

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

SISOWATH YOUTÉVONG

Essai de normalisation des courbes d'intrados de voûtes en berceau

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1941

[<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1941__238__3_0>](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1941__238__3_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :

75

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Le Prince SISOWATH YOUTÉVONG

PREMIÈRE THÈSE. — **ESSAI DE NORMALISATION DES
COURBES D'INTRADOS DE VOUTES EN BERCEAU.**

DEUXIÈME THÈSE. — *Proposition donnée par la Faculté :*
**PROBLÈME DE DIRICHLET :
MÉTHODE DE BALAYAGE DE POINCARÉ.**

Soutenues le

1941 devant la Commission d'examen

MM. E. TURRIÈRE	<i>Président.</i>
J. SOULA	} <i>Assesseurs.</i>
F. VASILESCO	
J. BIZE	

MONTPELLIER
IMPRIMERIE DE LA CHARITÉ
(Pierre Rouge)

1941

FACULTÉ DES SCIENCES

DE

L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

MM.

Doyen P. MATHIAS, Professeur de Zoologie et Biologie générale.

Professeurs honoraires ... { E. FABRY, O. DUBOSCQ, E. BATAILLON,
R. JACQUES, J. PAVILLARD, J. CABANNES
et E. CHATTON.

Maîtres de Conférences honoraires F. MOURGUES et L. MAURY.

MM.

Professeurs	{	G. REBOUL	Physique.
		E. TURRIERE	Mécanique rationnelle.
		P. HUMBERT	Mathématiques pures
		L. GAY	Chimie.
		J. SOULA	Mathématiques.
		E. CARRIÈRE	Chimie.
		N.	Chimie.
		L. EMBERGER	Botanique.
		Ch. BOUHET	Physique.
		M. CASTERAS	Géologie.

MM.

Maîtres de Conférences. F. VASILESCO..... Mathématiques.
O. TUZET (Mlle) Zoologie
P. CHATELAIN Minéralogie.
P. REMY Chimie.

MM.

Secrétaire A. BABY.

Secrétaire honoraire.. L. DUBOIS.

Membres du Jury :

MM. E. TURRIERE..... *Président*.

J. SOULA	}	Assesseurs.
F. VASILESCO		
. BIZE		



26178 +

*A LA FAMILLE ROYALE
DU CAMBODGE*

ET A MON CHER KAMPUCHÉA.

A MON MAITRE,
MONSIEUR LE PROFESSEUR ÉMILE TURRIÈRE,

Hommage de ma respectueuse reconnaissance.

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE
ET DE MON FRÈRE **CHAKHARAVOUTH,**

A MA MÈRE,
A ENTARAVONG, NONN ET TŒUL.

A TOUS MES AMIS

AVANT-PROPOS

Les circonstances dans lesquelles nous avons commencé et poursuivi ce travail nous font contracter une lourde dette envers ceux à qui nous devons de pouvoir le mener à bonne fin. C'est grâce à l'encouragement de notre maître et à son inlassable bienveillance, c'est grâce à l'appui de notre Pays et de son Gouvernement, grâce enfin au courage de notre famille et à son indéfectible esprit de sacrifice, que nous avons pu connaître le résultat de nos efforts.

Nous faisons un acte d'attachement et d'humilité envers ceux que nous unissons ici dans une même pensée d'affectueuse reconnaissance.

Une étude des courbes d'intrados de voûtes en berceau avait été entreprise en 1938 par M. Emile TURRIÈRE, Professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Montpellier. Un long et substantiel mémoire avait paru, sous sa signature, dans l'organe de la Société des ingénieurs de Bucarest.

Mais, à la déclaration de guerre, M. TURRIÈRE fut appelé à assumer une lourde charge et, de ce fait, dut suspendre provisoirement ses recherches. Il nous confia, dans ces conditions, le soin de les poursuivre sous sa direction. La présente thèse est le résultat de ce travail de refonte et de mise au point des recherches de notre Professeur.

Dans cette tâche, il nous guide et nous aide de toute son expérience et de toute sa lumière malgré ses propres occupations, contrôle et critique nos résultats avec une bonté et une patience sans réserve.

Nous exprimons aussi notre reconnaissance à M. le Professeur VASILESCO pour ses précieux conseils.

Nous adressons d'autre part nos remerciements à M. J. BIZE, Ingénieur des Ponts et Chaussées de Vaucluse, qui a pris intérêt à nos recherches et qui a bien voulu accepter de faire partie du Jury d'examen ;

à M. P. WAHL, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées de Saône-et-Loire, à qui nous sommes redevable de belles photographies du pont de Verjux, dont celle reproduite plus loin ;

à M. Charles RABUT, Ingénieur-Consultant, à Paris ;

à M. J. ROUGER, Directeur de l'Entreprise de Génie Civil et Travaux Publics de Lens, pour les documents concernant les ponts de Laifour et Anchamps sur la Meuse ;

à M. MERMOZ, Ingénieur-Chef de Travaux à la Compagnie nationale du Rhône, qui a gracieusement exécuté divers dessins et notamment relevé les épures concernant le pont de Verjux ;

enfin au personnel de l'Imprimerie de la Charité, en particulier à son Directeur, M. E. ESCHBACH, pour les soins minutieux apportés à l'exécution de ce travail.

Montpellier, 3 avril 1941.

INTRODUCTION

L'emploi des arcs circulaires et des anses de panier dans les ouvrages anciens de maçonnerie ne pouvait convenir aux ponts modernes. L'ellipse elle-même dut être abandonnée, sa courbure étant trop forte aux naissances ; afin d'améliorer l'aspect de l'ellipse, on dut la cambrer aux reins par transformations géométriques (1).

D'autre part, la chaînette renversée semblait devoir convenir, en raison de sa propriété statique d'être la figure d'équilibre d'un fil pesant et homogène. Le principe de changement de tension en pression, ordinairement attribué à POINSON, en application duquel la chaînette est la courbe théorique des *voûtes de Poinson*, avait été introduit antérieurement. Déjà STIRLING, au milieu du XVIII^e siècle, établissait cette propriété de la chaînette, propriété qui était vérifiée expérimentalement par l'abbé BOSSUT, dont trois mémoires sont consacrés aux voûtes (1774-1776).

COUPLET, d'ailleurs, recommandait l'emploi de la chaînette comme courbe de voûte dans une étude insérée aux *Mémoires de l'ancienne Académie de Paris* (1731).

Le mémoire sur « *l'établissement des arches de ponts envisagé au point de vue de la plus grande stabilité* » d'Yvon VILLARCEAU

(1) Voir la partie historique de l'ouvrage « *Ponts en maçonnerie* » par M. l'Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées A. AURIC, ainsi que l'article « L'art de la construction des ponts en maçonnerie » du même auteur dans la *Revue du mois de juin* 1906.

A signaler aussi la documentation contenue dans le mémoire d'Yvon VILLARCEAU (1854).

(1844), les études de CARVALHO (1853), de SAINT-GUILHEM (1859), de DENFERT-ROCHEREAU (1859) ouvrent une voie nouvelle en posant nettement le problème du choix d'une courbe appropriée. Les théories sont contestables, mais le problème est posé. Des travaux sont exécutés en application de ces théories : le pont à trois arches de 14 mètres sur la Garganta Aucha (Espagne), le pont de 33 m. de portée sur la Gimone et celui de 40 mètres sur la Pique.

Poursuivant les recherches théoriques de DENFERT-ROCHEREAU, qui conduisaient à l'emploi d'une transformée par projection de la chaînette, TOURTAY (1888) réalise le remarquable pont Boucicaut, sur la Saône, à Verjux, dont la courbe d'intrados est une caténoïde. A la suite de TOURTAY, pour le nouveau pont d'Orléans sur la Loire, LEGAY (1900) utilise la même courbe.

Rappelons d'ailleurs, au sujet de l'emploi de la caténoïde, les travaux de RANKINE, ceux d'ALEXANDER et THOMSON sur « *la courbe à deux nez* » (Académie royale d'Irlande, 1888) et les nombreuses publications d'HEINZERLING, en Allemagne (1869).

Les ingénieurs des Ponts et Chaussées utilisent ensuite toutes sortes de courbes algébriques, qui sont des rajeunissements de l'anse de panier par raccordements osculateurs de divers arcs de courbes, ou qui sont des altérations de courbes simples. C'est ainsi que M. AURIC, pour le pont de Valence, utilise un arc d'une parabole du 4^e degré pour le profil en long et un arc de cubique pour intrados.

Parmi les recherches théoriques, mention spéciale doit être faite des *courbes paraboliques* proposées par LEBERT en 1900. L'idée est excellente. L'auteur pose *arbitrairement* :

$$y'' = \frac{1}{m} (1 + ky'^2),$$

avec deux constantes m et k . Pour $k = 0$, la courbe intégrale est une parabole ordinaire ; pour $k = 1$ c'est une courbe que LEBERT nomme la « *parabolique particulière* » et à laquelle il

attache une certaine importance, ce qui est parfaitement justifié puisque cette dernière courbe est identique à la chaînette d'égale résistance que D. GILBERT avait découverte en 1826, à l'occasion de son étude sur le pont-route suspendu du détroit de Menai, entre l'Angleterre et l'île d'Anglesey. Ainsi LEBERT reconnaissait qu'il y avait intérêt à poser une équation générale, *comportant des paramètres arbitraires en nombre suffisant*, pour réaliser des courbes substituables à la parabole.

Mais à part la parabole et la chaînette d'égale résistance, les courbes préconisées par LEBERT restent dépourvues d'intérêt géométrique.

Si l'équation différentielle considérée avait été l'équation du second ordre :

$$Ayy'' = 1 + y'^2,$$

LEBERT eût au contraire été amené à une solution du plus grand intérêt mathématique : les courbes d'*Albert Ribaucour*, découvertes par Jean BERNOULLI dès 1716, qui jouissent de nombreuses propriétés et qui interviennent fréquemment dans diverses applications.

L'attention de M. E. TURRIÈRE ayant été appelée par M. J. BIZE, Ingénieur des Ponts et Chaussées de Vaucluse, sur l'intérêt qu'aurait l'examen de cette question d'un choix judicieux de courbes possibles comme intrados de voûtes en berceau, le professeur de mécanique rationnelle de la Faculté des Sciences de Montpellier a publié un substantiel mémoire dans le *Bulletin des Ingénieurs de Bucarest* (1938).

Après une étude historique et critique des solutions connues, M. TURRIÈRE a marqué d'abord l'intérêt d'une courbe d'intrados *de direction*. En écartant des courbes pour lesquelles les calculs sont compliqués, nécessitant parfois l'introduction de transcendentes elliptiques, l'utilisation des courbes de direction de LAGUERRE permet de représenter simplement le système de la courbe d'intrados, de la courbe d'extrados et de la fibre théorique. Ces courbes sont essentiellement rectifiables par fonctions élémentaires.

Parmi les courbes de direction, il est encore possible de limiter le choix. Les courbes de RIBAUCOUR s'introduisent logiquement, car elles comportent des variétés particulièrement intéressantes, que nous indiquons ci-dessous avec la valeur de leur indice :

Indice	Courbe de Ribaucour
— 3	parallèle d'astroïde
— 2	cycloïde ordinaire
— 1	cercle
— $\frac{1}{2}$	élastique harmonique
0	chaînette d'égale résistance
1	chaînette ordinaire
2	parabole

toutes ces courbes ayant été précisément considérées ou utilisées sous le point de vue du problème des arches.

La courbe élastique, bien que retenue par Y. VILLARCEAU, doit être écartée, car elle dépend essentiellement des fonctions elliptiques, tandis que l'objet des recherches de M. TURRIÈRE est précisément d'éliminer les complications d'analyse et de calculs. Du moment qu'on a le choix et un choix large, il y a lieu avant tout de se borner à des éléments simples.

Il reste donc six courbes de Ribaucour, classées dans un ordre déterminé : les résultats numériques concernant les rayons de courbure, les angles aux naissances donnent lieu à des différences équivalentes dans le tableau concernant un ouvrage de surbaissement imposé. Il en résulte un certain nombre de formules théoriques, ou empiriques, d'un emploi immédiat dans l'application. Ces courbes seront des « *paraboloïques primaires* ».

Un ouvrage déterminé se rapproche plus ou moins de telle ou telle des paraboloïques inscrites au tableau. C'est ainsi que

l'arche du nouveau pont d'Orléans, réalisée en caténoïde par LÉGAY, serait assez voisine d'un arc de cycloïde, comme cela résulte de la simple inspection du tableau de comparaison des résultats numériques concernant cet ouvrage.

Mais les paraboliques primaires (courbes proprement dites de Ribaucour) ne comportent qu'un seul paramètre arbitraire : le *paramètre de similitude*. Elles sont semblables aux types réduits : tous les cercles sont semblables entre eux ; de même les cycloïdes, les paraboles, les chaînettes...

Elles ne permettent donc pas de disposer de paramètres arbitraires, de *paramètres spécifiques*, afin de corriger les *fibres théoriques* en tenant compte des conditions mécaniques requises pour la stabilité de la voûte.

C'est alors que M. TURRIÈRE propose d'*additionner* les courbes de Ribaucour, les paraboliques primaires de notre classification.

L'addition est celle considérée par l'abbé D'Aoust (1873). La résultante d'Aoust de deux courbes planes jouit de curieuses propriétés géométriques et analytiques. On généralise aisément en additionnant algébriquement un nombre quelconque de courbes planes. D'où la possibilité de disposer d'un nombre quelconque de coefficients algébriques et indéterminés, figurant sous *forme linéaire* dans les formules (« *paramètres spécifiques* »).

Tout cela est fort simple, d'après la conduite et les résultats des calculs que nous avons effectués. Les épures sont d'autre part simplifiées en raison de la présence d'éléments parallèles et de l'addition des rayons de courbure, et de celle des arcs correspondants.

Il y a donc lieu de recommander l'addition de plusieurs paraboliques primaires ; mais une de ces opérations est particulièrement remarquable : elle correspond en effet à une *déformation par élasticité*.

La chaînette élastique (figure d'équilibre d'un fil pesant homogène et élastique) peut être précisément construite par l'addition de la chaînette proprement dite et de la *parabole ordinaire qui lui succède au tableau*.

Supposons une élasticité suivant la loi de Hooke ; toute courbe de Ribaucour élastique est la résultante d'Aoust dans l'addition de la courbe de Ribaucour sans élasticité et de celle qui lui succède dans le tableau des paraboliques primaires.

Mais pour que les calculs reçoivent leurs applications techniques, il est indispensable d'introduire aussi des *coefficients négatifs* d'élasticité, c'est-à-dire d'admettre une *contractilité* des fibres, substituée à leur *élasticité*. Par analogie avec les propriétés de la fibre musculaire, M. TURRIÈRE propose d'appeler ces courbes *chaînette contractile*, *parabole contractile*, etc...

De même que la *pression* est l'opposée algébrique d'une *tension*, les courbes de voûte contractiles se substituent aux courbes de Ribaucour élastiques.

Si, pour fixer les idées, le projet d'un ouvrage comporte une fibre théorique assez proche d'une parabole, on conçoit que les corrections imposées par l'étude mécanique de la stabilité portent sur une altération de cette fibre choisie initialement. Cette correction est logiquement réalisable en attribuant à la fibre une élasticité ou contractilité, c'est-à-dire en choisissant, par le calcul, la valeur la plus convenable du paramètre spécifique de la *paraboloïque élastique ou contractile*.

Ces applications portent spécialement sur les arcs à longue portée des ponts en béton armé, qui sont en principe des *arcs paraboliques*. Nous avons constaté que, pratiquement, sur les épures, à dimensions limitées, il n'est guère possible de mettre en évidence les différences provenant du choix de diverses courbes. C'est ce qui constitue la *fusion* des courbes, dans de telles conditions.

En raison de l'importance des arcs paraboliques, nous avons retenu la dénomination de LEBERT pour les courbes d'arches de voûtes en berceau, que nous appellerons *paraboloïques contractiles ou élastiques*, car c'est plutôt ce dernier cas qui intervient surtout dans les applications ici étudiées. Ce seront les *paraboloïques normales*. Les paramètres dont dépend une telle courbe sont d'abord le paramètre de *similitude* et surtout les paramètres *spécifiques* : ces derniers sont les multiplicateurs

algébriques introduits arbitrairement dans l'addition géométrique des paraboloïques primaires pour constituer leur résultante normale. Par opposition aux paramètres de similitude, dont la variation n'altère en rien l'allure des courbes, ces derniers sont les éléments essentiels de toute analyse.

Si donc, maintenant, nous considérons telles ou telles courbes, fort variées, qui furent proposées ou même réalisées dans la construction d'ouvrages, sans aucune méthode générale, en pleine anarchie pourrait-on écrire, il nous devient possible de les soumettre à une critique analytique rationnelle. Ces cubiques, la biquartique du pont de Valence, les transformées d'ellipses ou d'anses de panier, seront pour nous des *paraboloïques anormales* ; elles pourront être confrontées avec les paraboloïques normales afin de mettre en évidence celles des paraboloïques primaires ou des paraboloïques normales se rapprochant le mieux de chaque paraboloïque anormale. Dans cet essai de classification et de confrontation — de « *normalisation des paraboloïques* » — nous avons été amené à étudier la fonction de surbaissement et à établir des formules de correspondance entre les paramètres des unes et des autres de ces courbes.

D'autre part, si la chaînette ordinaire est ici retenue au titre d'une des paraboloïques primaires, sa transformée par affinité, la caténoïde préconisée par DENFERT-ROCHEREAU et réalisée par TOURTAY, LEGAY, M. LOSSIER, etc..., est une paraboloïque anormale. Nous l'avons pourtant étudiée d'une manière toute spéciale, en raison même de ses réalisations pratiques, et nous l'avons comparée à d'autres courbes. Cette confrontation nous a amené à introduire la fonction *caténaire* et à faire appel à la chaînette d'axe vertical osculatrice en son point courant à une courbe plane.

Ces recherches ne concernent que la partie géométrique, car c'est la seule qui soit vraiment mathématique. Vouloir soumettre aux lois mathématiques un problème physique aussi complexe et aussi mal défini que celui de l'équilibre d'une masse de matériaux tels que ceux qui entrent dans la construction d'un pont en maçonnerie, est s'exposer à errer ! Pour ingénieuses que soient

les solutions proposées, il est impossible d'assurer par l'analyse la certitude d'une solution théorique, même grossièrement approchée, du problème de statique. L'hétérogénéité des matériaux, la préparation des mortiers, la taille des surfaces ne sauraient être réalisées dans les conditions nécessaires à une mise en équation habituelle. Et quant aux hypothèses sur la courbe de pression, courbe de *Méry*..., joints de rupture..., tous ces fondements d'une théorie sont assez arbitrairement posés.

Dans ces conditions, la tâche du géomètre est limitée : indiquer les choix possibles, facilitant les calculs, introduisant un nombre suffisant de paramètres arbitraires, et laisser aux techniciens le soin, dans chaque cas d'application, de choisir et de décider quelles valeurs numériques devront être attribuées à ces arbitraires, d'après les épures et les calculs de contrôle.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE PREMIER

LES COURBES DE DIRECTION DE LAGUERRE

Les courbes de direction.

E. LAGUERRE a donné le nom de courbes de direction aux courbes dont la tangente en chaque point a une direction parfaitement déterminée : c'est-à-dire telles que les cosinus directeurs : $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ de la tangente sont des fonctions rationnelles des coordonnées du point courant (1).

L'ellipse, par exemple, représentée par l'équation habituelle ou encore par ses équations paramétriques au moyen de l'anomalie excentrique :

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

n'est pas une courbe de direction. Les cosinus directeurs de la tangente au point courant dépendent du radical :

(1) SALMON. — « Courbes planes » (traduction de O. CHEMIN, p. 150).
E. LAGUERRE. — « Sur les hypercycles », *C. R.* 20 mars 1882, t. XCIV, p. 779. *Œuvres de Laguerre*, t. II, 1905, p. 620-635.

« Sur la géométrie de direction », *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VIII, 1880, p. 196-208. *Œuvres de Laguerre*, t. II, 1905, p. 592.

P. APPELL. — « Exercices sur les courbes de direction ». *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. XV, 1896, pp. 491-495.

G. HUMBERT. — « Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications. *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 4^e série, t. III, 1887, p. 327-404 et t. V, 1889, p. 81-134.

« Sur les courbes algébriques planes rectifiables ». *Ibid.*, 4^e série, t. IV, 1888, p. 133-152.

$$\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Si l'on considère une courbe parallèle à l'ellipse, elle se compose de deux parties distinctes, qui correspondent respectivement aux deux déterminations du radical. L'équation rationnelle de la courbe parallèle, obtenue par élimination du radical, représente l'ensemble des deux parties de la courbe parallèle, qui sont ainsi analytiquement inséparables.

Pour une courbe de direction, au contraire, l'élément d'arc ds est défini en fonction du paramètre t de représentation par une équation de la forme :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [F(t)]^2 dt^2;$$

d'où :

$$\frac{ds}{dt} = F(t);$$

$F(t)$ est une fonction rationnelle de ce paramètre t . *La courbe de direction est rectifiable par fonctions élémentaires.*

Les deux parties d'une courbe parallèle à une courbe de direction correspondent aux deux sens de la normale au point courant. Ces deux parties sont analytiquement séparées, étant donc deux courbes distinctes.

Les exemples les plus simples sont ceux de la droite, du cercle, de la parabole, de la cubique :

$$x = t - \frac{t^3}{3}, \quad y = t^2,$$

pour laquelle :

$$\frac{ds}{dt} = 1 + t^2, \quad s = t + \frac{t^3}{3}.$$

P. APPELL a étendu cette notion de courbe de direction à certaines courbes transcendentes. La fonction $f(t)$ n'est plus une simple fonction rationnelle de t , mais une fonction transcendante uniforme. La cycloïde ordinaire, la chaînette ordinaire, la chaînette d'égale résistance sont ainsi, au sens de la généralisation de P. APPELL, des courbes transcendentes de direction.

Propriétés générales des courbes algébriques planes de direction.

