C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 241–245

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Problèmes mathématiques de la mécanique

Sur l'existence locale pour une équation de scalaires actifs

Weiwei Hu, Igor Kukavica [1], Mohammed Ziane [2]

Department of Mathematics, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 2 avril 2014
Accepté après révision le 19 décembre 2014
Disponible sur Internet le 28 janvier 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous étudions l'existence locale des solutions pour l'équation du scalaire actif $\partial_t\theta + u\cdot\nabla\theta = 0$ où $u = -\nabla^\perp(-\Delta)^{-1+\beta/2}\theta$. Cette équation correspond à l'équation d'Euler quand $\beta = 0$ et à l'équation quasi-géostrophique quand $\beta = 1$. Nous montrons l' existence locale dans l'espace $H^{1+\beta+\epsilon}$, où $\epsilon > 0$, pour $1 < \beta < 2$. Un résultat récent de Chae, Constantin, Córdoba, Gancedo et Wu montre l'existence locale dans H^4. L'amélioration est due à des nouvelles estimations plus précises du commutateur, et l'exposant fractionnaire est obtenu par un traitement different de la non-linéarité en utilisant une inégalité double du commutateur.

ABSTRACT

We address the local well-posedness for the active scalar equation $\partial_t\theta + u\cdot\nabla\theta = 0$ where $u = -\nabla^\perp(-\Delta)^{-1+\beta/2}\theta$. This equation reduces to the Euler equation if $\beta = 0$ and to the quasi-geostrophic equation for $\beta = 1$. In this note, we prove the local existence for the equation in the space $H^{1+\beta+\epsilon}$, where $\epsilon > 0$, for $1 < \beta < 2$. An earlier result by Chae, Constantin, Córdoba, Gancedo, and Wu shows the local existence in H^4. The improvement is due to a sharper commutator estimate, while the fractional exponent is obtained through a different treatment of the nonlinearity using a double commutator inequality.

1. Introduction

Dans cette Note, nous abordons le problème d'existence locale pour une famille d'équations de scalaires actifs

$$\partial_t\theta + u\cdot\nabla\theta = 0 \tag{1.1}$$

où le champ de vitesse u est obtenu à partir de la fonction scalaire θ comme une intégrale singulière $\theta = T(u)$. Récemment, des équations de cette forme ont été intensivement étudiées. Ces études sont motivées par de nombreux contextes physiques dans lesquels ces équations se posent [4,5,8]. Dans [3] (voir aussi [1] et [2]), les auteurs ont introduit l'équation (1.1) avec la relation

$$u = \nabla^\perp\psi$$

Adresses e-mail : weiweihu@usc.edu (W. Hu), kukavica@usc.edu (I. Kukavica), ziane@usc.edu (M. Ziane).

[1] Supported in part by the NSF grant DMS-1311943.
[2] Supported in part by the NSF grant DMS-1109562.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.12.008
1631-073X/

$$\Delta\psi = \Lambda^\beta\theta \tag{1.2}$$

où $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ est l'opérateur de Zygmund et $\nabla^\perp\psi = (-\partial_2\psi, \partial_1\psi)$. L'équation se réduit à l'équation d'Euler [7] quand $\beta = 0$, alors que, si $\beta = 1$, elle devient l'équation quasi géostrophique non visqueuse [4]. Dans cette note, nous étudions l'existence locale pour cette équation quand $1 < \beta < 2$.

Dans [3], les auteurs ont établi que le problème est localement bien posé dans H^m, où $m \geq 4$ est un entier. La démonstration repose sur l'utilisation de la propriété d'antisymmétrie du produit apparaissant dans la non-linéarité et en établissant une nouvelle estimation du commutateur dans des espaces de Sobolev d'exposant négatif. Lorsque l'on cherche un espace optimal pour montrer que le problème est localement bien posé, il est raisonnable de s'attendre à ce que la vitesse u soit Lipschitz uniformément dans le temps. Par un comptage de dérivées ainsi que par l'inégalité de Sobolev, on trouve que cela nécessite que θ appartienne à l'espace de Sobolev $H^{1+\beta+\epsilon}$, où $\epsilon > 0$ est arbitraire. Comme l'équation ne régularise pas les données initiales, nous nous attendons à ce que les données initiales doivent appartenir au moins à l'espace $H^{1+\beta+\epsilon}$ avec $\epsilon > 0$. Le but principale de la Note est d'établir que le problème est bien posé dans cet espace (voir théorème 1). L'existence locale dans l'espace $H^{1+\beta}$ reste encore un problème ouvert. La démonstration est basée sur des estimations plus précises du commutateur qui améliorent les estimations dans [3] ; nos estimations du commutateur sont données dans le lemme 2, que nous pensons être intéressant en soi.

