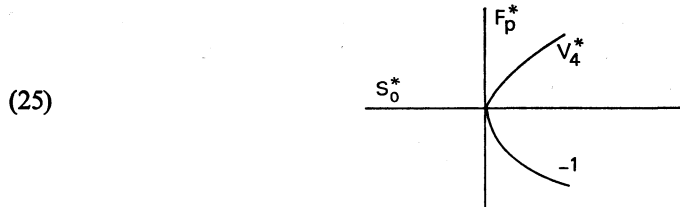
Dies entnimmt man wieder der Figur in 2.1. Die Tatsache wurde schon in 2.6 (Beweis von Satz 3) erwähnt. Für  $\delta = 0$ , d. h.  $p \equiv 5 \pmod{8}$ , ist  $a_2(4) = 0, a_3(4) = 2$ . (vgl. 1.6, Tabelle 1). Man erhält in  $Y(p)$  die Konfiguration



Man beachte, dass  $F_4$  die Kurven  $F_1$  und  $F_3$  in  $X(p)$  nur für  $p = 5, 13$  schneidet. Diese Primzahlen wurden aber ausgeschlossen. Also hat man in  $Y^0(p)$  eine Konfiguration



Dies ergibt in  $Y^0(p)/T$  und damit auch in  $Y_T(p)$  die Konfiguration



Wir geben eine Uebersicht der niederzublasenden Kurven von  $Y_T(p)$ .

TABELLE 6

$N_1$	$N_2$	Niederblasen	$N_1$	$N_2$	Niederblasen
3	1	$B_2^*$	11	1	$F_{11}^*$
1	4	$V_4^*$	3	4	$F_{12}^*$
5	1	$F_5^*, U_5^*$	1	14	$F_{14}^*, U_{14}^*$
1	6	$F_6^*, U_6^*, V_6^*$	1	15	$F_{15}^*$
6	1	$F_6^*$	1	16	$F_{16}^*$
7	1	$F_7^*$	5	4	$F_{20}^*$
8	1	$F_8^*$	1	24	$F_{24}^*$
1	9	$F_9^*, U_9^*$	1	26	$F_{26}^*$
9	1	$F_9^*$	1	36	$F_{36}^*$
1	10	$F_{10}^*$			

Welche Ausnahmekurven für ein gegebenes  $p$  wirklich existieren, hängt von der Restklasse von  $p$  modulo 8.3.5.7.11.13 ab. Alle Niederblasungen lassen sich unabhängig von einander durchführen, weil sonst  $Y_T(p)$  rational wäre.

3.5. Wir bleiben weiterhin bei den Primzahlen  $p$ , für die  $Y_T(p)$  nicht rational ist. In 3.2 (17) wurde eine Formel für  $c_1^2(Y_T(p))$  angegeben. Berücksichtigt man in Tabelle 6 nur die sieben Paare mit  $N_2 = 1$ , so ergibt dies

$$A(p) = \varepsilon + \left(1 + \left(\frac{p}{5}\right)\right) + \varepsilon\delta + \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{p}{7}\right)\right) + \delta + \varepsilon + \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{p}{11}\right)\right),$$

niederzublasende Kurven. Die so erhaltene Fläche soll  $Y'_T(p)$  heißen. Für sie ist  $c_1^2[Y'_T(p)] = c_1^2[Y_T(p)] + A(p)$ . Sie wird nur deshalb eingeführt, weil zu einem bestimmten Zeitpunkt nur diese exzeptionellen Kurven bekannt waren (vgl. auch [7], 5.7) und nur sie in das Computerprogramm [19] aufgenommen wurden. Wir werden in Tabelle 7 diejenigen Primzahlen auflisten, für die  $Y_T(p)$  nicht rational und  $c_1^2(Y'_T(p))$  nicht positiv ist. Nach 3.3 Satz 1 kommen nur Primzahlen  $\leq 821$  in Betracht. Bläst man die weiteren Ausnahmekurven der Tabelle 6 herunter, so erhält man eine Fläche  $Y_T^0(p)$ . Wir wollen den Uebergang zu  $Y_T^0(p)$  jedoch in zwei Schritten machen. Zunächst nehmen wir nur die Paare  $(N_1, N_2)$  mit  $N_2 \neq 1$  für die  $N_1, N_2$  nur durch die Primzahlen 2

TABELLE 7

$p$	$\hat{\chi}$	$\varepsilon$	$\delta$	$c_1^2(Y'_T(p))$	$c_1^2(Y''_T(p))$	Niederblasen	$c_1^2(Y_T^0(p))$
193.....	2	1	1	-1	-1		-1
233.....	2	0	1	-4	-2	$F_{15}^*$	-1
241.....	3	1	1	0	0		0
257.....	2	0	1	-5	-3	$F_{15}^*$	-2
277.....	2	1	0	-4	-1	$F_{10}^*$	0
281.....	3	0	1	-2	0		0
349.....	2	1	0	-8	-5	$F_{14}^*, U_{14}^*, F_{20}^*, F_{26}^*$	-1
353.....	3	0	1	-4	-2	$F_{15}^*$	-1
373.....	3	1	0	-4	-1	$F_{10}^*$	0
389.....	2	0	0	-10	-1	$F_{20}^*$	0
397.....	2	1	0	-9	-6	$F_{10}^*, F_{14}^*, U_{14}^*, F_{26}^*$	-2
421.....	3	1	0	-5	-2	$F_{20}^*, F_{26}^*$	0
461.....	2	0	0	-14	-5	$F_{14}^*, U_{14}^*, F_{20}^*, F_{26}^*$	-1
509.....	2	0	0	-15	-6	$F_{14}^*, U_{14}^*, F_{20}^*, F_{26}^*$	-2
557.....	3	0	0	-12	-3	$F_{10}^*, F_{15}^*, F_{26}^*$	0
653.....	4	0	0	-9	0	$F_{10}^*, F_{15}^*$	2
677.....	4	0	0	-11	-2	$F_{10}^*, F_{14}^*, U_{14}^*, F_{15}^*$	2
701.....	6	0	0	-1	8		8
773.....	4	0	0	-12	-3	$F_{10}^*, F_{14}^*, U_{14}^*, F_{15}^*, F_{26}^*$	2
797.....	5	0	0	-8	1	$F_{10}^*, F_{14}^*, U_{14}^*, F_{15}^*$	5



oder 3 teilbar ist. Man erhält dann eine Fläche  $Y_T''(p)$ . Beim Uebergang von  $Y_T'(p)$  nach  $Y_T''(p)$  sind also niederzublasen :

- für  $\varepsilon = 1, \delta = 1$  keine Kurve,
- für  $\varepsilon = 0, \delta = 1$  die 2 Kurven  $F_9^*, U_9^*$ ,
- für  $\varepsilon = 1, \delta = 0$  die 3 Kurven  $V_4^*, F_{12}^*, F_{16}^*$ ,
- für  $\varepsilon = 0, \delta = 0$  die 9 Kurven  $V_4^*, F_6^*, U_6^*, V_6^*, F_9^*, U_9^*, F_{16}^*, F_{24}^*, F_{30}^*$ .

In die Tabelle tragen wir die Werte von  $c_1^2(Y_T'(p)), c_1^2(Y_T''(p))$  ein, sowie die in  $Y_T'(p)$  niederzublasenden Kurven und den Wert von  $c_1^2(Y_T^0(p))$ . Wir nehmen auch das arithmetische Geschlecht  $\chi(Y_T(p))$ , abgekürzt durch  $\hat{\chi}$ , mit auf.

3.6. Die Tabelle 7 zeigt, dass  $c_1^2(Y_T^0(p))$  genau dann nicht positiv ist, wenn das arithmetische Geschlecht von  $Y_T(p)$  gleich 2 oder 3 ist (vgl. 3.3, Satz 2).

Von den vier Primzahlen mit  $\chi(Y_T(p)) = 4$  kommt  $p = 313$  nicht in Tabelle 7 vor, da  $c_1^2(Y_T'(p)) = 2$ . Es ist aber  $Y_T'(313) = Y_T^0(313)$ , weil  $\varepsilon = \delta = 1$ ; somit ist für alle vier Primzahlen mit  $\chi(Y_T(p)) = 4$  der Wert von  $c_1^2(Y_T^0(p))$  gleich 2.

Für die Primzahlen mit  $\chi(Y_T(p)) = 2, 3, 4$  wird es nützlich sein, Angaben wie die von Tabelle 5 zur Verfügung zu haben. Das soll jetzt geschehen. Wir verzichten jedoch auf die Angabe von  $e(Y^0(p))$  und  $e(F_p^0)$ . Diese Werte, sowie  $\chi(Y^0(p)), c_1^2(Y^0(p)), c_1^2(Y^0(p)/T)$  können bei Bedarf leicht auf Grund der Formeln von 3.1 berechnet werden.

TABELLE 8

$\chi(Y_T(p)) = 2$

$p$	$6\zeta_K(-1)$	$h(-4p)$	$h(-3p)$	$l(p)$	$c_1^2(Y_T^0(p))$
193.....	98	4	8	47	-1
233.....	106	12	10	39	-1
257.....	120	16	6	39	-2
277.....	103	6	28	29	0
349.....	151	14	16	37	-1
389.....	151	22	22	31	0
397.....	171	6	24	35	-2
461.....	183	30	18	29	-1
509.....	215	30	14	31	-2

$\chi(Y_T(p)) = 3$

241.....	142	12	4	59	0
281.....	150	20	6	49	0
353.....	192	16	6	47	-1
373.....	161	10	32	37	0
421.....	209	10	20	47	0
557.....	233	18	38	29	0

$\chi(Y_T(p)) = 4$

313.....	200	8	8	65	2
653.....	303	14	42	35	2
677.....	299	30	38	27	2
773.....	369	26	30	31	2



## Liste der Spitzenauflösungen

$$\chi(Y_T(p)) = 3$$

Wir verzichten auf die Angabe der  $M_k$  und schreiben die  $b_k$  und  $N_k$  vertikal ( $0 \leq k \leq t$ )

$k$	$p = 241$		$p = 281$		$p = 353$		$p = 373$		$p = 421$		$p = 557$	
	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$
0.....	17	1	17	1	19	1	21	1	21	1	25	1
1.....	2	12	9	2	10	2	2	17	5	5	2	17
2.....	2	15	2	10	2	11	2	27	2	21	2	19
3.....	3	10	5	4	6	4	2	31	2	31	5	7
4.....	2	18	4	5	2	17	2	29	2	35	2	29
5.....	2	20	3	8	2	22	2	21	2	33	2	49
6.....	2	16	2	14	2	19	4	7	2	25	2	67
7.....	4	6	3	10	4	8	3	9	3	11	2	83
8.....	2	12	2	17	2	23	2	13	4	7	2	97
9.....	3	8	2	16	2	34	8	3	2	15	2	109
10.....	3	9	4	7	2	41	2	21	3	9	2	119
11.....	2	20	2	20	2	44	2	37	8	3	2	127
12.....	2	27	2	29	2	43	2	51	2	17	2	133
13.....	2	30	2	34	2	38	2	63	2	21	2	137
14.....	2	29	2	35	2	29	2	73	3	15	2	139
15.....	2	24	2	32	3	16	2	81	2	33		
16.....	2	15	2	25	2	32	2	87	2	49		
17.....	9	2	3	14	2	46	2	91	2	63		
18.....	3	6	2	28	2	58	2	93	2	75		
19.....	4	5	2	40	2	68			2	85		
20.....	2	10	2	50	2	76			2	93		
21.....	6	3	2	58	2	82			2	99		
22.....	5	4	2	64	2	86			2	103		
23.....	2	18	2	68	2	88			2	105		
24.....	2	30	2	70								
25.....	2	40										
26.....	2	48										
27.....	2	54										
28.....	2	58										
29.....	2	60										

läuft. Der Zyklus hat ungerade Länge  $2t+1$  (vgl. 2.1, Figur). Er ist symmetrisch unter  $T$ . Die Selbstschnittzahlen  $-b_k$  der Kurven  $S_k$  ergeben sich aus der Kettenbruchentwicklung von

$$w_0 = \frac{2a+1+\sqrt{p}}{2} \quad \text{mit} \quad a = \left[ \frac{1+\sqrt{p}}{2} \right].$$

Es ist

$$w_k = b_k - \frac{1}{w_{k+1}}, \quad b_k = [w_k] + 1,$$

$$w_k = \frac{M_k + \sqrt{p}}{2N_k}.$$

Ueberall ist  $k \bmod 2t+1$  zu nehmen. Wegen der Symmetrie unter  $T$  ist  $w_{-k} = (w_{k+1}^{-1})'$ ,  $b_{-k} = b_k$ ,  $N_{-k} = N_k$  und  $M_{-k} = M_{k+1}$ . Es ist  $T(S_k) = S_{-k}$ .