1^o Il résulte de la définition donnée par LAGUERRE, que les courbes algébriques de direction sont représentées au point de vue tangentiel par une équation de la forme :

$$(u^2 + v^2) f^2(u, v) = F^2(u, v), \quad (1)$$

où $f(u, v)$, $F(u, v)$ sont deux fonctions rationnelles de u et v .

Au point de vue géométrique, ces courbes sont caractérisées par la propriété suivante qui résulte de l'expression de la distance d'un point à une droite :

La distance d'un point quelconque M de leur plan aux tangentes sont des fonctions rationnelles des coordonnées du point de contact.

2^o Une autre propriété importante des courbes de direction est la suivante :

La courbe inverse d'une courbe de direction est une autre courbe de direction.

Soit :

$$\Phi(x, y) = 0,$$

l'équation cartésienne d'une courbe (C). Considérons la courbe inverse (Γ) de celle-ci par rapport à l'origine. Les formules de transformation sont :

$$x = \frac{a^2 X}{X^2 + Y^2}, \quad y = \frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2},$$

et par suite la courbe inverse aura pour équation :

$$\Psi(X, Y) = \Phi\left(\frac{a^2 X}{X^2 + Y^2}, \frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2}\right) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} \Psi'_x &= \frac{a^2}{X^2 + Y^2} \left[(Y^2 - X^2) \Phi'_x - 2XY \Phi'_y \right], \\ \Psi'_y &= \frac{a^2}{X^2 + Y^2} \left[-2XY \Phi'_x + (X^2 - Y^2) \Phi'_y \right]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\Psi_x^2 + \Psi_y^2 = \frac{a^2 (X^2 - Y^2)^2}{(X^2 + Y^2)^4} \left[\Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y) \right].$$

Il en résulte que si $\Phi_x^2 + \Phi_y^2$ est le carré d'une fonction rationnelle de x, y , $\Psi_x^2 + \Psi_y^2$ est aussi une fonction rationnelle de X et de Y .

Remarques.

1° Si le centre d'inversion ne se trouve pas sur la courbe de direction (C), on voit que l'équation de la courbe (Γ) sera de la forme :

$$(X^2 + Y^2)^k = \Theta(X, Y),$$

$\Theta(X, Y)$ étant une fonction de degré inférieur à $2k$. (1).

2° Ces courbes (C) peuvent être considérées comme étant enveloppes des cercles :

$$uX + vY + w(X^2 + Y^2) = 0,$$

w étant une constante, u et v deux paramètres liés par la relation (1).

Représentation générale des courbes planes unicursales de directions.

Il résulte de ce que nous avons dit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe unicursale soit de direction est que l'expression $\frac{ds}{dt}$ soit une fonction rationnelle de t .

Une courbe unicursale de direction est donc rectifiable en termes finis.

(1) Ces courbes, dites à puissance constante ou isotropiques, ont été successivement étudiées par BRETON DE CHAMP et BRASSINNE (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1848), par JUEL et RETALI (*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1897), par J. PETERSEN, RUFFINI, et enfin par M. D'O-CAGNE dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1887).

Supposons alors que, α étant l'angle que fait avec l'axe ox la tangente au point courant d'une telle courbe, on ait :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t.$$

On pourra toujours poser :

$$\frac{ds}{dt} = (1 + t^2) F'''(t),$$

$F'''(t)$ étant une fonction rationnelle de t , dérivée troisième d'une fonction connue $F(t)$.

On a :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

D'où :

$$x = \int (1 - t^2) F'''(t) dt,$$

$$y = \int 2t F'''(t) dt.$$

L'intégration donne :

$$x = (1 - t^2)F''(t) + 2t F'(t) - 2F(t),$$

$$y = 2t F''(t) - 2F'(t).$$

CHAPITRE II

LES COURBES DE RIBAUCCOUR.

LES PARABOLOIQUES PRIMAIRES.

Les courbes de Ribaucour.

Dans ses recherches sur les surfaces à courbure moyenne constante (1882), RIBAUCCOUR a été amené à considérer les courbes planes dont le rayon de courbure au point courant (x, y) est proportionnel au segment orienté compris entre ce point et une droite fixe D .

Ces courbes, qui interviennent dans un grand nombre de questions, portent le nom de courbes de Ribaucour alors qu'en fait, elles avaient été découvertes et étudiées dès 1716 par Jean BERNOULLI (1).

(1) GOMÈS TEIXEIRA. — *Traité des courbes spéciales remarquables*, t. II, pp. 282 286.

O. BONNET. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 1844, t. IX, p. 97 et 217.

A. RIBAUCCOUR — Étude sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle. *Mémoires couronnés par l'Académie de Belgique*, 1880, t. XLIV.

GOMÈS TEIXEIRA — *Traité des courbes spéciales remarquables*. (Cöimbra, t. II, 1909, pp. 282 286)

GINO LORIA. — *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, teoria e storia, II, Milano 1930, pp. 156 167

E. TURRIÈRE — Courbes transcendentes et interscendantes. *L'Enseignement mathématique* (Genève), XIV^e année, mai 1912, pp. 209 214.

— Sur la classification et la construction des courbes transcendentes. *E. M.* XV^e Année, mars 1913, pp. 112 120.

— Sur les courbes de Ribaucour. *E.-M.* XV^e Année, novembre 1913, pp. 468-477.

Soit un système de coordonnées rectangulaires, et supposons que la droite D soit l'axe ox. La propriété géométrique énoncée, s'exprime, en tenant compte des relations : $R = kN$,

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad N = \frac{y}{\cos \alpha}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + y'^2},$$

par l'équation différentielle :

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = ky (1 + y'^2)^{1/2},$$

qu'on peut encore écrire :

$$1 + y'^2 = kyy''. \quad (1)$$

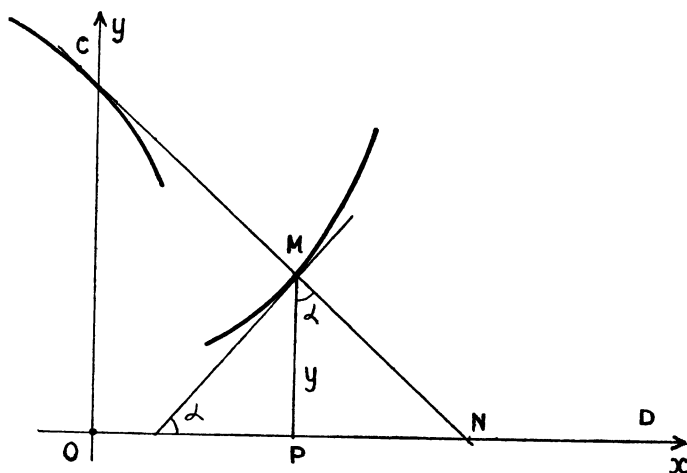


FIGURE 1.

En posant :

$$y'' = y' \cdot \frac{dy'}{dy},$$

cette équation prend la forme à variables séparées :

$$\frac{ky' dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy}{y}.$$

dont l'intégration donne :

$$1 + y'^2 = (cy)^{\frac{2}{k}}. \quad (1')$$

D'où :

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{k}} - 1}};$$

et enfin :

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{k}} - 1}}, \quad (2)$$

intégrale qui s'exprime par des fonctions élémentaires quand k est un nombre entier positif ou négatif.

On peut obtenir la représentation paramétrique de ces courbes intégrales, en partant de l'égalité :

$$R = \frac{ky}{\cos \alpha};$$

et remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\alpha} &= R \sin \alpha = ky \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \\ \frac{dx}{d\alpha} &= \cotg \alpha \frac{dy}{d\alpha}; \end{aligned}$$

on aura alors immédiatement :

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{1}{c} \cos^{-k} \alpha, \\ x &= -\frac{k}{c} \int \cos^{-k} \alpha \, d\alpha. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

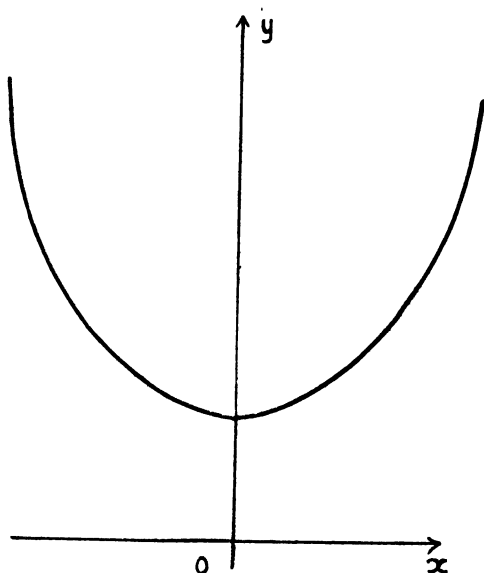
Si on utilise l'argument φ associé à l'angle α en posant :

$$\tg \frac{\alpha}{2} = \th \frac{\varphi}{2}, \quad \sin \varphi = \th \alpha, \quad \cos \alpha \cdot \ch \varphi = 1, \quad \tg \alpha = \sh \varphi,$$

$$\frac{d\alpha}{\cos \alpha} = d\varphi, \quad \frac{d\varphi}{\ch \varphi} = d\alpha,$$

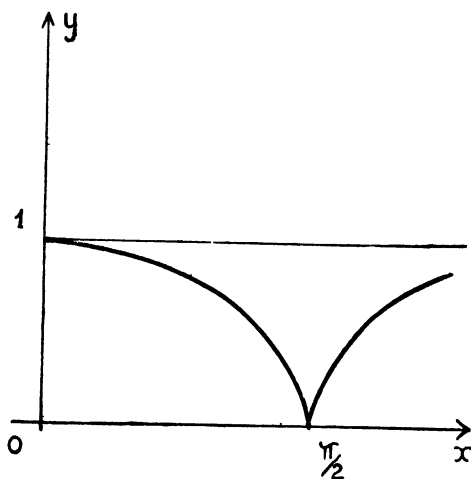
on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{k}{c} \int \operatorname{ch}^{\frac{k-1}{\varphi}} d\varphi, \\ y = \frac{1}{c} \operatorname{ch}^k \varphi. \end{array} \right. \quad (4)$$



Courbe de Ribaucour $K=4$

FIGURE 2.



Courbe de Ribaucour $K=-4$

FIGURE 3.

Les formules (3) sont particulièrement commodes quand k est négatif, tandis que les formules (4) conviennent mieux pour k positif.

La nature des courbes intégrales dépend essentiellement non seulement de la valeur absolue du nombre k mais de son signe, autrement dit de l'orientation relative des segments MC et MN. Ainsi, pour $k = 4$, par exemple, on a :

$$1 + y'^2 = 4yy'',$$

et :

$$\begin{cases} x = -4 \left(\operatorname{sh} \varphi + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 \varphi \right) , \\ y = \operatorname{ch}^4 \varphi . \end{cases}$$

La courbe est une quartique unicursale de type parabolique (figure 2).

L'équation de cette courbe est :

$$\left(\frac{9}{16} x^2 - 3y + 4 \right)^2 = y^3.$$

Au contraire, pour $k = -4$, on aura :

$$1 + y'^2 = -4yy'' ;$$

et :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8} [\sin 4\alpha + 8 \sin 2\alpha + 12\alpha] , \\ y = \cos^4 \alpha . \end{cases}$$

Les courbes intégrales sont du type cycloïdal (figure 3).

Equation intrinsèque des courbes de Ribaucour.

De la relation qui traduit la propriété géométrique

$$\frac{R}{k} = \frac{y}{\cos \alpha} ,$$

et en tenant compte des formules (3), on tire immédiatement :

$$R \cos^{k+1} \alpha = \frac{k}{c} ,$$

ou :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0. \quad (5)$$

On en déduit aussi :

$$R = R_0^{-\frac{1}{k}} (cy)^{1 + \frac{1}{k}} \quad (6)$$

La même remarque s'impose au sujet du signe k . Dans l'exemple que nous avons choisi, nous aurions :

pour $k = 4$:

$$\begin{cases} R \cos^5 \alpha = R_0, \\ \frac{R^4}{y^5} = C^{te}; \end{cases}$$

pour $k = -4$:

$$\begin{cases} R \cos^{-3} \alpha = R_0, \\ \frac{R^4}{y^3} = C^{te}. \end{cases}$$

La relation (6) montre que les courbes considérées ne peuvent avoir ni points de rebroussement ni points d'inflexion ailleurs que sur l'axe Ox .

Pour $k(k+1) > 0$, les courbes intégrales n'ont jamais de points d'inflexion; pour $k(k+1) < 0$, elles n'ont jamais de rebroussements.

D'autre part, de l'équation (1'), on tire la loi de rectification de ces courbes :

$$s = \int_a^b \frac{(cy)^{\frac{1}{k}} dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{k}} - 1}} ;$$

a et b étant les ordonnées des extrémités de l'arc considéré. L'intégrale écrite est donc exprimable par des fonctions élémentaires quand k est entier.

En dérivant la relation (6) on obtient :

$$dR = (1+k) (cy)^{\frac{1}{k}} dy ;$$

de sorte que :

$$ds = \frac{dR}{(k+1) \sqrt{\left(\frac{c}{k}\right)^{\frac{2}{k+1}} \cdot R^{\frac{2}{k+1}} - 1}} ,$$

ou, en posant $\frac{c}{k} = \frac{1}{\lambda}$:

$$s = \frac{1}{k+1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{2}{k+1}} - 1}}. \quad (7)$$

C'est l'équation intrinsèque des courbes de Ribaucour.

Par comparaison avec l'équation (1), on peut conclure que : quand une courbe de Ribaucour roule sans glissement sur une droite, le centre de courbure qui correspond au point de contact décrit une courbe affine d'une autre courbe de Ribaucour. La courbe de Mannheim d'une courbe de Ribaucour est ainsi affine d'une autre courbe de cette espèce.

Equation tangentielle. — L'équation de la tangente aux courbes (3) se présente sous la forme suivante :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{1}{c} \left(k \sin \alpha \int \cos^{\frac{-K}{c}} \alpha \, d\alpha - \cos^{\frac{-K+1}{c}} \alpha \right).$$

Exprimons que cette droite est identique à la suivante :

$$Ux - Vy = 1,$$

nous obtenons la condition :

$$\frac{U}{\sin \alpha} = \frac{V}{\cos \alpha} = \frac{c}{\left(k \sin \alpha \int \cos^{\frac{-K}{c}} \alpha \, d\alpha - \cos^{\frac{-K+1}{c}} \alpha \right)}.$$

Ensuite :

$$U^2 + V^2 = \frac{c^2}{\left(k \sin \alpha \int \cos^{\frac{-K}{c}} \alpha \, d\alpha - \cos^{\frac{-K+1}{c}} \alpha \right)^2}. \quad (8)$$

L'élimination dépend essentiellement de la fonction :

$$F(\alpha) = \int \cos^{\frac{-K}{c}} \alpha \, d\alpha,$$

qui peut aussi s'écrire, en employant l'argument associé φ :

$$\Phi(\varphi) = \int \text{ch}^{k-1} \varphi \, d\varphi.$$

L'élimination est impossible par fonctions élémentaires quand k n'est pas un nombre entier. D'autre part, les procédés élémentaires de quadrature montrent que :

1° Quand k est un entier négatif pair ou positif impair, l'intégration des fonctions $\cos^{-k}\alpha$ ou $\text{ch}^{k-1}\varphi$ donne une primitive qui contient nécessairement α ou φ . En effet, on a :

$$\begin{aligned} \cos^{-k}\alpha &= \cos^{2p}\alpha = \frac{1}{2^{2p-1}} \left[\cos 2p\alpha + 2p \cos(2p-2)\alpha + \dots + C_{2p}^{p+1} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} C_{2p}^p \right]. \\ \text{ch}^{k-1}\varphi &= \text{ch}^{2p}\varphi = \frac{1}{2^{2p-1}} \left[\text{ch} 2p\varphi + 2p \text{ch}(2p-2)\varphi + \dots + C_{2p}^{p+1} \text{ch} 2\varphi + \frac{1}{2} C_{2p}^p \right]. \end{aligned}$$

$$(k = -2p, \quad p > 0).$$

2° Par contre, quand k est entier négatif impair ou positif pair, on a immédiatement pour $-k = 2p + 1 > 0$:

$$\begin{aligned} \int \cos^{2p+1}\alpha \, d\alpha &= \int (1 - \sin^2\alpha)^p \cos\alpha \, d\alpha \\ &= \sin\alpha - \frac{p}{2p+1} \sin^{2p+1}\alpha + \dots + (-1)^m \frac{C_p^m}{2m+1} \sin^{2m+1}\alpha + (-1)^p \frac{\sin^{2p+1}\alpha}{2p+1} \\ &= P_{2p+1}(\sin\alpha); \end{aligned}$$

$P(\alpha)$ étant un polynôme impair de $\sin\alpha$, de degré $2p + 1$.

De même, si $k = 2p + 2 > 0$, on a :

$$\int \text{ch}^{k-1}\varphi \, d\varphi = P_{2p+1}(\text{sh}\varphi).$$

Si l'on reprend l'équation (8), on voit que le deuxième membre peut s'écrire :

a) $-k = 2p + 1 > 0$:

$$g(\sin\alpha, \cos\alpha) = \frac{c^2}{\left[k P_{p+1}(\sin^2\alpha) - \cos^2\alpha \right]^2},$$

$P_{p+1}(\sin^2\alpha)$ étant un polynôme de $\sin^2\alpha$, de degré $p + 1$.

Si alors on remplace $\sin^2 \alpha$ et $\cos^2 \alpha$, par :

$$\sin^2 \alpha = \frac{U^2}{U^2 + V^2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{V^2}{U^2 + V^2}, \quad (9)$$

on trouve :

$$g(\sin \alpha, \cos \alpha) = \frac{c^2}{\left[k P_{p+1} \left(\frac{U^2}{U^2 + V^2} \right) - \left(\frac{V^2}{U^2 + V^2} \right)^{p+1} \right]^2}.$$

L'équation (8) pourra s'écrire :

$$U^2 + V^2 = \frac{c^2}{\left[k P_{(p+1)} \left(\frac{U^2}{U^2 + V^2} \right) - \left(\frac{V^2}{U^2 + V^2} \right)^p \right]^2}.$$

b) $k = 2p + 2 > 0$:

$$g(\sin \alpha, \cos \alpha) = \frac{c^2}{\left[k \sin \alpha P_{2p+1}(\operatorname{sh} \varphi) - \operatorname{ch} \varphi^{2p+1} \right]^2}.$$

En remarquant que :

$$\operatorname{sh} \varphi = \operatorname{tang} \alpha = \frac{U}{V},$$

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\cos \alpha} = \pm \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{V},$$

on aura :

$$g(\sin \alpha, \cos \alpha) = \frac{c^2}{\left[k \cos \alpha P_{p+1}(\operatorname{sh}^2 \varphi) - \operatorname{ch} \varphi^{2p+1} \right]^2}.$$

Finalement, (8) s'écrit dans le cas de la représentation par fonctions hyperboliques :

$$U^2 + V^2 = \frac{c^2 \operatorname{ch}^2 \varphi}{\left[k P_{(p+1)}(\operatorname{sh}^2 \varphi) - \operatorname{ch} \varphi^{2p+2} \right]^2},$$

$$U^2 + V^2 = \frac{c^2 (U^2 + V^2)}{V^2 \left[k P_{p+1} \left(\frac{U^2}{V^2} \right) - \left(1 + \frac{U^2}{V^2} \right)^{p+1} \right]^2},$$

$$V \left[k P_{p+1} \left(\frac{U^2}{V^2} \right) - \left(1 + \frac{U^2}{V^2} \right)^{p+1} \right] = c. \quad (8'')$$

De toutes les courbes de Ribaucour définies par l'équation naturelle :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0,$$

seules sont des lignes de direction algébriques celles qui correspondent à des valeurs impaires et négatives de k ou à des valeurs paires et positives de k .

Exemple : $k = -3$; on trouve :

$$P(\sin \alpha) = \int \cos^3 \alpha \, d\alpha = \sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha,$$

ce qui donne :

$$U^2 + V^2 = \frac{c^2}{\left[-\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha \right]^2},$$

ou en tenant compte de (9) et en simplifiant :

$$c^2 (U^2 + V^2) = (2U^2 + V^2)^2.$$

La courbe correspondante est de 4^e classe.

Pour $k = 2$ (parabole), on trouve :

$$P(\operatorname{sh}^2 \varphi) = \operatorname{sh}^2 \varphi,$$

ce qui donne :

$$U^2 - V^2 = cV.$$

La parabole est une courbe de direction de 2^e classe.

Classification.

Reprenons l'équation (2). Pour k rationnel, les courbes correspondantes sont panalgébriques dans le sens de M. Gino LORIA, c'est-à-dire intégrales d'une équation différentielle rationnelle du premier ordre. D'après ce que nous avons vu, pour les valeurs impaires et négatives ou paires et positives de k , les courbes sont algébriques (et de direction). Lorsque k est irra-

tionnel, ces courbes cessent d'être panalgébriques : l'ordre minimum de l'équation différentielle rationnelle qui les admet comme intégrales est alors deux.

Dans des recherches de classification des courbes transcendentes et interscendantes (1912), M. TURRIÈRE avait montré que certaines transcendentes particulières peuvent être envisagées comme appartenant à une famille de courbes algébriques ou interscendantes qui dépendent d'un paramètre arbitraire. Un fait analogue se présente pour les courbes de Ribaucour : celles qui correspondent aux valeurs irrationnelles de k se placent naturellement entre les courbes panalgébriques de la famille et les courbes transcendentes du second ordre proprement dites.

Ajoutons enfin que pour la valeur zéro du paramètre k l'équation différentielle des courbes de Ribaucour se présente sous une forme illusoire. Nous verrons plus loin, ainsi que l'observait Ossian BONNET (1844), que pour ce cas singulier, la courbe de Ribaucour correspondante doit être considérée comme identique à la chaînette d'égale résistance ou chaînette de Coriolis.

Cette courbe doit donc prendre rang dans le tableau des courbes de Ribaucour, au titre de courbe singulière limite.

