C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 563–568

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Problèmes mathématiques de la mécanique

Inégalités de Korn non linéaires dans $\mathbb{R}^n$, avec ou sans conditions aux limites

Nonlinear Korn inequalities in $\mathbb{R}^n$, with or without boundary conditions

Philippe G. Ciarlet [a], Cristinel Mardare [b,c]

[a] *Department of Mathematics, City University of Hong Kong, 83 Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong*
[b] *Sorbonne Universités, Université Pierre-et-Marie-Curie, Laboratoire Jacques-Louis-Lions, 75005 Paris, France*
[c] *CNRS, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis-Lions, 75005 Paris, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu et accepté le 24 mars 2015
Disponible sur Internet le 7 avril 2015

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne. Étant donné deux immersions $\boldsymbol{\Phi}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\Theta}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ suffisamment régulières et de même orientation, on établit plusieurs inégalités de Korn non linéaires montrant que, pour tout $1<p<\infty$, la norme $\|\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)}$ peut être majorée en fonction de la norme $\|\nabla\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Phi}-\nabla\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^q(\Omega)}$ pour tout $q\in\mathbb{R}$ vérifiant $\max\{1,\frac{p}{2}\}\le q\le p$, où $(\nabla\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Phi}-\nabla\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Theta})$ représente donc la différence exacte des métriques correspondant aux immersions $\boldsymbol{\Phi}$ et $\boldsymbol{\Theta}$. De telles inégalités généralisent les inégalités de Korn linéaires bien connues où, lorsque $\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{id}$, la différence exacte $\nabla\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I}$ est réduite à sa partie linéaire $\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}+\nabla\boldsymbol{v}$ par rapport au champ de vecteurs $\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{id}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$.

ABSTRACT

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$ with a Lipschitz boundary. Given two smooth enough immersions $\boldsymbol{\Phi}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\Theta}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ with the same orientation, we establish various nonlinear Korn inequalities that show that, for any $1<p<\infty$, the norm $\|\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)}$ can be bounded above in terms of the norm $\|\nabla\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Phi}-\nabla\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^q(\Omega)}$ for any $q\in\mathbb{R}$ such that $\max\{1,\frac{p}{2}\}\le q\le p$, where $(\nabla\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Phi}-\nabla\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Theta})$ thus represents the exact difference between the metrics corresponding to the immersions $\boldsymbol{\Phi}$ and $\boldsymbol{\Theta}$. Such inequalities generalize the well-known linear Korn inequalities, where, when $\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{id}$, the exact difference $\nabla\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I}$ is reduced to its linear part $\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}+\nabla\boldsymbol{v}$ with respect to the vector field $\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{id}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$.

Abridged English version

The notations used in this version are defined in the French version.

Adresses e-mail : mapgc@cityu.edu.hk (P.G. Ciarlet), mardare@ann.jussieu.fr (C. Mardare).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.03.004
1631-073X/

In what follows, Ω designates a *domain in* $\mathbb{R}^n$, in the sense of Nečas [9] or Adams [1]. The point of departure of our analysis is the following generalization of the landmark *geometric rigidity lemma* of Friesecke, James & Müller [7], as later extended by Conti [5]: Given any $1 < p < \infty$ and any immersion $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, there exists a constant $c_2(p, \boldsymbol{\Theta})$ such that, for all $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$,

$$\inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} \|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le c_2(p, \boldsymbol{\Theta}) \| \inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} |\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$$

(the original geometric rigidity lemma of [7,5] corresponds to $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{id}$). We further show that, if $\det\nabla\boldsymbol{\Theta} > 0$ in $\overline{\Omega}$ and $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ almost-everywhere in Ω, then

$$\| \inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} |\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le \|(\nabla\boldsymbol{\Phi}^T\nabla\boldsymbol{\Phi})^{1/2} - (\nabla\boldsymbol{\Theta}^T\nabla\boldsymbol{\Theta})^{1/2}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}.$$