Dem Schnittpunkt von  $S_{k-1}$  und  $S_k$  ist die quadratische Form  $[N_{k-1}, M_k, N_k]$  der Diskriminante  $p$  zugeordnet (vgl. 1.4). Man kann diesen symmetrischen Zyklus in folgender Weise andeuten

$$(26) \quad \begin{array}{cccccc} & | & & & & | \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_t & | \\ N_0 & N_1 & N_2 & & & N_t & | \\ & | & M_1 & M_2 & \dots & M_t & M_{t+1} & | \end{array}$$

Die Striche sollen andeuten, dass nur der halbe Zyklus dargestellt wird und man den ganzen erhält, wenn man an den Strichen spiegelt. Es ist  $b_0 = 2a+1$ ,  $N_0 = 1$ ,  $M_0 = M_1 = 2a+1$ . Die letzten  $a-1$  Kurven in (26) von rechts und ihre Bilder unter  $T$  bilden den »Schwanz« [3.2, (15)].

Die Klassenzahl  $h(p)$  ist genau dann gleich 1, wenn  $2t+1 = l(p)$ . Für die Primzahlen der Tabelle 8 ist  $h(p) = 1$ , wenn  $p \neq 257$ . Dagegen ist  $h(257) = 3$ . Für  $p = 257$  sind also zwei weitere Zyklen vorhanden. Sie werden durch  $T$  aufeinander abgebildet und sind bis auf den Durchlaufungssinn isomorph.

Wir haben die Spitzenaufösungen vorstehend nur für die 15 Primzahlen mit arithmetischem Geschlecht  $\chi(Y_T(p)) = 2$  oder 3 aufgelistet.

#### 4. Klassifikation

4.1. Da die Hilbertschen Modulflächen  $Y(p)$  und  $Y_T(p)$  einfach-zusammenhängend sind (vgl. 2.6) und dieser Paragraph die Flächen  $Y_T(p)$  betrifft, genügt es, an die grobe Klassifikation im Sinne von Enriques-Kodaira der einfach-zusammenhängenden algebraischen Flächen zu erinnern (vgl. [8]). Es werde deshalb in diesem Abschnitt 4.1 immer vorausgesetzt, dass *es sich um einfach-zusammenhängende algebraische Flächen handelt*.

Wenn die Fläche  $Y$  nicht rational ist, dann hat sie ein eindeutig bestimmtes minimales Modell  $Y_0$ , das man so bekommt : Die exceptionellen Kurven auf  $Y$  sind disjunkt (vgl. 2.4, 2.6), und ihre Anzahl ist deshalb endlich. Sie können niedergeblasen werden. Man erhält eine Fläche  $Y'$ . Die exceptionellen Kurven auf  $Y'$  können wieder alle niedergeblasen werden usw. Nach endlich vielen Schritten bricht der Prozess ab, man hat  $Y_0$  erhalten. Die Fläche  $Y$  heisst minimal, wenn sie keine exceptionellen Kurven hat. Wenn  $Y$  nicht rational ist, dann ist  $Y$  minimal genau dann, wenn  $Y = Y_0$ . Eine minimale nicht rationale Fläche ist entweder eine K 3-Fläche (d. h. ihre erste Chernsche Klasse verschwindet), eine echt elliptische Fläche über  $P_1(C)$ , d. h. eine elliptische Fläche über  $P_1(C)$  mit nicht-verschwindender erster Chernscher Klasse  $c_1$  und  $c_1^2 = 0$ , oder eine Fläche vom allgemeinen Typ. Wir sagen, dass die nicht rationale Fläche  $Y$  von K 3-Typ, vom echt elliptischen Typ oder vom allgemeinen Typ ist, wenn  $Y_0$  die entsprechende Eigenschaft

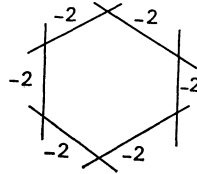
hat. Damit sind die einfach-zusammenhängenden algebraischen Flächen in vier Klassen eingeteilt :

- I. Rationale Flächen.
- II. Flächen vom K 3-Typ.
- III. Flächen vom echt elliptischen Typ.
- IV. Flächen vom allgemeinen Typ.

Natürlich gehört mit einer Fläche auch jede zu ihr birational äquivalente in die gleiche Klasse. Eine nicht-rationale Fläche  $Y$  ist vom allgemeinen Typ genau dann, wenn  $c_1^2(Y_0) > 0$ ; da  $c_1^2(Y)$  beim Niederblasen exzeptioneller Kurven zunimmt, impliziert  $c_1^2[Y] > 0$ , dass  $Y$  vom allgemeinen Typ ist.

Für rationale Flächen ist das arithmetische Geschlecht  $\chi = 1 + p_g$  gleich 1, für Flächen vom K 3-Typ ist  $\chi$  gleich 2.

Eine elliptische Konfiguration auf einer Fläche  $Y$  (mit Chernscher Klasse  $c_1$ ) ist ein endliches System von irreduziblen Kurven  $E_i$  mit  $c_1[E_i] = 0$ , welches eine Schnittmatrix  $E_i E_j$  hat, die mit der Schnittmatrix einer Faser einer elliptischen »Faserung« übereinstimmt ([13], vgl. auch [8], [9]). Zum Beispiel ist ein Zykel von singularitätenfreien rationalen Kurven der Selbstschnittzahl  $-2$  eine elliptische Konfiguration :



Bei Kodaira [13] heisst diese Konfiguration  $I_k$ , wenn es  $k$  Kurven im Zykel gibt.

Wir werden das folgende Klassifikationsprinzip verwenden (vgl. [8], [9]).

**SATZ 1.** — *Wenn eine Fläche eine elliptische Konfiguration besitzt, dann ist sie nicht vom allgemeinen Typ; wenn sie eine elliptische Konfiguration besitzt, die von einer nicht zu ihr gehörenden singularitätenfreien rationalen Kurve der Selbstschnittzahl  $-2$  geschnitten wird, dann ist sie rational oder vom K 3-Typ.*

Eine Fläche  $Y$  vom Typ II oder III ist minimal genau dann, wenn  $c_1^2[Y] = 0$ .

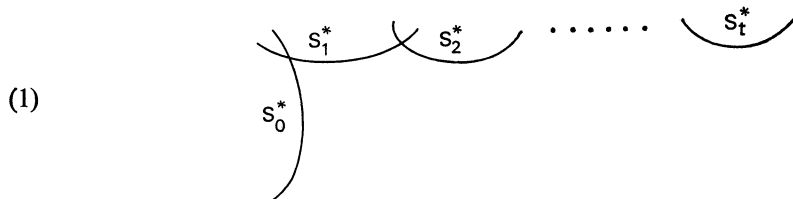
Wenn  $Y$  minimal und von Typ III ist, dann ist die elliptische Faserung eindeutig bestimmt, jede elliptische Konfiguration ist eine Faser, die Kohomologieklass  $-c_1$  ist dual zu einem Vielfachen der durch eine reguläre Faser repräsentierten Homologieklass und zwar ist dieses Vielfache grösser oder gleich  $\chi(Y) - 2$  und genau dann gleich  $\chi(Y) - 2$ , wenn  $Y$  keine multiplen Fasern hat. Es sei  $S$  eine singularitätenfreie rationale Kurve der Selbstschnittzahl  $-\chi(Y)$  auf der minimalen Fläche  $Y$  vom Typ III mit  $\chi(Y) \geq 3$ . Nach der Adjunktionsformel ist dann  $-c_1[S] = \chi(Y) - 2$ . Es folgt, dass  $S$  ein Schnitt ist und keine multiplen Fasern vorhanden sind. Umgekehrt ist auch jeder Schnitt eine singularitätenfreie rationale Kurve der Selbstschnittzahl  $-\chi(Y)$ .

4.2. Für eine Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{4}$  haben wir die Hilbertsche Modulgruppe  $G = \text{SL}_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$ , sowie die symmetrische Hilbertsche Modulgruppe  $G_T = G \cup G.T$

betrachtet. Es wurden dann mehrere singularitätenfreie Modelle für  $\overline{H^2/G_T}$  angegeben, die alle zueinander birational äquivalent sind. Für gegebenes  $p$  ist es also sinnvoll zu fragen, in welche der Klassen I-IV die Fläche  $\overline{H^2/G_T}$  gehört. Wir sagen auch kurz, dass die Primzahl  $p$  zur Klasse I, II, III bzw. IV gehört. Nach 2.7 Satz 4 gehören genau 24 Primzahlen zur Klasse I. Nach 3.3 Satz 2 können höchstens die 9 Primzahlen 193, 233, 257, 277, 349, 389, 397, 461, 509 zur Klasse II gehören. Es soll nachgewiesen werden, dass sie in der Tat alle zur Klasse II gehören. Nach 3.5 gehören alle Primzahlen bis auf die 24 Primzahlen der Klasse I, die neun gerade erwähnten Primzahlen und die sechs Primzahlen 241, 281, 353, 373, 421, 557 mit  $\chi(Y_T(p)) = 3$  zur Klasse IV (allgemeiner Typ). Es soll nachgewiesen werden, dass die sechs Primzahlen mit  $\chi(Y_T(p)) = 3$  zur Klasse III gehören. Es sind also insgesamt 15 Primzahlen zu betrachten und ihre Zugehörigkeit zur Klasse II bzw. III zu beweisen. Danach ist dann die Aufteilung der Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  in die vier Klassen vollständig erledigt.

Bei den folgenden Ueberlegungen werden singularitätenfreie rationale Kurven der Selbstschnittzahl  $a$  häufig einfach  $a$ -Kurven genannt.

4.3. Wir setzen stets voraus, dass  $p$  nicht zur Klasse I gehört. Auf  $Y^0(p)/T$  hat man eine Konfiguration von singularitätenfreien Kurven, die aus der Auflösung



der Hauptspitze entsteht (vgl. 2.1, Figur, und 3.2) und eventuell zyklische Konfigurationen, die jeweils von einem Spitzenpaar (Spitze und ihr Bild unter  $T$ ) herrühren. Für  $\delta = 1$  schneidet  $S_0^*$  auch noch die Kurve  $S_k^*$  mit  $N_k = 4$ , die jedoch nicht der Konfiguration (1) anzugehören braucht, sondern Bestandteil eines anderen Zyklus sein kann. Im allgemeinen ist [vgl. 3.1, (3)] :

$$S_k^* \cdot S_k^* = -b_k \quad \text{in } Y^0(p)/T.$$

Es gelten jedoch *Ausnahmen*. Es ist in (1)  $\ddagger$ :

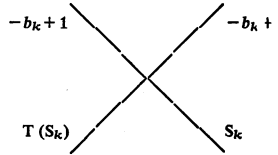
$$S_{t+1}^* \cdot S_{t+1}^* = S_t^* \cdot S_t^* = -b_t + 1 = -1 \quad [\text{vgl. 3.2, (15), (16)}].$$

Der Figur in 2.1 entnimmt man leicht, dass  $S_0$  in  $Y^0(p)$  eine Spitze hat, aber  $S_0^*$  in  $Y^0(p)/T$  singularitätenfrei ist mit

(2) 
$$S_0^* \cdot S_0^* = -a + 3 \quad \text{in } Y^0(p)/T \quad (b_0 = 2a + 1).$$

Wenn  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , dann schneidet  $F_3$  in  $Y(p)$  genau das Kurvenpaar  $S_k, T(S_k)$  mit  $N_k = 3$  transversal. Es gehört sicherlich nicht zum »Schwanz« [3.2, (15)]; es braucht nicht in der Hauptspitze vorzukommen, sondern kann einem anderen Zyklus angehören.

In  $Y^0(p)$  hat man die Konfiguration



Es ist  $S_k^* \cdot S_k^* = (1/2) (S_k + T(S_k)) (S_k + T(S_k))$ , also gilt

$$(3) \quad S_k^* \cdot S_k^* = -b_k + 2, \quad \text{falls } N_k = 3.$$

Analog gilt für  $p \equiv 1 \pmod{8}$

$$(4) \quad \begin{cases} S_k^* \cdot S_k^* = -b_k + 4, & \text{falls } N_k = 2, \\ S_k^* \cdot S_k^* = -b_k + 2, & \text{falls } N_k = 4. \end{cases}$$

Beim Uebergang zu  $Y_T^0(p)$  ändern sich die Schnittzahlen erneut. Wir betrachten zunächst  $S_0^*$  in  $Y_T^0(p)$  und erhalten (für  $\varepsilon, \delta$ , siehe 2.1) :

$$(5) \quad \begin{cases} S_0^* S_0^* = -a + 4, & \text{falls } \varepsilon = 1, \delta = 1 & (F_9^*), \\ S_0^* S_0^* = -a + 5, & \text{falls } \varepsilon = 0, \delta = 1 & (F_9^*, U_9^*), \\ S_0^* S_0^* = -a + 6, & \text{falls } \varepsilon = 1, \delta = 0 & (F_9^*, V_4^*, F_{16}^*), \\ S_0^* S_0^* = -a + 8, & \text{falls } \varepsilon = 0, \delta = 0 & (F_9^*, U_9^*, V_4^*, F_{16}^*, F_{36}^*). \end{cases}$$

In Klammern wurden die exceptionellen Kurven von 3.4 Tabelle 6 angegeben, die für die Erhöhung der Selbstschnittzahl im Vergleich zu (2) verantwortlich sind. Benutzt wird hier, dass  $F_{m^2}$  die Kurve  $S_0$  in  $Y(p)$  in  $\varphi(m)$  Punkten transversal schneidet [ $b = (m)$ ,  $n(b) = m$  in 1.4], für  $m \neq 2$  diese Schnittpunkte unter  $T$  paarweise miteinander vertauscht werden und somit  $F_{m^2}^*$  die Kurve  $S_0^*$  in  $(1/2) \varphi(m)$  Punkten transversal trifft. Es ist  $(1/2) \varphi(m) = 1$  genau für  $m = 3, 4, 6$ .