Dans ce qui suit nous faisons la classification des courbes de Ribaucour les plus simples, d'après l'équation naturelle :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0.$$

Indice k		
— 3	$R = R_0 \cos^2 \alpha$	développante d'astroïde
— 2	$= R_0 \cos \alpha$	cycloïde
— 1	$R = R_0$	cercle
— $\frac{1}{2}$	$R\sqrt{\cos \alpha} = R_0$	courbe élastique harmonique
0	$R \cos \alpha = R_0$	chaînette d'égale résistance
1	$R \cos^2 \alpha = R_0$	chaînette ordinaire
2	$R \cos^3 \alpha = R_0$	parabole

Ce sont les courbes de ce tableau que nous nommons « *paraboloïques primaires* » et que nous mettrons à la base de notre classification générale (à l'exclusion de l'élastique).

Nous étudierons spécialement la développante d'astroïde, la chaînette d'égale résistance et l'élastique harmonique, courbes moins usuelles que le cercle, la parabole, la cycloïde et la chaînette.

Nous nous bornerons à quelques lignes au sujet de la parabole, de la cycloïde et de la chaînette ordinaire en tant que variétés de courbes de Ribaucour, en renvoyant pour des études plus complètes à l'ouvrage magistral de Gomès Teixeira.

La parabole : $k = 2$.

Pour l'indice $k = 2$, l'équation intrinsèque correspondante s'écrit :

$$R \cos^3 \alpha = R_0,$$

ou en employant l'argument φ associé à α :

$$R = R_0 \operatorname{ch}^3 \varphi.$$

On en déduit :

$$\frac{dx}{d\varphi} = R_0 \operatorname{ch} \varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = R_0 \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi.$$

Par suite :

$$x = R_0 \operatorname{sh} \varphi,$$

$$y = \frac{R_0}{2} \operatorname{sh}^2 \varphi,$$

ce qui s'écrit aussi :

$$y = \frac{x^2}{2 R_0}.$$

La courbe de Ribaucour correspondante est donc une parabole d'axe oy et de paramètre R_0 .

La cycloïde ordinaire.

Pour la valeur -2 de la constante k , la courbe obtenue est la cycloïde ordinaire. On a en effet :

$$\begin{aligned} R &= R_0 \cos \alpha, \\ \frac{dx}{d\alpha} &= R_0 \cos^2 \alpha, & \frac{dy}{d\alpha} &= R_0 \cos \alpha \sin \alpha, \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{R_0}{4} [2\alpha + \sin 2\alpha], \\ y = \frac{R_0}{4} [1 - \cos 2\alpha]. \end{array} \right. & (20) \end{aligned}$$

La développée est une cycloïde égale renversée, décalée par rapport à la précédente de la longueur $\frac{\pi R_0}{4}$. Ses équations paramétriques sont :

$$\begin{aligned} X - \frac{\pi R_0}{4} &= \frac{R_0}{4} [2\beta + \sin 2\beta], \\ Y - \frac{R_0}{2} &= \frac{R_0}{4} [1 - \cos 2\beta], & \beta &= \frac{\pi}{2} - \alpha. \end{aligned}$$

L'arc de la cycloïde s'exprime simplement par :

$$s = R_0 \sin \alpha.$$

D'où l'équation intrinsèque bien connue :

$$s^2 + R^2 = R_0^2.$$

L'aire comprise entre un arc de cycloïde et la base ox a pour expression :

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^\alpha R_0^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha d\alpha, \\ 32A &= R_0^2 (4\alpha - \sin 4\alpha). \end{aligned}$$

La chaînette ordinaire : $k = 1$.

La courbe de Ribaucour : $k = 1$, correspondante à l'équation naturelle $R \cos^2 \alpha = R_0$, est la chaînette ordinaire, figure d'équilibre d'un fil homogène, inextensible, fixé à ses deux extrémités, abandonné à l'action de son propre poids.

En utilisant l'argument φ associé à α , on a :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi} &= R_0, & \frac{dy}{d\varphi} &= R_0 \operatorname{sh} \varphi, \\ x &= R_0 \varphi, & y &= R_0 \operatorname{ch} \varphi.\end{aligned}$$

La courbe élastique harmonique.

On sait que l'équation :

$$Ry = \text{constante} = 2 R_0^2,$$

caractérise la courbe élastique de Jacques Bernoulli.

L'équation différentielle est du second ordre et affecte différentes formes.

Parmi ces courbes, il en est une qui se trouve être une courbe de Ribaucour particulière. La condition qui sert de définition à l'élastique générale peut être mise sous la forme :

$$y \frac{dy}{d\alpha} = - 2 R_0^2 \sin \alpha ;$$

d'où par une première intégration :

$$y^2 = 4 R_0^2 (\cos \alpha + \text{constante}).$$

En prenant la constante d'intégration nulle, on obtient une élastique spéciale :

$$\begin{aligned}y &= 2 R_0 \sqrt{\cos \alpha}, \\ R \sqrt{\cos \alpha} &= R_0.\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}x &= R_0 \int \sqrt{\cos \alpha} d\alpha, \\ x &= \pm \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{16 R_0^4 - y^4}}.\end{aligned}$$

Pour α multiple impair de $\pi/2$, la courbe présente des inflexions. C'est à ce titre qu'elle doit son importance comme « radioïde »

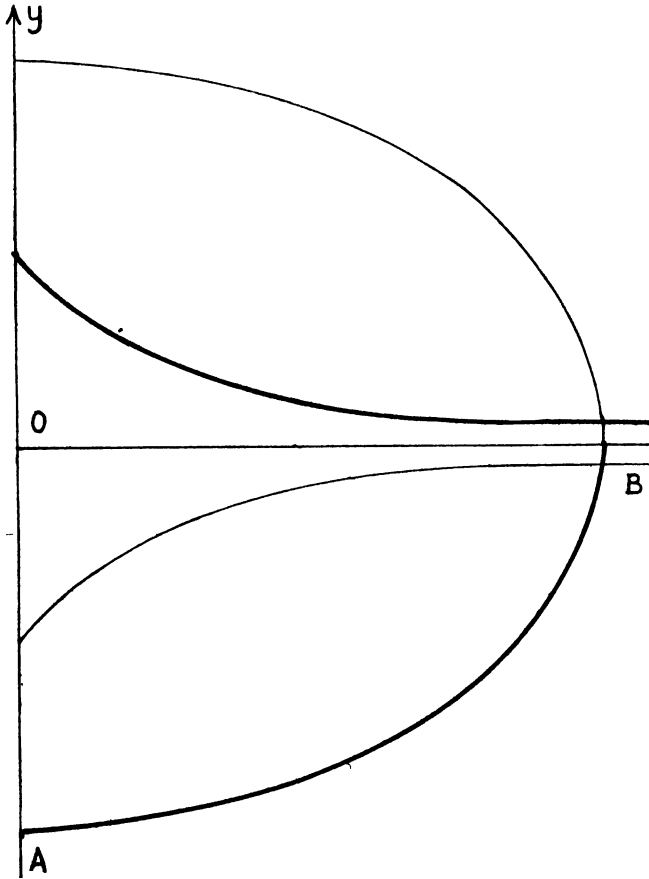


FIGURE 4.

aux abscisses », dans l'application aux raccordements des voies ferrées et routes (1).

(1) HOURFAR (Taghi). — *Exposition de recherches de M. E. TURRIÈRE sur la théorie des virages dans les routes modernes et étude générale des radioïdes*. Montpellier (thèse n° 29, Sciences), 1^{er} juin 1940, p. 226.

Au point B, le rayon de courbure est donc infini. En prenant une arche complète en courbe élastique, le rayon de courbure est infiniment grand aux naissances ; non seulement les retombées seraient verticales, mais présenteraient des portions véritablement planes. La cycloïde, le cercle ou l'ellipse et l'élastique harmonique présentent ainsi des différences notables de courbure, bien que leurs retombées soient verticales.

La détermination de la courbe élastique générale s'effectue par les intégrales elliptiques ; dans le cas spécial, les intégrales sont d'une nature particulière, celle des fonctions elliptiques du cas harmonique, ou encore des *intégrales lemniscatiques* de Gauss (rectification de la lemniscate). Pour cette raison, la courbe spéciale peut être nommée *l'élastique harmonique*.

Nous observons que l'élastique harmonique est identique à la courbe de Ribaucour d'indice $k = -\frac{1}{2}$. Elle pourrait donc être utilisée comme courbe d'arche ; elle est comprise entre le cercle et la chaînette d'égale résistance, dans l'ordre que nous avons fixé pour la succession des courbes de Ribaucour.

Malgré le haut intérêt qu'offre la courbe élastique pour l'ingénieur, nous ne pensons pas devoir la retenir pour nos calculs pratiques ; puisque nous avons un vaste choix entre des courbes simplement représentables, il nous paraît superflu d'introduire des transcendentes elliptiques. L'objet de notre étude est précisément de simplifier les calculs en faisant appel à des fonctions élémentaires. D'ailleurs le grand mémoire d'Yvon VILLARCEAU sur les arches contient de longs développements avec emploi de fonctions elliptiques et courbe élastique.

Observons enfin que l'arc de l'élastique harmonique s'exprime par les mêmes intégrales elliptiques de Gauss :

$$s = R_0 \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}, \quad s = 4 R_0^2 \int \frac{dy}{\sqrt{16 R_0^4 - y^4}}.$$

L'aire de la courbe s'exprime élémentairement par :

$$A = 2 R_0^2 \int_0^{\alpha} \cos \alpha d\alpha = 2 R_0^2 \sin \alpha.$$

CHAPITRE III

LES INTRADOS EN CHAINETTE ET PROJECTION DE CHAINETTE

Prise sous la forme :

$$y = m \operatorname{ch} \frac{x}{m},$$

la chaînette admet oy comme axe et ox comme directrice, avec une infinité de foyers sur l'axe.

Toutes les chaînettes obtenues en faisant varier arbitrairement le paramètre m sont homothétiques par rapport à O. Elles admettent deux tangentes communes issues de ce point et définies par la condition :

$$\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx},$$

c'est-à-dire, dans la représentation :

$$x = mu, \quad y = m \operatorname{ch} u, \\ \operatorname{coth} u = u.$$

STIELTJES (1) a donné pour racine de cette équation transcendante :

$$u = 1,199.678.640.257.734.$$

(1) Ch. HERMITE — *Cours lithographié*, 4^e édit., p 185.
Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, t I, p 434. (lettre de Stieltjes à Hermite, du 13 mai 1889).

D'où :

$$\text{shu} = 1,508.89, \quad \text{chu} = 1,810.18.$$

STIRLING a montré l'équilibre d'un système de sphères massives identiques, se soutenant sans frottement, lorsque leurs centres sont sur une chaînette renversée.

En effet, soit O la sphère centrale. Le système de forces appliquées se réduit au poids $\vec{OP}$ et aux réactions égales $\vec{OQ}$ et $\vec{OQ'}$ et :

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{OQ'}.$$

Si l'on considère la sphère O_1 adjacente à la précédente, on voit que le poids $\vec{O_1P_1}$, se décompose en deux réactions qui ne sont plus égales ; mais l'une d'elles est égale à $-\vec{OQ}$.

De proche en proche on établit que les composantes horizontales des réactions sont égales (T_0). Quant aux composantes verticales, elles s'accroissent chaque fois de $P = \vec{OP}$; ce sont les termes d'une progression arithmétique :

$$\frac{1}{2} P, \quad \frac{3}{2} P, \quad \frac{5}{2} P \dots \frac{2n-1}{2} P, \dots$$

Si l'on considère deux sphères consécutives O_{n-1} , O_n , la direction de la ligne des centres fait avec l'horizontale un angle défini par :

$$\text{tg } \overbrace{O_{n-1} O_n} \overbrace{O_n H} = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{P}{T_0}.$$

Supposons maintenant les sphères réduites à des masses ponctuelles situées sur la courbe décrite par leurs centres, on aura à la limite :

$$\limite \frac{2n-1}{2} P = sp, \quad T_0 = mp,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{m},$$

équation différentielle qui définit une chaînette ordinaire de paramètre m à une translation près.

L'abbé BOSSUT a vérifié expérimentalement cette proposition.

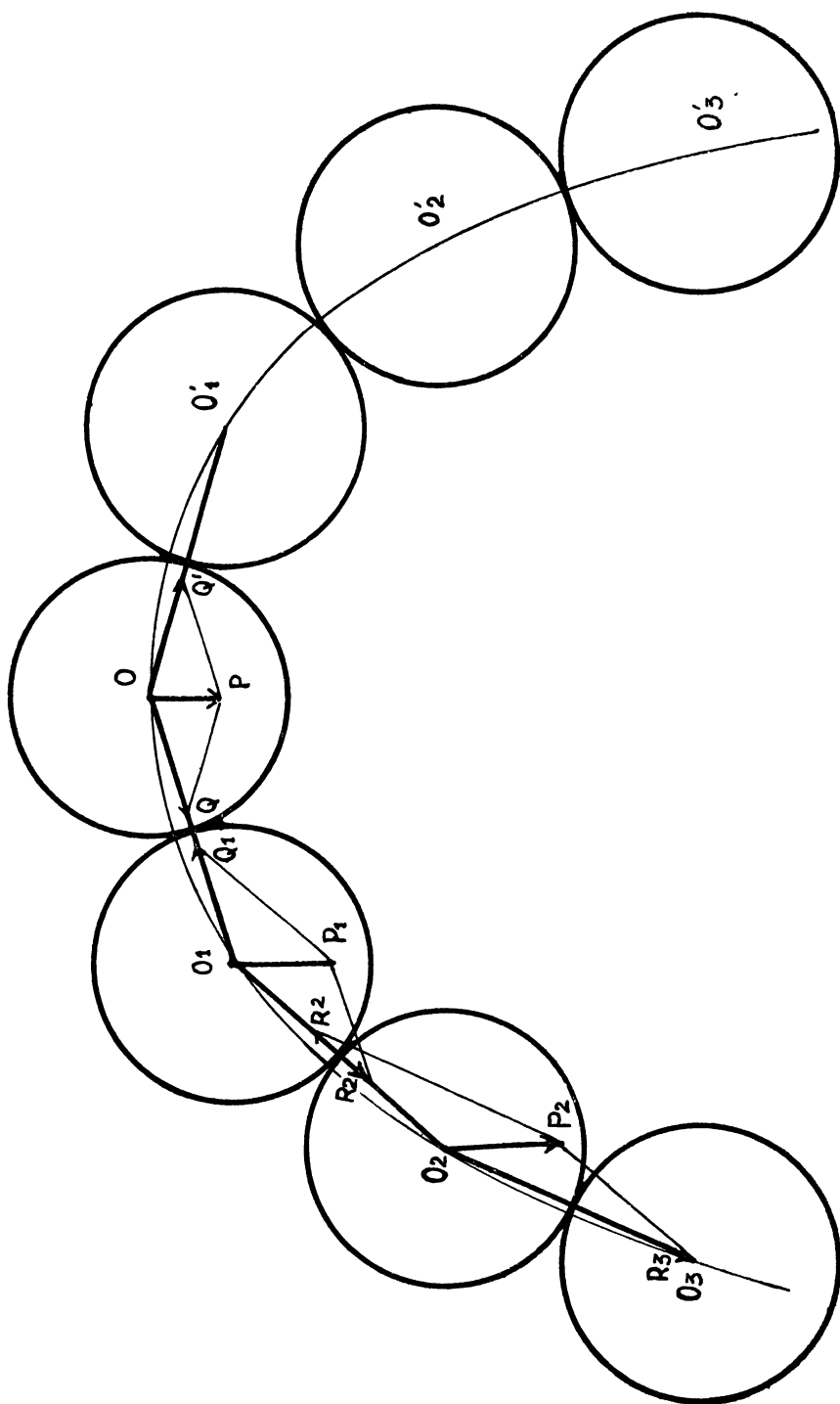


FIGURE 5.

La chaînette projetée ou caténoïde.

La chaînette ordinaire, en tant que courbe de voûte, a été considérée par STIRLING, COUPLET (1731), BOSSUT (1774), puis par D. GILBERT (1821) comme courbe de pont suspendu.

Mais c'est surtout une transformée simple de la chaînette proprement dite dont l'emploi a été réalisé, afin de disposer d'un paramètre arbitraire autre que celui de similitude. C'est donc la caténoïde (dénomination de LEGAY), courbe affine de la chaînette, qui a donné lieu aux recherches les plus intéressantes dans ce domaine de l'application aux voûtes.

A la suite de recherches de DENFERT-ROCHEREAU (1859), la caténoïde a été utilisée effectivement par TOURTAY (1888) dans le pont Boucicaut, sur la Saône, à Verjux (Saône-et-Loire) et par LEGAY à Orléans, pour le Nouveau pont sur la Loire (1900). Elle a été l'objet d'études comme courbe de voûtes de RANKINE (1861), d'ALEXANDER et THOMSON (1888), EMERY (1887), HEINZERLING (1869).

HEINZERLING a étudié les intégrales de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{n^2},$$

sous le nom de *clinoïdes* ; leur équation générale est :

$$y = Ae^{\frac{x}{n}} + Be^{-\frac{x}{n}}.$$

Il les a distinguées en *cataclinoïdes* et *anaclinoïdes*. Parmi elles se trouvent les *ménoclınoïdes* d'équation :

$$y = m \operatorname{ch} \frac{x}{n},$$

et les *trepsclinoïdes* :

$$y = m \operatorname{sh} \frac{x}{n}.$$

(1) La dénomination de *caténoïde* appliquée à la déformée de la chaînette par affinité est due à LEGAY. En fait, cette dénomination prête à confusion, le terme caténoïde étant consacré à la surface minima de révolution engendrée par la rotation de la chaînette proprement dite autour de sa base.

La caténoïde est la courbe affine de la chaînette ordinaire ; ses équations réduites sont :

$$\begin{aligned}x &= nu , \\ y &= m \operatorname{ch} u .\end{aligned}$$

La courbe dépend de deux paramètres m et n . Son équation est :

$$\frac{y}{m} = \operatorname{ch} \frac{x}{n} .$$

L'angle α que fait la tangente au point courant M avec l'axe ox est lié à l'argument u par :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \operatorname{sh} u .$$

Comme l'ellipse est projection du cercle, la caténoïde est la projection sur un plan de la chaînette ordinaire. Deux cas sont à distinguer :

1° $n > m$. — L'intersection des plans des deux courbes est parallèle à la base ox de la chaînette ; l'angle de projection ω est défini par la formule :

$$\cos \omega = \frac{m}{n} .$$

2° $n < m$. — L'intersection est parallèle à l'axe de symétrie oy de la chaînette et on a :

$$\cos \omega = \frac{n}{m} .$$

Les caténoïdes du pont Boucicaut et du pont d'Orléans rentrent toutes les deux dans le premier cas ($n > m$). Les angles de projection ont alors pour valeurs :

$$\text{Pont Boucicaut : } \frac{m}{n} = 0,193.236, \quad \omega = 78^{\circ}51'30'' ;$$

$$\text{Pont d'Orléans : } \frac{m}{n} = 0,386.703, \quad \omega = 67^{\circ}15'10'' .$$

Etude du rayon de courbure. Jarrets.

L'expression du rayon de courbure est :

$$R = \frac{(n^2 + m^2 \operatorname{sh}^2 u)^{3/2}}{mn \operatorname{ch} u}, \quad (1)$$

ou :

$$R = \frac{(y^2 + n^2 - m^2)^{3/2}}{ny}, \quad \frac{n^2}{R \cos^2 \alpha} = \sqrt{(m^2 - n^2) \cos^2 \alpha + n^2}.$$

Comme la chaînette ordinaire, la caténoïde n'a ni rebroussement ni inflexion.

On tire :

$$\frac{dR}{du} = \frac{\operatorname{sh} u (3m^2 - n^2 + 2m^2 \operatorname{sh}^2 u)}{mn \operatorname{ch} u} \sqrt{n^2 - m^2 \operatorname{sh}^2 u};$$

$$\frac{dR}{dy} = \frac{2y^2 + m^2 - n^2}{ny^2} \sqrt{y^2 + n^2 - m^2};$$

la dérivée $\frac{dR}{dy}$ s'annule en changeant de signe pour :

$$y^2 = \frac{n^2 - m^2}{2},$$

c'est-à-dire pour :

$$\operatorname{sh}^2 u = \frac{n^2 - 3m^2}{2m^2}.$$

D'où la discussion suivante relative aux *jarrets* ou *nez* de cette courbe :

a) $n < m\sqrt{3}$. — La caténoïde correspondante n'a pas de jarrets. Le rayon de courbure croît constamment de la valeur $\frac{n^2}{m}$ à l'infini.

b) $n = m\sqrt{3}$. — Les jarrets sont confondus avec le sommet A situé sur l'axe de symétrie oy. Le rayon de courbure croît encore de la valeur $\frac{n^2}{m} = 3m$ à l'infini.

c) $n > m\sqrt{3}$. — A partir de cette valeur, la caténoïde possède deux jarrets symétriquement situés par rapport à oy. En module, le rayon décroît constamment de la valeur $\frac{n^2}{m}$ à la valeur minimum $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{n^2 - m^2}{n} = \frac{3\sqrt{3}}{n} y^2$, y étant l'ordonnée du jarret, puis augmente indéfiniment.

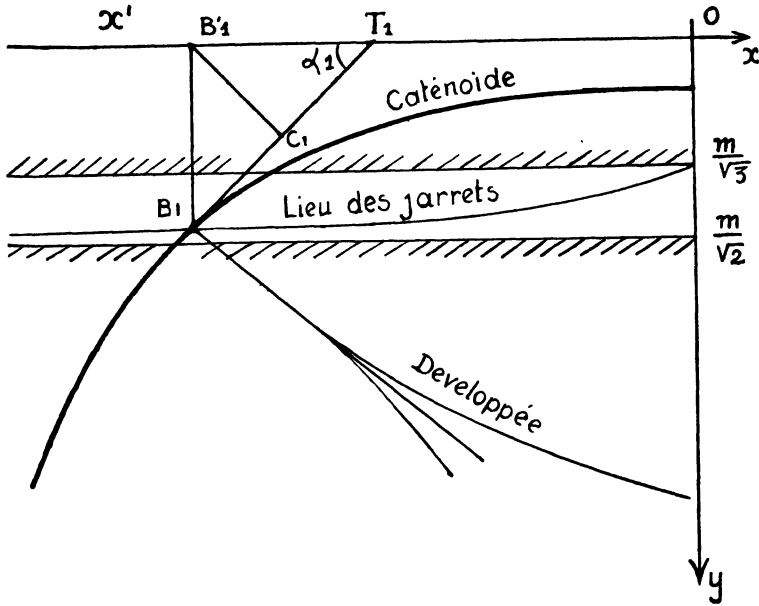


FIGURE 6.