Nous tenons a remercier le rapporteur de cette Note pour ses corrections et ses remarques pertinentes.

2. Le résultat principal et l'estimation du commutateur

Soit $\beta \in (1, 2)$ un paramètre fixé. Nous considérons l'équation du scalaire actif (1.1), où u est déterminé à partir de θ par la relation (1.2). La condition initiale est donnée par

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x). \tag{2.1}$$

Notre résultat principal est donné par le théorème 1.

Théorème 1. *Supposons que $\theta_0 \in H^\sigma(\mathbb{R}^2)$ où*

$$\sigma > 1 + \beta. \tag{2.2}$$

Alors il existe une unique solution $u \in C([0, T]; H^\sigma(\mathbb{R}^2))$ de (1.1), (1.2) où $T > 0$ dépend de $\|\theta_0\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^2)}$.

La preuve est basée sur l'estimation du commutateur suivante :

Lemme 2. *Soient $s \in (0, 1)$ et $j \in \{1, 2\}$. Alors, pour tout $\delta > 0$, nous avons*

$$\big\|[\Lambda^{-s}\partial_j, g]f\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\big(\|\Lambda^{-s}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\big)\|g\|_{H^{2-s+\delta}(\mathbb{R}^2)} \tag{2.3}$$

où C est une constante qui dépend de s et δ.

Rappelons d'abord que

$$[\Lambda^{-s}\partial_j, g]f = \Lambda^{-s}\partial_j(gf) - g\Lambda^{-s}\partial_j f, \quad j = 1, 2. \tag{2.4}$$

Notons que [3, Proposition 2.1] donne une inégalité plus faible

$$\big\|[\Lambda^{-s}\partial_j, g]f\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_{\delta,s}\big(\|\Lambda^{-s}f\|_{L^2}\|g\|_{H^{2+\delta}} + \|f\|_{L^2}\|g\|_{H^{2-s+\delta}}\big), \quad j = 1, 2 \tag{2.5}$$

pour tout $\delta > 0$. La démonstration donne $C = C(s)/\delta^{1/2}$ à condition que $\delta \leq 1$.

Preuve du lemme 2. En utilisant [3, p. 1043], nous avons

$$\big([\Lambda^{-s}\partial_j, g]f\big)\hat{}(\xi) = H_1 + H_2 \tag{2.6}$$

où

$$H_1 = \int_0^1 \int \big|A(\rho, \xi, \eta)\big|^{-s}\eta_j \hat{f}(\xi - \eta)\hat{g}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\rho \tag{2.7}$$

et

$$H_2 = s\int_0^1 \int \left|A(\rho,\xi,\eta)\right|^{-s-2}(A\cdot\eta)A_j\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\rho \tag{2.8}$$

avec

$$A(\rho,\xi,\eta) = \rho\xi + (1-\rho)(\xi-\eta). \tag{2.9}$$

Comme dans [3, p. 1044], nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}|H_1| \le & \int_0^1 (1+\rho)^{-s-1}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi-\eta|^{-s}\left|\hat{f}(\xi-\eta)\right|\left|\eta\hat{g}(\eta)\right|\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\rho \\ & + \int_0^1 \rho(1+\rho)^{-s-1}\,\mathrm{d}\rho\int_{\mathbb{R}^2}\left|\hat{f}(\xi-\eta)\right|\left|\eta\right|^{1-s}\left|\hat{g}(\eta)\right|\mathrm{d}\eta = H_{11}+H_{12}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Sans perte de généralité :

$$0<\delta<s. \tag{2.11}$$

Soient

$$p = \frac{4}{2+2s-\delta} \tag{2.12}$$

et

$$r = \frac{4}{4-2s+\delta/2}. \tag{2.13}$$

Notons que comme $0<\delta<s$, nous avons $1<p,r<2$ et

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r} = 1+\frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