Beim Uebergang zu  $Y_T^0(p)$  wurde auch die Konfiguration 3.2 (16) niedergeblasen. Es ist im allgemeinen in  $Y_T^0(p)$  :

$$(6) \quad S_{t+a}^* \cdot S_{t+a}^* = S_{t-a+1}^* \cdot S_{t-a+1}^* = -b_{t-a+1} + 1,$$

aber die Selbstschnittzahl erhöht sich, falls eine der exceptionellen Kurven der Tabelle 6 in 3.4 die Kurve  $S_{t-a+1}^*$  schneidet. Ueberhaupt ist der Durchgang der exceptionellen Kurven der Tabelle 6 durch die Spitzen noch zu betrachten, die eine von  $S_0^*$  verschiedene Kurve  $S_k^*$  schneiden.

Es müssen deshalb folgende Kurven berücksichtigt werden :

$$B_2^*, F_5^*, U_5^*, F_6^*, F_7^*, F_8^*, F_9^*, F_{11}^* \quad (\text{alle mit } N_2 = 1),$$

$$F_{12}^*, F_{20}^* \quad (\text{mit } N_2 = 4).$$

Man beachte, dass  $F_8^*$ ,  $F_{12}^*$  bzw.  $F_{20}^*$  auch die Kurve  $S_k^*$  mit  $N_k = 2,3$  bzw. 5 transversal schneidet (1.4). Das Endergebnis besagt :

LEMMA. — In  $Y_T^0(p)$  gilt  $S_k^* S_k^* = -b_k$  bis auf folgende Fälle :

$$\begin{aligned}
 &S_0^* S_0^* \text{ wird durch (5) gegeben,} \\
 &S_k^* S_k^* = -b_k + 5, \quad \text{falls } N_k = 2, \\
 &S_k^* S_k^* = -b_k + 2, \quad \text{falls } N_k = 4, \\
 &S_k^* S_k^* = -b_k + 3, \quad \text{falls } N_k = 3, \delta = 1, \\
 &S_k^* S_k^* = -b_k + 4, \quad \text{falls } N_k = 3, \delta = 0, \\
 &S_k^* S_k^* = -b_k + 2, \quad \text{falls } N_k = 5, \delta = 1, \\
 &S_k^* S_k^* = -b_k + 3, \quad \text{falls } N_k = 5, \delta = 0, \\
 &S_k^* S_k^* = -b_k + 1, \quad \text{falls } N_k = 6, 7, 8, 9, 11.
 \end{aligned}$$

Falls  $k = t - a + 1$  [in Konfiguration 3.2, (16)], dann erhöht sich die vorstehend angegebene Selbstschnittzahl um 1.

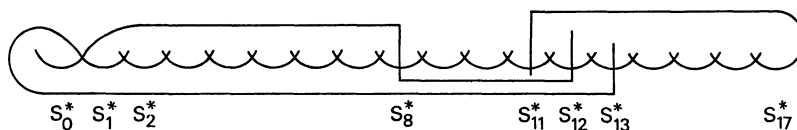
In  $Y_T^0(p)$  schneidet  $S_0^*$  die Kurven  $S_k^*$  mit  $N_k = 4$  oder 9 (falls  $\delta = 1$  bzw.  $\varepsilon = 1$ ). Es schneiden sich auch die Kurven  $S_k^*$  und  $S_l^*$  mit  $N_k = 2$  und  $N_l = 8$  (falls  $\delta = 1$ ). Wenn  $\varepsilon = \delta = 1$ , dann gibt es zwei Kurven  $S_{k_1}^*$ ,  $S_{k_2}^*$  mit  $N_{k_1}^* = N_{k_2}^* = 6$ . Sie schneiden sich. Alle diese Schnitte sind transversal. Weitere Schnitte gibt es nicht. Die Schnittkonfiguration (einschliesslich Selbstschnittzahlen) der Kurven  $S_k^*$  auf  $Y_T^0(p)$ , wobei  $k$  einem beliebigen Zyklus angehört, ist jetzt vollständig beschrieben.

4.4. Wir betrachten die 9 Primzahlen, von denen nachgewiesen werden soll, dass sie zur Klasse II gehören (siehe 4.2).

Für eine K 3-Fläche ist  $c_1^2 = 0$ . Nach 3.6 Tabelle 8 erwarten wir deshalb, dass in 7 Fällen noch 1 bzw. 2 Kurven in  $Y_T^0(p)$  niedergeblasen werden können, um das gewünschte minimale Modell, nämlich eine K 3-Fläche, zu bekommen. Es wird uns immer gelingen, diese Kurven zu finden. Auf einer K 3-Fläche hat jede singularitätenfreie rationale Kurve die Selbstschnittzahl  $-2$ . Wir erwarten deshalb, dass wir die Selbstschnittzahlen  $-b_k$  in unseren 9 Fällen durch Anwendung des Lemmas in 4.3 und der zusätzlichen Niederblasungen auf  $-2$  bringen können. Bei dem Beweis, dass es sich wirklich um eine K 3-Fläche handelt, wird 4.1 Satz 1 benutzt. Nach Möglichkeit werden wir nur die Kurven  $S_k^*$  verwenden. Man konsultiere dazu stets die Liste der Spitzenaufösungen in 3.6. Wir behandeln die 9 Primzahlen getrennt ihrer Restklasse mod 24 entsprechend.

$$\varepsilon = \delta = 1 : p = 193, \quad c_1^2(Y_T^0(193)) = -1.$$

Die Konfiguration der  $S_k^*$  auf  $Y_T^0(p)$  sieht so aus :



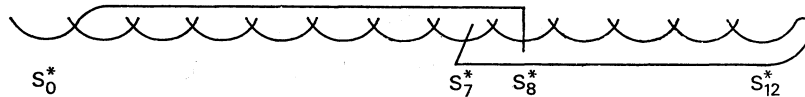


Die  $S_k^*$  sind von links nach rechts fortlaufend durch  $\cup \dots \cup$  angedeutet, aber nicht alle gekennzeichnet. Alle Kurven haben Selbstschnittzahl  $-2$  bis auf

$$S_1^* S_1^* = -1, \quad S_0^* S_0^* = S_2^* S_2^* = S_{13}^* S_{13}^* = -3.$$

Blasen wir  $S_1^*$  nieder, so ergibt sich eine Fläche  $Y_T^{00}(193)$ , die nach 4.1 Satz 1 eine K 3-Fläche ist (Verwendung einer zyklischen elliptischen Konfiguration) :

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0, \quad \delta = 1, \quad p = 233, 257, \\ p = 233, \quad c_1^2(Y_T^0(233)) = -1. \end{aligned}$$

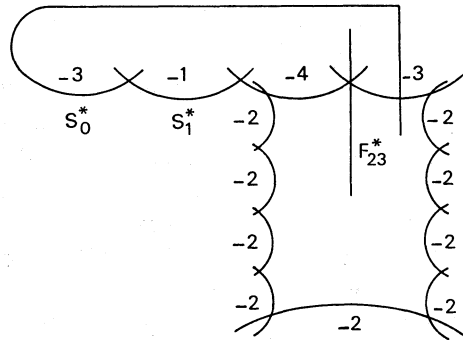


Alle  $S_k^*$  haben Selbstschnittzahl  $-2$  bis auf

$$S_0^* S_0^* = S_8^* S_8^* = S_{12}^* S_{12}^* = -3.$$

Für die Kurve  $F_{16}^*$  gilt  $c_1^*(16) = 0$  (siehe 2.6, Tabelle 3). Sie schneidet in  $Y^0(233)/T$  die Schwanzkurve  $S_{13}^*$ . Deshalb ist auf  $Y_T^0(233)$  die Zahl  $c_1^*[F_{16}^*]$  gleich 1 und die Kurve  $F_{16}^*$  exzeptionell. Die Kurve  $F_{16}^*$  schneidet  $S_0^*$ ,  $S_8^*$ ,  $S_{12}^*$  transversal. Bläst man sie herunter, dann erhält man eine K 3-Fläche  $Y_T^{00}(233)$ . Der Beweis erfolgt wieder mit einer zyklischen elliptischen Konfiguration.

$$p = 257, \quad c_1^2(Y_T^0(p)) = -2, \quad h(257) = 3$$



Der weitere Zyklus ist eingezeichnet. Diese Kurven sind nicht besonders benannt, nur mit ihren Selbstschnittzahlen versehen. Durch den Schnittpunkt der  $(-4)$ -Kurve mit der  $(-3)$ -Kurve geht »diagonal« die Kurve  $F_{23}^*$ , da diesem Schnittpunkt die quadratische Form  $[4, 17, 2]$  zugeordnet ist. Es ist  $c_1^*(23) = 0$  (Tabelle 3 in 2.6), aber  $c_1[F_{23}^*] > c_1(23)$  in  $Y^0(p)$ , da  $F_{23}^*$  nicht transversal durch die Spitzen geht (2.2 Satz 1). Also ist  $c_1^*[F_{23}^*] = 1$ ; grösser kann es nicht sein, da sonst die Fläche rational wäre. Damit ist  $F_{23}^*$  exzeptionell. Bläst man  $S_1^*$  und  $F_{23}^*$  nieder, dann erhält man eine K 3-Fläche  $Y_T^{00}(257)$ .

Beim Beweis wird die elliptische Konfiguration

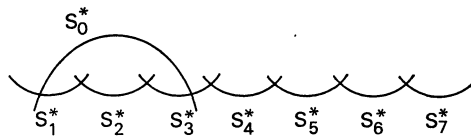


(Konfiguration III bei Kodaira [13])

benutzt, die aus der  $(-4)$ -Kurve und der  $(-3)$ -Kurve entsteht.

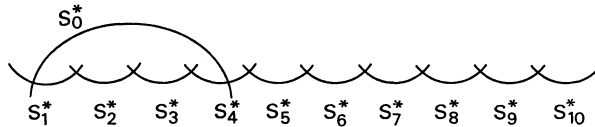
$$\varepsilon = 1, \quad \delta = 0, \quad p = 277, 349, 397,$$

$$p = 277, \quad c_1^2[Y_T^0(277)] = 0$$



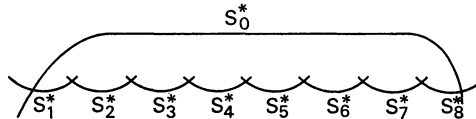
Alle Kurven haben die Selbstschnittzahl  $-2$ . Also ist  $Y_T^0(277)$  eine K 3-Fläche. (Eine zyklische elliptische Konfiguration wird benutzt.)

$$p = 349, \quad c_1^2[Y_T^0(349)] = -1$$



Alle Kurven haben die Selbstschnittzahl  $-2$  bis auf  $S_0^* S_0^* = S_1^* S_1^* = -3$ . Durch den Schnittpunkt von  $S_0^*$  und  $S_1^*$  geht  $F_{23}^*$ . Die Kurve ist exzeptionell. Bläst man sie nieder erhält man die K 3-Fläche  $Y_T^{00}(349)$ . (Eine elliptische Konfiguration III wird benutzt.)

$$p = 397, \quad c_1^2[Y_T^0(397)] = -2$$



Alle Selbstschnittzahlen sind  $-2$  bis auf

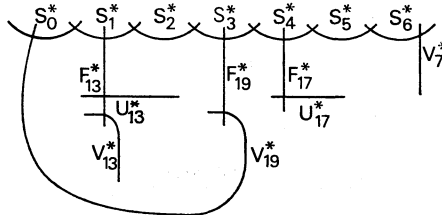
$$S_0^* S_0^* = S_2^* S_2^* = -4, \quad S_1^* S_1^* = -1.$$

Die Kurve  $S_1^*$  wird von  $F_{44}^*$  ( $N_1 = 11, N_2 = 4$ ) transversal geschnitten. Für sie ist  $c_1^*[F_{44}^*] = 0$  (siehe 2.6 Tabelle 3). Also ist  $F_{44}^*$  eine  $(-2)$ -Kurve. Bläst man  $S_1^*$  und  $F_{44}^*$

nieder, so ergibt sich die K 3-Fläche  $Y_T^{00}$  (397). Beim Beweis wird wieder eine elliptische Konfiguration III benutzt, die aus  $S_0^*$  und  $S_2^*$  entsteht.