Il faut observer que les jarrets ne peuvent se présenter que dans le seul cas où le plan de projection est parallèle à la base de la chaînette ; et que cet angle ω doit être supérieur à une limite ω_1 , définie par la condition :

$$\cos \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \cos 2\omega_1 = -\frac{1}{3} ;$$

il faut donc que :

$$\omega > 54^{\circ}44' ,$$

ce qui est le cas des exemples que nous étudierons.

Dans un mémoire publié dans « Transaction of the Royal Irish Academy » du 16 mars 1888, ALEXANDER et THOMSON ont consacré une longue étude à la caténoïde qu'ils appelaient « chaînette à deux nez ».

Passant de l'étude géométrique à l'application, les auteurs montraient que la caténoïde pouvait être considérée « pratiquement » comme la figure d'équilibre d'un fil homogène et inextensible soumis à une force verticale proportionnelle à l'aire comprise entre deux ordonnées verticales infiniment voisines, une droite horizontale fixe et un arc de cercle. Cette intéressante proposition basée sur les travaux du docteur HUTTON (Théorie pratique et architecture des ponts, 1856), justifiait en quelque sorte l'emploi des intrados circulaires, pour lesquels la courbe de pression pouvait être assimilée à une caténoïde.

Parmi les nombreuses propriétés géométriques de la caténoïde on peut remarquer celle que traduit la relation :

$$\frac{Ry^4}{N^3} = \text{constante} ,$$

(entre l'ordonnée y , le rayon de courbure R et le segment N de normale compris entre le point courant et l'axe ox) ; cette propriété est commune à plusieurs courbes planes remarquables (sinusoïde, logarithmique, chaînette ordinaire, etc.).

Pour la caténoïde, en effet :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{m^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 u = \frac{y^2 - m^2}{n^2} .$$

D'où :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{y^2 + n^2 - m^2}{n^2} .$$

D'autre part :

$$N = y \frac{1}{\cos \alpha} , \quad R = \frac{(y^2 + n^2 - m^2)^{3/2}}{ny} .$$

Donc :

$$\frac{Ry^4}{N^3} = R y \cos^3 \alpha = n^2 .$$

Considérons d'autre part une caténoïde à jarrets ($n > m\sqrt{3}$).
Au jarret B_1 on a :

$$y_1^2 = \frac{n^2 - m^2}{2},$$

et par suite :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_1} = \frac{3y_1^2}{n^2}.$$

Soient $B_1 T_1$, la tangente en B_1 et B'_1 le pied de l'ordonnée de ce point. Si C_1 est le point d'intersection de la tangente $B_1 T_1$ avec la perpendiculaire menée de B'_1 à cette droite, on a :

$$B'_1 C_1^2 = y_1^2 \cos \alpha_1^2 = \frac{n^2}{3}.$$

La longueur du segment $B'_1 C_1$ ne dépend donc que du paramètre n .

La question du jarret a été examinée par M. TURRIÈRE à l'occasion de ses recherches sur le problème de la route moderne ; il nous suffira de rappeler que dès 1702 DE LA HIRE condamnait ce défaut que « les ouvriers appellent le jarret et qui est précisément blâmé dans l'architecture ». Dans son exposé des travaux de M. TURRIÈRE, M. HOURFAR — en sa qualité d'Iranien — a rappelé les observations de l'Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées DIEULAFOY sur les anciens ponts de son pays et a souligné le caractère artistique de l'ogive persane.

M. TURRIÈRE, tout en condamnant la présence d'un jarret sur le tracé d'une route, recommande au contraire d'en introduire un au voisinage du point de raccordement de l'arc de courbe de transition et de la partie circulaire d'un virage : c'est *l'arrivée en jarret* de la courbe de transition.

Par corrélation, il y a lieu, dans le problème de l'intrados, de recommander la *retombée en jarrets* : nous soulignerons que c'était précisément le cas du nouveau pont d'Orléans dont l'intrados était affecté de jarrets, légèrement au-dessus des naissances. Nous utiliserons aussi le principe de la retombée en jarrets pour une nouvelle solution théorique du problème posé par le pont de Valence.

L'Ellipse surosculatrice à la chaînette et à la caténoïde.

D'une manière générale, Maurice D'OCAGNE a montré que toute courbe transcendante, admettant oy comme axe de symétrie et dont l'ordonnée y possède un développement en série de la forme :

$$y = \frac{\alpha_2}{2!} \frac{x^2}{p} + \frac{\alpha_4}{4!} \frac{x^4}{p^3} + \dots + \frac{\alpha_{2n}}{2n!} \frac{x^{2n}}{p^{n-1}} + \dots,$$

a pour conique surosculatrice à l'origine, l'ellipse :

$$3 \alpha_2^3 x^2 + \alpha_4 y^2 - 6 p \alpha_2^2 y = 0.$$

Pour la chaînette d'égale résistance, on a :

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_4 = 2,$$

pour la cycloïde :

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{16}.$$

Pour la chaînette, on a :

$$\alpha_2 = \alpha_4 = 1;$$

de sorte que la chaînette :

$$y = \cosh x,$$

admet comme conique surosculatrice au sommet l'ellipse :

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

La chaînette est comprise entre cette ellipse et la parabole osculatrice au sommet :

$$y_2 = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Voici quelques valeurs comparatives :

$$x = \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 1,127.70 \\ y = 1,127.63 \\ y_2 = 1,125.00 \end{array} \right.$$

$$x = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 1,550.51 \\ y = 1,543.08 \\ y_2 = 1,500.00 \end{array} \right. \quad x = \sqrt{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 4 \\ y = 2,914.20 \\ y_2 = 2,500.00 \end{array} \right.$$

Les écarts deviennent rapidement sensibles dès que x dépasse la valeur 1.

La caténoïde :

$$y = m \left(\operatorname{ch} \frac{x}{n} - 1 \right),$$

peut être elle-même, en première approximation, remplacée par l'ellipse surosculatrice :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{3 n^2} + \frac{(y_1 - 3 m)^2}{9 m^2} &= 1, \\ x &= n \sqrt{3} \sin u, \\ y_1 &= 3m (1 - \cos u). \end{aligned}$$

Mettons en évidence le développement en série :

$$y = m \left(\operatorname{ch} \frac{x}{n} - 1 \right) = m \left[\frac{1}{2!} \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{n^4} + \dots \right].$$

Ici donc :

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \frac{m}{n}, \quad p = n.$$

L'équation de la parabole osculatrice est alors :

$$y_2 = \frac{m}{2} \frac{x^2}{n^2}.$$

Pour fixer les idées, on peut prendre l'exemple du Pont Boucicaut.

x	2 ^m .	4 ^m	6 ^m	8 ^m	10 ^m	12 ^m	14 ^m	16 ^m	18 ^m	20 ^m
y ₁	0 ^m ,037	0 ^m ,143	0 ^m ,344	0 ^m ,634	1 ^m ,011	1 ^m ,534	2 ^m ,221	3 ^m ,250	5 ^m ,620	
y	0 ^m ,037	0 ^m ,150	0 ^m ,343	0 ^m ,623	1 ^m ,001	1 ^m ,490	2 ^m ,109	2 ^m ,880	3 ^m ,832	5 ^m
y ₂	0 ^m ,037	0 ^m ,148	0 ^m ,333	0 ^m ,592	0 ^m ,927	1 ^m ,333	1 ^m ,820	2 ^m ,382	3 ^m ,000	3 ^m ,710

L'ellipse osculatrice coupe la caténoïde au voisinage du point d'abscisse 6 m., à partir duquel elle restera toujours en dessous de la chaînette projetée. Jusqu'au point d'abscisse 14 m. environ la différence entre les deux ordonnées ne dépasse pas 12 cm., les deux courbes sont très voisines. L'écart augmente très rapidement à partir de cette valeur.

Il y a lieu de remarquer que la parabole reste toujours au-dessus de la caténoïde, tandis qu'elle coupe l'ellipse au voisinage du point d'abscisse 4 m.

La cubique de P. Séjourné.

P. SÉJOURNÉ propose de remplacer la caténoïde par un arc de la courbe algébrique :

$$y_1 = \frac{6 \text{ m } x^2}{12 n^2 - x^2},$$

qui dans sa partie utile est très voisine de la chaînette projetée.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y}{m} &= \frac{6u^2}{12 - u^2} - (chu - 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{1 - \frac{u^2}{12}} - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + \dots \right) \\ &= \frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{u^2}{12} + \frac{u^4}{144} + \dots \right) - \frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{u^2}{12} + \frac{u^4}{360} + \dots \right). \end{aligned}$$

Par suite :

$$0 < \frac{y_1 - y}{m} < \frac{u^6}{480}.$$

Pour fixer les idées, dans l'application au pont Boucicaut, on a :

$$\begin{aligned} 2a &= 40 \text{ m.} , & f &= 5 \text{ m.} \\ m &= 2 \text{ m. } 012 , & n &= 10 \text{ m. } 146, \\ y_1 &= 5 \text{ m. } 80 , & y_1 - y &= 80 \text{ cm. environ.} \end{aligned}$$

Si α_1 désigne alors l'angle de la tangente au point d'abscisse x de la cubique avec l'axe ox , la pente a pour expression :

$$\frac{dy_1}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{mn^2 x}{\left(n^2 - \frac{x^2}{12}\right)^2} = \frac{m}{n} \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{12}\right)^2}.$$

Or :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n} \operatorname{sh} u.$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_1} &= \frac{\operatorname{sh} u}{u} \left(1 - \frac{u^2}{12}\right)^2 = \left(1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} + \dots\right) \left(1 - \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{144} + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{u^4}{80}. \end{aligned}$$

Pour le pont Boucicaut :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= 0,644.8, & \alpha &= 32^{\circ} 49', \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= 0,771.8, & \alpha_1 &= 37^{\circ} 38'. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{mn^2 \left(n^2 + x^{\frac{3}{4}}\right)}{\left(n^2 - \frac{x^2}{12}\right)^3} = \frac{m}{n^2} \frac{1 + \frac{u^2}{12}}{\left(1 - \frac{u^2}{12}\right)^3} = \frac{1}{R_1 \cos^3 \alpha_1}.$$

Or, pour la caténoïde :

$$\frac{1}{R \cos^3 \alpha} = \frac{m}{n^2} \operatorname{ch} u.$$

Donc :

$$\frac{R_1}{R} \left(\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha}\right)^3 = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{12}\right)^3}{1 + \frac{u^2}{4}} \left(1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \dots\right) = 1 - \frac{u^4}{16}.$$

Finalement, pour le pont Boucicaut :

$$R = 26 \text{ m. } 067, \quad R_1 = 18 \text{ m. } 910.$$

CHAPITRE IV

LA CHAINETTE D'ÉGALE RÉSISTANCE

Pour la valeur nulle de l'indice k , la propriété géométrique exprimée par la relation :

$$\frac{R}{k} = \frac{y}{\cos \alpha} ,$$

s'évanouit. Toutefois la relation (5) subsiste :

$$R \cos \alpha = R_0 . \quad (1)$$

La courbe correspondante n'est pas à proprement parler une courbe de Ribaucour ; elle fait partie de la famille comme *variété limite*. Considérons, avec M. TURRIÈRE, la famille suivante des courbes de Ribaucour :

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{(1 + ky)^{\frac{2}{k}} - 1}} ,$$

y_0 étant une constante, k le paramètre indice de la courbe de Ribaucour ; supposons que k varie d'une façon continue au voisinage de zéro, en prenant toute valeur possible rationnelle ou non, de telle sorte que la famille des courbes de Ribaucour comprenne des courbes des deux premiers ordres de transcendance.

Dans ces conditions, la famille envisagée admet une courbe limite quand k tend vers zéro et celle-ci sera représentée par l'équation :

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = \text{arc cos } e^{-y} - \text{arc cos } e^{-y_0}.$$

Par un changement convenable d'origine, l'équation peut être réduite à la forme :

$$x = \text{arc cos } e^{-y},$$

qui montre que la courbe limite est la *chaînette d'égale résistance* :

$$e^y \cos x = 1, \quad (2)$$

courbe du second ordre de transcendance identique à celle définie par l'équation (1) puisqu'on déduit de celle-ci :

$$\frac{dx}{d\alpha} = R \cos \alpha = R_0,$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = R_0 \operatorname{tg} \alpha,$$

et par suite :

$$x = R_0 \alpha,$$

$$y = -R_0 L \left| \cos \alpha \right|,$$

ou :

$$y = -R_0 L \left| \cos \frac{x}{R_0} \right|. \quad (3)$$

La dénomination de la chaînette d'égale résistance est due à Davies GILBERT qui a rencontré cette courbe dans ses recherches sur l'équilibre d'un fil pesant, flexible et inextensible, attaché par ses deux extrémités quand la densité ou l'épaisseur varient de manière que la résistance à la rupture reste constante en tous les points. Ce travail, qui se rapporte à la construction des ponts-route de Menai, reliant l'île d'Anglesey à l'Angleterre, inséré aux *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* en 1826, a été suivi d'une note publiée en 1826 par BOBILLIER et FINCK et concernant les mêmes recherches appli-

quées aux ponts suspendus. Plus tard GUDERMANN l'avait nommée *courbe longitudinale* (1830). Mentionnée de nouveau par CORIOLIS dans une note insérée dans le *Journal de Liouville* (t. I, 1836, p. 75), puis par LEBERT qui la désignait sous le nom de *paraboloïque particulière*, cette courbe paraît avoir été primitivement signalée par LEGENDRE dans son *Traité des fonc-*

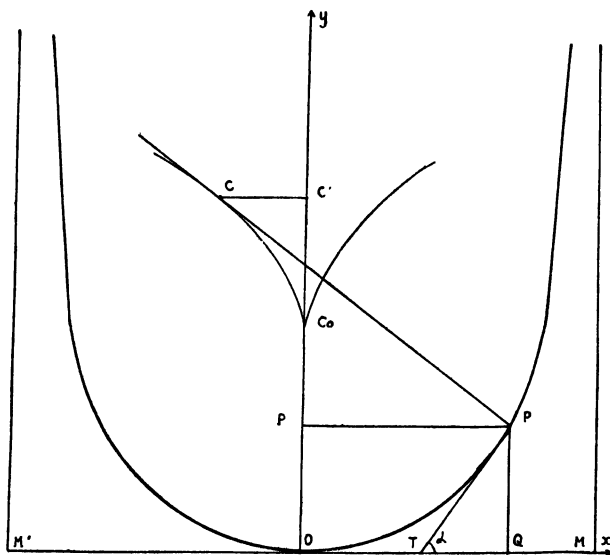


FIGURE 7.

tions elliptiques. On la voit apparaître aussi dans « la voûte sans surcharge » d'Y. VILLARCEAU. Ajoutons enfin qu'elle est mentionnée par M. AURIC dans sa note sur la poussée dans les voûtes de 1901 (p. 251) ; et par M. D'OCAGNE (1910).

Enfin, il y a lieu de remarquer qu'elle est identique à la *courbe dont la projection verticale du rayon de courbure est constante*, propriété qui se déduit immédiatement de l'équation (1) écrite en haut et, réciproquement, de l'intégration de cette équation.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. D'autre part x admet la période $2\pi R_0$; il suffit donc de faire varier α de 0 à $\pi/2$ pour avoir une des branches. Les autres branches s'en déduisent par translations.

Chaque branche de la chaînette d'égale résistance a la forme indiquée dans la figure (7).

La courbe ne possède pas de point d'inflexion.

La concavité est dirigée du côté des $y > 0$. Il n'y a pas de jarret à distance finie.

La développée de la courbe a pour équations :

$$\begin{aligned} X &= x - R \sin \alpha = R_0 (\alpha - \operatorname{tg} \alpha) , \\ Y &= y + R \cos \alpha = - R_0 (L + \cos \alpha - 1) . \end{aligned}$$

C'est une courbe symétrique par rapport à l'axe oy . D'après la théorie connue des développées son rayon de courbure est donné par :

$$R' = \frac{dR}{d\alpha} = R_0 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} .$$

Une branche de la développée part donc tangentiellement à oy du point ($x = 0$, $y = R_0$) ; elle est parabolique dans la direction de l'axe des abscisses et la concavité est constamment dirigée vers les $y < 0$.

La rectification de la chaînette d'égale résistance se fait très simplement en employant l'argument φ associé à α , d'après :

$$ds = R d\alpha = \frac{R_0 d\alpha}{\cos \alpha} = R_0 d\varphi .$$

D'où :

$$s = R_0 \varphi . \quad (4)$$

On peut exprimer φ en fonction de α . On a en effet :

$$e^{\varphi} = \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi = \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha ,$$

$$\begin{aligned} e^{\varphi} &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \\ &= \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Par suite :

$$\varphi = L \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

et :

$$s = R_0 L \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad \operatorname{ch} \frac{s}{R_0} \cdot \cos \alpha = 1.$$

Si on compare entre elles les relations (1) et (4) on peut écrire immédiatement :

$$R = R_0 \operatorname{ch} \frac{s}{R_0}.$$

C'est l'équation intrinsèque de la chaînette d'égale résistance ; elle établit une relation entre cette chaînette et la chaînette ordinaire : quand la chaînette d'égale résistance roule sur une droite, le centre de courbure correspondant au point de contact décrit une chaînette ordinaire. (La courbe Mannheim de la chaînette d'égale résistance est la chaînette ordinaire.)

L'aire comprise entre l'arc de courbe OP, l'axe des abscisses et la perpendiculaire PQ sera donnée par :

$$A = \int_0^x y \, dx = R_0^2 \int_0^{\alpha} L (\cos \alpha) \, d\alpha,$$

intégrale qui ne peut pas s'exprimer par des fonctions élémentaires. On peut se proposer de calculer l'aire comprise entre la courbe entière, les asymptotes et l'axe des abscisses :

$$\Sigma = R_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} L (\cos \alpha) \, d\alpha.$$

L'intégrale est connue :

$$\int_0^{\pi} 2 \operatorname{L}(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Log} 2,$$

expression due à EULER (1).

(1) Rappelons la méthode d'intégration suivante, qui est due à TODHUNTER :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{L} \cos \alpha d \alpha &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{L} \left(\frac{\sin 2 \alpha}{2} \right) d \alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{L} \sin 2 \alpha d \alpha - \frac{\pi}{4} \operatorname{L} 2. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{L} \sin 2 \alpha d \alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{L} \sin 2 \alpha d (2 \alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{L} \sin 2 \alpha d (2 \alpha).$$

Par conséquent :

$$\int_0^{\pi} \operatorname{L} \cos \alpha d \alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{L} \sin \alpha d \alpha = -\frac{\pi}{2} \operatorname{L} 2.$$

Par suite :

$$\Sigma = \frac{\pi}{2} R_0^3 \operatorname{L} 2.$$

CHAPITRE V

DÉVELOPPANTE D'ASTROÏDE : $k = -3$.

D'après les formules établies au chapitre II, considérons la courbe dont l'équation naturelle est :

$$R = R_0 \cos^2 \alpha. \quad (1)$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = R_0 \cos^3 \alpha, \quad \frac{dy}{d\alpha} = R_0 \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

D'où, par un choix convenable d'origine :

$$x = R_0 \left(\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right),$$

$$y = -\frac{R_0}{3} \cos^3 \alpha,$$

équations qui peuvent être mises sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} x &= \frac{R_0}{12} \left[\sin 3\alpha + 9 \sin \alpha \right], \\ y &= -\frac{R_0}{12} \left[\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Les propriétés de symétrie sont mises en évidence : quand on change α en $-\alpha$, x change de signe, y reste invariable. Résultats contraires quand on change α en $\pi - \alpha$. La courbe admet donc les axes de coordonnées comme axes de symétrie.

La formule (1) montre que la courbe n'a pas de points d'inflexion ; dans l'intervalle $0 \frac{\pi}{2}$, le rayon de courbure décroît constamment de R_0 à 0. La courbe est représentée sur la figure (8).

La tangente à la courbe au point $M(\alpha)$, a pour équation :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{R_0}{6} (3 - \cos 2 \alpha), \quad (3)$$

et la normale :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \frac{R_0}{3} \sin 2 \alpha. \quad (4)$$

Cette dernière équation met en évidence cette propriété géométrique remarquable : le segment intercepté sur la normale à la courbe par les axes de coordonnées est constant et égal à $\frac{2 R_0}{3}$.

On sait que cette propriété caractérise une développante d'astroïde : la développée de la courbe est donc l'astroïde inscrite dans le cercle de rayon $\frac{2R_0}{3}$, ayant les axes de coordonnées comme axes de symétrie et passant par les points de rebroussement de la courbe étudiée.

Considérons l'équation :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{R_0}{6} (3 + h - \cos 2 \alpha). \quad (5)$$

Elle définit une famille de droites parallèles à (3) et distantes de celles-ci de la longueur :

$$d = \frac{R_0 h}{6}.$$

Considérons en particulier la famille de droites :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = - \frac{R_0 \cos 2 \alpha}{6}, \quad (6)$$

distantes de la longueur :

$$d_1 = - \frac{R_0}{2}.$$

Évaluons la longueur des segments déterminés sur ces droites par les bissectrices des axes de coordonnées. Nous avons à associer l'équation (6) successivement avec :

$$x + y = 0 ,$$

et :

$$x - y = 0 ,$$

ce qui donne comme coordonnées des points d'intersection :

$$\begin{aligned} M_1 & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{R_0}{6} (\sin \alpha - \cos \alpha) \\ y_1 = \frac{R_0}{6} (\cos \alpha - \sin \alpha) \end{array} \right. \\ M_2 & \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{R_0}{6} (\sin \alpha + \cos \alpha) \\ y_2 = \frac{R_0}{6} (\sin \alpha + \cos \alpha) \end{array} \right. \\ M_1 M_2 : & \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 = \frac{R_0}{3} \cos \alpha \\ y_2 - y_1 = \frac{R_0}{3} \sin \alpha. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le segment $M_1 M_2$ est donc constant et égal à $\frac{R_0}{3}$. La courbe que nous étudions est aussi une *parallèle d'astroïde*.

