C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 105–109

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie du potentiel/Analyse harmonique

Propriétés de moyenne pour les fonctions harmoniques et polyharmoniques au sens de Dunkl

Mean value properties for Dunkl-harmonic and Dunkl-polyharmonic functions

Léonard Gallardo [a], Chaabane Rejeb [b,a]

[a] *Laboratoire de mathématiques et physique théorique, CNRS–UMR 7350, université de Tours, campus de Grandmont, 37200 Tours, France*

[b] *Département de mathématiques, faculté des sciences de Tunis, 1060 Tunis, Tunisie*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 6 juin 2014
Accepté après révision le 25 novembre 2014
Disponible sur Internet le 29 décembre 2014

Présenté par Jean-Michel Bony

RÉSUMÉ

Pour un système de racines dans $\mathbb{R}^d$ muni de son groupe de Coxeter–Weyl W et d'une fonction de multiplicité $k \geq 0$, on considère les opérateurs de Dunkl associés $D_1, \dots, D_d$ et le laplacien de Dunkl $\Delta_k = D_1^2 + \dots + D_d^2$. Cette Note étudie les propriétés des fonctions u de classe C^{2m} sur un ouvert W-invariant $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et satisfaisant $\Delta_k^m u = 0$ sur Ω (D-polyharmonicité si $m > 1$ et D-harmonicité si $m = 1$). En particulier, on introduit un nouvel opérateur qui généralise l'opérateur de moyenne volumique classique et qui caractérise la D-harmonicité (resp. la D-polyharmonicité), et on donne quelques applications.

ABSTRACT

For a root system in $\mathbb{R}^d$ furnished with its Weyl–Coxeter group W and a multiplicity function $k \geq 0$, we consider the associated commuting system of Dunkl operators $D_1, \dots, D_d$ and the Dunkl Laplacian $\Delta_k = D_1^2 + \dots + D_d^2$. This paper studies the properties of the functions u of class C^{2m} on an open W-invariant set $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ and satisfying $\Delta_k^m u = 0$ on Ω (D-polyharmonicity if $m > 1$ and D-harmonicity if $m = 1$). In particular, we introduce a new operator, which is a generalization of the classical volume mean value operator and which characterizes D-harmonicity (resp. D-polyharmonicity) and we give some applications.

Abridged English version

Let $R \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ be a root system (i.e. a finite set such that $R \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$ and $\sigma_\alpha R = R$ for all $\alpha \in R$, σ_α being the reflection with respect to the hyperplane H_α orthogonal to $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$), W the associated Coxeter–Weyl group

Adresses e-mail : Leonard.Gallardo@lmpt.univ-tours.fr (L. Gallardo), chaabane.rejeb@gmail.com (C. Rejeb).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.11.013
1631-073X/

(generated by the reflections σ_α, $\alpha \in R$) and $k : R \longrightarrow \mathbb{R}_+$ a W-invariant multiplicity function. Let D_j ($j = 1, \ldots, d$) the commuting family of Dunkl operators (see [2]) defined for $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ by

$$D_j f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)\alpha_j \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x\rangle},$$

where R_+ is a positive subsystem and V_k the Dunkl intertwining operator, i.e. the unique isomorphism of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ onto itself satisfying (see [3] and [11]): $\forall j = 1, ..., d,\ \ D_j V_k = V_k \frac{\partial}{\partial x_j}$, and $V_k(1) = 1$. This operator has the following integral representation (see [8]): $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \ V_k(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\mathrm{d}\mu_x(y)$, where μ_x is a probability measure on $\mathbb{R}^d$ with compact support contained in the convex hull of the orbit of x under W. Let now $\Delta_k := \sum_{j=1}^d D_j^2$ be the Dunkl Laplacian operator ([4], p. 156), which acts on $\mathcal{C}^2(\Omega)$ (Ω a W-invariant open subset of $\mathbb{R}^d$) functions as

$$\Delta_k f(x) = \Delta f(x) + 2 \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) \left(\frac{\langle \nabla f(x), \alpha\rangle}{\langle \alpha, x\rangle} - \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x\rangle^2} \right),$$