$$e = \delta = 0, \quad p = 389, 461, 509$$

$$p = 389, \quad c_1^2[Y_T^0(389)] = 0$$

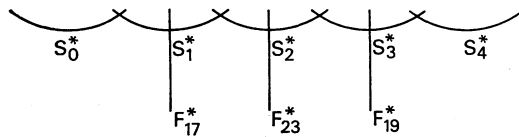


Die Kurven  $S_i^*$  und  $F_{13}^*, F_{19}^*, F_{17}^*$  haben alle die Selbstschnittzahl  $-2$ , also ist  $Y_T^0$  (389) eine K 3-Fläche. Man verwende zum Beispiel die elliptische Konfiguration, die bei Kodaira [13] mit  $I_2^*$  bezeichnet und hier durch  $S_0^*, \dots, S_4^*, F_{13}^*, F_{19}^*$  realisiert wird. Die weiteren Kurven, die wir eingetragen haben, rühren her von den Quotientensingularitäten, durch die  $F_{13}, F_{19}, F_{17}, F_7$  in  $X(p)$  hindurchgehen. Die Bezeichnung ist wie in 2.3 und 3.2 verabredet. Die Selbstschnittzahl von  $U_{13}^*, U_{17}^*$  ist  $-2$ , das gilt aber auch für  $V_7^*, V_{13}^*, V_{19}^*$ , was an den exzeptionellen Kurven  $F_7^*, F_{24}^*, F_{16}^*$  liegt. Weil  $4 \cdot 24 \cdot 13 - 9^2 = 3 \cdot 389$  bzw.  $4 \cdot 16 \cdot 19 - 7^2 = 3 \cdot 389$ , ist  $V_{24}^* = V_{13}^*$  und  $V_{16}^* = V_{19}^*$ . Um dieses Beispiel noch weiter zu erläutern, sei erwähnt, dass  $h(-4 \cdot 389) = h(-3 \cdot 389) = 22$ . Es muss also 5 Paare  $U_i, U_i'$  und 5 Paare  $V_j, V_j'$  in der Figur von 2.1 geben. Diese sind repräsentiert durch

$$U_5^*, U_6^*, U_9^*(\text{niedergeblasen}), \quad U_{13}^*, U_{17}^* \text{ bzw.}$$

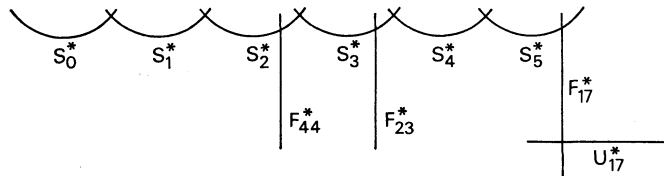
$$V_4^*, V_6^*(\text{niedergeblasen}), \quad V_7^*, V_{13}^*, V_{19}^*.$$

$$p = 461, \quad c_1^2(Y_T(461)) = -1$$



Alle Kurven haben die Selbstschnittzahl  $-2$  bis auf  $S_0^* S_0^* = -3$ . Da  $4 \cdot 9 \cdot 54 - 10^2 = 4 \cdot 461$ , schneidet  $F_{54}^*$  die Kurve  $U_9^*$  in  $Y^0(461)/T$ , d. h.  $U_{54}^* = U_9^*$ . In  $Y_T^0(461)$  ist  $U_9^*$  bereits niedergeblasen und deshalb  $F_{54}^*$  exzeptionell in  $Y_T^0(461)$ . Diese exzeptionelle Kurve schneidet  $S_0^*$  transversal. Nach Niederblasung erhielt man die K 3-Fläche  $Y_T^{00}(461)$ . (Verwendung einer Konfiguration  $I_2^*$ .)

$$p = 509, \quad c_1^2[Y_T^0(509)] = -2$$

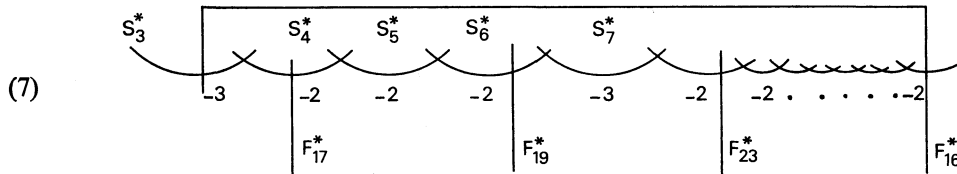


Alle Kurven haben die Selbstschnittzahl  $-2$  bis auf  $S_0^* S_0^* = -3$ . Wegen  $4.16.24 - 3^2 = 3.509$ , gilt für die exzeptionellen Kurven  $F_{16}^*, F_{24}^*$ , dass  $V_{16}^* = V_{24}^*$ . Deshalb ist  $V_{16}^*$  exzeptionell in  $Y_T^0(509)$ . Diese exzeptionelle Kurve schneidet  $S_0^*$  transversal. Ferner ist  $F_{56}^*$  exzeptionell. Wegen  $4.56.26 - 15^2 = 11.509$  schneidet nämlich die  $(-2)$ -Kurve  $F_{56}^*$  auf  $Y^0(509)/T$  die exzeptionelle Kurve  $F_{26}^*$ . Nach Niederblasung erhält man die K 3-Fläche  $Y_T^{00}(509)$ . Man benutze z. B. die elliptische Konfiguration  $E_9$ , bei Kodaira mit  $IV^*$  bezeichnet.

4.5. Wir kommen jetzt zu den 6 Primzahlen, von denen nachgewiesen werden soll, dass sie zur Klasse III gehören (4.2). Nach Tabelle 8 in 3.6 ist  $c_1^2[Y_T^0(p)] = 0$  für alle 6 Fälle bis auf  $p = 353$ . Da  $c_1^2[Y_T^0(353)] = -1$  ist, erwarten wir, dass in  $Y_T^0(353)$  noch eine Kurve niedergeblasen werden kann. Wir betrachten zunächst diese Fläche. Für diesen Fall und alle weiteren ziehe man die Liste der Spitzenaufösungen in 3.6 heran. Es wird immer das Lemma in 4.3 benutzt.

$$p = 353, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = 1.$$

Es ist  $b_2 = 2$  und  $N_2 = 11$  und deshalb  $S_2^* S_2^* = -1$  in  $Y_T^0(353)$ . Durch Niederblasung von  $S_2^*$  erhält man eine Fläche  $Y_T^{00}(353)$  mit  $c_1^2 = 0$ . Auf  $Y_T^{00}(353)$  gibt es folgende Konfiguration (die Kurven  $S_0^*, S_1^*$  wurden nicht eingezeichnet).



Nach 2.5 Tabelle 3 ist  $c_1^*(17) = c_1^*(19) = c_1^*(23) = c_1^*(16) = 0$ . Daraus folgt, dass  $F_{17}^*, F_{19}^*, F_{23}^*, F_{16}^*$  singularitätenfreie rationale Kurven der Selbstschnittzahl  $-2$  sind. Wir werden jetzt  $F_{17}^*$  und  $F_{19}^*$  durch eine Kette von weiteren  $(-2)$ -Kurven verbinden und betrachten dazu die folgende Kette quadratischer Formen :

Form	Diskriminante
[17, 4, 21]	-4.353
[21, 10, 18]	-4.353
[18, 7, 35]	-7.353
[35, 26, 25]	-8.353
[25, 21, 15]	-3.353
[15, 9, 19]	-3.353

Nach 2.6 Tabelle 3 ist für 21 ( $N_1 = 1$ ), 18 ( $N_1 = 2, N_2 = 9$ ), 35 ( $N_1 = 1$ ) und 25 ( $N_1 = 1$ ) der Wert von  $c_1^*$  gleich 0. Ferner war  $F_{15}^*$  eine exzeptionelle Kurve in  $Y^0(p)/T$ . Beim Niederblasen wurde die zugehörige  $(-3)$ -Kurve eine  $(-2)$ -Kurve (und zwar ist  $V_{25}^* = V_{15}^* = V_{19}^*$ , wie die beiden letzten quadratischen Formen zeigen. Für die Kurve  $F_{21}^*$  gibt es zwei Kurven  $U^*$  der Selbstschnittzahl  $-2$ , die  $U_{21}^{*(1)}$  und  $U_{21}^{*(2)}$  heißen mögen. Die beiden ersten quadratischen Formen besagen, dass  $U_{21}^{*(1)} = U_{17}^*$  und  $U_{21}^{*(2)} = U_{18}^*$ . Für

die quadratischen Formen  $\varphi = [18, \pm 7, 35]$  bzw.  $[35, \pm 26, 25]$  gilt  $s(\varphi) = 1$ , da  $h(-7) = h(-8) = 1$  (vgl. 1.2). Es wird also ein eindeutig bestimmter Schnittpunkt von  $F_{18}^*$  und  $F_{35}^*$  bzw.  $F_{35}^*$  und  $F_{25}^*$  durch die entsprechenden speziellen Punkte festgelegt. Wir haben eine elliptische Konfiguration gefunden, die aus einem Zyklus von 12 rationalen singularitätenfreien Kurven der Selbstschnittzahl  $-2$  besteht, nämlich  $S_6^*, S_5^*, S_4^*, F_{17}^*, U_{17}^*, F_{21}^*, U_{18}^*, F_{18}^*, F_{35}^*, F_{25}^*, V_{15}^*, F_{19}^*$ . Also gehört 353 zur Klasse III. Der Zyklus ist eine Faser der eindeutig bestimmten elliptischen Faserung. Wir möchten noch einen Zyklus angeben, nämlich den der  $F_{32}^*$  und  $F_{16}^*$  enthält. Er wird uns gegeben durch folgende Kette von quadratischen Formen :

Form	Diskriminante
[23, 21, 47]	-11.353
[47, 25, 39]	-19.353
[39, 5, 16]	- 7.353

Es ist  $c_1^*(23) = c_1^*(39) = c_1^*(16) = 0$  und  $h(-11) = h(-19) = h(-7) = 1$ . Ferner ist  $c_1^*(47) = -2$ . Jedoch geht  $F_{47}$  nicht transversal durch die Spitzen. Dem Schnittpunkt von  $S_0$  und  $S_1$  ist die quadratische Form  $[N_0, M_1, N_1] = [1, 19, 2]$  zugeordnet mit  $N_0 t^2 + M_1 ts + N_1 s^2 = 47$  für  $(t, s) = (1, 2)$ . Deshalb ist  $c_1^*[F_{47}^*] = 0$ , und wir erhalten in der Tat einen weiteren Zyklus von 12 singularitätenfreien rationalen Kurven der Selbstschnittzahl  $-2$ , nämlich  $F_{23}^*, F_{47}^*, F_{39}^*, F_{16}^*, S_{15}^*, \dots, S_8^*$ . Das Diagramm (7) zeigt zwei Schnitte der elliptischen Faserung, die  $(-3)$ -Kurven  $S_3^*, S_7^*$ .

In den folgenden fünf Fällen ist  $c_1^2[Y_T^0(p)] = 0$ . Wir werden zeigen, dass immer  $Y_T^0(p)$  vom elliptischen Typ ist. Es ist dann auch nachgewiesen, dass diese Fläche minimal ist

$$p = 281, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = 1.$$

Es sollen zunächst die folgenden  $(-2)$ -Kurven benutzt werden :  $F_{16}^*, F_{39}^*, F_{18}^*, F_{17}^*$  (Tabelle 3 in 2.6) :

Form	Diskriminante
[16, 23, 39]	(-7).281
[39, 29, 18]	(-7).281
[18, 10, 17]	(-4).281

Zyklus der Länge 7 von  $(-2)$ -Kurven :  $S_8^*, S_5^*, F_{16}^*, F_{39}^*, F_{18}^*, U_{17}^*, F_{17}^*$ . Damit ist bereits nachgewiesen, dass 281 zur Klasse III gehört. Die  $(-3)$ -Kurven  $S_7^*, S_{10}^*$  sind Schnitte. Wir geben weitere Zyklen von  $(-2)$ -Kurven an und verwenden dafür :  $F_{10}^*, F_{14}^*, F_{20}^*, F_{31}^*, F_{33}^*$ . Es ist  $c_1^*(10) = c_1^*(14) = 0$ ,  $c_1^*(20) = c_1^*(31) = c_1^*(33) = -1$ . Aber  $F_{20}^*, F_{31}^*$  gehen nicht transversal durch die Spitzen. Dem Schnittpunkt von  $S_0^*$  und  $S_1^*$  ist die Form  $[1, 17, 2]$ , dem Schnittpunkt von  $S_1^*$  und  $S_2^*$  die Form  $[2, 19, 10]$  zugeordnet. Diese Formen stellen 20 bzw. 31 für  $s = t = 1$  dar. Also haben wir auch die  $(-2)$ -Kurven  $F_{20}^*, F_{31}^*$ . Zur Kurve  $F_{33}^*$  gehören zwei Kurven  $U_{33}^{*(1)}$  und  $U_{33}^{*(2)}$ . Da  $[33, 8, 9]$  die Diskriminante  $-4.281$  hat, ist eine der beiden, sagen wir  $U_{33}^{*(2)}$ , gleich  $U_9^*$  und wurde also niedergeblasen. Also ist  $F_{33}^*$  eine  $(-2)$ -Kurve.