Using these two basic inequalities, we then show (Theorem 2) that, given any $1 < p < \infty$ and any immersion $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ that satisfies $\det\nabla\boldsymbol{\Theta} > 0$ in $\overline{\Omega}$, there exists a constant $C_2(p, \boldsymbol{\Theta})$ such that

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \le C_2(p, \boldsymbol{\Theta})\Big(\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|(\nabla\boldsymbol{\Phi}^T\nabla\boldsymbol{\Phi})^{1/2} - (\nabla\boldsymbol{\Theta}^T\nabla\boldsymbol{\Theta})^{1/2}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\Big)$$

for all $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ that satisfy $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ almost-everywhere in Ω; we further show that, for any $q \in \mathbb{R}$ that satisfies $\max\{1, \frac{p}{2}\} \le q \le p$, there exists a constant $C_2(p, q, \boldsymbol{\Theta})$ such that

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \le C_2(p, q, \boldsymbol{\Theta})\Big(\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\nabla\boldsymbol{\Phi}^T\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}^T\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^{q/p}_{\mathbb{L}^q(\Omega)}\Big)$$

for all $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,2q}(\Omega)$ that satisfy $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ almost-everywhere in Ω.

Finally, we show (Theorem 3) that, given any $1 < p < \infty$, any non-empty relatively open subset Γ_0 of $\partial\Omega$, and any immersion $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ that satisfies $\det\nabla\boldsymbol{\Theta} > 0$ in $\overline{\Omega}$, there exists a constant $C_3(p, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})$ such that

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \le C_3(p, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})\|(\nabla\boldsymbol{\Phi}^T\nabla\boldsymbol{\Phi})^{1/2} - (\nabla\boldsymbol{\Theta}^T\nabla\boldsymbol{\Theta})^{1/2}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$$

for all $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ that satisfy $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ almost-everywhere in Ω and $\boldsymbol{\Phi}|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{\Theta}|_{\Gamma_0}$; we further show that, for any $q \in \mathbb{R}$ that satisfies $\max\{1, \frac{p}{2}\} \le q \le p$, there exists a constant $C_3(p, q, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})$ such that

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \le C_3(p, q, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})\|\nabla\boldsymbol{\Phi}^T\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}^T\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^{q/p}_{\mathbb{L}^q(\Omega)}$$

for all $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,2q}(\Omega)$ that satisfy $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ almost-everywhere in Ω and $\boldsymbol{\Phi}|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{\Theta}|_{\Gamma_0}$.

1. Notations

On note $\mathbb{M}^n$ l'espace des matrices réelles $n \times n$, $\mathbb{A}^n := \{\boldsymbol{B} \in \mathbb{M}^n;\ \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}^T\}$, $\mathbb{S}^n := \{\boldsymbol{B} \in \mathbb{M}^n;\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T\}$, $\mathbb{S}^n_> := \{\boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^n$; $\boldsymbol{B}$ est définie positive$\}$, et $\mathbb{O}^n_+ := \{\boldsymbol{B} \in \mathbb{M}^n;\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{I}$ et $\det\boldsymbol{B} = 1\}$. On note $|\cdot|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ et la norme de Frobenius dans $\mathbb{M}^n$.

Un *domaine* Ω de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ lipschitzienne, l'ouvert Ω étant localement d'un même coté de Γ (cf. Nečas [9] ou Adams [1]).

Etant donné $1 < p < \infty$, on note $\mathbb{L}^p(\Omega)$ l'espace des champs de matrices $\boldsymbol{F} = (F_{ij}) : \Omega \to \mathbb{M}^n$ dont les composantes F_{ij} sont dans $L^p(\Omega)$, muni de la norme

$$\|\boldsymbol{F}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{F}(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p},$$

et on note $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ l'espace des champs de vecteurs $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_i) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes Φ_i sont dans $W^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} := \Big(\int_\Omega \big(|\boldsymbol{\Phi}(x)|^p + |\nabla\boldsymbol{\Phi}(x)|^p\big)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

2. Une généralisation du lemme de rigidité géométrique

On trouvera les démonstrations détaillées des résultats qui suivent dans [4].