L'équation (5) représente ainsi l'astroïde, ses parallèles, ses développantes et développées.

Nous obtenons les équations paramétriques des courbes de cette famille en résolvant par rapport à x et y l'équation (5) et sa dérivée en α , c'est-à-dire (4) ; ce qui donne, en posant :

$$\lambda = 3 + h ,$$

les formules :

$$\begin{aligned} x &= \frac{R_0}{6} \left[(3 + \lambda) \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \right] , \\ y &= \frac{R_0}{6} \left[(3 - \lambda) \cos \alpha - 2 \cos^3 \alpha \right] . \end{aligned} \tag{7}$$

Pour $\lambda = 0$ c'est-à-dire $h = -3$, on obtient l'astroïde :

$$\begin{aligned} x &= \frac{R_0}{6} \left[3 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \right] , \\ y &= \frac{R_0}{6} \left[3 \cos \alpha - 2 \cos^3 \alpha \right] , \end{aligned} \quad (8)$$

inscrite dans le cercle de rayon $\frac{R_0}{3}$.

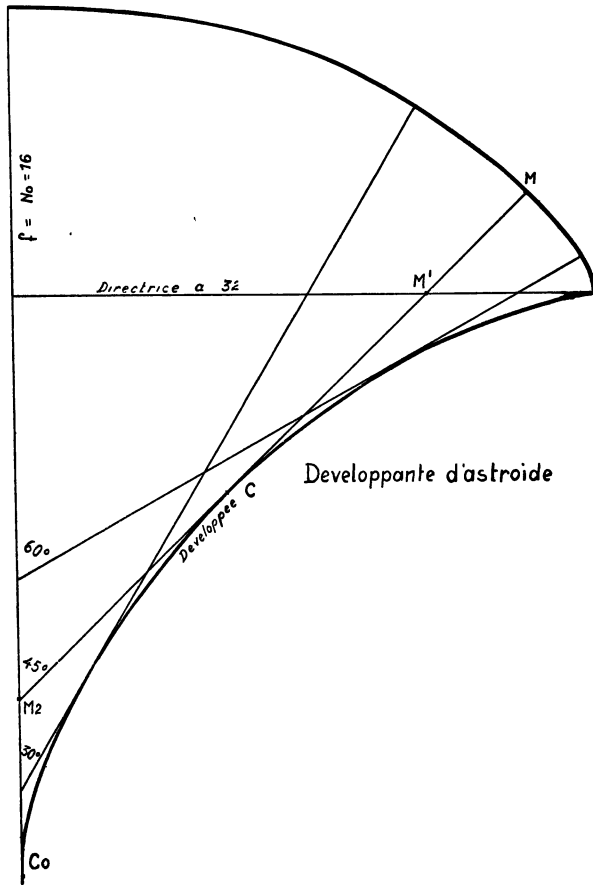


FIGURE 8.

Pour $\lambda = 3$, c'est-à-dire $h = 0$, on obtient la courbe de Ribaucour d'indice -3 elle-même ; pour $\lambda = -3$, c'est-à-dire $h = -6$ on obtient la courbe déduite de la précédente par une rotation de $\pi/2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{R_0}{3} \sin^3 \alpha, \\ y = \frac{R_0}{3} \left(3 \cos \alpha - \cos^3 \alpha \right). \end{array} \right.$$

Remarquons que l'astroïde définie comme enveloppe des droites (4), est évidemment aussi la développée de l'astroïde définie par les équations (2). Nous avons en somme montré par là même que la développée d'une astroïde est une autre astroïde inscrite dans un cercle de rayon double, résultat qu'on obtient d'ailleurs sans difficulté par un calcul direct.

Reprenons l'équation de la tangente à la courbe de Ribaucour d'indice -3 , ou mieux encore l'équation (5) que nous écrivons sous la forme :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{R_0}{6} (\lambda - \cos 2 \alpha). \quad (5'')$$

Cherchons les points d'intersection de ces droites avec :

$$x \sin u - y \cos u = 0,$$

$$x \sin v - y \cos v = 0.$$

Nous trouvons :

$$\begin{array}{l} M_1 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{R_0}{6} \cdot \frac{\lambda - \cos 2 \alpha}{\sin (\alpha - u)} \cdot \cos u \\ y_1 = \frac{R_0}{6} \cdot \frac{\lambda - \cos 2 \alpha}{\sin (\alpha - u)} \cdot \sin u \end{array} \right. \\ \\ M_2 \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{R_0}{6} \cdot \frac{\lambda - \cos 2 \alpha}{\sin (\alpha - v)} \cdot \cos v \\ y_2 = \frac{R_0}{6} \cdot \frac{\lambda - \cos 2 \alpha}{\sin (\alpha - v)} \cdot \sin v \end{array} \right. \end{array}$$

Par suite, M_1M_2 :

$$X = x_1 - x_2 = \frac{R_0}{6} \frac{(\lambda - \cos 2\alpha) \sin(u - v)}{\sin(\alpha - u) \sin(\alpha - v)} \cdot \cos \alpha$$

$$Y = y_1 - y_2 = \frac{R_0}{6} \frac{(\lambda - \cos 2\alpha) \sin(u - v)}{\sin(\alpha - u) \sin(\alpha - v)} \cdot \sin \alpha$$

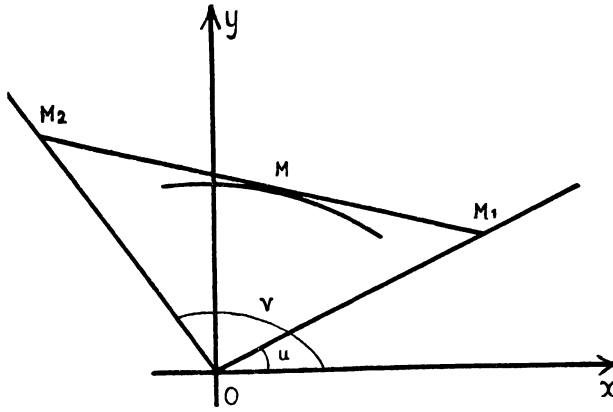


FIGURE 9.

Le segment $M_1 M_2$ a donc pour longueur :

$$\Delta = \frac{R_0}{6} \frac{(\lambda - \cos 2\alpha) \sin(u - v)}{\sin(\alpha - u) \sin(\alpha - v)},$$

ou :

$$\Delta = \frac{R_0}{3} \frac{(\lambda - \cos 2\alpha) \sin(u - v)}{\cos(u - v) - \cos(2\alpha - u - v)}.$$

Si on prend u et v satisfaisant aux conditions :

$$\lambda = \cos(u - v), \quad u + v = 0,$$

on voit que Δ sera indépendant de α :

$$\Delta = \frac{R_0}{3} \sin 2u.$$

Bien entendu, le problème n'a de solution réelle que pour :

$$(\lambda) \leq 1 ;$$

ainsi pour l'astroïde, on a : $\lambda = 0$, c'est-à-dire $u = -v = \frac{\pi}{4}$,
ce qui est bien conforme aux résultats connus.

Nous pouvons conclure : l'astroïde, les parallèles, développées, développantes d'astroïdes, appartiennent toutes à la famille de courbes planes, enveloppes des droites dont le segment déterminé par deux droites fixes est constant. Ces dernières peuvent être réelles, imaginaires ou confondues.

Cette généralisation permet de montrer que ces courbes, unicursales d'après (7), sont du 6^e ordre. En effet, d'après la définition géométrique on a à chercher l'enveloppe des droites :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (9)$$

a et b étant deux paramètres liés par la relation :

$$a^2 + b^2 - 2ab\lambda = \text{Cte.} \quad (10)$$

En dérivant on obtient :

$$\frac{x}{a^2} da + \frac{y}{b^2} db = 0 ,$$

$$(a - \lambda b) da + (b - \lambda a) db = 0 ;$$

ce qui donne :

$$\frac{x (b - \lambda a)}{a^2} = \frac{y (a - \lambda b)}{b^2} . \quad (11)$$

L'élimination de a et b entre l'équation (11) qui est du 3^e degré par rapport à a et b et l'équation (10) qui est du 2^e degré conduit bien, d'après une proposition très connue de l'analyse, à une équation du 6^e degré en x et y.

Cherchons l'équation tangentielle de ces courbes, c'est-à-dire la condition pour que la droite :

$$Ux + Vy = 1 ,$$

soit tangente à l'une d'elles. En tenant compte de (5') il faudra avoir :

$$\frac{U}{\sin \alpha} = \frac{V}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{R_0}{6} (\lambda - \cos 2 \alpha)},$$

d'où :

$$U^2 + V^2 = \frac{R_0^2}{36} \left[U^2 (\lambda + 1) + V^2 (\lambda - 1) \right]^2.$$

On en conclut : L'astroïde, les parallèles, développées développantes d'astroïdes sont des courbes de direction de 4^e classe.

En particulier :

pour l'astroïde :

$$U^2 + V^2 = \frac{R_0^2}{36} \left[U^2 - V^2 \right]^2 ;$$

pour la courbe de Ribaucour $k = -3$:

$$U^2 + V^2 = \frac{R_0^2}{9} \left[2 U^2 + V^2 \right]^2 .$$

La rectification de ces courbes, qui sont de direction, se fait par intégrales abéliennes attachées aux courbes. Pour la courbe de Ribaucour $k = -3$, on peut écrire :

$$ds = R d\alpha = R_0 \cos^2 \alpha d\alpha,$$

$$s = R_0 \int \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{R_0}{4} [2\alpha + \sin 2\alpha] .$$

On voit que le périmètre de la courbe est égal à πR_0 .

L'aire de débouché comprise entre l'axe des abscisses et la courbe est donnée par :

$$\Sigma = \left| \int y dx \right| = \frac{R_0^2}{3} \int \cos^6 \alpha d\alpha .$$

$$\Sigma = \frac{R_0^2}{3 \cdot 2^5} \left[\frac{\sin 6\alpha}{6} + \frac{3}{2} \sin 4\alpha + \frac{15}{2} \sin 2\alpha + 10\alpha \right] .$$

L'aire totale de la courbe est égale à :

$$\Sigma = \frac{5\pi R_0^2}{24} .$$

CHAPITRE VI

LES PARABOLOIQUES DE LEBERT

Dans son étude sur les arcs de grandes portées, LEBERT (1900) a désigné sous le nom de *paraboloïques* les courbes qui sont les intégrales de l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$y'' = \frac{1}{m} (1 + ky'^2) . \quad (1)$$

Remarquons d'abord que pour $k = 0$, la courbe n'est autre que la parabole ordinaire :

$$y = \frac{x^2}{2m} + ax + b .$$

Pour $k = 1$, l'équation (1) est équivalente à l'équation naturelle :

$$R \cos \alpha = m .$$

La courbe correspondante est la *chaînette d'égale résistance*. La paraboloïque particulière de LEBERT est donc identique à la chaînette d'égale résistance.

L'intégration de l'équation différentielle (1) se fait très simplement en prenant y comme variable indépendante, comme il a été fait pour les courbes de Ribaucour.

Nous n'effectuerons pas ces calculs qui ne présentent pas ici d'intérêt. Nous nous contentons de vérifier deux résultats indiqués par LEBERT.

1° $k > 0$. — *Les paraboloïques de Lebert correspondantes sont des courbes affines de la chaînette d'égale résistance (Paraboloïques de 1^{re} espèce).*

En effet, posons :

$$\begin{cases} x = a u, \\ y = b L \cos u. \end{cases} \quad (2)$$

Il vient :

$$\frac{dx}{du} = a, \quad \frac{dy}{du} = -b \operatorname{tg} u, \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} u,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{dx} \right) \times \frac{du}{dx} = -\frac{b}{a^2} (1 + \operatorname{tg}^2 u).$$

D'où :

$$y'' = -\frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 \right),$$

équation qui est bien de la forme (1) avec :

$$m = -\frac{a^2}{b}, \quad k = \frac{a^2}{b^2} > 0. \quad (3)$$

2° $k < 0$. — *Les paraboloïques de Lebert correspondantes font partie de la famille à deux paramètres (Paraboloïques de 2^e espèce) :*

$$\begin{cases} x = au, \\ y = b L \operatorname{ch} u, \end{cases} \quad (4)$$

On a en effet :

$$y' = \frac{b \operatorname{sh} u}{a \operatorname{ch} u},$$

$$y'' = \frac{b}{a^2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u} \right).$$

D'où :

$$y'' = \frac{b}{a^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} y'^2 \right),$$

$$m = \frac{a^2}{b}, \quad k = -\frac{a^2}{b^2} < 0. \quad (3')$$

Si l'on tient compte des relations (3) et (3'), on voit que m est un paramètre de similitude. Nous pouvons désormais supposer dans ce qui suit $m = 1$.

Propriétés générales des paraboloïques de Lebert.

Soit α l'angle que fait la tangente au point courant avec l'axe ox .

On a immédiatement l'équation naturelle :

$$R = \frac{m}{\cos \alpha (\cos^2 \alpha + k \sin^2 \alpha)} \quad (5)$$

Telle est l'équation naturelle des paraboloïques de Lebert.

Il résulte de l'équation (5) que les paraboloïques de Lebert sont des courbes rectifiables. On a en effet :

$$s = m \int \frac{d\alpha}{\cos \alpha (\cos^2 \alpha + k \sin^2 \alpha)}.$$

Si l'on pose : $\sin \alpha = t$,

il vient :

$$s = m \int \frac{dt}{(1 - t^2) [1 - t^2 + k t^2]} ,$$

$$s = \frac{m}{k} \int \left(\frac{1}{1 - t^2} + \frac{k - 1}{1 + (k - 1) t^2} \right) dt.$$

Donc, pour :

$k > 1$

$$s = \frac{m}{k} \left[\arg \operatorname{th}(\sin \alpha) + \sqrt{k - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{k - 1} \sin \alpha) \right].$$

$k < 1$

$$s = \frac{m}{k} \left[\arg \operatorname{th}(\sin \alpha + \sqrt{1 - k} \operatorname{arg} \operatorname{th} (\sqrt{1 - k} \sin \alpha)) \right].$$

On retrouve pour $k = 1$, c'est-à-dire pour la chaînette d'égale résistance, l'égalité :

$$s = m\varphi ;$$

où φ est l'argument associé à α .

L'équation (5) montre en outre que les paraboliques de Lebert n'ont pas de point d'inflexion.

D'autre part :

$$\frac{mdR}{R^2} = \sin \alpha \left[k - 3(k-1) \cos^2 \alpha \right] d\alpha .$$

L'équation aux jarrets s'écrit donc :

$$k = 3(k-1) \cos^2 \alpha ,$$

$$\text{ou :} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2k-3}{k} .$$

D'où la condition d'existence des jarrets :

$$k(2k-3) \geq 0 .$$

k doit donc être extérieur à l'intervalle $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Il en résulte que :

1° Les paraboliques de Lebert de deuxième espèce possèdent toutes des jarrets réels.

2° Seules ont des jarrets réels les paraboliques de première espèce dont le paramètre k est supérieur à $\frac{3}{2}$.

CHAPITRE VII

FORMULES PRATIQUES POUR LES COURBES DE RIBAUCCOUR

Supposons une courbe de Ribaucour rapportée à son sommet et à ses axes. On a :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0 .$$

$$x = R_0 \int_0^{\alpha} \cos^{-k} \alpha \, d\alpha ,$$

$$y = R_0 \frac{\cos^{-k} \alpha - 1}{k} .$$

Soient a et f , les coordonnées d'un point A , on a :

$$\frac{a}{R_0} = \int_0^{\alpha} \cos^{-k} \alpha \, d\alpha$$

$$\frac{f}{R_0} = \frac{\cos^{-k} \alpha - 1}{k} .$$

Posons :

$$2\sigma = \frac{f}{a} ,$$

et cherchons une formule approchée qui nous permettrait de connaître au 3^e ordre près l'angle α de la tangente AT à la courbe au point d'ordonnée f , avec l'axe ox .

Nous avons :

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \dots$$

$$\cos^{-k} \alpha = 1 + K \frac{\alpha^2}{2} + \frac{K(3K+2)}{24} \alpha^4 + \dots$$

D'où :

$$\frac{a}{R_0} = \alpha + K \frac{\alpha^3}{2} + \frac{K(3K+2)}{120} \alpha^5 + \dots \quad (1)$$

$$\frac{f}{R_0} = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3K+2}{24} \alpha^4 + \dots \quad (2)$$

D'où :

$$4 \sigma = \alpha \left(1 + \frac{K+2}{12} \alpha^2 + \dots \right).$$

Si l'on pose :

$$\alpha = \lambda_1 \sigma + \lambda_3 \sigma^3 + \dots$$

et si l'on identifie avec la relation précédente, on trouve :

$$\alpha = 4 \sigma \left[1 - \frac{4(K+2)}{3} \sigma^2 \dots \right]. \quad (3)$$

On pourra chercher une formule analogue relative au rayon de courbure moyenne :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = R_0 \frac{\frac{a}{R_0}}{\sin \alpha} = \frac{1 + \frac{K}{6} \alpha^2 + \frac{K(3K+2)}{120} \alpha^4 + \dots}{1 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^4}{120} + \dots}$$

D'où :

$$\frac{\rho}{R_0} = 1 + \frac{K+1}{6} \alpha^2 + \frac{(K+1)(9K+7)}{360} \alpha^4.$$

Si on tient compte de :

$$\frac{R}{R_0} = \cos^{-(K+1)} \alpha = 1 + \frac{K+1}{2} \alpha^2 + \frac{(K+1)(3K+5)}{24} \alpha^4 + \dots$$

on déduit la relation :

$$\frac{R + 2 R_0 - 3 \rho}{R_0} = \frac{(K + 1) (K + 3)}{20} \alpha^4. \quad (4)$$

Si donc, on néglige les termes du 4^e ordre, on peut prendre la formule :

$$3\rho = R + 2R_0, \quad (5)$$

ou encore la formule :

$$\rho^3 = R R_0^2, \quad (5')$$

qui est logarithmique.

En particulier, pour $k = -1$ et $k = -3$, c'est-à-dire pour le cercle et pour la développante d'astroïde, ces deux formules sont valables au sixième ordre près.

Cas de la chaînette d'égale résistance.

Il y a lieu de remarquer que les calculs que nous avons effectués supposent $k \neq 0$. Les résultats obtenus sont pourtant valables dans le cas qui paraît devoir s'exclure à priori, c'est-à-dire pour la chaînette d'égale résistance comme on va le voir.

En effet, on a pour la chaînette d'égale résistance :

$$x = R_0 \alpha, \quad y = R_0 L (\cos \alpha).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{a}{R_0} &= \alpha, & \frac{f}{R_0} &= -L \cos \alpha, \\ 2\sigma &= \frac{f}{a} = \frac{-L \cos \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\cos \alpha = e^{-2\sigma\alpha},$$

σ est donc une fonction impaire de α . Elle est d'ailleurs croissante.

Dérivons logarithmiquement cette égalité :

$$-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2 \left(\alpha \frac{d\sigma}{d\alpha} + \sigma \right). \quad (6)$$

Posons alors :

$$\sigma = a_1 \alpha + a_3 \alpha^3 + a_5 \alpha^5 + a_7 \alpha^7 + \dots$$

On a :

$$\alpha \frac{d\sigma}{d\alpha} = a_1 \alpha + 3 a_3 \alpha^3 + 5 a_5 \alpha^5 + 7 a_7 \alpha^7 + \dots,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2 \alpha^5}{15} + \frac{17 \alpha^7}{315}.$$

Si on remplace dans l'équation (6) et si l'on identifie, on trouve :

$$\sigma = \frac{1}{4} \alpha + \frac{\alpha^3}{24} + \frac{\alpha^5}{90} + \frac{17 \alpha^7}{63 \times 80} + \dots$$

On déduit aisément :

$$\alpha = 4\sigma \left(1 - \frac{8}{3} \sigma^2 \right),$$

résultat conforme à celui qu'on obtiendrait avec la formule (3).

De même on a :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{R_0} &= \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{7\alpha^4}{360} + \frac{31\alpha^6}{15.120} + \\ \frac{R}{R_0} &= \frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24} + \frac{61\alpha^6}{720} + \dots \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{3\rho - R - 2R_0}{R_0} = \frac{3}{2} \alpha^4.$$

résultat qui s'obtiendrait encore avec la formule (3).

Vérifions les résultats obtenus par l'application de la formule (3) aux diverses courbes de Ribaucour, par un calcul direct :

$k = -3$, développante d'astroïde :

$$\alpha = 4\sigma \left(1 + \frac{4}{3} \sigma^2 \right).$$

En effet, on a :

$$\frac{12a}{R_0} = \sin 3\alpha + 9 \sin \alpha ,$$

$$\frac{12f}{R_0} = 4 - (\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha) ,$$

$$2\sigma = \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha (3 - \sin^2 \alpha)} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{2 + \cos^2 \alpha} ,$$

$$2\sigma = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{3 - \frac{3\alpha^2}{2}}{3 - \alpha^2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right) .$$

$$2\sigma = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{24} + \dots \right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} + \dots \right) = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{12} \right) .$$

Donc :

$$4\sigma = \alpha - \frac{\alpha^3}{12} ,$$

et par suite :

$$\alpha = 4\sigma \left(1 + \frac{4}{3} \sigma^2 \right) .$$

$k = -2$, cycloïde ordinaire :

$$\frac{4a}{R_0} = 2\alpha + \sin 2\alpha ,$$

$$\frac{4f}{R_0} = 1 - \cos 2\alpha ,$$

$$2\sigma = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{12} + \frac{\alpha^6}{360}}{4\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{60}} ,$$

$$2\sigma = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha^4}{45} \right) .$$

D'où :

$$\alpha = 4\sigma \left(1 + \frac{256}{45} \sigma^4 \right).$$

L'application de la formule (3) aurait donné :

$$\alpha = 4\sigma ,$$

ce qui serait exact au 4^e ordre près.