Zyklus der Länge 12 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{14}^*, S_6^*, S_5^*, S_4^*, F_{20}^*, S_{11}^*, S_{12}^*, \dots, S_{17}^* |, F_{14}^*$   
 schliesslich gibt es einen Zyklus der Länge 6, nämlich

$$F_{31}^*, V_7^*, F_{33}^*, U_{10}^*, F_{10}^*, S_2^* |, F_{31}^*.$$

Die zugehörige Kette quadratischer Formen ist :

Form	Diskriminante
$[31, 5, 7]$	$-3.281 (V_{31}^* = V_7^*)$
$[7, 9, 33]$	$-3.281 (V_7^* = V_{33}^*)$
$[33, 14, 10]$	$-4.281 (U_{33}^{*(1)} = U_{10}^*)$

$$p = 241, \quad \varepsilon = \delta = 1.$$

Wir verwenden die  $(-2)$ -Kurven  $F_{12}^*, F_{15}^*, F_{16}^*, F_{18}^*, F_{25}^*$ . Es ist  $c_1^*(18) = -1$ , jedoch schneidet  $F_{18}^*$  in  $Y^0(241)/T$  die Kurve  $S_{23}^*$ , welche niedergeblasen wird. Für  $F_{25}^*$  ist zu beachten, dass  $c_1^*(25) = -1$ , jedoch  $F_{25}^*$  nicht transversal durch die Spitzen geht : Dem Schnittpunkt von  $S_{17}^*$  und  $S_{18}^*$  ist die Form  $[2, 17, 6]$  zugeordnet, die 25 für  $s = t = 1$  darstellt.

Zyklus der Länge 13 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{12}^*, S_1^*, S_2^*, F_{15}^*, S_{16}^*, S_{15}^*, S_{14}^*, S_{13}^*, S_{12}^*, S_{11}^*, S_{10}^*, S_9^*, S_8^* |, F_{12}^*$ .

Zyklus der Länge 6 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{16}^*, S_6^*, S_5^*, S_4^*, F_{18}^*, S_{22}^* |, F_{16}^*$

Zyklus der Länge 6 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{25}^*, U_{10}^*, F_{10}^*, S_{20}^*, S_{19}^*, S_{18}^* |, F_{25}^*$ .

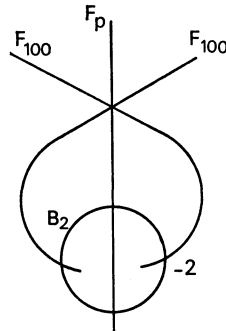
Hier benutzt man, dass  $[25, 6, 10]$  die Diskriminante  $-4.241$  hat und deshalb  $U_{25}^* = U_{10}^*$ .

Schnitte sind  $S_3^*, S_7^*, S_{21}^*$ .

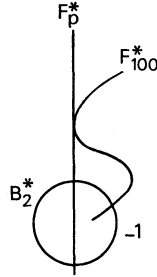
$$p = 373, \quad \varepsilon = 1, \quad \delta = 0.$$

Wir verwenden die  $(-2)$ -Kurven  $F_{13}^*, F_{17}^*, F_{21}^*, F_{22}^*, F_{25}^*, F_{28}^*, F_{30}^*, F_{36}^*, F_{38}^*, F_{40}^*, F_{100}^*$ . Es ist  $c_1^* = 0$  (Tabelle 3 in 2.6) bis auf  $c_1^*(21) = -1$  und  $c_1^*(100) = -2$ . Die Kurve  $F_{21}^*$  schneidet  $S_{10}^*$  transversal. Aber  $S_{10}^*$  wird beim Uebergang zu  $Y_T^0(373)$  niedergeblasen.

Da  $H(4.100-373) = H(27) = 4/3$ , hat man auf  $Y^0(373)$  eine Konfiguration



[vgl. 2.4 (13) und 2.6, Beweis von Satz 3] und auf  $Y^0(373)/T$  :



Es folgt  $c_1^*[F_{100}^*] = 0$  auf  $Y_T^0(373)$ .

1) Zyklus der Länge 10 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{17}^*, S_1^*, S_2^*, S_3^*, S_4^*, S_5^*, F_{21}^*, V_{16}^*, F_{22}^*, U_{17}^* |, F_{17}^*$  :

<i>Form</i>	<i>Diskriminante</i>
[ 21, 15, 16 ]	- 3.373 ( $V_{21}^* = V_{16}^*$ )
[ 16, 17, 22 ]	- 3.373 ( $V_{16}^* = V_{22}^{*(1)}$ )
[ 22, 2, 17 ]	- 4.373 ( $U_{22}^* = U_{17}^*$ )

2) Zyklus der Länge 6 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{13}^*, S_8^*, S_7^*, F_{36}^*, F_{38}^*, U_{13}^* |, F_{13}^*$  :

<i>Quadratische Form</i>	<i>Diskriminante</i>
[ 36, 37, 38 ]	- 11.373
[ 38, 22, 13 ]	- 4.373 ( $U_{38}^* = U_{13}^*$ )

3) Zyklus der Länge 3 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{40}^*, V_7^*, F_{100}^* |, F_{40}^*$  :

<i>Quadratische Form</i>	<i>Diskriminante</i>
[ 40, 1, 7 ]	- 3.373 ( $V_{40}^{*(1)} = V_7^*$ )
[ 7, 41, 100 ]	- 3.373 ( $V_{100}^* = V_7^*$ )
[ 100, 77, 40 ]	- 27.373 ( $h(-27) = 1$ )

4) Zyklus der Länge 6 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{28}^*, V_{10}^{*(1)}, V_{10}^{*(2)}, F_{30}^*, F_{25}^*, V_{12}^* |, F_{28}^*$  :

<i>Quadratische Form</i>	<i>Diskriminante</i>
[ 28, 1, 10 ]	- 3.373 ( $V_{28}^{*(1)} = V_{10}^{*(1)}$ )
[ 10, 9, 30 ]	- 3.373 ( $V_{10}^{*(2)} = V_{30}^{*(1)}$ )
[ 30, 4, 25 ]	- 8.373
[ 25, 9, 12 ]	- 3.373 ( $V_{25}^* = V_{12}^*$ )
[ 12, 15, 28 ]	- 3.373 ( $V_{12}^* = V_{28}^{*(2)}$ )

Da  $F_{12}^*$  niedergeblasen wurde, ist  $V_{12}^*$  eine  $(-2)$ -Kurve. Da  $F_{10}^*$  niedergeblasen wurde, sind  $V_{10}^{*(1)}$  und  $V_{10}^{*(2)}$  auch  $(-2)$ -Kurven. Sie schneiden sich transversal. Es ist leicht zu kontrollieren, dass  $F_{28}$  und  $F_{30}$  sich in  $X(373)$  nicht schneiden und deshalb  $V_{28}^{*(i)} \neq V_{30}^{*(j)}$ . Da  $h(-3.373) = 32$  gibt es 7 Paare  $V_i, V_j$  in der Figur von 2.1. Sie werden repräsentiert

durch  $V_4^*$  (niedergeblasen),  $V_{16}^*$ ,  $V_7^*$ ,  $V_{12}^*$ ,  $V_{10}^{*(1)}$ ,  $V_{10}^{*(2)}$  und die Kurve  $V_{22}^{*(2)}$ , die mit  $V_{13}^*$ ,  $V_{40}^{*(2)}$  und  $V_{30}^{*(2)}$  übereinstimmt (spezieller Punkt mit der Form [22, 39, 30], welche 13, 22, 30, 40 primitiv darstellt).

*Schnitte der elliptischen Faserung* :  $S_6^*$ ,  $S_9^*$ ,  $V_{22}^{*(2)}$ .

$$p = 421, \quad \varepsilon = 1, \quad \delta = 0.$$

Benutzt werden die  $(-2)$ -Kurven  $F_{15}^*$ ,  $F_{17}^*$ ,  $F_{27}^*$ ,  $F_{28}^*$ ,  $F_{36}^*$ ,  $F_{38}^*$ ,  $F_{44}^*$ ,  $F_{64}^*$ ,  $F_{104}^*$ . In allen Fällen ist  $c_1^* = 0$ , bis auf  $c_1^*(27) = c_1^*(48) = c_1^*(64) = -1$  und  $c_1^*(104) = -2$ . Jedoch ist  $F_{27}^*$  nicht transversal in den Spitzen. Dem Schnittpunkt von  $S_0^*$  und  $S_1^*$  ist die Form [1, 21, 5] zugeordnet, welche 27 für  $s = t = 1$  darstellt. In  $Y^0(p)/T$  schneiden  $F_{48}^*$  und  $F_{64}^*$  die exzeptionelle Kurve  $F_{26}^*$  und  $F_{104}^*$  die exzeptionellen Kurven  $F_{12}^*$  und  $F_{16}^*$  (vgl. unten angegebene Ketten von quadratischen Formen).

1) *Zyklus der Länge 9 von  $(-2)$ -Kurven* :  $F_{27}^*$ ,  $S_1^*$ ,  $S_2^*$ ,  $S_3^*$ ,  $S_4^*$ ,  $S_5^*$ ,  $S_6^*$ ,  $S_7^*$ ,  $F_{44}^*$  |,  $F_{27}^*$  :

<i>Form</i>	<i>Diskriminante</i>
[ 44, 11, 27 ]	- 11.421

2) *Zyklus der Länge 10 von  $(-2)$ -Kurven* :  $F_{17}^*$ ,  $S_{12}^*$ ,  $S_{13}^*$ ,  $S_{14}^*$ ,  $F_{15}^*$ ,  $S_9^*$ ,  $S_{10}^*$ ,  $F_{36}^*$ ,  $F_{38}^*$ ,  $U_{17}^*$  |,  $F_{17}^*$  :

<i>Form</i>	<i>Diskriminante</i>
[ 36, 29, 38 ]	- 11.421
[ 38, 30, 17 ]	- 4.421 ( $U_{38}^* = U_{17}^*$ )

3) *Zyklus der Länge 3 von  $(-2)$ -Kurven* :  $F_{64}^*$ ,  $V_7^*$ ,  $F_{48}^*$  |,  $F_{64}^*$  :

<i>Form</i>	<i>Diskriminante</i>
[ 64, 23, 7 ]	- 3.421 ( $V_{64}^* = V_7^*$ )
[ 7, 9, 48 ]	- 3.421 ( $V_{48}^* = V_7^*$ )
[ 48, 19, 26 ]	- 11.421
[ 26, 45, 64 ]	- 11.421

4) *Zyklus der Länge 4 von  $(-2)$ -Kurven* :  $F_{28}^*$ ,  $V_{16}^*$ ,  $F_{104}^*$ ,  $V_{12}^*$  |,  $F_{28}^*$  :

<i>Form</i>	<i>Diskriminante</i>
[ 28, 23, 16 ]	- 3.421 ( $V_{28}^{*(1)} = V_{16}^*$ )
[ 16, 45, 104 ]	- 11.421
[ 104, 19, 12 ]	- 11.421
[ 12, 9, 28 ]	- 3.421 ( $V_{28}^{*(2)} = V_{12}^*$ )

*Schnitt* :  $S_8^*$ .

$$p = 557, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = 0.$$

Die folgenden  $(-2)$ -Kurven sollen benutzt werden :  $F_{17}^*$ ,  $F_{19}^*$ ,  $F_{22}^*$ ,  $F_{25}^*$ ,  $F_{28}^*$ ,  $F_{29}^*$ ,  $F_{39}^*$ ,  $F_{40}^*$ ,  $F_{42}^*$ ,  $F_{54}^*$ ,  $F_{60}^*$ ,  $F_{62}^*$ ,  $F_{64}^*$ ,  $F_{150}^*$ . In allen Fällen ist  $c_1^* = 0$  in Tabelle 3 von 2.6 bis auf  $F_{29}^*$ ,  $F_{62}^*$ ,  $F_{64}^*$ ,  $F_{150}^*$ , wo  $c_1^*(29) = c_1^*(62) = c_1^*(64) = -1$  und  $c_1^*(150) = -2$ . Aber  $F_{29}^*$



schneidet in  $Y^0(557)/T$  die Kurve  $S_4^*$ , welche niedergeblasen wird, und  $F_{62}^*$  und  $F_{64}^*$  schneiden  $U_9^*$  bzw.  $F_{26}^*$ , welche niedergeblasen werden ( $4 \cdot 62 \cdot 9 - 2^2 = 4 \cdot 557$  bzw.  $4 \cdot 64 \cdot 26 - 23^2 = 11 \cdot 557$ ). Die Kurve  $F_{150}^*$  schneidet die exzeptionelle Kurve  $V_4^*$  in  $Y^0(p)/T$ , d. h.  $V_4^* = V_{150}^{*(1)}$ , wegen  $4 \cdot 150 \cdot 4 - 27^2 = 3 \cdot 557$ , und ausserdem ist  $H(4 \cdot 150 - 557) = H(43) = 1$ , was eine Situation wie für die Kurve  $F_{100}^*$  bei  $p = 373$  bewirkt (abgesehen von  $B_2$ ).