Notre point de départ est un résultat qui s'est avéré très important en analyse, à savoir le *lemme de rigidité géométrique* de Friesecke, James & Müller [7], énoncé ci-dessous sous la forme qu'en a donnée ultérieurement Conti [5] :

Lemme 1. *Soit* $1 < p < \infty$ *et soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$. *Alors il existe une constante* $c_1(p)$ *telle que*

$$\inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} \|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le c_1(p) \| \inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} |\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \text{ pour tout } \boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega).$$

On généralise alors le Lemme 1 sous la forme suivante, au sens qu'une immersion quelconque $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ y remplace l'identité $\boldsymbol{id}$:

Lemme 2. *Soit* $1 < p < \infty$, *soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$, *et soit* $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *une immersion. Alors il existe une constante* $c_2(p, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que*

$$\inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} \|\nabla \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le c_2(p, \boldsymbol{\Theta}) \| \inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} |\nabla \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \text{ pour tout } \boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega).$$

Esquisse de la preuve. La preuve, assez technique, repose sur la propriété suivante (dont on trouvera la démonstration détaillée dans [3]) : l'application $\boldsymbol{\Theta}$ étant une immersion et l'ouvert Ω étant un domaine, il existe un nombre *fini* de *domaines* $\Omega_j \subset \Omega$, $1 \le j \le J$, tels que $\Omega = \cup_{j=1}^J \Omega_j$, chaque application $\boldsymbol{\Theta}_j := \boldsymbol{\Theta}|_{\overline{\Omega}_j}$ est injective, et chaque ensemble $\Omega_1^k := \cup_{j=1}^k \Omega_j$, $1 \le k \le J$, est connexe.

D'après le Lemme 1, il existe des constantes $C_j = C_j(p, \boldsymbol{\Theta}(\Omega_j))$, $1 \le j \le J$, telles que

$$\inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} \|\nabla (\boldsymbol{\Phi}_j \circ \boldsymbol{\Theta}_j^{-1}) - \boldsymbol{R}\|_{\mathbb{L}^p(\boldsymbol{\Theta}(\Omega_j))} \le C_j \| \inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} |\nabla (\boldsymbol{\Phi}_j \circ \boldsymbol{\Theta}_j^{-1}) - \boldsymbol{R}| \|_{\mathbb{L}^p(\boldsymbol{\Theta}(\Omega_j))},$$

où $\boldsymbol{\Phi}_j := \boldsymbol{\Phi}|_{\Omega_j} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_j)$. Chaque application $\boldsymbol{\Theta}_j \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_j; \mathbb{R}^n)$ étant une immersion, il est facile de déduire de cette inégalité qu'il existe des constantes $D_j = D_j(p, \Omega_j, \boldsymbol{\Theta})$, $1 \le j \le J$, telles que

$$\inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} \|\nabla \boldsymbol{\Phi}_j - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}_j\|_{\mathbb{L}^p(\Omega_j)} \le D_j \| \inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} |\nabla \boldsymbol{\Phi}_j - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}_j| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega_j)}.$$

Si $J = 1$, la démonstration est terminée. Si $J \ge 2$, supposons établie l'existence, pour un entier k vérifiant $1 \le k \le J - 1$, d'une constante $D_1^k = D_1^k(p, \Omega_1^k, \boldsymbol{\Theta}_1^k)$ telle que

$$\inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} \|\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^k - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}_1^k\|_{\mathbb{L}^p(\Omega_1^k)} \le D_1^k \| \inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} |\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^k - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}_1^k| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega_1^k)},$$

où $\boldsymbol{\Theta}_1^k := \boldsymbol{\Theta}|_{\overline{\Omega_1^k}} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega_1^k}; \mathbb{R}^n)$ et $\boldsymbol{\Phi}_1^k := \boldsymbol{\Phi}|_{\Omega_1^k} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_1^k)$.