L'utilisation de l'inégalité de Young donne

$$\|H_{11}\|_{L^2} \le C\left\||\eta|^{-s}\hat{f}(\eta)\right\|_{L^p}\left\|\eta\hat{g}(\eta)\right\|_{L^r}. \tag{2.15}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\||\eta|^{-s}\hat{f}(\eta)\right\|_{L^p} &\le \left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{-s/2}\right\|_{L^{2p/(2-p)}}\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{s/2}|\eta|^{-s}\hat{f}(\eta)\right\|_{L^2} \\ &\le C\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{-s/(s-\delta/2)}\right\|_{L^1}^{(s-\delta/2)/2}\left(\|\Lambda^{-s}f\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}\right).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Comme $\int(1+|\eta|^2)^{-(1+\epsilon)}\,\mathrm{d}\eta \le C/\epsilon$ pour $\epsilon\in(0,1)$, il s'ensuit :

$$\left\||\eta|^{-s}\hat{f}(\eta)\right\|_{L^p} \le \frac{C}{\delta^{s/2}}\left(\|\Lambda^{-s}f\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}\right), \tag{2.17}$$

la constante C dépend de s. Pour le deuxième facteur dans (2.15) $\|\eta\hat{g}(\eta)\|_{L^r}$, nous utilisons :

$$\begin{aligned}\left\|\eta\hat{g}(\eta)\right\|_{L^r} &\le \left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{-(1/2-s/2+\delta/2)}\right\|_{L^{2r/(2-r)}}\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{1/2-s/2+\delta/2}|\eta|\hat{g}(\eta)\right\|_{L^2} \\ &\le \left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{-(1-s+\delta)/2}\right\|_{L^{2/(1-s+\delta/2)}}\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{1-s/2+\delta/2}\hat{g}(\eta)\right\|_{L^2}\end{aligned} \tag{2.18}$$

et alors

$$\begin{aligned}\left\|\eta\hat{g}(\eta)\right\|_{L^r} &\le \left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{-(1-s+\delta)/(1-s+\delta/2)}\right\|_{L^1}^{(1-s+\delta/2)/2}\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{1-s/2+\delta/2}\hat{g}(\eta)\right\|_{L^2} \\ &\le \frac{C}{\delta^{(1-s)/2}}\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{1-s/2+\delta/2}\hat{g}(\eta)\right\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Nous obtenons alors

$$\|H_{11}\|_{L^2} \le \frac{C}{\delta^{1/2}}\left(\|\Lambda^{-s}f\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}\right)\left\|\left(1+|\eta|^2\right)^{1-s/2+\delta/2}\hat{g}(\eta)\right\|_{L^2}. \tag{2.20}$$

Pour le terme H_{12}, une simple utilisation des inégalités de Minkowski et de Hölder donne :

$$\|H_{12}\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}\big\||\eta|^{1-s}\hat{g}(\eta)\big\|_{L^1}. \tag{2.21}$$

Pour le second facteur, nous pouvons procéder comme ci-dessus et écrire :

$$\begin{aligned}\big\||\eta|^{1-s}\hat{g}(\eta)\big\|_{L^1} &\le \big\|\big(1+|\eta|^2\big)^{-1/2-\delta/2}\big\|_{L^2}\big\|\big(1+|\eta|^2\big)^{1/2+\delta/2}|\eta|^{1-s}\hat{g}(\eta)\big\|_{L^2}\\ &\le C\big\|\big(1+|\eta|^2\big)^{-1-\delta}\big\|_{L^1}^{1/2}\big\|\big(1+|\eta|^2\big)^{1+\delta/2-s/2}\hat{g}(\eta)\big\|_{L^2}\\ &\le \frac{C}{\delta^{1/2}}\big\|\big(1+|\eta|^2\big)^{1-s/2+\delta/2}\hat{g}(\eta)\big\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Maintenant, pour H_2, nous observons comme dans [3], que

$$|H_2| \le |s|\int_0^1\int_{\mathbb{R}^2}|A|^{-s}\big|\hat{f}(\xi-\eta)\big|\big|\eta\hat{g}(\eta)\big|\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\rho \tag{2.23}$$

et alors la borne de H_2 est la même que celle de H_1. $\square$

Preuve du théorème 1. Soit σ tel que

$$1+\beta<\sigma<3. \tag{2.24}$$

Il existe $\delta>0$ tel que

$$1+\beta+\delta\le\sigma<3. \tag{2.25}$$

Nous appliquons l'opérateur Λ^σ à (1.1) et nous multiplions par $\Lambda^\sigma\theta$ pour obtenir après intégration