1) Zyklus der Länge 7 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{17}^*, U_{17}^*, F_{54}^*, F_{62}^*, F_{19}^*, S_2^*, S_1^* |, F_{17}^*$

Form	Diskriminante
[ 17, 38, 54 ]	- 4.557 ( $U_{17}^* = U_{54}^*$ )
[ 54, 53, 62 ]	- 19.557
[ 62, 16, 19 ]	- 8.557

2) Zyklus der Länge 5 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{40}^*, V_{15}^*, F_{28}^*, V_{16}^*, F_{150}^* |, F_{40}^*$

Form	Diskriminante
[ 40, 27, 15 ]	- 3.557 ( $V_{40}^{*(1)} = V_{15}^*$ )
[ 15, 3, 28 ]	- 3.557 ( $V_{15}^* = V_{28}^{*(1)}$ )
[ 28, 11, 16 ]	- 3.557 ( $V_{28}^{*(2)} = V_{16}^*$ )
[ 16, 54, 150 ]	- 12.557 ( $V_{16}^* = V_{150}^{*(2)}$ )
[ 150, 7, 40 ]	- 43.557

Aus  $4 \cdot 16 \cdot 150 - 54^2 = 12 \cdot 557$  kann nicht ohne weiteres auf  $V_{16}^* = V_{150}^{*(2)}$  geschlossen werden, da die Form [16, 54, 150] nicht primitiv ist und deshalb 1.2 (10) oder (11) nicht angewandt werden kann. In der Tat ist  $s([16, 54, 150]) = 0$  (siehe [10], Chap. I, Th. 1). Nach [10], Chap. I, Theorem 2 ist jedoch  $s_0([16, 54, 150]) = 1$ . Dies entspricht der Tatsache, dass [28, 11, 16] die Zahl 150 primitiv darstellt ( $150 = 28 \cdot 2^2 + 2 \cdot 11 + 16$ ). In  $Y^0(557)/T$  wird  $V_{16}^*$  transversal von  $F_{16}^*$  (exzeptionelle Kurve),  $F_{28}^*$  und  $F_{150}^*$  geschnitten.

3) Zyklus der Länge 6 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{42}^*, V_{10}^{*(1)}, V_{10}^{*(2)}, F_{60}^*, V_7^*, F_{64}^* |, F_{42}^*$

Form	Diskriminante
[ 42, 3, 10 ]	- 3.557 ( $V_{42}^{*(1)} = V_{10}^{*(1)}$ )
[ 10, 27, 60 ]	- 3.357 ( $V_{10}^{*(2)} = V_{60}^{*(1)}$ )
[ 60, 3, 7 ]	- 3.557 ( $V_{60}^{*(2)} = V_7^*$ )
[ 7, 11, 64 ]	- 3.557 ( $V_7^* = V_{64}^*$ )
[ 64, 13, 42 ]	- 19.557

4) Zyklus der Länge 6 von  $(-2)$ -Kurven :  $F_{29}^*, F_{39}^*, F_{25}^*, V_{24}^*, F_{22}^*, U_{22}^* |, F_{29}^*$

Form	Diskriminante
[ 29, 25, 39 ]	- 7.557
[ 39, 1, 25 ]	- 7.557
[ 25, 27, 24 ]	- 3.557 ( $V_{25}^* = V_{24}^*$ )
[ 24, 21, 22 ]	- 3.557 ( $V_{24}^* = V_{22}^{*(1)}$ )
[ 22, 18, 29 ]	- 4.557 ( $U_{22}^* = U_{29}^*$ )

$F_{24}^*$  war exzeptionell in  $Y^0(557)/T$ . Deshalb ist  $V_{24}^*$  eine  $(-2)$ -Kurve.

*Schnitte* :  $S_3^*$ ,  $V_{22}^{*(2)}$ .

*Bemerkung.* — Es ist  $h(-4.557) = 18$ . Es gibt also 4 Paare  $U_i, U'_i$  in Figur 1 von 2.1. Diese werden repräsentiert durch  $U_5^*, U_6^*, U_9^*$  (niedergeblasen),  $U_{17}^*$ . Es ist  $h(-3.557) = 38$ . Es gibt 9 Paare  $V_i, V'_i$ . Diese werden repräsentiert durch  $V_4^*, V_6^*$  (niedergeblasen),  $V_{15}^*, V_{16}^*, V_{10}^{*(1)}, V_{10}^{*(2)}, V_7^*, V_{24}^*$  (Bestandteile der Zyklen), sowie  $V_{22}^{*(2)}$ , welches übereinstimmt mit  $V_{19}^*, V_{40}^{*(2)}, V_{42}^{*(2)}$  und somit jeden Zyklus schneidet, wie es sein muss, da  $V_{22}^{*(2)}$  als  $(-3)$ -Kurve ein Schnitt ist. Die Kurve  $F_{90}^*$  ist auch eine  $(-2)$ -Kurve. Da  $c_1^*[F_{90}^*] = 0$  ist, muss  $F_{90}^*$  Komponente einer Ausnahmefaser sein. Es ist unmöglich, diese Ausnahmefaser mit Hilfe der  $F_N^*$  und  $S_k^*$  anzugeben. Der Schnitt  $S_3^*$  schneidet nämlich jede der vier explizit konstruierten Ausnahmefasern in genau einem Punkt (Schnittpunkt mit  $S_2^*$  bzw.  $F_{28}^*$  bzw.  $V_7^*$  bzw.  $F_{29}^*$ ; bezüglich der laufenden Koordinate  $u_3$  auf  $S_3^*$  sind dies die Punkte  $0, -1, 1, \infty$ ), und es gibt keine Kurve  $F_N^*$  oder  $S_k^*$ , die  $S_3^*$  transversal in genau einem Punkt schneidet, der von diesen vier Punkten verschieden ist.

4.6. Die Klassifikation im Sinne von 4.1 und 4.2 wurde durch die Angabe der elliptischen Konfiguration in 4.5 abgeschlossen. Wir fassen zusammen.

*SATZ.* — *Es sei  $p$  eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{4}$  und  $\mathcal{O}$  der Ring der ganzen Zahlen von  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ . Es sei ferner  $G = \text{SL}_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$  die Hilbertsche Modulgruppe und  $G_T = G \cup G.T$  die symmetrische Hilbertsche Modulgruppe.*

*Die Fläche  $\overline{H^2/G_T}$  ist rational für 24 Primzahlen, nämlich für alle  $p < 193$  und  $p = 197, 229, 269, 293, 317$ .*

*Die Fläche  $\overline{H^2/G_T}$  ist von  $\mathbb{K}$  3-Typ für 9 Primzahlen, nämlich für  $p = 193, 233, 257, 277, 349, 389, 397, 461, 509$ .*

*Die Fläche  $\overline{H^2/G_T}$  ist vom echt elliptischen Typ für 6 Primzahlen, nämlich für  $p = 241, 281, 353, 373, 421, 557$ .*

*Die Fläche  $\overline{H^2/G_T}$  ist für alle anderen Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  vom allgemeinen Typ.*

### 5. Weitere Beispiele

5.1. In 3.3 Tabelle 5 wurden die rationalen Flächen  $Y_T(p)$  gelistet (für  $p \geq 29$ ) und die Werte  $c_1^2(Y_T(p))$  angegeben. Es entsteht die Frage, welche Kurven niedergeblasen werden können? Bei rationalen Flächen ist der Prozess des Niederblasens nicht eindeutig bestimmt. *Man muss immer kontrollieren, dass zwei exzeptionelle Kurven, die niedergeblasen werden sollen, sich nicht schneiden.*

Die minimalen rationalen Flächen sind wohlbekannt. Es sind die projektive Ebene  $P_2(\mathbb{C})$ , das cartesische Produkt  $\Sigma_0 = P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$  und die Regelflächen  $\Sigma_m (m \geq 2)$ . Für jedes  $m \geq 0$  ist dabei  $\Sigma_m$  das komplex-analytische Faserbündel über  $P_1(\mathbb{C})$  mit  $P_1(\mathbb{C})$  als Faser,  $C^*$  als Strukturgruppe und  $m$  als charakteristischer Zahl des  $C^*$ -Bündels. Für  $m > 0$  hat  $\Sigma_m$  genau eine irreduzible Kurve mit negativer Selbstschnittzahl und diese ist gleich  $-m$ . Die Fläche  $\Sigma_1$  ist  $P_2(\mathbb{C})$  mit einem aufgeblasenen Punkt. Jede rationale Fläche mit Eulerzahl 3 (d. h.  $c_1^2 = 9$ ) ist isomorph zu  $P_2(\mathbb{C})$  und jede mit Eulerzahl 4 (d. h.  $c_1^2 = 8$ )

isomorph zu einer Fläche  $\Sigma_m$  ( $m \geq 0$ ). Jede beliebige rationale Fläche entsteht aus einer minimalen  $[P_2(C)$  oder  $\Sigma_m$  ( $m = 0, m \geq 2$ )] durch sukzessives Aufblasen.

In  $Y_T(p)$  haben wir die Kurven  $B_2^*, F_N^*, S_k^*, U_i^*, V_i^*$  zur Verfügung.

SATZ 1. — Für jede der 21 rationalen Flächen  $Y_T(p)$  mit  $p \geq 29$  kann man durch sukzessives Niederblasen unter alleiniger Verwendung von Kurven  $B_2^*, F_N^*, S_k^*, U_i^*, V_i^*$  zu einer minimalen rationalen Fläche gelangen.

Wir deuten den Beweis nur in einigen Beispielen an. Der Prozess des Niederblasens ist nicht eindeutig. Für  $p = 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109$  geben wir in einer Tabelle Kurven an, die niedergeblasen werden können, um ein minimales Modell zu erreichen. Anschliessend soll  $p = 229$  noch erläutert werden. Unter unseren 21 Primzahlen ist 229 die einzige mit  $h(p) \neq 1$ . Es ist  $h(229) = 3$ .

Man beachte, dass wegen des möglichen Schneidens von exzeptionellen Kurven die Fläche  $Y_T^0(p)$  (siehe 3.5) nicht eingeführt werden kann. Mit  $F_N^*$  werden Kurven auf  $Y_T(p)$ , bzw. auf Flächen die durch den jeweiligen Prozess des Niederblasens entstehen, bezeichnet. Eine Liste der Spitzenaufösungen ist für einige Fälle erforderlich. Es wird auch benutzt, dass  $S_0^* S_0^* = -a + 3$  in  $Y_T(p)$ , falls  $p \neq (2a - 1)^2 + 4$ . Wenn  $p = (2a - 1)^2 + 4$ , dann beeinflusst das Niederblasen der Konfiguration 3.2 (16) die Selbstschnittzahl von  $S_0^*$ . In diesem Fall ist  $S_{t+a-1}^* = S_1^*$  und  $S_0^* S_0^* = -a + 4$  in  $Y_T(p)$ .

Liste von Spitzenaufösungen

k	p = 41		p = 73		p = 89		p = 97		p = 101		p = 109	
	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$	$b_k$	$N_k$
0.....	7	1	9	1	11	1	11	1	11	1	11	1
1.....	4	2	5	2	2	8	2	6	3	5	4	3
2.....	2	5	2	6	2	11	4	3	2	13	3	5
3.....	3	4	3	4	2	10	6	2	2	19	2	9
4.....	2	8	4	3	3	5	2	9	2	23	3	7
5.....	2	10	2	8	3	4	2	12	2	25	2	15
6.....			2	9	6	2	2	11			2	21
7.....			3	6	2	10	3	6			2	25
8.....			2	12	2	16	2	8			2	27
9.....			2	16	2	20	4	4				
10.....			2	18	2	22	2	12				
11.....							2	18				
12.....							2	22				
13.....							2	24				

Für diese Primzahlen ist  $h(p) = 1$

Die Kurve  $S_0^*$  wird für  $p = 29, 37, 41, 53, 97$  eine Gerade, für  $p = 89$  ein Kegelschnitt von  $P_2(C)$ . Für  $p = 101$  werden  $S_1^*$  und  $F_{13}^*$  in  $\Sigma_0$  Kurven der Selbstschnittzahl 0 mit  $S_1^* \cdot F_{13}^* = 1$ . Analoges gilt im Falle  $p = 109$  für  $S_1^*$  und  $S_2^*$ . Für  $p = 101, 109$  wird  $S_0^*$  eine Kurve der Selbstschnittzahl 2.

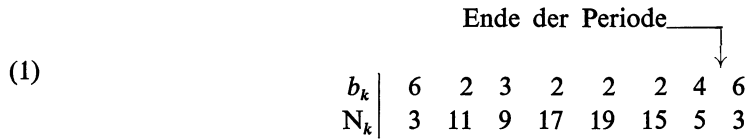
TABELLE 9

Niederblasen zu minimalen rationalen Flächen

$p$	Niederblasen	Min. Modell
29.....	$F_6^*, U_6^*$	$P_2(C)$
37.....	$B_2^*; V_4^*$	$P_2(C)$
41.....	$F_5^*, S_2^*; F_9^*$	$P_2(C)$
53.....	$F_6^*, U_6^*, V_6^*; V_4^*$	$P_2(C)$
61.....	$F_5^*, U_5^*; B_2^*; F_{12}^*; S_0^*$	$P_2(C)$
73.....	$F_6^*, S_2^*; B_2^*; F_8^*, S_5^*, S_6^*; S_0^*$	$P_2(C)$
89.....	$F_8^*, S_1^*, S_2^*, S_3^*; F_5^*, U_5^*; S_5^*; F_9^*, U_9^*$	$P_2(C)$
97.....	$F_6^*, S_1^*; B_2^*; F_9^*, S_4^*, S_5^*, S_6^*; F_8^*, S_8^*; F_{16}^*$	$P_2(C)$
101.....	$F_5^*, U_5^*; V_4^*; F_6^*, U_6^*; F_9^*, U_9^*; F_{16}^*$	$\Sigma_0$
109.....	$B_2^*; F_5^*, U_5^*; F_9^*, S_3^*; F_7^*; V_4^*; F_{16}^*; F_{12}^*$	$\Sigma_0$

Beachte, dass für  $p = 97$  die Kurve  $F_{16}^*$  durch den Schnittpunkt von  $S_2^*$  und  $S_3^*$  geht und deshalb exzeptionell ist.