On montre alors qu'il existe une matrice $\boldsymbol{R}_1^k \in \mathbb{O}^n_+$ et des constantes $E_1^k = E_1^k(D_1^k, \boldsymbol{\Theta}|_{\Omega_1^k \cap \Omega_{k+1}})$ et $E_{k+1} = E_{k+1}(D_{k+1}, \boldsymbol{\Theta}|_{\Omega_1^k \cap \Omega_{k+1}})$ telles que

$$\|\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^{k+1} - \boldsymbol{R}_1^k \nabla \boldsymbol{\Theta}_1^k\|_{\mathbb{L}^p(\Omega_1^k)} \le E_1^k \| \inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} |\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^{k+1} - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}_1^k| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega_1^k)},$$

$$\|\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^{k+1} - \boldsymbol{R}_1^k \nabla \boldsymbol{\Theta}_{k+1}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega_{k+1})} \le E_{k+1} \| \inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} |\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^{k+1} - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}_{k+1}| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega_{k+1})},$$

de sorte que, par addition de ces deux inégalités, on déduit que

$$\begin{aligned}\inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} \|\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^{k+1} - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}_1^{k+1}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega_1^{k+1})} &\le \|\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^{k+1} - \boldsymbol{R}_1^k \nabla \boldsymbol{\Theta}_1^{k+1}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega_1^{k+1})} \\ &\le D_1^{k+1} \| \inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} |\nabla \boldsymbol{\Phi}_1^{k+1} - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}_1^{k+1}| \|_{\mathbb{L}^p(\Omega_1^{k+1})},\end{aligned}$$

où $D_1^{k+1} := (E_1^k + E_{k+1})$. La propriété est ainsi établie pour l'entier $k + 1$. La conclusion suit par récurrence. $\square$

3. Inégalités de Korn non linéaires sans conditions aux limites

On commence par établir des majorations du terme de droite dans l'inégalité du Lemme 2 en fonction des tenseurs métriques $\nabla \boldsymbol{\Phi}^T \nabla \boldsymbol{\Phi}$ et $\nabla \boldsymbol{\Theta}^T \nabla \boldsymbol{\Theta}$ associés aux immersions $\boldsymbol{\Phi}$ et $\boldsymbol{\Theta}$:

Théorème 1. *Soit* $1 < p < \infty$, *soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$, *et soit* $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *une immersion telle que* $\det \nabla \boldsymbol{\Theta} > 0$ *dans* $\overline{\Omega}$.

(a) *Il existe une constante* $C_1(p, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que, pour tout* $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *satisfaisant* $\det \nabla \boldsymbol{\Phi} > 0$ *presque partout dans* Ω,

$$\inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} \|\nabla \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le C_1(p, \boldsymbol{\Theta}) \|(\nabla \boldsymbol{\Phi}^T \nabla \boldsymbol{\Phi})^{1/2} - (\nabla \boldsymbol{\Theta}^T \nabla \boldsymbol{\Theta})^{1/2}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}.$$

(b) *Pour chaque* $q \in \mathbb{R}$ *tel que* $\max\{1, \frac{p}{2}\} \le q \le p$, *il existe une constante* $C_1(p, q, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que, pour tout* $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,2q}(\Omega)$ *satisfaisant* $\det \nabla \boldsymbol{\Phi} > 0$ *presque partout dans* Ω,

$$\inf_{\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+} \|\nabla \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R} \nabla \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le C_1(p, q, \boldsymbol{\Theta}) \|\nabla \boldsymbol{\Phi}^T \nabla \boldsymbol{\Phi} - \nabla \boldsymbol{\Theta}^T \nabla \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^q(\Omega)}^{q/p}.$$