where Δ is the classical Laplacian operator on $\mathbb{R}^d$ and the roots are normalized such that $\|\alpha\|^2 = 2$. A function $u \in \mathcal{C}^{2m}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, is called Dunkl-polyharmonic of degree m (D-polyharmonic) on Ω, if: $\forall x \in \Omega$, $\Delta_k^m u(x) = 0$. When $m = 1$, u is called D-harmonic. In order to study D-harmonicity on Ω, we define the Dunkl-volume mean value of u relative to (x, r) as:

$$M_B^r(u)(x) = \frac{1}{m_k(B(0,r))} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) h_k(r, x, y)\omega_k(y)\mathrm{d}y,$$

where $x \in \Omega$, $r > 0$ is such that $B(x,r) \subset \Omega$, $\omega_k(y) := \prod_{\alpha \in R_+} |\langle \alpha, y\rangle|^{2k(\alpha)}$, $m_k(B(0,r)) = \int_{B(0,r)} \omega_k(y)\mathrm{d}y$ is the ω_k-volume of the ball $B(0,r)$ and $h_k(r, x, y) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[0,r]}(\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, z\rangle})\mathrm{d}\mu_y(z)$ is a kernel that we call the volume kernel. If $k \equiv 0$ (in the classical case of the Laplace operator Δ), we have $h_0(r, x, y) = \mathbf{1}_{B(x,r)}(y)$ and $M_B^r(u)(x)$ is the usual volume mean value of u at x on the ball $B(x,r)$. Our first result asserts that for a function $u \in C^2(\Omega)$, for all $x \in \Omega$ and $\rho > 0$ such that $B(x,\rho) \subset \Omega$, we have:

$$\forall R \le \rho/3, \quad M_B^R(u)(x) = u(x) + \frac{1}{R^{2\gamma+d}} \int_0^R \int_0^r M_B^t(\Delta_k u)(x) t\mathrm{d}t r^{2\gamma+d-1}\mathrm{d}r,$$

where $\gamma := \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)$. We then obtain the fundamental characterization that u is D-polyharmonic of degree m in Ω if and only if it satisfies the volume mean value property. That is: for all $x \in \Omega$ and $\rho > 0$ such that $B(x,\rho) \subset \Omega$, we have

$$\forall R \in \left]0, \frac{\rho}{3}\right], \quad M_B^R(u)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} d(j) R^{2j} \Delta_k^j u(x),$$

where $d(0) = 1$, $\Delta_k^0 = Id$ and $d(j) = (2^j j! \prod_{s=1}^j (2\gamma + d + 2s))^{-1}$, $j \ge 1$. As a corollary, we obtain a Liouville-type theorem: every positive D-harmonic function on $\mathbb{R}^d$ is a constant. As another application, we obtain a strong maximum principle for D-harmonic functions and a generalization of the famous Harnack's inequality: for each compact set $K \subset \Omega$, there exists a universal constant $C_K \ge 1$ such that the inequality $u(x) \le C_K u(y)$ holds for all $x, y \in K$ and all nonnegative D-harmonic function u in Ω.

1. Introduction

Soient $R \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ un système de racines (i.e. un ensemble fini tel que $R \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$ et $\sigma_\alpha R = R$ pour tout $\alpha \in R$, σ_α étant la réflexion par rapport à l'hyperplan H_α orthogonal à $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$), W le groupe de Coxeter–Weyl associé (engendré par les réflexions σ_α, $\alpha \in R$) et $k : R \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de multiplicité W-invariante. Soit D_j ($j = 1, \ldots, d$) la famille commutante des opérateurs de Dunkl (voir [2]) définis pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ par

$$D_j f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)\alpha_j \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x\rangle},$$

où R_+ est un sous-système positif et V_k l'opérateur d'entrelacement de Dunkl, i.e. l'unique isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même satisfaisant (voir [3] et [11]) : $\forall j = 1, ..., d,\ \ D_j V_k = V_k \frac{\partial}{\partial x_j}$, et $V_k(1) = 1$. Cet opérateur a la représentation intégrale suivante (voir [8]) :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad V_k(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\mathrm{d}\mu_x(y), \tag{1}$$