$k = -1$, cercle.

$$\frac{a}{R_0} = \sin \alpha , \quad \frac{f}{R_0} = 1 - \cos \alpha ,$$

$$2\sigma = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} ,$$

$$2\sigma = \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{12} \dots \right) ,$$

$$\alpha = 4\sigma \left(1 - \frac{4}{3} \sigma^2 \right) .$$

On pourrait poursuivre la vérification pour toutes les autres courbes de Ribaucour.

Application au calcul du débouché superficiel.

Supposons une courbe de Ribaucour rapportée à son sommet A, à son axe de symétrie et à sa tangente au sommet.

On verra que si l'on désigne par S l'aire du segment A M B, T₁ et T₂ les aires des triangles A A' B et A B' B, ; A' étant la projection orthogonale du sommet A sur la tangente B A' ; B' celle du point B sur la tangente A B', on a :

$$6 S - (T_1 + T_2) = \frac{R_1 R_3 + R_1^2 - 3 R_2^2}{720} \alpha^5 = \varepsilon$$

D'autre part, si on développe x et y suivant les puissances croissantes de α :

$$\begin{aligned}x &= 2A\alpha + 3B\alpha^2 + 4C\alpha^3, \\y &= A\alpha^2 + 2B\alpha^3 + \dots,\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}R_1 &= 2A, \\R_2 &= 6B, \\R_3 &= 2A + 24C.\end{aligned}$$

Si l'on tient compte alors des relations (1) et (2) on a :

$$\begin{aligned}x &= R_0 \left(\alpha + \frac{k}{6} \alpha^3 + \dots \right), \\y &= R_0 \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{3k+2}{24} \alpha^3 + \dots \right).\end{aligned}$$

D'où :

$$R_1 = R_0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = (k+1) R_0,$$

et par suite :

$$\varepsilon = \frac{k+13}{720} R_0^2 \alpha^5.$$

Si on remplace α par 4σ , on a :

$$\varepsilon = \frac{64}{45} (k+13) R_0 \sigma^5.$$

Conclusion.

Il résulte des considérations précédentes que, pour une courbe de Ribaucour d'équation naturelle :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0,$$

dont l'indice est k , on a approximativement pour un surbaissement σ :

$$\alpha = 4\sigma \left[1 - \frac{4}{3} (k+2) \sigma^2 \right],$$

$$\sigma = \frac{\alpha}{4} \left(1 + \frac{k+2}{12} \alpha^2 \right),$$

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{k+1}{2} \alpha^2 = 1 + 8(k+1)\sigma^2,$$

$$\frac{\rho}{R_0} = 1 + \frac{k+1}{6} \alpha^2 = 1 + \frac{8}{3}(k+1)\sigma^2,$$

$$\frac{f}{R_0} = \frac{\alpha^2}{2} \left[1 + \frac{3k+2}{12} \alpha^2 \right] = 8\sigma^2 \left[1 + \frac{4(3k+2)}{3} \sigma^2 \right],$$

$$\frac{a}{R_0} = \alpha \left[1 + \frac{k}{6} \alpha^2 \right] = 4\sigma \left[1 + \frac{8}{3} k \sigma^2 \right];$$

et enfin pour le débouché superficiel :

$$6S - (T_1 + T_2) = \epsilon,$$

avec :

$$\epsilon = \frac{k+13}{720} R_0^2 \alpha^5 = \frac{64}{45} (k+13) R_0^2 \sigma^5.$$

Indice k	paraboloïque	$\frac{\alpha}{4\sigma}$
— 3	développante d'astroïde	$1 + \frac{4}{3} \sigma^2$
— 2	cycloïde	1
— 1	cercle	$1 - \frac{4}{3} \sigma^2$
0	chaînette de résistance	$1 - \frac{8}{3} \sigma^2$
1	chaînette	$1 - 4 \sigma^2$
2	parabole	$1 - \frac{16}{3} \sigma^2$

Les courbes de Ribaucour remarquables se classent ainsi dans un ordre immuable ; pour un même surbaissement σ , la variation de l'inclinaison aux naissances est de l'une à l'autre des courbes consécutives :

$$\Delta \alpha = \frac{16}{3} \sigma^3 .$$

Pour σ petit, environ de l'ordre de $\frac{1}{10}$, $\Delta \alpha$ sera sensiblement constant d'une courbe de Ribaucour d'indice k à la courbe d'indice $k + 1$; cette remarque servira de point de départ à l'étude de la fusion des paraboliques primaires (chapitre XXI).

Un ouvrage déterminé pourra, par simple inspection de ce tableau, être considéré comme étant plus ou moins rapproché de telle ou telle des courbes inscrites. L'arc considéré sera donc classé d'après la courbe de Ribaucour inscrite au tableau qui le réaliserait au mieux, ou encore on pourra spécifier entre quelles courbes du tableau elle se place.

Par exemple, le nouveau pont d'Orléans de LEGAY se rapproche surtout de la *cycloïde ordinaire*.

On conçoit alors qu'il soit possible, par des modifications judicieuses apportées à ces paraboliques, par exemple à cette cycloïde dans le cas du pont d'Orléans, d'obtenir des courbes sensiblement identiques à celles adoptées par les constructeurs. Et ce sera justement *le principe de notre méthode de normalisation des paraboliques*.

Fonction surbaissement.

Soit une courbe d'intrados admettant un axe de symétrie. En prenant l'origine O des axes rectangulaires de coordonnées à la clef :

$$2\sigma = \frac{y}{x} \quad ;$$

d'où :

$$\begin{aligned} 2x^2 \frac{d\sigma}{d\alpha} &= x \frac{dy}{d\alpha} - y \frac{dx}{d\alpha} \\ &= R (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \quad , \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{pR}{2a^2} \quad .$$

R est le rayon de courbure aux naissances, p, la distance du sommet de clef à la tangente aux naissances, α l'angle d'inclinaison de cette dernière sur l'horizontale.

La formule est rigoureuse et générale pour toutes les courbes. En fonction de l'ouverture $2a$ et de la flèche f on a :

$$p = a \sin \alpha - f \cos \alpha \quad .$$

Appliquons ces considérations aux paraboliques primaires (courbes de Ribaucour). La condition :

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} > 0 \quad , \quad \left(\alpha < \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

s'écrira simplement :

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{f}{a} ;$$

et en tenant compte des formules pratiques :

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{\alpha}{2} + \frac{k+2}{24} \alpha^3 \quad .$$

La condition est donc toujours vérifiée (pour $\alpha < \frac{\pi}{2}$).

Ainsi pour toutes les courbes de Ribaucour le surbaissement σ augmente constamment avec l'angle α aux naissances, c'est-à-dire aussi avec la flèche.

CHAPITRE VIII

LES COURBES DE RIBAUCCOUR AVEC ÉLASTICITÉ OU CONTRACTILITÉ

Les paraboloïques normales.

Propriété statique des courbes de Ribaucour.

Soit à chercher la figure d'équilibre d'un fil homogène et inextensible, soumis à une force verticale d'intensité :

$$F = \int f(\alpha) ds,$$

α étant la pente de la tangente à la courbe, ds l'arc élémentaire.

Si T est la tension du fil au point M , les équations de l'équilibre sont :

$$d(T \cos \alpha) = 0, \quad d(T \sin \alpha) = f(\alpha) ds.$$

On peut écrire :

$$T \cos \alpha = m \delta, \quad m = \text{cte} ;$$

et par suite on voit que les courbes satisfont à l'équation naturelle :

$$R \cos^2 \alpha f(\alpha) = m.$$

Si on prend la loi de force :

$$f(\alpha) = \cos^{k-1} \alpha,$$

on retrouve les courbes de Ribaucour d'équation naturelle :

$$R \cos^{k+1} \alpha = m. \quad (1)$$

Nous avons là une définition mécanique des courbes de Ribaucour.

Les courbes de Ribaucour élastiques.

Supposons maintenant le fil élastique. D'après la loi de Hooke, l'allongement du fil est donné par :

$$d\sigma = ds (1 + \lambda T).$$

On a alors :

$$T \cos \alpha = m\delta, \quad \frac{d}{ds} (T \sin \alpha) = \frac{f(\alpha)}{1 + \lambda T};$$

on en déduit :

$$R \cos^2 \alpha \cdot f(\alpha) = m \left(1 + \frac{m \lambda \delta}{\cos \alpha} \right);$$

et en introduisant le « *paramètre spécifique* » μ défini par la relation :

$$\begin{aligned} \mu &= m\lambda\delta, \\ R \cos^2 \alpha \cdot f(\alpha) &= m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha). \end{aligned}$$

En particulier, en prenant :

$$f(\alpha) = \cos^{k-1} \alpha,$$

l'équation précédente devient :

$$R \cos^{k+1} \alpha = m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha); \quad (2)$$

c'est l'équation naturelle des courbes de Ribaucour avec élasticité.

La définition mécanique que nous venons de donner ne comporte pas la restriction : $k \neq 0$, de sorte que la chaînette d'égale résistance fait partie de la famille au même titre que les autres courbes.

L'équation (2) s'écrit en tenant compte de (1) :

$$R = m \cos^{-k-1} \alpha + m \mu \cos^{-k-2} \alpha. \quad (3)$$

On voit que les courbes de Ribaucour avec élasticité s'obtiennent par addition de deux courbes de Ribaucour ordinaires et successives (c'est-à-dire correspondant à deux valeurs entières consécutives de l'indice), le terme addition étant pris dans le sens proposé par l'abbé D'Aoust de l'*addition des rayons de courbure* (1).

De l'équation (3) on déduit aussi :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{m} &= \cos^{-k-1}\alpha d\alpha + \cos^{-k-2}\alpha d\alpha, \\ \frac{s}{m} &= \int \cos^{-k-1}\alpha d\alpha + \int \cos^{-k-2}\alpha d\alpha.\end{aligned}\tag{4}$$

On voit qu'il y a encore addition d'arcs.

On obtient la représentation paramétrique des courbes de Ribaucour avec élasticité de la même façon à partir de l'équation (3) :

a) $k \neq 0$ et $k \neq -1$.

On a :

$$R \cos^{k+1}\alpha = m (1 + \mu \cos^{-1}\alpha) ;\tag{5}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{x}{m} &= \int \cos^{-k}\alpha d\alpha + \mu \int \cos^{-k-1}\alpha d\alpha, \\ \frac{y}{m} &= - \left[\frac{\cos^{-k}\alpha}{k} + \frac{\mu}{k+1} \cos^{-k-1}\alpha \right] ;\end{aligned}\tag{6}$$

ou en employant, pour $k > 0$ l'argument φ associé à α :

$$\begin{aligned}\frac{x}{m} &= \int \operatorname{ch}^{k-1}\varphi d\varphi + \mu \int \operatorname{ch}^k\varphi d\varphi, \\ -\frac{y}{m} &= \frac{\operatorname{ch}^k\varphi}{k} + \frac{\mu}{k+1} \operatorname{ch}^{k+1}\varphi,\end{aligned}\tag{6'}$$

(1) D'Aoust. — Analyse infinitésimale des courbes planes, Paris, 1873.
P. ERNST. — Die Aoust Resultantenkurven, Wien, 1909.

b) $k = 0$:

$$\begin{aligned} R \cos \alpha &= m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha) , \\ R &= m (\cos^{-1} \alpha + \mu \cos^{-2} \alpha) , \\ dx &= m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha) d\alpha , \\ dy &= m (\cos^{-1} \alpha + \mu \cos^{-2} \alpha) \sin \alpha d\alpha . \end{aligned}$$

En employant simultanément α et l'argument associé φ :

$$\begin{aligned} \frac{x}{m} &= m (\alpha + \mu \varphi) , \quad \frac{y}{m} = - (L \cos \alpha + \mu \operatorname{ch} \varphi) ; \\ \varphi &= L \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right| . \end{aligned}$$

c) $k = -1$.

$$\begin{aligned} R &= m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha) , \\ dx &= m (\cos \alpha + \mu) d\alpha , \quad dy = m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha) \sin \alpha d\alpha , \\ \frac{x}{m} &= \sin \alpha + \mu \alpha , \quad \frac{y}{m} = - (\cos \alpha + \mu L \cos \alpha) . \end{aligned}$$

Nous ferons de même la classification des courbes de Ribaucour avec élasticité d'après l'équation naturelle (2) :

$$R \cos^{k+1} \alpha = m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha) ,$$

ou :

$$R = m \operatorname{ch}^{k+1} \varphi (1 + \mu \operatorname{ch} \varphi) .$$

Dans tout ce qui précède, il a été supposé qu'il y avait élasticité et que le coefficient spécifique μ était positif. Aux valeurs négatives de μ correspondront les *courbes contractiles* de Ribaucour, selon la dénomination proposée par M. TURRIÈRE.

Propriétés générales.

Des propriétés remarquables concernant les courbes de Ribaucour avec élasticité peuvent se déduire de l'étude générale qui suit :

Soit une courbe plane (C). Mettons l'équation de la tangente MT au point courant M sous la forme :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p. \quad (7)$$

On sait que $p(\alpha)$, paramètre de la tangente à la courbe, représente la distance de l'origine à cette droite orientée dans un sens déterminé.

Dérivons deux fois par rapport à α :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p' , \quad (8)$$

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = p'' ; \quad (9)$$

$$p' = \frac{dp}{d\alpha} ; \quad p'' = \frac{d^2p}{d\alpha^2}$$

Si on élimine α entre (7) et (8), ou si l'on tire x et y en fonction de α , on obtient l'enveloppe de la droite (7), c'est-à-dire la courbe (C) elle-même :

$$(C) \begin{cases} x = p \sin \alpha + p' \cos \alpha, \\ y = -p \cos \alpha + p' \sin \alpha. \end{cases} \quad (10)$$

L'équation (8) n'est autre que celle de la normale à la courbe (C) au point M.

De même, si on tire x et y en fonction de α des équations (8) et (9), on obtient l'enveloppe des normales à la courbe (C), c'est-à-dire la développée de celle-ci :

$$(1') \begin{cases} x = -p'' \sin \alpha + p' \cos \alpha , \\ y = p'' \cos \alpha + p' \sin \alpha . \end{cases} \quad (11)$$

On en déduit ces expressions classiques du rayon de courbure de la courbe (C) et de l'arc élémentaire :

$$R = p + p'' , \quad ds = (p + p'')d\alpha . \quad (12)$$

Ceci étant, considérons une famille de courbes planes dépendant d'un paramètre λ . On peut alors soit représenter ces courbes par les équations (10) dans lesquelles p sera une fonction de α et de λ , soit les définir comme étant les enveloppes des droites (7).

Les résultats de l'analyse montrent que pour trouver l'enveloppe de cette famille, il faut annuler le déterminant fonctionnel :

$$\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \lambda)} = \begin{pmatrix} x & y \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix} ,$$

ce qui revient ici à écrire l'égalité :

$$R \frac{dp}{d\lambda} = \left(p + \frac{d^2 p}{d\alpha^2} \right) \frac{dp}{d\lambda} = 0 \quad (13)$$

De sorte que l'enveloppe (E) de cette famille se compose du lieu des points de rebroussement qui correspond à :

$$R = p + \frac{d^2 p}{d\alpha^2} = 0, \quad (14)$$

et de l'enveloppe véritable, qui correspond à :

$$\frac{dp}{d\lambda} = 0. \quad (15)$$

Cette égalité définit λ en fonction de α , les coordonnées du point caractéristique s'obtiennent simplement en remplaçant dans (10) λ par sa valeur en fonction de α .

Si $p_1(\alpha)$ est la valeur que prend p quand λ est remplacé par sa valeur tirée de (15), on remarque que :

$$\frac{dp_1}{d\alpha} = \left(\frac{dp}{d\alpha} + \frac{dp}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\alpha} \right) = \frac{dp}{d\alpha}.$$

L'enveloppe véritable est donc identique à la courbe dont la tangente courante a précisément pour équation :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p_1. \quad (16)$$

Remarquons en passant que la condition (15) exprime que parmi toutes les tangentes aux courbes (C) ayant une même inclination α sur la verticale, celle qui se trouve à la distance $p_1(\alpha)$ du pôle O est la plus éloignée ou la plus rapprochée de ce point.

Considérons alors une famille de courbes planes (C), pour lesquelles p est une fonction linéaire de λ :

$$p = P(\alpha) + \lambda Q(\alpha).$$

L'application des résultats précédents montre que l'enveloppe de cette famille se compose d'abord du lieu des points de rebroussement correspondant à :

$$R = R_0 + \lambda R_1 = 0, \quad (17)$$

avec : $R_0 = P + P'', \quad R_1 = Q + Q'',$

ensuite du lieu des points caractéristiques définis par la condition :

$$Q = 0.$$

C'est une solution évidente, constituée par certaines tangentes spéciales de la courbe : à une solution α_0 de l'équation précédente, il correspond une tangente :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = P(\alpha_0),$$

commune à toutes les courbes de la famille.

Parmi les propriétés de la courbe (C), il y a lieu de retenir que les coordonnées du point courant, x et y , données par l'équation (10), sont linéaires en λ . Il en résulte que *le lieu des points de contact des courbes (C) avec leurs tangentes respectives d'inclinaison α est une droite A*. On obtient l'équation de cette droite en éliminant λ entre :

$$\begin{aligned} x &= (P + \lambda Q) \sin \alpha + (P' + \lambda Q') \cos \alpha, \\ y &= -(P + \lambda Q) \cos \alpha + (P' + \lambda Q') \sin \alpha; \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(A) \quad (x \sin \alpha - y \cos \alpha - P)Q' - (x \cos \alpha + y \sin \alpha - P')Q = 0.$$

Les droites (A) forment une famille dépendant du paramètre α . Pour trouver leur enveloppe, nous avons à associer à l'équation précédente, celle dérivée par rapport à α :

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{Q P'' - P Q''}{Q + Q''};$$

ou en tenant compte de (17) :

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha + P = Q \frac{R_0}{R_1},$$

ou :

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha + p = Q \frac{R}{R_1}, \quad (A')$$

équation qui représente une droite A' parallèle aux tangentes d'inclinaison α . Parmi les courbes (C) de la famille à un paramètre λ , il en est une qui admet justement cette droite A' comme tangente de rebroussement ; c'est celle dont le λ satisfait à l'équation (17), puisque pour une valeur de λ remplissant cette condition, A' prend la forme (7). Le point caractéristique de la droite A est à l'intersection des droites :

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha + p = 0, \quad (A')$$

et :

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p') Q = 0,$$

où le paramètre λ satisfait à la condition (17). En écartant la solution $Q = 0$ qui correspond à des tangentes fixes, on voit que le point caractéristique de A est identique au point de rebroussement de la courbe particulière C_λ pour laquelle λ a une valeur définie par la relation (17). Donc : *l'enveloppe des droites A est identique au lieu des points de rebroussement.*

Toutes ces considérations s'appliquent aux courbes de Ribaucour avec élasticité, et en général à toutes les courbes dont l'équation naturelle se présente sous la forme additive, avec un paramètre arbitraire λ :

$$R = f(\alpha) + \lambda g(\alpha) .$$

En effet, on a :

$$\frac{dx}{d\alpha} = R \cos \alpha = [f(\alpha) + \lambda g(\alpha)] \cos \alpha ,$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = R \sin \alpha = [f(\alpha) + \lambda g(\alpha)] \sin \alpha ;$$

et par suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X_1(\alpha) + \lambda X_2(\alpha) , \\ y = Y_1(\alpha) + \lambda Y_2(\alpha) ; \end{array} \right. \quad (18)$$

l'équation de la tangente est :

$$\sin \alpha (\xi - X_1 - \lambda X_2) = \cos \alpha (\eta - Y_1 - \lambda Y_2) ,$$

ou :

$$\begin{aligned} \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha &= (X_1 \sin \alpha - Y_1 \cos \alpha) \\ &+ \lambda (X_2 \sin \alpha - Y_2 \cos \alpha) . \end{aligned} \quad (19)$$

Remarquons enfin que s'il en est ainsi, toutes les développées ou développantes successives des courbes (C) jouissent des mêmes propriétés résultant du caractère linéaire en λ de la fonction R et de ses dérivées ou intégrales (en α).

Considérons en effet l'équation :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} p(\alpha) d\alpha , \quad (20)$$

où α_0 est une constante.

Elle représente une droite perpendiculaire à la droite MT représentée par (7). Si nous dérivons deux fois par rapport à α , nous retrouverons exactement les équations (7) et (8).

Les droites (20) enveloppent donc, quand α varie, une développante particulière D_0 de la courbe (C), et il est facile de déduire de l'étude précédente les expressions des coordonnées du point courant, le rayon de courbure et l'arc élémentaire de D_0 , en fonction de la constante α_0 :

$$D_0 \left\{ \begin{array}{l} X_0 = -p \sin \alpha + \cos \alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} p \, d\alpha \quad , \\ Y_0 = p \cos \alpha + \sin \alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} p \, d\alpha \quad , \end{array} \right.$$

$$R = p' + \int_{\alpha_0}^{\alpha} p \, d\alpha ;$$

résultat conforme à la propriété des développantes (le rayon de courbure de la développante est égal à l'arc de la développée).

Un autre exemple remarquable de famille de courbes planes répondant aux conditions que nous avons énoncées est fourni par les courbes parallèles à une courbe donnée (C).

Soit (7) l'équation de la tangente MT à la courbe C. L'équation :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p + \lambda \omega \quad , \quad (21)$$

dans laquelle le terme $\lambda \omega$ serait considéré comme constant représenterait une droite D parallèle à la droite MT et distante de celle-ci de la longueur $\lambda \omega$. Quand, α variant, MT enveloppe la courbe (C), la droite D enveloppe une courbe (I') parallèle à (C).