Esquisse de la preuve. Utilisant le théorème de factorisation polaire des matrices inversibles, on voit qu'il existe pour presque tout $x \in \Omega$ des matrices $\boldsymbol{P}(x) \in \mathbb{O}^n_+$ et $\boldsymbol{Q}(x) \in \mathbb{O}^n_+$ telles que

$$\nabla\boldsymbol{\Theta}(x) = \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{U}(x), \text{ où } \boldsymbol{U}(x) := \left(\nabla\boldsymbol{\Theta}(x)^T\nabla\boldsymbol{\Theta}(x)\right)^{1/2} \in \mathbb{S}^n_>,$$
$$\nabla\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{V}(x), \text{ où } \boldsymbol{V}(x) := \left(\nabla\boldsymbol{\Phi}(x)^T\nabla\boldsymbol{\Phi}(x)\right)^{1/2} \in \mathbb{S}^n_>.$$

Comme l'invariance par multiplication par des matrices de $\mathbb{O}^n_+$ de la norme de Frobenius entraîne que

$$\inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} |\nabla\boldsymbol{\Phi}(x) - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}(x)| = \inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} |\boldsymbol{V}(x) - \boldsymbol{Q}(x)^T\boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}(x)| \le |\boldsymbol{V}(x) - \boldsymbol{U}(x)|,$$

la partie (a) du théorème découle du Lemme 2.

La partie (b) découle de la partie (a) combinée avec le résultat suivant sur les matrices : étant donné des nombres $\lambda := \frac{q}{p}$, α, et β tels que $\frac{1}{2} \le \lambda \le 1$ et $0 < \alpha \le \beta < \infty$, et une matrice $\boldsymbol{U} \in \mathbb{S}^n_>$ dont toutes les valeurs propres sont comprises dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, il existe une constante $\kappa = \kappa(\lambda, \alpha, \beta) < \infty$ telle que, pour *toute* matrice $\boldsymbol{V} \in \mathbb{S}^n_>$,

$$|\boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}| \le \kappa|\boldsymbol{V}^2 - \boldsymbol{U}^2|^\lambda.$$

Pour établir ce résultat, on note qu'il équivaut à montrer que, pour *toute* matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n_>$,

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}| \le \kappa|\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{D}^2|^\lambda,$$

où $\boldsymbol{D}$ est une matrice *diagonale* dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{U}$. La démonstration de cette inégalité repose sur l'analyse séparée de trois cas : $0 < |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}| < \alpha$, $\alpha \le |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}| \le 3\beta$, et $3\beta < |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}|$. □

Remarques. (1) Une linéarisation *formelle* de l'inégalité de la partie (a) du Théorème 1 lorsque $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{id}$ et lorsque les applications $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}$ sont « voisines » de l'identité $\boldsymbol{id}$ produit une *inégalité de Korn linéaire* bien connue, à savoir :

$$\inf_{\boldsymbol{r}\in\mathbf{Rig}(\Omega)} \|\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r})\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le C_1(p)\|\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)},$$

où

$$\mathbf{Rig}(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega);\ \nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{0} \text{ presque partout dans } \Omega\}$$
$$= \{\boldsymbol{r} : \Omega \to \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{r}(x) = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{b} \text{ pour presque tout } x \in \Omega, \text{ où } \boldsymbol{A} \in \mathbb{A}^n \text{ et } \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n\}.$$

On sait en effet que l'ensemble $\mathbb{O}^n_+$ est une variété compacte régulière de dimension $n(n-1)/2$ et que l'espace tangent à $\mathbb{O}^n_+$ en $\boldsymbol{I} \in \mathbb{O}^n_+$ est précisément l'espace $\boldsymbol{I} + \mathbb{A}^n$.