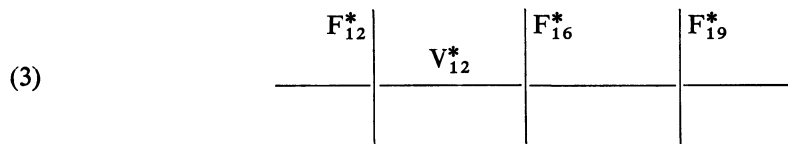
Als letztes Beispiel für Satz 1 betrachten wir  $p = 229$ . Da  $c_1^2(Y_T(229)) = -10$ , werden wir versuchen 19 Kurven niederzublasen, um  $P_2(C)$  zu erhalten. Es ist  $h(p) = 3$  und  $p = 15^2 + 4$  mit  $a = 8$ . Die Konfiguration 3.2 (15) ist also (bis auf  $S_0$ ) die ganze Hauptspitze, aber es gibt ein Paar zusätzlicher Zyklen in  $Y(229)$  (vgl. [7], 5.9, (28)), von denen jeder so aussieht :



In  $Y_T(229)$  werden zunächst folgende 15 Kurven niedergeblasen :

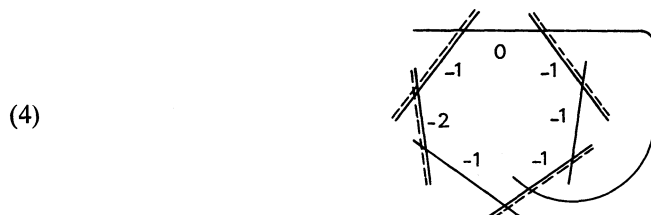
(2)  $V_4^*; B_2^*; F_{12}^*, F_{16}^*, V_{12}^*, F_{19}^*; F_{11}^*; F_9^*; F_{14}^*, U_{14}^*, F_{17}^*; F_{15}^*; F_5^*, U_5^*; F_{20}^*$ .

Dabei ist zu beachten, dass  $4 \cdot 12 \cdot 16 - 9^2 = 3 \cdot 229$  und  $4 \cdot 12 \cdot 19 - 15^2 = 3 \cdot 229$ . Deshalb ist  $V_{12}^* = V_{16}^* = V_{19}^*$ . Nach Niederblasen der exzeptionellen Kurven  $F_{12}^*, F_{16}^*$  (vgl. 3.4, Tabelle 6) kann deshalb auch  $V_{12}^*$  niedergeblasen werden. Danach wird die ursprüngliche  $(-2)$ -Kurve  $F_{19}^*$  (vgl. 2.5, Tabelle 3 mit  $c_1^*(19) = 0$ ) exzeptionell :



Ferner ist  $4 \cdot 14 \cdot 17 - 6^2 = 4 \cdot 229$ , d. h.  $U_{14}^* = U_{17}^*$ . Nach Niederblasen von  $F_{14}^*, U_{14}^*$  wird  $F_{17}^*$  exzeptionell ( $c_1^*(17) = 0$ ). Schliesslich ist  $F_{15}^*$  (eine  $(-2)$ -Kurve in  $Y^0(229)/T$ ) exzeptionell in  $Y_T(229)$ , weil  $F_{15}^*$  wegen  $(229 - 13^2)/4 = 15$  die Kurve  $S_1^*$  transversal

schneidet, welche beim Uebergang zu  $Y_T$  (229) niedergeblasen wurde. Nach den Niederblasungen (2) nimmt der Exrazyklus (1) folgende Gestalt an (vgl. auch 4.3, Lemma) :



Die Kurven mit  $N_k = 3$  bzw.  $N_k = 19$  schneiden sich wegen (3). Die gestrichelten 4 Kurven können niedergeblasen werden, und man erhält die projektive Ebene. Von den Kurven der Spitzenaufösungen sind in der projektive Ebene nur noch  $S_0^*$  und drei Kurven des Exrazyklus (siehe 4) übriggeblieben. Es handelt sich um zwei Kegelschnitte und zwei Geraden. Die beiden Kegelschnitte schneiden sich in 2 Punkten (Multiplizität 3 bzw. 1). Die Kurve  $F_{26}^*$  ist exzeptionell in  $Y_T(p)$ . Sie schneidet  $F_{19}^*$ , weil  $4 \cdot 19 \cdot 26 - 12^2 = 8 \cdot 229$ . Deshalb wird  $F_{26}^*$  eine Gerade von  $P_2(C)$  und zwar die gemeinsame Tangente der beiden Kegelschnitte.

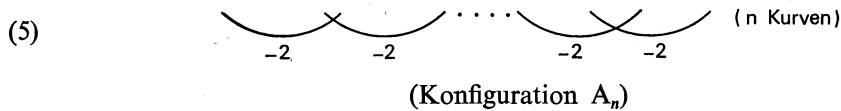
5.2. Die Hilbertsche Modulfläche  $Y^0(p)$  ist rational für  $p = 5, 13, 17$ . Für  $29 \leq p < 89$  ist  $Y^0(p)$  eine K 3-Fläche oder eine echt elliptische Fläche ( $c_1^2[Y^0(p)] = 0$ ) und deshalb minimal. Für  $p \geq 89$  ist  $Y^0(p)$  vom allgemeinen Typ. Diese Ergebnisse finden sich in [8], wo die Vermutung ausgesprochen wurde (siehe [8], S. 21), dass  $Y^0(p)$  auch für  $p \geq 89$  eine minimale algebraische Fläche ist, was van der Geer und van de Ven [5] in vielen Fällen bestätigt haben. Wir können die Minimalität leicht beweisen für den Fall, dass  $Y^0(p)/T$  nicht rational und nicht vom allgemeinen Typ ist (vgl. 4.6). Dabei wird das minimale Modell von  $Y^0(p)/T$  benutzt, das wir in 4.4, 4.5 besprochen haben.

**SATZ 2.** — Die Hilbertsche Modulfläche  $Y^0(p)$  ist minimal für die 9 Primzahlen  $p$ , für die  $Y^0(p)/T$  vom K 3-Typ ist, und für die 6 Primzahlen  $p$ , für die  $Y^0(p)/T$  vom echt elliptischen Typ ist (vgl. 4.6).

*Beweis.* — Es sei  $p$  eine der angegebenen Primzahlen und  $C$  eine exzeptionelle Kurve auf  $Y^0(p)$ . Diese Annahme soll zum Widerspruch geführt werden. Wäre  $T(C) = C$ , dann müsste  $T$  auf  $C$  einen in  $Y^0(p)$  isolierten Fixpunkt haben (vgl. [7], 5.4, Lemma). Ein solcher existiert aber nicht. Daher sind  $C$  und  $T(C)$  verschiedene exzeptionelle Kurven, die sich nicht schneiden, weil  $Y^0(p)$  nicht rational ist. Die Kurven  $C$ ,  $T(C)$  und  $F_p^0$  (Fixkurve von  $T$ ) sind also disjunkt. Das Bild von  $C$  und  $T(C)$  in  $Y^0(p)/T$  ist eine exzeptionelle Kurve  $C^*$ . Da das Urbild in  $Y^0(p)$  der beim Uebergang von  $Y^0(p)/T$  zum minimalen Modell niedergeblasenen Kurven keine exzeptionellen Kurven enthält, kann  $C^*$  keine dieser niederzublasenden Kurven sein, muss aber wenigstens eine dieser Kurven schneiden, da es sonst als exzeptionelle Kurve auf dem minimalen Modell verbliebe. Auf dem minimalen Modell wäre dann  $c_1[C^*] \geq 2$ , und das ist ein Widerspruch (vgl. 2.6), weil  $Y^0(p)/T$  nicht rational ist.

*Bemerkungen :*

1) Der vorstehende Beweis kann nach leichter Modifikation auch in einigen Fällen verwandt werden, wo  $Y^0(p)/T$  rational ist. So besteht zum Beispiel für  $p = 89, 97, 101, 109$  das Urbild in  $Y^0(p)$  der beim Uebergang zu  $Y_T(p)$  (siehe 3.2) und dann zum minimalen Modell (5.1) niedergeblasenen Kurven aus mehreren zueinander disjunkten Ketten ( $A_n$ -Konfiguration) von  $(-2)$ -Kurven :



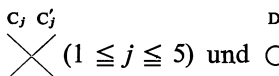
Jede dieser  $A_n$ -Konfiguration wird durch T in sich übergeführt. Wenigstens eine dieser Ketten würde von C und T(C) geschnitten, was die Rationalität von  $Y^0(p)$  ergäbe.

2) Nach [5] ist  $Y^0(p)$  minimal für  $29 \leq p \leq 317$ .

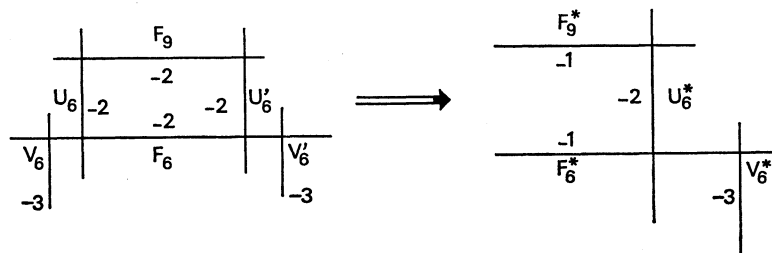
5.3. In den Fällen der Tabelle 9 kann die Art des Niederblasens von  $Y^0(p)/T$  auf  $Y_T(p)$  und dann auf das minimale Modell durch die besondere Struktur der Flächen  $Y^0(p)$  motiviert werden. Bekanntlich [8] ist  $Y^0(p)$  für  $p = 29, 37, 41$  eine K 3-Fläche, die (mehrere) elliptische Faserungen zulässt. Wir zeichnen diejenige Faserung aus, für die der Schwanz [3.2, (15)] in einer Ausnahmefaser enthalten ist. Für  $p = 53, 61, 73$  ist  $Y^0(p)$  echt elliptisch [8], die elliptische Faserung ist eindeutig bestimmt und der Schwanz ist automatisch Bestandteil einer Ausnahmefaser. Die Involution T ist faser-treu, die Fixkurve  $F_p$  schneidet eine reguläre Faser transversal in 4 Punkten. Deshalb hat  $Y^0(p)/T$  beinahe die Struktur einer Regelfläche. Die durch T geteilten Ausnahmefasern können bis auf eine Kurve niedergeblasen werden. Dann erhält man eine Regelfläche  $\Sigma_m$ . Man kann dieses Niederblasen so einrichten, dass sich  $\Sigma_1$  ergibt und die exzeptionelle Kurve von  $\Sigma_1$  wie folgt entsteht : Sie ist das Bild einer (eventuell reduziblen) Kurve C von  $Y^0(p)$ , welche mit jeder Faser der elliptischen Faserung die Schnittzahl 2 hat. Von  $\Sigma_1$  geht man dann durch einmaliges Niederblasen zu  $P_2(C)$  über. Für  $p = 29, 37, 41, 53, 61, 73$  ist in Tabelle 9 jeweils  $U_6^*, V_4^*, F_9^*, V_6^*, S_3^*, S_0^*$  das Bild von C.

Wir betrachten das Beispiel  $p = 53$  etwas genauer (vgl. auch [8]). Es ist  $h(-4.53) = 6$  und  $h(-3.53) = 10$ . Die echt elliptische Fläche  $Y^0(53)$  hat folgende 4 Ausnahmefasern (alle zyklisch) :

- 1)  $V_4, V'_4, F_{10}$  ( $V_4^* = V_{10}^{*(1)}$ , wegen  $4.4.10 - 1^2 = 3.53$ );
- 2)  $F_7, S_1, S_2, S_3, S_{-3}, S_{-2}, S_{-1}$ ;
- 3)  $F_6, U'_6, F_9, U_6$  ( $U_6^* = U_9^*$ , wegen  $4.6.9 - 2^2 = 4.53$ );
- 4)  $F_{16}$  ( $F_{16}$  hat einen auf  $F_p$  liegenden Doppelpunkt, wegen  $4.16 - 53 = 11$ ; siehe 2.3).