Si, ω restant constant, λ varie, nous obtenons une famille de courbes (I') à un paramètre ; et l'application des résultats précédents montre que l'enveloppe de cette famille est uniquement constituée par le lieu des points de rebroussement.

Remarque. — Soit C_1 et C_2 , les courbes dont les équations naturelles s'écrivent :

$$R_1 = f(\alpha) \quad , \quad R_2 = \lambda g(\alpha) \quad .$$

La courbe C, représentée par les équations (18), est le lieu du milieu du segment rectiligne dont les extrémités décrivent les courbes C₁ et C₂, de telle manière que les pentes des tangentes à ces courbes en ces points associés soient égales.

Si on écrit l'équation de la tangente M₁T₁ au point courant de la courbe C₁, ainsi que celle de la tangente M₂T₂ à C₂ qui lui est parallèle, on voit que les paramètres de ces deux droites sont justement :

$$p_1 = X_1 \sin \alpha - Y_1 \cos \alpha, \quad p_2 = \lambda (X_2 \sin \alpha - Y_2 \cos \alpha).$$

Si p désigne le paramètre de la tangente MT correspondante de la courbe C, on voit que l'on a :

$$p_1 = p + p_2.$$

Le caractère additif des rayons de courbure traduit par l'équation naturelle :

$$R = R_1 + R_2,$$

s'étend donc au paramètre de la tangente, à l'arc de la courbe et par suite, d'après ce qui a été vu, aux développantes de cette courbe. C'est ce qui donne un intérêt spécial à l'addition des courbes d'après d'Aoust.

Addition d'un nombre quelconque de courbes de Ribaucour.

La loi de Hooke est une première approximation d'une loi plus générale :

$$d = d_{\sigma_0} F(T), \quad F(T_0) = 1.$$

Supposons que la fonction F(T) de la tension T soit développée en série de Mac-Laurin :

$$F(T) = 1 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3 + \dots$$

Nous aurons toujours l'équation exprimant la constance de la projection horizontale de la tension :

$$T \cos \alpha = m \delta = \text{constante.}$$

Mais l'équation :

$$\frac{d}{ds} (T \sin \alpha) = \frac{f(\alpha)}{F(T)},$$

donnera :

$$R \cos^2 \alpha \cdot f(\alpha) = m (1 + \mu_1 \cos^{-1} \alpha + \mu_2 \cos^{-2} \alpha + \dots).$$

En prenant :

$$f(\alpha) = \cos^{k-1} \alpha ,$$

l'équation naturelle des courbes de Ribaucour avec élasticité prend la forme :

$$R \cos^{k+1} \alpha = m [1 + \mu_1 \cos^{-1} \alpha + \mu_2 \cos^{-2} \alpha + \dots + \mu_n \cos^{-n} \alpha + \dots].$$

C'est la résultante de l'addition d'une *courbe fondamentale* d'indice k et d'une suite de courbes d'indices $k + 1, k + 2 \dots k + n \dots$ etc... en descendant la gamme des courbes du tableau dans le sens des indices croissants.

Tout ce qui a été exprimé pour le cas de l'élasticité suivant la loi de Hooke, c'est-à-dire pour l'addition de deux paraboloïques primaires, s'étend aux cas général de l'addition d'un nombre quelconque de telles courbes.

CHAPITRE IX

LA CHAINETTE ÉLASTIQUE ET LA CHAINETTE CONTRACTILE

Equations de la chaînette élastique.

La courbe de Ribaucour élastique d'indice $k = 1$, est la *chaînette élastique*. Formons ses équations paramétriques, à partir de l'équation naturelle :

$$R \cos^2 \alpha = m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha),$$

qui peut s'écrire, en posant :

$$\begin{aligned} \mu &= 2c, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}, \\ R &= m \operatorname{ch}^2 \varphi (1 + 2c \operatorname{ch} \varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

Par suite :

$$\frac{dx}{d\varphi} = m (1 + 2c \operatorname{ch} \varphi), \quad \frac{dy}{d\varphi} = m \operatorname{sh} \varphi (1 + 2c \operatorname{ch} \varphi).$$

D'où :

$$x = m (\varphi + 2c \operatorname{sh} \varphi), \quad y = m (\operatorname{ch} \varphi + c \operatorname{ch}^2 \varphi). \quad (2)$$

Nous pouvons supposer, dans ce qui suit, le paramètre de similitude m égal à l'unité.

La chaînette élastique est le lieu géométrique du milieu d'un segment rectiligne dont les extrémités décrivent une chaînette et une parabole ordinaires, de telle façon que les pentes des tangentes aux deux courbes en ces points associés soient égales.

Etude du rayon de courbure. Points de rebroussement.

L'équation (1) montre que le rayon de courbure s'annule pour :

$$1 + 2c \operatorname{ch} \varphi = 0. \quad (3)$$

Les points de rebroussement ne sont donc réels que pour les chaînettes élastiques dont le demi-paramètre spécifique c est négatif, compris entre les limites :

$$-\frac{1}{2} < c < 0.$$

Par analogie avec la faculté de se contracter des fibres musculaires, de leur « contractilité », M. TURRIÈRE propose le nom de *chaînettes contractiles* pour les chaînettes dont le paramètre c a une valeur numérique négative. Si la condition précédente est satisfaite, les coordonnées des points de rebroussement seront données par l'élimination de c entre les équations (1) et (3) :

$$X = \varphi - \operatorname{th} \varphi, \quad Y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \varphi.$$

Il y a lieu de remarquer que le lieu de ces points de rebroussement se déduit de la tractrice de Huygens par la transformation ponctuelle :

$$X = x, \quad Yy = \frac{1}{2}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à OY . Elle admet une branche parabolique dans la direction de cet axe.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX} &= \frac{\operatorname{ch}^2 \varphi}{2 \operatorname{sh} \varphi}, \\ \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dY}{dX} \right) &= \frac{\operatorname{ch} \varphi}{2} \frac{\operatorname{sh}^2 \varphi - 1}{\operatorname{sh}^2 \varphi}. \end{aligned}$$

La courbe admet un point de rebroussement ($X = 0, Y = \frac{1}{2}$) avec OY pour tangente.

Elle a deux points d'inflexion symétriques par rapport à OY qui correspondent à :

$$\operatorname{sh} \varphi = \pm 1, \text{ c'est-à-dire } \varphi = \pm 0,8814.$$

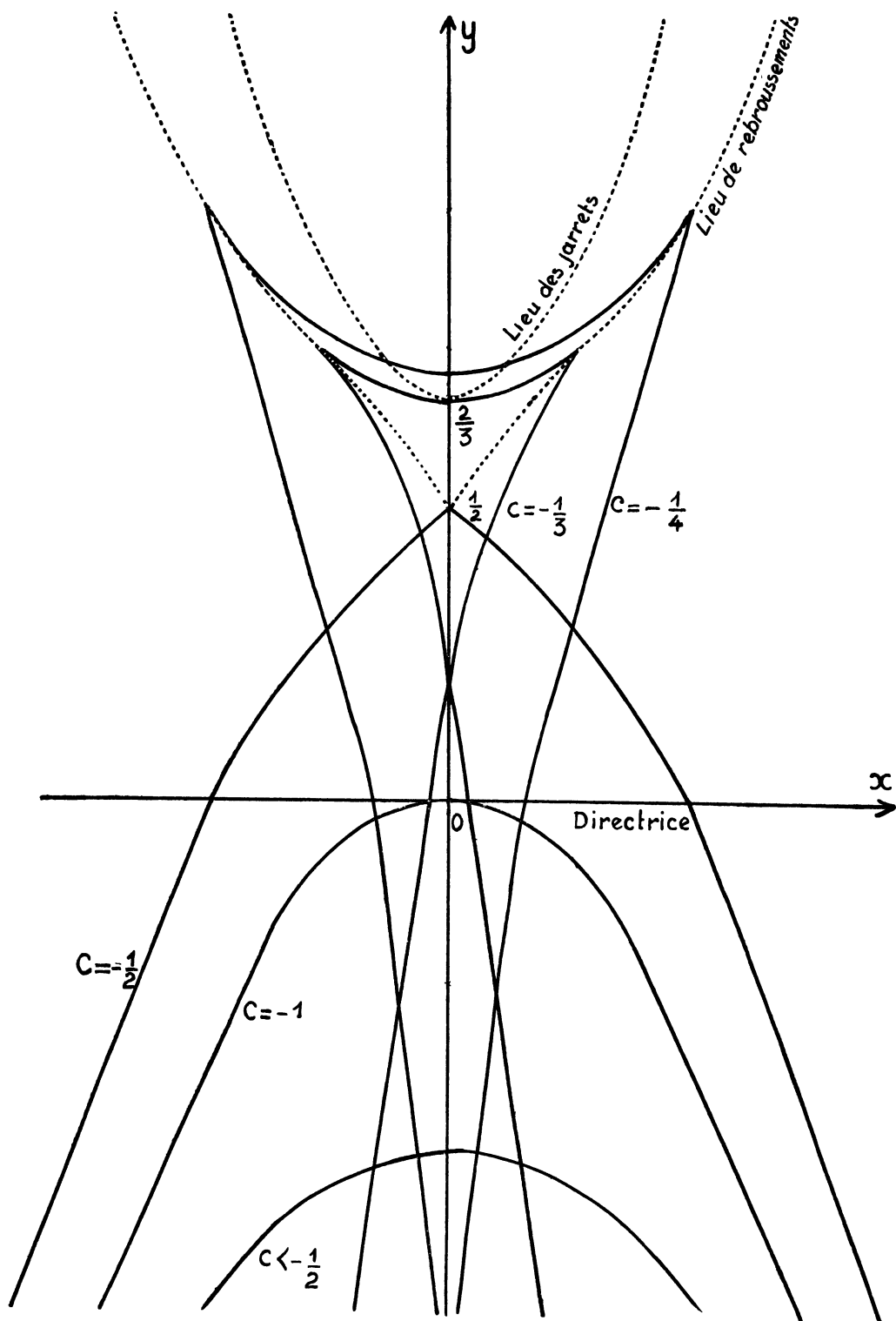


FIGURE 10. — Chaînettes élastiques et chaînettes contractiles.

L'un d'eux a pour coordonnées :

$$x = 0,1743, \quad y = 0,7071,$$

avec une tangente inflexionnelle à 45° sur les axes. La courbe a la forme indiquée dans la figure (10).

On déduit de (1) :

$$\frac{dR}{d\varphi} = \operatorname{sh} 2\varphi (1 + 3c \operatorname{ch} \varphi). \quad (4)$$

Seules donc ont des jarrets réels les chaînettes contractiles dont le paramètre c satisfait à la condition :

$$-\frac{1}{3} < c < 0.$$

Si cette condition est remplie, le lieu des jarrets correspondants a pour équations paramétriques :

$$x = \varphi - \frac{2}{3} \operatorname{th} \varphi, \quad y = \frac{2}{3} \operatorname{ch} \varphi.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\operatorname{sh} \varphi (\operatorname{sh}^2 \varphi + 1)}{3\operatorname{sh}^2 \varphi + 1}, \quad \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{6\operatorname{ch} \varphi (3\operatorname{sh}^4 \varphi + 1)}{(3\operatorname{sh}^2 \varphi + 1)^2} > 0.$$

La courbe, lieu des jarrets, est également symétrique par rapport à l'axe oy qu'elle coupe orthogonalement au sommet $\left(x = 0, y = \frac{2}{3} \right)$.

Elle n'a pas de points d'inflexion.

De toutes ces considérations, résulte la discussion suivante :

$1^\circ c > 0$. — La chaînette élastique n'a ni jarret, ni points de rebroussement. Elle a une allure générale intermédiaire entre la chaînette ordinaire et la parabole. Le rayon de courbure croît constamment à partir du sommet.

$2^\circ -\frac{1}{3} < c < 0$. — Entre ces limites du paramètre c , la chaînette contractile admet à la fois des points de rebroussement et des jarrets. Elle possède, en outre, un point double situé sur oy qui est donné par l'équation transcendante :

$$\varphi + 2c \operatorname{sh} \varphi = 0,$$

laquelle admet des racines réelles dans les mêmes conditions que celle relative aux points de rebroussement. Le rayon de courbure part de la valeur minimum $1 + 2c$ atteinte au sommet, croît jusqu'à la valeur $\frac{1}{27 c^2}$ aux jarrets pour :

$$\operatorname{ch} \varphi = -\frac{1}{3 c},$$

décroît jusqu'à 0 aux rebroussements et finalement croît indéfiniment en valeur absolue.

Pour illustrer ce cas, on peut prendre $c = -\frac{1}{4}$. Le sommet aura pour coordonnées : $x = 0$, $y = \frac{3}{4}$. Un des points de rebroussement correspondra à :

$$\operatorname{ch} \varphi = 2, \quad \varphi = 1,317,$$

et aura pour coordonnées : $x = 0,451$, $y = 1$.

L'un des jarrets correspond à :

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{4}{3}, \quad \varphi = 0,795,$$

et a pour coordonnées :

$$x = 0,354, \quad y = 0,445.$$

Le point double correspond à :

$$\varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{2},$$

équation transcendante dont on pourra déterminer approximativement les racines en employant la méthode qui sera indiquée ultérieurement pour la résolution de l'équation de Képler. Ici le calcul donne les valeurs :

$$\varphi = 2,1803, \quad x = 0, \quad y = -1,098.$$

Le point de rencontre avec le demi-axe ox , correspond à :

$$\operatorname{ch} \varphi = 4, \quad \varphi = 2,064,$$

et a pour coordonnées :

$$x = 0,128, \quad y = 0.$$

Le rayon de courbure prend la valeur $\frac{1}{2}$ au sommet et $\frac{16}{27}$ aux jarrets.

Les pentes des tangentes aux points de rebroussement ont pour valeurs $\pm \sqrt{3}$.

Il est facile, avec ces résultats numériques, de tracer la chaînette contractile correspondante.

3° $-\frac{1}{2} < c < -\frac{1}{3}$. — Les jarrets disparaissent. Le rayon de courbure décroît constamment de la valeur $1 + 2c$ à la valeur 0 qu'il atteint aux rebroussements, puis augmente en valeur absolue jusqu'à l'infini. Il y a encore un point double sur oy.

Pour exemple de ce troisième cas, on peut prendre $c = -\frac{2}{5} = -0,4$.

Dans ces conditions, le sommet a pour coordonnées :

$$x = 0, \quad y = 0,2,$$

les points de rebroussement :

$$x = \pm 0,0971, \quad y = 0,625,$$

le point de rencontre avec ox :

$$x = 7,442, \quad y = 0.$$

Le point double correspond à :

$$\frac{\text{sh} \varphi}{\varphi} = \frac{5}{4},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \varphi &= 1,194, & \text{sh} \varphi &= 1,498, & \text{ch} \varphi &= 1,801, \\ x &= 0, & y &= 0,404. \end{aligned}$$

4° $c < -\frac{1}{2}$. — Ici il n'y a ni rebroussement ni jarrets.

Le rayon de courbure croît constamment à partir du sommet en valeur absolue.

La courbe a la forme générale d'une chaînette renversée.

La discussion montre combien la forme même de la courbe est affectée par la variation du *paramètre spécifique*, alors que le paramètre m est un simple *paramètre de similitude*.

Enveloppe des chaînettes élastiques quand c varie.

En supposant toujours m égal à 1, cherchons l'enveloppe de la famille des chaînettes élastiques définies par les équations (2). Nous avons à écrire :

$$\frac{D(x, y)}{D(\varphi, c)} = \begin{vmatrix} 1 + 2c \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi (1 + 2c \operatorname{ch} \varphi) \\ 2 \operatorname{sh} \varphi & \operatorname{ch}^2 \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$(1 + 2c \operatorname{ch} \varphi) (\operatorname{sh}^2 \varphi - 1) = 0.$$

Le premier facteur égal à zéro nous ramène à l'équation (3) et par conséquent correspond au lieu des points de rebroussement qui fait partie analytiquement de l'enveloppe.

Le deuxième facteur donne :

$$\operatorname{sh} \varphi_0 = \pm 1, \quad \varphi_0 = \pm 0,8814,$$

et définit deux tangentes fixes communes à toutes les chaînettes, résultats conformes à ce que nous avons signalé antérieurement pour les courbes de Ribaucour avec élasticité. Ces tangentes fixes ont donc pour équations :

$$X - Y = -0,5328, \quad X + Y = 0,5328.$$

Développantes des chaînettes élastiques.

L'arc de la chaînette élastique compté à partir du sommet est donné par :

$$s = \int_0^{\varphi} R \frac{d\alpha}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{\varphi} \operatorname{ch} \varphi (1 + 2c \operatorname{ch} \varphi) d\varphi = \operatorname{sh} \varphi + \frac{c}{2} (\operatorname{sh} 2\varphi + 2\varphi).$$

Les coordonnées du point courant de la développante partant du sommet sont donc définies par :

$$\frac{X - x}{\cos \alpha} = \frac{Y - y}{\sin \alpha} = -s,$$

où x et y ont des valeurs définies par (2).

On en déduit :

$$D_0 \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi - \operatorname{th} \varphi + c \left(\operatorname{sh} \varphi - \frac{\varphi}{\operatorname{ch} \varphi} \right), \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} + c (1 - \varphi \operatorname{th} \varphi). \end{array} \right. \quad (5)$$

Pour $c = 0$ on retrouve la tractrice ordinaire, développante de la chaînette ordinaire.

La courbe D_0 est de même le lieu géométrique du milieu d'un segment rectiligne dont les extrémités décrivent une tractrice et une développante de la parabole ordinaire, de telle manière que les pentes de ces deux courbes en ces points associés soient égales.

Les courbes D_0 jouissent des mêmes propriétés que les chaînettes élastiques elles-mêmes au point de vue des enveloppements. Leur enveloppe, quand c varie, se compose des tangentes fixes et du lieu des rebroussements.

L'équation de la tangente au point courant de D_0 peut s'écrire :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \varphi \cos \alpha + c (2 \operatorname{th} \varphi - \varphi). \quad (5')$$

On voit alors que les tangentes fixes correspondent à l'équation transcendante :

$$\varphi = 2 \operatorname{th} \varphi.$$

Il est facile de voir que cette équation admet 2 racines opposées. Il est possible d'obtenir une valeur approchée des racines en remplaçant le rapport $\frac{\operatorname{sh} \varphi}{\varphi}$ par l'expression :

$$3 \frac{2 \operatorname{ch} \varphi + 3}{\operatorname{ch} \varphi + 14},$$

qui n'en diffère qu'à partir des termes en φ^6 (voir chapitre XIII). On se ramène ainsi à une équation du 2^e degré en $\operatorname{ch} \varphi$:

$$\operatorname{ch} \varphi = 6 \frac{2 \operatorname{ch} \varphi + 3}{\operatorname{ch} \varphi + 14},$$

dont la racine positive est :

$$\operatorname{ch} \varphi_1 = -1 + \sqrt{19} = 3.3589.$$

En étudiant le signe de $\varphi - 2\text{th}\varphi$ au voisinage de cette valeur, on constate qu'on peut prendre pour racine de l'équation transcendante :

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 1,9150, \\ \text{ch}\varphi_0 &= 3,467, \quad \text{sh}\varphi_0 = 3,320, \quad \text{th}\varphi_0 = 0,9575.\end{aligned}$$

Les tangentes fixes sont donc la droite :

$$X + 3,320 Y = 1,9150,$$

et sa symétrique par rapport à oy.

Ces mêmes courbes possèdent aussi comme normales fixes les tangentes fixes aux chaînettes élastiques ($\text{sh}\varphi = \pm 1$).

Foyers. Directrice.

Les tangentes isotropes correspondent à :

$$\frac{dy}{dx} = \text{sh}\varphi = i.$$

On en déduit pour les points de contact des tangentes isotropes :

$$\begin{aligned}\text{ch}\varphi &= 0, \quad e^{\varphi} = i, \\ \varphi &= \left(\frac{\pi}{2} + 2N\pi \right) i, \quad N \text{ entier arbitraire,}\end{aligned}$$

Les points de contact des tangentes isotropes ont donc pour coordonnées :

$$x = \left(\frac{\pi}{2} + 2N\pi + 2c \right) i, \quad y = 0.$$

L'axe ox est donc la directrice commune à toutes les chaînettes élastiques. La courbe présente une infinité de foyers réels et isolés sur l'axe oy de coordonnées :

$$x = 0, \quad y = \frac{\pi}{2} + 2N\pi + 2c.$$

Propriétés géométriques.

I. — Soit M' la projection sur l'axe de symétrie oy du point courant de la chaînette élastique, $M'T'$ la parallèle à la tangente MT . L'équation de la droite $M'T'$ est :

$$Y - c\varphi - c \operatorname{ch}^2 \varphi = X \operatorname{sh} \varphi,$$

ce qui peut s'écrire :

$$-X \sin \alpha + Y \cos \alpha = \frac{c}{\cos \alpha} + 1.$$

Sous cette forme, l'équation montre que la droite $M'T'$ enveloppe une parallèle de parabole admettant l'origine O comme foyer. Cette propriété généralise celle qui concerne la chaînette ordinaire pour laquelle $M'T'$ enveloppe le cercle de centre O et tangent à la courbe en son sommet, ce qui se vérifie ici en faisant $c = 0$ dans l'équation précédente.

Il en résulte une construction géométrique de la tangente.

II. — Soient MT la tangente et MN la normale en M à la chaînette élastique, T et N , leurs traces respectives sur la base et P la projection de M sur ox .

Soit Ω l'anti-centre de la courbe en M , c'est-à-dire, par définition, le symétrique du centre de courbure par rapport à la tangente MT .

Il est au-delà de N , c'est-à-dire au-dessous de la base. On a :

$$MN = y \operatorname{ch} \varphi, \quad N\Omega = c \operatorname{ch}^3 \varphi, \quad y_\omega = -c \operatorname{ch}^2 \varphi.$$

Soit P , le pied de l'ordonnée de M .