(2) L'inégalité (b) du Théorème 1 généralise un résultat antérieur de [3], correspondant au cas particulier où $p = 2$ et $q = 1$. □

On montre ensuite (cf. Théorème 2) comment l'addition de la norme $\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$ dans les membres de droite des inégalités du Théorème 1 permet de remplacer l'infimum $\inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} \|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$ apparaissant dans leurs membres de gauche par la norme $\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)}$. À cette fin, le « lemme technique » suivant joue un rôle essentiel.

Lemme 3. *Soit* $1 < p < \infty$*, soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$*, et soit* $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *une immersion. Alors il existe une constante* $c_3(p, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que*

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \le c_3(p, \boldsymbol{\Theta})\Big(\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} \|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\Big)$$

pour tout $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

Esquisse de la preuve. Supposons la propriété fausse. Alors, pour chaque entier $k \ge 1$, il existe $\boldsymbol{\Phi}_k \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ et une matrice $\boldsymbol{R}_k \in \mathbb{O}^n_+$ tels que

$$\|\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} > k\Big(\|\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\nabla\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{R}_k\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\Big).$$

Posons

$$\mu_k := \|\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \text{ et } \boldsymbol{u}_k := \frac{1}{\mu_k}(\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{\Theta}).$$

Alors, pour tout $k \ge 1$,

$$\mu_k > 0,\ \|\boldsymbol{u}_k\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} = 1,$$
$$\|\boldsymbol{u}_k\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \left\| \frac{1}{\mu_k}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}_k)\nabla\boldsymbol{\Theta} + \nabla\boldsymbol{u}_k \right\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} < \frac{1}{k}.$$

Partant de ces relations, et utilisant la réflexivité de l'espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$ et l'hypothèse que l'application $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ est une immersion, on aboutit assez facilement à une contradiction. $\square$

Combinant le Lemme 3 avec les inégalités (a) et (b) du Théorème 1, on obtient alors immédiatement des *inégalités de Korn non linéaires sans conditions aux limites* (dans le sens que les champs $\boldsymbol{\Phi}$ ne sont assujettis à aucune condition aux limites sur $\partial\Omega$) :

Théorème 2. *Soit* $1 < p < \infty$, *soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$, *et soit* $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *une immersion telle que* $\det\nabla\boldsymbol{\Theta} > 0$ *dans* $\overline{\Omega}$.

(a) *Il existe une constante* $C_2(p, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que, pour tout* $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *satisfaisant* $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ *presque partout dans* Ω,

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \le C_2(p, \boldsymbol{\Theta})\Big(\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|(\nabla\boldsymbol{\Phi}^T\nabla\boldsymbol{\Phi})^{1/2} - (\nabla\boldsymbol{\Theta}^T\nabla\boldsymbol{\Theta})^{1/2}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\Big).$$

(b) *Pour chaque* $q \in \mathbb{R}$ *tel que* $\max\{1, \frac{p}{2}\} \le q \le p$, *il existe une constante* $C_2(p, q, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que, pour tout* $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,2q}(\Omega)$ *satisfaisant* $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ *presque partout dans* Ω,

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \le C_2(p, q, \boldsymbol{\Theta})\Big(\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\nabla\boldsymbol{\Phi}^T\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}^T\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^q(\Omega)}^{q/p}\Big).$$

4. Inégalités de Korn non linéaires avec conditions aux limites

Comme dans le cas linéaire (voir la Section 3.3 du Chapitre 3 dans Duvaut & Lions [6] ou la Section 6.15 dans [2]), on peut établir des inégalités de Korn non linéaires analogues à celles du Théorème 2, mais *sans* la norme $\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$ dans leur membre de droite, dès lors que la trace de la différence $\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}$ s'annule sur une partie de $d\Gamma$-mesure strictement positive de la frontière Γ du domaine Ω. De ce point de vue, il n'est donc pas surprenant que l'inégalité du lemme qui suit, qui n'est autre qu'une *version non linéaire de l'inégalité de Poincaré–Friedrichs*, soit essentielle.