où μ_x est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ à support compact inclus dans l'enveloppe convexe de l'orbite de x sous l'action de W. Soit maintenant $\Delta_k := \sum_{j=1}^d D_j^2$ le laplacien de Dunkl ([4] p. 156) agissant sur les fonctions de $\mathcal{C}^2(\Omega)$ (Ω est un ouvert W-invariant de $\mathbb{R}^d$) comme suit

$$\Delta_k f(x) = \Delta f(x) + 2\sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)\left(\frac{\langle \nabla f(x), \alpha\rangle}{\langle \alpha, x\rangle} - \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x\rangle^2}\right), \tag{2}$$

où Δ est le laplacien classique sur $\mathbb{R}^d$ et les racines sont normalisées de telle sorte que $\|\alpha\|^2 = 2$. Une fonction $u \in \mathcal{C}^{2m}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, est dite Dunkl-polyharmonique de degré m (D-polyharmonique) sur Ω si : $\forall x \in \Omega$, $\Delta_k^m u(x) = 0$. Si $m = 1$, u est dite D-harmonique. À notre connaissance, jusqu'à présent, les fonctions D-harmoniques n'ont été étudiées que sur $\Omega = \mathbb{R}^d$ (voir [7]) et $\Omega = \mathbb{B}$ (la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^d$) (voir [6]). Dans [7], les auteurs montrent qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est D-harmonique sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne sphérique suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall r > 0, \quad u(x) = M_S^r(u)(x) := \frac{1}{d_k}\int_{S^{d-1}} \tau_x u(r\xi)\omega_k(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi), \tag{3}$$

où $\mathrm{d}\sigma(\xi)$ est la mesure de surface sur la sphère unité S^{d-1} de $\mathbb{R}^d$, $\omega_k(x) := \prod_{\alpha\in R_+} |\langle \alpha, x\rangle|^{2k(\alpha)}$ est la fonction poids de Dunkl, d_k est la constante donnée par : $d_k = \int_{S^{d-1}} \omega_k(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)$ et τ_x est l'opérateur de translation de Dunkl, dont l'expression est donnée ci-dessous (voir (4)). De plus (voir [9]), pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$ fixés, il existe une unique mesure de probabilité $\sigma_{x,r}^k$ à support compact telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $M_S^r(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\mathrm{d}\sigma_{x,r}^k(y)$.

Rappelons que la transformation de Dunkl d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \omega_k(x)\mathrm{d}x)$ (voir [1] et [10]), est donnée par $\mathcal{F}_D(f)(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)E_k(-\mathrm{i}\lambda, x)\omega_k(x)\mathrm{d}x,\ \lambda \in \mathbb{R}^d$, où $E_k(x, y) := V_k(\mathrm{e}^{\langle x,.\rangle})(y), x, y \in \mathbb{R}^d$, est le noyau de Dunkl (voir [4] et [10]), qui est analytiquement prolongeable sur $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$. On sait (voir [1]) que la transformation $\mathcal{F}_D$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (l'espace de Schwartz) sur lui-même et son inverse est donnée par : $\mathcal{F}_D^{-1}(f)(x) = \frac{1}{c_k^2}\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)E_k(\mathrm{i}x, \lambda)\omega_k(\lambda)\mathrm{d}\lambda,\ x \in \mathbb{R}^d$, avec $c_k := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\omega_k(x)\mathrm{d}x$.