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}^2 &= -\sum_{j=1}^2\int\Lambda^\sigma(u_j\partial_j\theta)\Lambda^\sigma\theta\\ &= -\sum_{j=1}^2\int\Lambda^\sigma u_j\partial_j\theta\Lambda^\sigma\theta-\sum_{j=1}^2\int u_j\partial_j\Lambda^\sigma\theta\Lambda^\sigma\theta\\ &\quad-\sum_{j=1}^2\int\big(\Lambda^\sigma(u_j\partial_j\theta)-\Lambda^\sigma u_j\partial_j\theta-u_j\partial_j\Lambda^\sigma\theta\big)\Lambda^\sigma\theta\\ &= I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Nous reportons le traitement de I_1, et nous notons d'abord que grâce à la condition de divergence nulle $\sum_{j=1}^2\partial_ju_j=0$, nous avons $I_2=0$. Pour I_3, nous écrivons :

$$I_3 \le \big\|\Lambda^\sigma(u_j\partial_j\theta)-\Lambda^\sigma u_j\partial_j\theta-u_j\partial_j\Lambda^\sigma\theta\big\|_{L^2}\big\|\Lambda^\sigma\theta\big\|_{L^2}. \tag{2.27}$$

Introduisons maintenant l'inégalité du commutateur double :

$$\big\|\Lambda^\sigma(fg)-\Lambda^\sigma fg-f\Lambda^\sigma g\big\|_{L^2} \le C\big(\|f\|_{W^{\sigma-1,2/(\beta-1)}}\|g\|_{W^{1,2/(2-\beta)}}+\|f\|_{W^{1,\infty}}\|g\|_{W^{\sigma-1,2}}\big),\quad f,g\in\mathcal{S} \tag{2.28}$$

qui est valable car $\sigma>2$ et qui peut se justifier comme suit. D'abord, on écrit :

$$\Lambda^\sigma=\partial_jT_j \tag{2.29}$$

où $T_j=-(-\Delta)^{\sigma/2-1}\partial_j$ for $j=1,2$. En utilisant la règle de Leibnitz pour ∂_j, nous obtenons :

$$\Lambda^\sigma(fg)-\Lambda^\sigma fg-f\Lambda^\sigma g=\big(T_j(\partial_jfg)-T_j(\partial_jf)g\big)+\big(T_j(f\partial_jg)-fT_j\partial_jg\big). \tag{2.30}$$

Pour établir (2.28), nous utilisons l'inégalité du commutateur de Kato et Ponce [6] (voir aussi [9]) pour écrire

$$\big\|T_j(\partial_jfg)-T_j(\partial_jf)g\big\|_{L^2} \le C\big(\|f\|_{W^{\sigma-1,2/(\beta-1)}}\|g\|_{W^{1,2/(2-\beta)}}+\|f\|_{W^{1,\infty}}\|g\|_{W^{\sigma-1,2}}\big) \tag{2.31}$$

et

$$\big\|T_j(f\partial_jg)-fT_j\partial_jg\big\|_{L^2} \le C\big(\|f\|_{W^{1,\infty}}\|g\|_{W^{\sigma-1,2}}+\|f\|_{W^{\sigma-1,2/(\beta-1)}}\|g\|_{W^{1,2/(2-\beta)}}\big). \tag{2.32}$$

Grâce à (2.27) et (2.28), nous obtenons

$$\begin{aligned}I_3 &\le C\big(\|u\|_{W^{\sigma-1,2/(\beta-1)}}\|\nabla\theta\|_{W^{1,2/(2-\beta)}}+\|u\|_{W^{1,\infty}}\|\nabla\theta\|_{W^{\sigma-1,2}}\big)\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}\\ &\le C\big(\|\Lambda^{2-\beta}u\|_{H^{\sigma-1}}\|\theta\|_{H^{\beta+1}}+\|u\|_{H^{2+\delta}}\|\theta\|_{H^\sigma}\big)\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}\\ &\le C\big(\|\theta\|_{H^\sigma}\|\theta\|_{H^{\beta+1}}+C\|\theta\|_{H^{1+\beta+\delta}}\|\theta\|_{H^\sigma}\big)\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}\end{aligned}\tag{2.33}$$