Lemme 4. *Soit* $1 < p < \infty$, *soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$, *soit* Γ_0 *une partie non vide relativement ouverte de la frontière de* Ω, *et soit* $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *une immersion. Alors il existe une constante* $c_4(p, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que*

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \le c_4(p, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta}) \inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} \|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$$

pour tout $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *satisfaisant* $\boldsymbol{\Phi}|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{\Theta}|_{\Gamma_0}$.

Esquisse de la preuve. Supposons d'abord que $\|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} > 4\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$. Alors l'inegalité

$$\|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le \inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} \|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} + 2\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$$

implique que

$$\|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} < 2 \inf_{\boldsymbol{R}\in\mathbb{O}^n_+} \|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{R}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}.$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité classique de Poincaré–Friedrichs, il existe une constante $C(p, \Gamma_0)$ telle que

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \le C(p, \Gamma_0)\|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}.$$

L'assertion est donc établie dans ce cas.

Supposons ensuite que, lorsque $\|\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le 4\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$, l'assertion soit fausse. Alors, pour chaque entier $k \ge 1$, il existe $\boldsymbol{\Phi}_k \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ et une matrice $\boldsymbol{R}_k \in \mathbb{O}^n_+$ tels que

$$\boldsymbol{\Phi}_k|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{\Theta}|_{\Gamma_0}, \qquad \|\nabla\boldsymbol{\Phi}_k - \nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \le 4\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)},$$
$$\|\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} > k\|\nabla\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{R}_k\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}.$$

Partant de ces relations, utilisant l'inégalité classique de Poincaré–Friedriechs et la réflexivité de l'espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$, et posant, pour tout $k \ge 1$,

$$\mu_k := \|\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \text{ et } \boldsymbol{u}_k := \frac{1}{\mu_k}(\boldsymbol{\Phi}_k - \boldsymbol{\Theta}),$$

on voit facilement qu'il existe une suite extraite $(\boldsymbol{u}_\ell)$ de la suite $(\boldsymbol{u}_k)$, un champ de vecteurs $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ tel que $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_0} = \mathbf{0}$, une constante $\mu \in [0, \beta]$ où $\beta := 4(1 + C(p, \Gamma_0))\|\nabla\boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$, et une matrice $\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+$, tels que, lorsque $\ell \to \infty$,

$$\boldsymbol{u}_\ell \rightharpoonup \boldsymbol{u} \text{ dans } \mathbf{W}^{1,p}(\Omega), \quad \boldsymbol{u}_\ell \to \boldsymbol{u} \text{ dans } \mathbf{L}^p(\Omega),$$
$$\mu_\ell \to \mu \text{ dans } \mathbb{R}, \ \boldsymbol{R}_\ell \to \boldsymbol{R} \text{ dans } \mathbb{O}^n_+,$$
$$\frac{1}{\mu_\ell}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}_\ell)\nabla\boldsymbol{\Theta} + \nabla\boldsymbol{u}_\ell \to \mathbf{0} \text{ dans } \mathbb{L}^p(\Omega),$$

où $\rightharpoonup$ désigne la convergence faible. Par suite,

$$\frac{1}{\mu_\ell}(\boldsymbol{R}_\ell - \boldsymbol{I})\nabla\boldsymbol{\Theta} \rightharpoonup \nabla\boldsymbol{u} \text{ dans } \mathbb{L}^p(\Omega),$$

ce qui montre que la suite $\left(\frac{1}{\mu_\ell}(\boldsymbol{R}_\ell - \boldsymbol{I})\right)_{\ell \geq 1}$ converge dans $\mathbb{M}^n$.

Le reste de la preuve est une analyse fine du passage à la limite lorsque ℓ tend vers l'infini dans les relations ci-dessus, en distinguant le cas où $\mu > 0$ et celui où $\mu = 0$.