Maintenant, les opérateurs de translation de Dunkl τ_x, $x \in \mathbb{R}^d$ (voir [12]) sont définis sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \tau_x f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} V_k \circ T_z \circ V_k^{-1}(f)(y)\mathrm{d}\mu_x(z) = (V_k)_x(V_k)_y\left[V_k^{-1}(f)(x+y)\right], \tag{4}$$

où T_x est l'opérateur de translation classique donné par : $T_x f(y) = f(x+y)$. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\tau_x f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et en utilisant la transformée de Dunkl (voir [12]), on a : $\tau_x f(y) = \mathcal{F}_D^{-1}[E_k(\mathrm{i}x, .)\mathcal{F}_D(f)](y)$ $(y \in \mathbb{R}^d)$. Notons que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est radiale (i.e. $f(x) = F(\|x\|)$), on a la formule (voir [9])

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \tau_x f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} F\left(\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, z\rangle}\right)\mathrm{d}\mu_y(z), \tag{5}$$

où μ_y est la mesure de Rösler donnée dans (1). Dans la suite, on aura besoin de la relation de dualité suivante :

Proposition 1.1. *Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact). Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} \tau_x f(y)g(y)\omega_k(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau_{-x}g(y)\omega_k(y)\mathrm{d}y$.*

2. La propriété de moyenne volumique

Pour définir l'opérateur de moyenne volumique au sens de Dunkl, on introduit le noyau suivant.

Définition 2.1. Soit $r > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$, on définit le noyau volumique $h_k(r, x, y)$ comme suit :

$$h_k(r, x, y) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[0,r]}\left(\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, z\rangle}\right)\mathrm{d}\mu_y(z). \tag{6}$$

Exemple 1. Pour $k = 0$ (i.e. dans le cas classique du laplacien), on a $\mu_y = \delta_y$ et $h_0(r, x, y) = 1_{B(x,r)}(y)$.

Proposition 2.2. *Le noyau volumique satisfait les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout* $r > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^d$, $0 \leq h_k(r, x, y) \leq 1$;
(ii) *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *fixés, la fonction* $r \longmapsto h_k(r, x, y)$ $(r > 0)$ *est continue et croissante ;*
(iii) *pour tout* $r > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$ *fixés, la fonction* $h_k(r, x, .) : y \mapsto h_k(r, x, y)$*, est à support compact et*

$$\operatorname{supp} h_k(r, x, .) \subset \bigcup_{g \in W} B(gx, r); \tag{7}$$

(iv) *soit* $r > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$. *Pour toute suite* $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *de fonctions radiales telles que* $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ *et* $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(y) = \mathbf{1}_{B(0,r)}(y)$*, on a*

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad h_k(r, x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau_{-x}\varphi_\varepsilon(y); \tag{8}$$

(v) *pour tout* $r > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^d$*, on a* $h_k(r, x, y) = h_k(r, y, x)$;
(vi) *pour tout* $r > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$*, on a* $\int_{\mathbb{R}^d} h_k(r, x, y)\omega_k(y)\mathrm{d}y = m_k(B(0, r)) = \frac{d_k r^{2\gamma+d}}{2\gamma+d}$*, où* $\mathrm{d}m_k(y) = \omega_k(y)\mathrm{d}y$ *et* d_k *est la constante définie en (3) ;*
(vii) *soit* $r > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^d$. *Alors, pour tout* $g \in W$*, on a :*

$$h_k(r, gx, gy) = h_k(r, x, y) \quad \text{et} \quad h_k(r, gx, y) = h_k\big(r, x, g^{-1}y\big); \tag{9}$$

(viii) *pour tout* $r > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$*, la fonction* $h_k(r, x, .)$ *est semi-continue supérieurement sur* $\mathbb{R}^d$;
(ix) *soit* $x \in \mathbb{R}^d$. *La famille de mesures de probabilité* $\mathrm{d}\eta_r^x(y) = \frac{1}{m_k(B(0,r))} h_k(r, x, y)\omega_k(y)\mathrm{d}y$, $r > 0$*, est une approximation de la mesure de Dirac* δ_x *quand* $r \to 0$. *Plus précisément :*
  (a) *pour tout* $\alpha > 0$, $\lim_{r \to 0} \int_{\|x-y\|>\alpha} \mathrm{d}\eta_r^x(y) = 0$;
  (b) *soit* f *une fonction mesurable et localement bornée définie sur un ouvert* W*-invariant* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *et soit* $x \in \Omega$. *Si* f *est continue au point* x*, alors* $\lim_{r \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\mathrm{d}\eta_r^x(y) = f(x)$.