Darüberhinaus sind  ( $1 \leq j \leq 5$ ) und  $\circ$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) Bestandteile von Ausnahmefasern (siehe 2.1). Aber es ist nicht bekannt, wie sie sich zu Ausnahmefasern schliessen. Vermutlich ergeben sich 8 verschiedene Ausnahmefasern durch Hinzufügung von jeweils einer Kurve. Die Kurven  $V_6$  und  $V'_6$  sind Schnitte, da  $V_6^* = V_{10}^{*(2)} = V_7^* = V_{16}^*$ . Für C wählen wir  $V_6 + V'_6$ . Beim Uebergang von  $Y^0(53)/T$  zu  $Y_T(53)$  wurden  $S_3^*, S_2^*, S_1^*$  und

alle  $C_j^*$  und  $D_i^*$  niedergeblasen, danach müssen nur noch die Ausnahmefasern 1), 3) berücksichtigt werden, zum Beispiel



( $F_p$  wurde gestrichelt eingetragen).

In der Regelfläche  $\Sigma_1$  ist  $F_9^*$  eine Faser und  $V_6^*$  ein Schnitt der Selbstschnittzahl  $-1$ .

5.4. Nach Horikawa [11] ist eine minimale algebraische Fläche  $X$  mit  $p_g = 3$  und  $c_1^2 = 2$  die minimale Desingularisierung einer doppelten verzweigten Ueberlagerung der projektiven Ebene mit einer Kurve der Ordnung 8 als Verzweigungsort. Die Ueberlagerungsabbildung  $X \rightarrow P_2(C)$  ist dabei die »kanonische« Abbildung, die durch eine Basis des 3-dimensionalen Vektorraumes  $V$  der holomorphen 2-Formen gegeben wird. Für  $p = 89,97$  ist  $Y^0(p)$  minimal mit  $p_g = 3$  und  $c_1^2 = 2$ . Wir haben bereits eine 2-fache Ueberlagerung von  $P_2(C)$  konstruiert, da wir  $Y^0(p)/T$  durch Niederblasen auf  $P_2(C)$  gebraucht haben. Dies muss die Horikawasche Ueberlagerung sein, da  $T$  auf  $V$  als »minus Identität« operiert und das Urbild der in  $Y^0(p)/T$  niedergeblasenen Kurven in  $Y^0(p)$  nur aus  $(-2)$ -Kurven besteht. Wir geben jetzt für  $p = 89,97$  die in 5.2 (5) erwähnten  $A_n$ -Konfigurationen auf  $Y^0(p)$  an (vgl. die Liste der Spitzenaufösungen und Tabelle 9 in 5.1).

$$p = 89 \quad (h(-4.89) = 12, h(-3.89) = 2)$$

$$S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{-10}, S_{-9}, S_{-8}, S_{-7} \quad A_8$$

$$C_1, C'_1 \quad A_2$$

$$D_i, \quad 1 \leq i \leq 6, \quad 6 \text{ mal } A_1$$

$$S_3, S_2, S_1, F_8, S_{-1}, S_{-2}, S_{-3} \quad A_7$$

$$U_5, F_5, U'_5 \quad A_3$$

$$S_5, S_{-5} \quad A_2$$

$$U_9, F_9, U'_9 \quad A_3$$

$$p = 97 \quad (h(-4.97) = h(-3.97) = 4)$$

$$S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{-13}, S_{-12}, S_{-11}, S_{-10} \quad A_8$$

$$C_j, C'_j, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad 2 \text{ mal } A_2$$

$$D_i, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad 2 \text{ mal } A_1$$

$$S_1, F_6, S_{-1} \quad A_3$$

$B_2$	$A_1$
$S_6, S_5, S_4, F_9, S_{-4}, S_{-5}, S_{-6}$	$A_7$
$S_8, F_8, S_{-8}$	$A_3$
$F_{16}$	$A_1$

Bläst man eine Konfiguration  $A_n$  auf einen Punkt, dann erhält man eine Singularität vom Typ  $x^{n+1} + y^2 + z^2 = 0$ . Dies entspricht der Tatsache, dass die Verzweigungskurve eine Singularität vom Typ  $x^{n+1} + y^2 = 0$  hat; eine Kurvensingularität dieses Typs wollen wir  $a_n$  nennen. Damit ist bewiesen :

SATZ 3. — *Der Verzweigungsort von  $Y^0(89)$ , d. h. das Bild von  $F_{89}^0 \simeq \overline{H/\Gamma_*}(89)$  in der projektiven Ebene, ist eine Kurve der Ordnung 8 mit sechs singulären Punkten  $a_1$ , zwei singulären Punkten  $a_2$ , zwei singulären Punkten  $a_3$ , einem singulären Punkt  $a_7$  und einem singulären Punkt  $a_8$ . Entsprechendes gilt für  $Y^0(97)$ . Hier ist der Verzweigungsort eine Kurve der Ordnung 8 mit vier singulären Punkten  $a_1$ , zwei singulären Punkten  $a_2$ , zwei singulären Punkten  $a_3$ , einem singulären Punkt  $a_7$  und einem singulären Punkt  $a_8$ .*

*Bemerkungen :*

1) Die Singularität  $a_k$  hat die Plückerzahl (Reduktion des Geschlechts)  $[(k+1)/2]$ . Die Summe der Plückerzahlen für die Singularitäten der Kurven der Ordnung 8 bei  $p = 89$  bzw. 97 ist 20 bzw. 18. Eine singularitätenfreie Kurve der Ordnung 8 hat das Geschlecht 21, deshalb haben die beiden Kurven das Geschlecht 1 bzw. 3, in Uebereinstimmung mit den in 3.3 Tabelle 5 angegebenen Werten für die Eulersche Zahl von  $\overline{H/\Gamma_*(p)} \simeq F_p^0$ .

2) Es wäre schön, explizite Gleichungen für die beiden Kurven zu kennen.

3) Van der Geer und Van de Ven haben ebenfalls diese Flächen untersucht (vgl. [5], § 4).

5.5. Nach [11] kann man eine minimale algebraische Fläche  $X$  mit  $p_g = c_1^2 = 4$  mit Hilfe der kanonischen Abbildung als verzweigte doppelte Ueberlagerung einer Regelfläche  $\Sigma_m$  erhalten. Für  $p = 101, 109$  ist  $Y^0(p)$  minimal mit  $p_g = c_1^2 = 4$ . Die Regelfläche ist  $\Sigma_0 = P_1(C) \times P_1(C)$  (siehe Tabelle 9), und die Verzweigungskurve hat nach [11] den Doppelgrad (6, 6). Wir geben wieder die  $A_n$ -Konfigurationen von  $Y^0(p)$  an.

$p = 101$	$(h(-4.101) = 14, h(-3.101) = 10)$
$S_2, S_3, S_4, S_5, S_{-5}, S_{-4}, S_{-3}, S_{-2}$	$A_8$
$C_j, C'_j, 1 \leq j \leq 5,$	5 mal $A_2$
$D_i, 1 \leq i \leq 7$	7 mal $A_1$
$U_5, F_5, U'_5$	$A_3$
$V_4, V'_4$	$A_2$
$U_6, F_6, U'_6$	$A_3$
$U_9, F_9, U'_9$	$A_3$
$F_{16}$	$A_1$



$p = 109$	$(h(-4.109) = 6, h(-3.109) = 12)$	
$S_5, S_6, S_7, S_8, S_{-8}, S_{-7}, S_{-6}, S_{-5}$		$A_8$
$C_j, C'_j, 1 \leq j \leq 6$		6 mal $A_2$
$D_i, 1 \leq i \leq 3$		3 mal $A_1$
$B_2$		$A_1$
$U_5, F_5, U'_5$		$A_3$
$S_3, F_9, S_{-3}$		$A_3$
$F_7$		$A_1$
$V_4, V'_4$		$A_2$
$F_{16}$		$A_1$
$F_{12}$		$A_1$

Eine singularitätenfreie Kurve vom Doppelgrad (6, 6) in  $P_1(C) \times P_1(C)$  hat das Geschlecht 25. Die Summe der Plückerzahlen ist 24 für  $p = 101$  und 22 für  $p = 109$ , in Übereinstimmung damit, dass  $\overline{H/\Gamma_*}(101)$  bzw.  $\overline{H/\Gamma_*}(109)$  das Geschlecht 1 bzw. 3 hat. Analog zu Satz 3 kennen wir die Singularitäten der beiden Kurven vom Doppelgrad (6, 6). Wie lauten explizite Gleichungen für die beiden Kurven ?

5.6. Man kann vermuten, dass die Hilbertschen Modulflächen  $Y_T^0(p)$ , sofern vom allgemeinen Typ, minimale Flächen sind. Diese Vermutung ist bisher noch in keinem einzigen Fall bewiesen worden. Insbesondere sollte man feststellen, ob die vier Flächen  $Y_T^0(p)$  mit  $p_g = 3$  (siehe 3.6, Tabelle 8) minimal sind. Wenn ja, dann wären sie Horikawasche Flächen (5.4), da  $c_1^2(Y_T^0(p)) = 2$  für diese 4 Primzahlen, und man hätte eine Involution auf  $Y_T^0(p)$ , die nicht von einem Automorphismus von  $H \times H$  induziert werden kann.

#### LITERATUR

- [1] M. EICHLER, *Ueber die Einheiten der Divisionsalgebren* (*Math. Ann.*, Bd 114, 1937, p. 635-654).
- [2] H. FELL, M. NEWMAN and E. ORDMAN, *Tables of Genera of Groups of Linear Fractional Transformations* (*J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Bd 67 B, 1963, p. 61-68).
- [3] H. G. FRANKE, *Kurven in Hilbertschen Modulflächen und Humbertsche Flächen im Siegel-Raum* (*Dissertation*, Bonn, 1977, Erscheint in Bonner Mathematischen Schriften).
- [4] R. FRICKE, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Zweiter Teil.*, B. G. TEUBNER, éd., Leipzig und Berlin, 1922.
- [5] G. VAN DER GEER and A. VAN DE VEN, *On the Minimality of Certain Hilbert Modular Surfaces, in Complex Analysis and Algebraic Geometry*, p. 137-150, Iwanami Shoten, Publishers, and Cambridge University Press, 1977.
- [6] H. HELLING, *Note über das Geschlecht gewisser arithmetischer Gruppen* (*Math. Ann.*, Bd 205, 1973, p. 173-179).
- [7] F. HIRZEBRUCH, *Hilbert Modular Surfaces* (*Ens. Math.*, Bd 19, 1973, p. 183-281).

- [8] F. HIRZEBRUCH and A. VAN DE VEN, *Hilbert Modular Surfaces and the Classification of Algebraic Surfaces* (*Inventiones math.*, Bd 23, 1974, p. 1-29).
- [9] F. HIRZEBRUCH and D. ZAGIER, *Classification of Hilbert Modular Surfaces*, in *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, p. 43-77, Iwanami Shoten, Publishers, and Cambridge University Press, 1977.
- [10] F. HIRZEBRUCH and D. ZAGIER, *Intersection Numbers of Curves on Hilbert Modular Surfaces and Modular Forms of Nebentypus* (*Inventiones math.*, Bd 36, 1976, p. 57-113).
- [11] E. HORIKAWA, *Algebraic Surfaces of General Type with small  $c_1^2$* , I (*Annals Math.*, Bd 104, 1976, p. 357-387).
- [12] P. G. KLUIT, *On the Normalizer of  $\Gamma_0(N)$* , p. 239-246, *In Modular Functions of One Variable V*, Bonn, 1976 (*Lecture Notes in Mathematics*, Nr. 601, Springer-Verlag, 1977).
- [13] K. KODAIRA, *On Compact Analytic Surfaces*, II (*Ann. Math.*, Bd 77, 1963, p. 563-626).
- [14] O. T. O'MEARA, *Introduction to Quadratic Forms*, Springer-Verlag, 1963.
- [15] A. PRESTEL, *Die elliptischen Fixpunkte der Hilbertschen Modulgruppen* (*Math. Ann.*, Bd 177, 1968, p. 181-209).
- [16] A. PRESTEL, *Die Fixpunkte der symmetrischen Hilbertschen Modulgruppe zu einem reell-quadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante* (*Math. Ann.*, Bd 200, 1973, p. 123-139).
- [17] G. SHIMURA, *Arithmetic of Unitary Groups* (*Ann. Math.*, Bd 79, 1964, p. 369-409).
- [18] O. V. ŠVARČMAN, *Simply-Connectedness of the Factor Space of the Hilbert Modular Group* (in Russian) [*Funct. Anal. and Appl.*, Bd (8), Nr. 2, 1974, p. 99-100].
- [19] D. ZAGIER, *Tafeln über numerische Invarianten der Hilbertschen Modulflächen mit Primzahldiskriminante  $p$  ( $1 < p < 10\,000$ )*, U. NM. 306, Universität Bonn, 5 September 1972 (nicht veröffentlicht).

(Manuscrit reçu le 30 janvier 1978.)

F. HIRZEBRUCH,  
 Mathematisches Institut der Universität Bonn,  
 10 Wegelerstrasse,  
 5300 Bonn,  
 R.F.A.,  
 und  
 Institut des Hautes Études scientifiques,  
 35, route de Chartres,  
 91440 Bures-sur-Yvette,  
 France.