où nous avons aussi utilisé

$$u=-\nabla^\perp(-\Delta)^{-1}\Lambda^\beta\theta\tag{2.34}$$

et (2.25). Nous considérons maintenant $I_1=-\int\Lambda^\sigma u_j\partial_j\theta\Lambda^\sigma\theta$. Comme dans [3, p. 1045], nous utilisons l'identité

$$\int fAf\,g=-\frac{1}{2}\int f[A,g]f\tag{2.35}$$

qui est valable pour tout opérateur antisymmétrique A sous des conditions de continuité. En utilisant (2.35) avec $A=\Lambda^{\beta-2}\partial_j$ pour $j=1,2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{2}\int\big(\big(\Lambda^{\sigma+\beta-2}\nabla^\perp\theta\big)\cdot\nabla\theta\big)\Lambda^\sigma\theta\\ &=-\frac{1}{2}\int\big(\Lambda^{\beta-2}\partial_2\big(\Lambda^\sigma\theta\big)\big)\partial_1\theta\Lambda^\sigma\theta+\frac{1}{2}\int\big(\Lambda^{\beta-2}\partial_1\big(\Lambda^\sigma\theta\big)\big)\partial_2\theta\Lambda^\sigma\theta\\ &=\frac{1}{4}\int\Lambda^\sigma\theta\big[\Lambda^{\beta-2}\partial_2,\partial_1\theta\big]\Lambda^\sigma\theta-\frac{1}{4}\int\Lambda^\sigma\theta\big[\Lambda^{\beta-2}\partial_2,\partial_2\theta\big]\Lambda^\sigma\theta.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Le lemme 2 et le fait que $0<\beta-2+\sigma<\sigma$ donnent alors :

$$\begin{aligned}I_1&\le\sum_{j=1}^{2}\big\|\big[\Lambda^{\beta-2}\partial_j,\partial_1\theta\big]\Lambda^\sigma\theta\big\|_{L^2}\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}\le C\big(\|\Lambda^{\beta-2+\sigma}\theta\|_{L^2}+\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}\big)\|\partial_1\theta\|_{H^{\beta+\delta}}\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}\\ &\le C\big(\|\theta\|_{L^2}+\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}\big)\|\partial_1\theta\|_{H^{\beta+\delta}}\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}\end{aligned}\tag{2.37}$$

En utilisant (2.25), nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}^2\le C\|\theta\|_{H^\sigma}^3.\tag{2.38}$$

Combinant ceci avec l'identité d'énergie dans L^2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta\|_{L^2}^2=0\tag{2.39}$$

nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\big)\le C\big(\|\Lambda^\sigma\theta\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\big)^{3/2}\tag{2.40}$$

qui implique l'existence locale des solutions. □

Références

[1] D. Chae, J. Wu, Logarithmically regularized inviscid models in borderline Sobolev spaces, J. Math. Phys. 53 (11) (2012) 115601, 15.
[2] D. Chae, P. Constantin, J. Wu, Inviscid models generalizing the two-dimensional Euler and the surface quasi-geostrophic equations, Arch. Ration. Mech. Anal. 202 (1) (2011) 35–62.
[3] D. Chae, P. Constantin, D. Córdoba, F. Gancedo, J. Wu, Generalized surface quasi-geostrophic equations with singular velocities, Commun. Pure Appl. Math. 65 (8) (2012) 1037–1066.
[4] P. Constantin, A.J. Majda, E. Tabak, Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar, Nonlinearity 7 (6) (1994) 1495–1533.
[5] M. Dabkowski, A. Kiselev, V. Vicol, Global well-posedness for a slightly supercritical surface quasi-geostrophic equation, Nonlinearity 25 (5) (2012) 1525–1535.
[6] T. Kato, G. Ponce, Commutator estimates and the Euler and Navier–Stokes equations, Commun. Pure Appl. Math. 41 (7) (1988) 891–907.
[7] A.J. Majda, A.L. Bertozzi, Vorticity and Incompressible Flow, Cambridge Texts Appl. Math., vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[8] L. Silvestre, Eventual regularization for the slightly supercritical quasi-geostrophic equation, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire 27 (2) (2010) 693–704.
[9] T. Tao, Harmonic analysis, http://www.math.ucla.edu/~tao, Winter '07, Notes 6.