Démonstration : Les assertions (i) et (ii) sont triviales ; (iii) découle du fait que si $z \in \operatorname{supp} \mu_y$, on a $\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, z\rangle = \sum_{g \in W} \lambda_g(z)\|g^{-1}x - y\|^2$, où $\lambda_g(z) \geq 0$ et $\sum_{g \in W} \lambda_g(z) = 1$. Le point (iv) résulte de la formule (5) et le point (v) découle du fait que, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est radiale, on a $\tau_{-x} f(y) = \tau_{-y} f(x)$. La propriété (vi) découle de (8) et de la formule $\int_{\mathbb{R}^d} \tau_x f(y)\omega_k(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\omega_k(y)\mathrm{d}y$, valable si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (voir [12]). Le point (vii) se déduit du fait que l'opérateur V_k commute avec l'action du groupe W et (viii) découle facilement de (iv). La preuve de (ix), un peu plus technique, basée sur la proposition 1.1, est omise.

Définition 2.3. Soit u une fonction continue sur un ouvert W-invariant $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, soit $x \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset \Omega$. On définit la moyenne volumique de u relative à (x, r) par

$$M_B^r(u)(x) := \frac{1}{m_k(B(0, r))} \int_{\mathbb{R}^d} u(y)h_k(r, x, y)\omega_k(y)\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Remarque 1. • On note que d'après (7) le domaine d'intégration est en fait $\operatorname{supp} h_k(r, x, .) \subset \Omega$.

• Soit u, x et r comme dans la définition précédente. D'après la proposition 2.2 (propriétés (ii) et (vi)) et le théorème de convergence dominée, on déduit que la fonction $t \longmapsto M_B^t(u)(x)$ est continue sur $]0, r]$. De plus, par la propriété (ix), elle est prolongeable en une fonction continue au point $t = 0$ et telle que $M_B^0(u)(x) = u(x)$.

Proposition 2.4. *Soit* $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Alors, pour tout* $r > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$*, on a*

$$M_S^r(u)(x) = u(x) + \frac{1}{2\gamma + d} \int_0^r M_B^t(\Delta_k u)(x) t\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Démonstration (idée) : Par la formule de Green associée au laplacien de Dunkl (voir [7]) et le fait que $\tau_x(\Delta_k u) = \Delta_k(\tau_x u)$, on peut montrer que $M_B^t(\Delta_k u)(x) = \frac{2\gamma+d}{d_k t} \int_{S^{d-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tau_x u(t\xi)]\omega_k(\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi)$, puis il suffit d'intégrer en t sur $[0, r]$.

Théorème 2.5. *Soit* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. *Alors, pour tout* $x \in \Omega$ *et* $\rho > 0$ *tels que* $B(x, \rho) \subset \Omega$*, on a :*

$$\forall 0 < R \leq \rho/3, \quad M_B^R(u)(x) = u(x) + \frac{1}{R^{2\gamma+d}} \int_0^R \int_0^r M_B^t(\Delta_k u)(x)\, \mathrm{d}t r^{2\gamma+d-1}\mathrm{d}r. \tag{12}$$

Démonstration (idée) : Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, le résultat découle de (11). Le résultat s'en déduit si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ en montrant qu'il existe une suite de polynômes (p_n) telle que p_n converge vers u et $\Delta_k p_n$ converge vers $\Delta_k u$ uniformément sur le compact $\bigcup_{g\in W} B(gx, R)$.

Théorème 2.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert W-invariant et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Alors, u est D-harmonique dans Ω si et seulement si u satisfait la propriété de moyenne volumique, i.e., pour tout $x \in \Omega$ et $\rho > 0$ tels que $B(x,\rho) \subset \Omega$, on a :*

$$\forall 0 < R \le \rho/3, \quad u(x) = M_B^R(u)(x). \tag{13}$$

Démonstration : Le sens direct est évident. La réciproque découle de (12) et du point (ix) de la proposition 2.2. Par récurrence sur l'entier m, en utilisant (12), on en déduit le théorème suivant, qui inclut le cas classique si $k \equiv 0$.