Dans le premier cas, on utilise (entre autres) le résultat suivant : si un champ $\boldsymbol{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de la forme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{\Theta}$, où $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, s'annule sur Γ_0, alors $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$; dans le second cas, on utilise (entre autres) le résultat suivant : si un champ $\boldsymbol{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de la forme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Theta}$, où $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{A} \in \mathbb{A}^n$, s'annule sur Γ_0, alors $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction. $\square$

Combinant le Lemme 4 avec les inégalités (a) et (b) du Théorème 2, on obtient alors immédiatement des *inégalités de Korn non linéaires avec conditions aux limites* (dans le sens que les champs $\boldsymbol{\Phi}$ sont assujettis à vérifier la condition aux limites $\boldsymbol{\Phi}|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{\Theta}|_{\Gamma_0}$) :

Théorème 3. *Soit* $1 < p < \infty$, *soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$, *soit* Γ_0 *une partie non vide relativement ouverte de la frontière de* Ω, *et soit* $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *une immersion telle que* $\det\nabla\boldsymbol{\Theta} > 0$ *dans* $\overline{\Omega}$.

(a) *Il existe une constante* $C_3(p, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que, pour tout* $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *satisfaisant* $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ *presque partout dans* Ω *et* $\boldsymbol{\Phi}|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{\Theta}|_{\Gamma_0}$,

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \leq C_3(p, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})\|(\nabla\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Phi})^{1/2} - (\nabla\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Theta})^{1/2}\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}.$$

(b) *Pour chaque* $q \in \mathbb{R}$ *tel que* $\max\{1, \frac{p}{2}\} \leq q \leq p$, *il existe une constante* $C_3(p, q, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})$ *telle que, pour tout* $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{W}^{1,2q}(\Omega)$ *satisfaisant* $\det\nabla\boldsymbol{\Phi} > 0$ *presque partout dans* Ω *et* $\boldsymbol{\Phi}|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{\Theta}|_{\Gamma_0}$,

$$\|\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \leq C_3(p, q, \Gamma_0, \boldsymbol{\Theta})\|\nabla\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Phi} - \nabla\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\Theta}\|^{q/p}_{\mathbb{L}^q(\Omega)}.$$

Remarque. L'inégalité (b) du Théorème 3 généralise un résultat antérieur de [8], correspondant au cas particulier où $p = q = 2$ et $\Gamma_0 = \Gamma$. $\square$

Remerciements

Ce travail a bénéficié d'un soutien substantiel d'un contrat de recherche du *Research Grants Council of the Hong Kong Special Administration Region* [projet n° 9041637, CityU 100711].

Références

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
[2] P.G. Ciarlet, Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications, SIAM, Philadelphia, 2013.
[3] P.G. Ciarlet, C. Mardare, Continuity of a deformation in H^1 as a function of its Cauchy–Green tensor in L^1, J. Nonlinear Sci. 14 (2004) 415–427.
[4] P.G. Ciarlet, C. Mardare, Nonlinear Korn inequalities, J. Math. Pures Appl., accepted for publication.
[5] S. Conti, Low-Energy Deformations of Thin Elastic Plates: Isometric Embeddings and Branching Patterns, Habilitationsschrift, Universität Leipzig, 2004.
[6] G. Duvaut, J.-L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, 1972. English translation: Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, 1976.
[7] G. Friesecke, R.D. James, S. Müller, A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from three dimensional elasticity, Commun. Pure Appl. Math. 55 (2002) 1461–1506.
[8] C. Mardare, Existence of minimizers for the pure displacement problem in nonlinear elasticity, in: "Alexandru Myller" Mathematical Seminar – Proceedings of the Centennial Conference, Iaşi, Romania, 21–26 June 2010, American Institute of Physics Conference Proceedings, vol. 1329, AIP Publishing, Melville, New York, 2011, pp. 181–190.
[9] J. Nečas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967.