Théorème 2.7. *Soit $u \in \mathcal{C}^{2m}(\Omega)$ et $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction u est D-polyharmonique de degré m sur Ω si et seulement si pour tout $x \in \Omega$ et tout $\rho > 0$ tels que $B(x,\rho) \subset \Omega$, on a :*

$$\forall R \in \left]0, \frac{\rho}{3}\right], \quad M_B^R(u)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} d(j) R^{2j} \Delta_k^j u(x),$$

où $d(0) = 1$, $\Delta_k^0 = Id$ et $d(j) = (2^j j! \prod_{s=1}^{j}(2\gamma + d + 2s))^{-1}$, $j \ge 1$.

3. Applications

Soit u une fonction D-harmonique positive sur $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$ fixé. En utilisant la propriété de la moyenne volumique, pour tout $R > \|x\|$, on a $0 \le u(x) \le \frac{m_k(B(0,2R))}{m_k(B(0,R))} u(0) = 2^{2\gamma+d} u(0)$. Ceci montre que u est bornée. Par le théorème de Liouville (voir [5]), on en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Toute fonction D-harmonique minorée (resp. majorée) sur $\mathbb{R}^d$ est constante.*

Théorème 3.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe et W-invariant. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K \ge 1$ telle que pour toute fonction u D-harmonique positive dans Ω, on ait*

$$\sup_K u \le C_K \inf_K u.$$

Démonstration (idée) : Soit $x \in \Omega$ et $r > 0$. Si $x_1, x_2 \in B(x,r)$, on peut montrer que $h_k(r, x_2, y) \le h_k(4r, x_1, y)$ $(y \in \mathbb{R}^d)$. Si de plus $B(x, 13r) \subset \Omega$, il existe une constante $C \ge 1$ telle que pour toute fonction u D-harmonique positive sur Ω, on a $u(x_2) \le C u(x_1)$. En suivant alors la démarche de la preuve de l'inégalité de Harnack classique, on obtient le résultat.

En appliquant le théorème précédent, on déduit le principe du maximum fort suivant.

Théorème 3.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe et W-invariant et soit u une fonction D-harmonique sur Ω. Si u atteint son maximum sur Ω, alors u est constante.*

Application : Si, de plus, Ω est borné, toute solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur Δ_k sur Ω, est unique.

Références

[1] M.F. de Jeu, The Dunkl transform, Invent. Math. 113 (1993) 147–162.
[2] C.F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, Trans. Amer. Math. Soc. 311 (1989) 167–183.
[3] C.F. Dunkl, Integral kernel with reflection group invariance, Can. J. Math. 43 (1991) 123–183.
[4] C.F. Dunkl, Y. Xu, Orthogonal Polynomials of Several Variables, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
[5] L. Gallardo, L. Godefroy, Propriété de Liouville et équation de Poisson pour le laplacien généralisé de Dunkl, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 639–644.
[6] M. Maslouhi, E.H. Youssfi, Harmonic functions associated to Dunkl operators, Monatsh. Math. 152 (2007) 337–345.
[7] H. Mejjaoli, K. Trimèche, On a mean value property associated with the Dunkl Laplacian operator and applications, Integral Transforms Spec. Funct. 12 (3) (2001) 279–302.
[8] M. Rösler, Positivity of Dunkl's intertwining operator, Duke Math. J. 98 (1999) 445–463.
[9] M. Rösler, A positive radial product formula for the Dunkl kernel, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003) 2413–2438.
[10] M. Rösler, Dunkl Operators: Theory and Applications, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1817, Springer Verlag, 2003, pp. 93–136.
[11] K. Trimèche, The Dunkl intertwining operator on spaces of functions and distributions and integral representation of its dual, Integral Transforms Spec. Funct. 12 (4) (2001) 349–374.
[12] K. Trimèche, Paley–Wiener theorem for the Dunkl transform and Dunkl translation operators, Integral Transforms Spec. Funct. 13 (2002) 17–38.