Projetons Ω en Q' sur MP et soit Q le symétrique de Q' par rapport à ox . On a :

$$MQ = c\varphi, \quad PQ = c MQ^2.$$

III. — Soit enfin H l'orthocentre limite, c'est-à-dire le milieu de $M\Omega$. On a :

$$HN = \frac{c \operatorname{ch}^2 \varphi}{2}.$$

Si on désigne par R_0 le rayon de courbure de la chaînette ordinaire ($c = 0$), on voit que :

$$HN = \frac{R_0}{2}, \quad y_H = HN \cos \alpha = \frac{y_0}{2}.$$

L'ordonnée de H est donc indépendante de c .

Remarque. — La chaînette élastique, d'après la définition mécanique que nous avons donnée au chapitre VIII, est la figure d'équilibre d'un fil homogène élastique fixé à ses deux bouts et soumis à la seule action de son propre poids. Si l'on considère les équations de la statique du fil dans ce cas, on a :

$$T = \frac{m\delta}{\cos \alpha}, \quad T = \delta \cdot MQ.$$

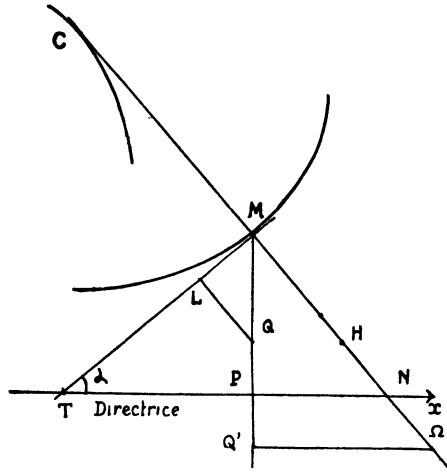


FIGURE 11.

Par conséquent on voit que le segment MQ représente l'effort de tension du fil pour une densité linéaire uniforme égale à 1 :

De même, soit L la projection de Q sur la tangente MT. On a :

$$QL = QM \cos \alpha = 1.$$

Le segment QL représente donc le paramètre de la chaînette élastique.

La chaînette élastique a primitivement été étudiée par Jacques BERNOULLI, puis par BOBILLIER et FINCK (1826). Elle est signalée dans le *Traité des fonctions elliptiques* de GREENHILL, et étudiée dans la *Statique* de ROUTH.

E.D. GRANT (1918), dans une thèse de l'Université de Chicago, en a fait l'étude comparative avec la chaînette, sur un câble de téléphérique de 1850 mètres de long, utilisé pour l'élévation du minerai de cuivre dans les mines de Michigan.

M. TURRIÈRE lui a consacré enfin une étude détaillée en 1936, avant d'être amené à introduire la chaînette contractile dans ses études des arches de ponts (1).

(1) BOBILLIER et FINCK. — Recherche de l'équation de la chaînette de masse variable dans laquelle la masse de chaque élément est proportionnelle à la tension qu'il éprouve et de l'équation de la chaînette uniformément extensible dans laquelle la variation de la masse n'est due qu'à l'inégalité de la tension des éléments. *Annales de Gergonne*, XVII, 1826 et 1827, pp. 59-69.

A G. GREENHILL. — Les fonctions elliptiques et leurs applications. Traduction française, 1895, pp. 137-138.

E J. ROUTH. — A treatise on analytical statics, 1896, I, pp. 346-347.

E.D. GRANT — Motion of a flexible cable in a vertical plane. (Dissertation, University Chicago), 1918, 28 p.

E TURRIÈRE — Sur la chaînette élastique et la chaînette hétérogène, *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, 1936, t. XXII, p. 5-28.

CHAPITRE X

PARABOLE ÉLASTIQUE OU CONTRACTILE

L'équation de la courbe de RIBAUCCOUR élastique correspondante à $k = 2$ s'écrit :

$$R \cos^3 \alpha = m (1 + \mu \cos^{-1} \alpha),$$

ou :

$$R = m \operatorname{ch}^3 \varphi (1 + \mu \operatorname{ch} \varphi), \quad (1)$$

ce qui donne (en tenant compte des formules générales antérieurement indiquées) :

$$\frac{dx}{d\varphi} = m (\operatorname{ch} \varphi + \mu \operatorname{ch}^2 \varphi), \quad \frac{dy}{d\varphi} = m (\operatorname{ch} \varphi + \mu \operatorname{ch}^2 \varphi) \operatorname{sh} \varphi.$$

D'où, pour la représentation paramétrique de la parabole élastique, avec choix convenable d'origine des axes :

$$\begin{aligned} x &= m \left[\operatorname{sh} \varphi + \frac{\mu}{4} (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) \right], \\ y &= m \left[\frac{\operatorname{ch}^2 \varphi}{2} + \frac{\mu}{3} \operatorname{ch}^3 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

C'est la parabole élastique, lieu géométrique du milieu d'un segment rectiligne dont les extrémités décrivent une parabole ordinaire et une courbe de Ribaucour ordinaire d'équations :

$$\xi = \frac{m\mu}{2} (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi), \quad \eta = \frac{2m\mu}{3} \operatorname{ch}^3 \varphi,$$

de telle façon que les pentes de ces courbes en ces points associés soient égales.

Comme pour les courbes précédentes, nous supposons, dans ce qui suit, $m = 1$ et nous discutons la forme de ces paraboles élastiques par rapport à μ , qui constituent les types de réduction à une similitude près.

Nous désignerons sous le nom de *paraboles contractiles*, celles de ces courbes qui correspondent aux valeurs négatives de μ .

Rayon de courbure. Points de rebroussement.

L'équation (1) montre que le rayon de courbure s'annule pour :

$$1 + \mu \operatorname{ch} \varphi = 0 ,$$

relation qui exige, pour la réalité, que μ soit compris entre les limites — 1 et 0.

Quand la relation (4) est satisfaite, les points de rebroussement sont réels et les équations paramétriques de leur lieu, quand μ varie, s'obtiennent en éliminant ce paramètre entre (2) et (3), ce qui donne :

$$x = \frac{\operatorname{sh} 2\varphi - 2\varphi}{4 \operatorname{ch} \varphi} , \quad y = \frac{\operatorname{ch}^2 \varphi}{6} .$$

Ce lieu est une courbe admettant oy comme axe de symétrie. On a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \operatorname{ch}^3 \varphi}{3 (\operatorname{sh} 2\varphi + 2\varphi)} .$$

La courbe part tangentiellement à l'axe oy du point $x = 0$, $y = \frac{1}{6}$ qui est de rebroussement.

L'étude de la concavité de la courbe dépend du signe de l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{3(\operatorname{sh} 2\varphi + 2\varphi)^2}{8 \operatorname{ch}^2 \varphi \operatorname{sh} \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dy}{dx} \right) &= 3\varphi + 3 \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi - \frac{2 \operatorname{ch}^3 \varphi}{\operatorname{sh} \varphi} \\ &= 3\varphi - \frac{2 - 3 \operatorname{th}^2 \varphi}{\operatorname{th} \varphi (1 - \operatorname{th}^2 \varphi)} . \end{aligned}$$

L'expression impaire du deuxième membre a pour dérivée :

$$2 \frac{\operatorname{ch}^4 \varphi}{\operatorname{sh}^2 \varphi} > 0 .$$

Elle est donc croissante. Pour $\varphi = 0$, elle part de la valeur $-\infty$; elle a donc une racine et une seule positive.

Si nous appliquons la formule empirique donnée au chapitre XIII :

$$\frac{\varphi}{\text{sh}\varphi} = \frac{1}{3} \frac{\text{ch}\varphi + 14}{2\text{ch}\varphi + 3} ,$$

et si nous posons :

$$\text{ch}\varphi = \gamma ,$$

l'expression du deuxième membre égale à zéro prendra la forme algébrique :

$$\gamma^4 + 2\gamma^3 + 4\gamma^2 - 5\gamma - 7 = 0.$$

Cette équation admet la racine positive :

$$\gamma = 1,278.5,$$

qui correspond à :

$$\varphi = 0,730.5 .$$

En étudiant le signe du premier membre de l'équation transcendante :

$$3\varphi + 3\text{ch}\varphi \text{sh}\varphi - \frac{2\text{ch}^3\varphi}{\text{sh}\varphi} ,$$

au voisinage de la valeur 0,73, on trouve la valeur exacte :

$$\varphi = 0,74005.$$

La courbe a une allure identique au lieu des points de rebroussement des chaînettes contractiles.

On déduit de l'équation (1) :

$$\frac{dR}{d\varphi} = m\text{ch}^2\varphi\text{sh}\varphi (3 + 4\mu\text{ch}\varphi) . \quad (5)$$

Seules, ont des jarrets réels les paraboles contractiles dont le paramètre μ satisfait à la condition :

$$-\frac{3}{4} < \mu < 0 .$$

Les équations paramétriques du lieu de ces jarrets, quand μ varie, s'obtiennent en remplaçant dans (2) μ par $-\frac{3}{4\text{ch}\varphi}$, ce qui donne :

$$x = \frac{5\text{sh} 2\varphi - 6\varphi}{16 \text{ch}\varphi} , \quad y = \frac{\text{ch}^2\varphi}{4} .$$

C'est également une courbe qui admet oy comme axe de symétrie.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{5\text{ch}^3\varphi + 3\varphi\text{sh}\varphi - 3\text{ch}\varphi}{4\text{ch}^3\varphi \text{sh}\varphi},$$

$$4\text{ch}^4\varphi\text{sh}^2\varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dx}{dy} \right) = - \left[9\varphi \text{sh}^3\varphi + \text{ch}\varphi (5\text{sh}^4\varphi - 2\text{sh}^2\varphi + 2) \right] < 0.$$

La courbe part orthogonalement à oy du point $x = 0, y = \frac{1}{4}$. Elle n'a pas de point d'inflexion. C'est donc encore une courbe analogue au lieu de jarrets des chaînettes contractiles.

De toutes ces considérations se déduisent les résultats suivants :

1° $\mu > 0$. — La parabole élastique n'a ni jarret (autre que le sommet situé sur l'axe de symétrie), ni point de rebroussement. Le rayon de courbure croît constamment en valeur absolue à partir du sommet.

2° $-\frac{3}{4} < \mu < 0$. — Entre ces limites du paramètre μ , la parabole contractile possède à la fois des points de rebroussement et des jarrets. Le rayon de courbure croît de la valeur $1 + \mu$ atteinte au sommet jusqu'à la valeur maximum correspondante aux jarrets, pour lesquels on a $\text{ch}\varphi = -\frac{3}{4\mu}$; décroît jusqu'à 0 aux points de rebroussement pour augmenter indéfiniment en valeur absolue.

Il y a lieu de remarquer encore ici que la courbe possède un point double situé sur l'axe de symétrie déterminé par l'équation transcendante :

$$-\frac{4}{\mu} = \frac{\text{sh}2\varphi + 2\varphi}{\text{sh}\varphi}.$$

La fonction paire du deuxième membre est croissante pour φ positif puisqu'elle a pour dérivée :

$$\text{sh}\varphi^{-1} \coth\varphi (\text{sh}2\varphi - 2\varphi) > 0.$$

Comme elle part de la valeur 4 pour $\varphi = 0$, il faut et il suffit, pour que l'équation ait une racine positive unique, que :

$$-1 < \mu < 0 .$$

3° $-1 < \mu < -\frac{3}{4}$. — A partir de la valeur $-\frac{3}{4}$ du paramètre μ , les jarrets disparaissent. Le rayon de courbure décroît constamment de la valeur $1 + \mu$ à la valeur 0 atteinte aux rebroussements, puis augmente indéfiniment en valeur absolue. Il y a encore un point double situé sur l'axe oy.

4° $\mu < -1$. — Ici les points de rebroussement eux-mêmes disparaissent ainsi que le point double. Le rayon de courbure croît indéfiniment en valeur absolue à partir du sommet. La courbe a l'allure générale d'une parabole encore plus aplatie que la parabole ordinaire sur l'axe oy.

La discussion montre que les paraboles élastiques et contractiles ont des formes sensiblement identiques à celles reproduites dans la figure (10), pour les chaînettes élastiques et contractiles.

Enveloppe des paraboles élastiques quand μ varie.

Quand le paramètre μ varie d'une façon continue de $-\infty$ à $+\infty$, les paraboles élastiques enveloppent une courbe dont l'équation est définie par :

$$\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \mu)} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\varphi + \mu \operatorname{ch}^2\varphi & \frac{\varphi + \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\varphi}{2} \\ (\operatorname{ch}\varphi + \mu \operatorname{ch}^2\varphi) \operatorname{sh}\varphi & \frac{\operatorname{ch}^3\varphi}{3} \end{vmatrix} = 0$$

ou :

$$(\operatorname{ch}\varphi + \mu \operatorname{ch}^2\varphi) \left(\frac{\operatorname{ch}^3\varphi}{3} - \frac{\varphi + \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\varphi}{2} \operatorname{sh}\varphi \right) = 0.$$

Le premier facteur égalé à 0 conduit au lieu des points de rebroussement qui fait partie analytiquement de l'enveloppe cherchée.

Le deuxième facteur nous donne :

$$\frac{\text{ch}^3 \varphi}{3} - \frac{\varphi + \text{sh} \varphi}{2} \frac{\text{ch} \varphi}{2} \text{sh} \varphi = 0,$$

ou :

$$\text{ch} \varphi - \varphi \text{sh} \varphi - \frac{\text{ch}^3 \varphi}{3} = 0,$$

équation transcendante qui admet une seule racine réelle dans l'intervalle $(0, \infty)$. On trouve :

$$\varphi_0 = \pm 0,7302,$$

ce qui détermine deux tangentes spéciales communes à toutes les paraboles élastiques.

Développantes des paraboles élastiques.

L'arc de la parabole élastique, compté à partir du sommet, est donné par :

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\varphi R \frac{d\alpha}{d\varphi} d\varphi = \int_0^\varphi \text{ch}^2 \varphi (1 + \mu \text{ch} \varphi) d\varphi \\ &= \frac{\text{sh} 2\varphi + 2\varphi}{4} + \mu \left(\frac{\text{sh}^3 \varphi}{3} + \text{sh} \varphi \right). \end{aligned}$$

La développante partant du sommet sera donc définie par :

$$\frac{X - x}{\cos \alpha} = \frac{Y - y}{\sin \alpha} = -s,$$

où x et y sont donnés par (2).

On en déduit :

$$D \begin{cases} 2X = \text{sh} \varphi - \frac{\varphi}{\text{ch} \varphi} + \mu \left(\varphi + \text{sh} \varphi \text{ch} \varphi - \frac{2}{3} \text{sh}^2 \varphi \text{th} \varphi - 2 \text{th} \varphi \right), \\ 2Y = 1 - \varphi \text{th} \varphi + \frac{2\mu}{3} (\text{ch}^3 \varphi - \text{sh}^3 \varphi \text{th} \varphi - 3 \text{sh} \varphi \text{th} \varphi). \end{cases}$$

Pour $\mu = 0$ on retrouve la développante de la parabole ordinaire.

La courbe D est le lieu géométrique du milieu d'un segment rectiligne dont les extrémités décrivent respectivement une développante de la parabole ordinaire et celle de la courbe de Ribaucour ordinaire définie par l'équation naturelle :

$$R \cos^4 \alpha = R_0 ,$$

de telle façon que les pentes de ces deux développantes aux points associés sont égales.

Au point de vue des enveloppements, les courbes D forment, quand μ varie, une famille jouissant des propriétés analogues à celles des paraboles élastiques elles-mêmes. Leur enveloppe se compose du lieu des points de rebroussement et de deux tangentes fixes symétriquement placées par rapport à oy.

Les courbes D admettent d'autre part deux normales fixes qui sont les tangentes spéciales communes aux paraboles élastiques.

Foyers. Directrices.

Reprenons l'étude que nous avons faite au sujet des chaînettes élastiques. Nous voyons que les points de contact des tangentes isotropes correspondent à :

$$\operatorname{sh} \varphi = i , \quad \operatorname{ch} \varphi = 0 , \quad \varphi = \left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi \right) i ,$$

et par suite auront pour coordonnées :

$$x = \left[1 + \pi\mu \left(\frac{1}{4} + \frac{K}{2} \right) \right] i , \quad y = 0 ,$$

(K est un entier arbitraire).

L'axe ox est donc la *directrice commune à toutes les paraboles élastiques*.

L'équation de la tangente isotrope considérée est :

$$Y - iX = 1 + \frac{\pi\mu (1 + 2K)}{4} .$$

D'où les coordonnées d'un foyer :

$$x = 0, \quad y = 1 + \frac{\pi\mu (1 + 2K)}{4} .$$

K est un entier arbitraire.

CHAPITRE XI

LA CYCLOÏDE ÉLASTIQUE

ET LA CYCLOÏDE CONTRACTILE $k = 2$.

Pour l'indice $k = -2$, l'équation naturelle de la courbe de Ribaucour avec élasticité est :

$$R = m (\cos \alpha + \mu) ; \quad (1)$$

le rayon de courbure à la clef est donc :

$$R_0 = m (1 + \mu).$$

La courbe correspondante s'obtient donc comme résultante par l'addition de D'Aoust d'une cycloïde ordinaire et d'un cercle. C'est donc ici une parallèle de cycloïde. C'est elle que nous appellerons *cycloïde contractile ou élastique*, conformément à la définition plus générale ; nous déduisons immédiatement de l'équation (1) la représentation paramétrique de cette courbe :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= m (\cos \alpha + \mu) \cos \alpha, & \frac{dy}{d\alpha} &= m (\cos \alpha + \mu) \sin \alpha; \\ x &= \frac{m}{4} (2\alpha + \sin 2\alpha + 4\mu \sin \alpha), \\ y &= \frac{m}{4} (1 - \cos 2\alpha - 4\mu \cos \alpha) = \frac{m}{2} (\sin^2 \alpha - 2\mu \cos \alpha). \end{aligned} \right\} (2)$$

C'est le lieu géométrique du milieu d'un segment rectiligne dont les extrémités décrivent un cercle et une cycloïde de telle façon que les tangentes à ces courbes en ces points associés soient parallèles.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; comme la cycloïde elle est composée d'une infinité d'arches égales.

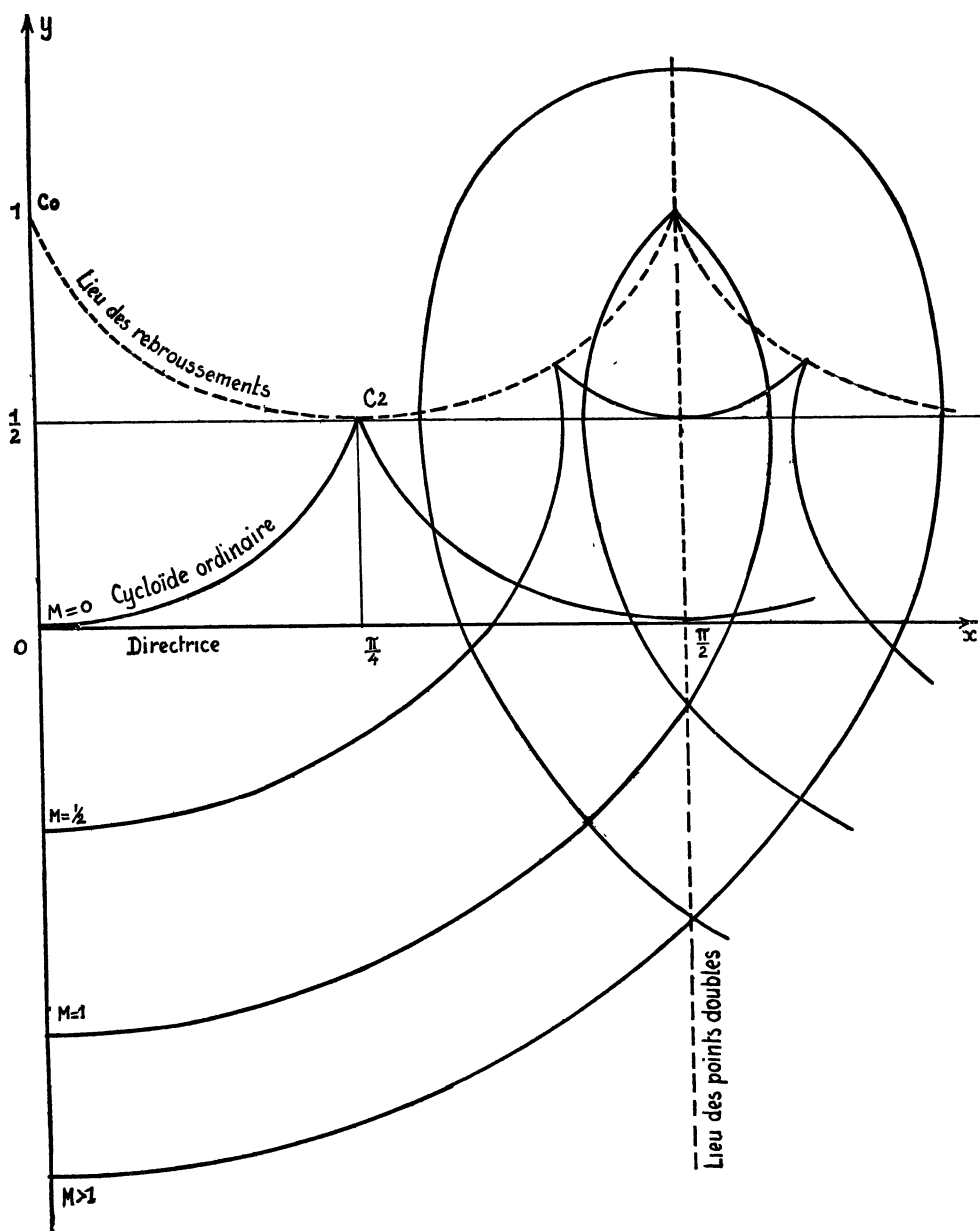


FIGURE 12. — Cycloïdes élastiques.

Le changement de signe de μ correspond à une translation de la courbe, parallèlement à ox , d'amplitude $\frac{m\pi}{2}$:

$$x(\alpha + \pi, \mu) = x(\alpha, -\mu) + m \frac{\pi}{2} ,$$

$$y(\alpha + \pi, \mu) = y(\alpha, -\mu).$$

La forme de la courbe ne dépend donc pas du signe de μ . Nous pouvons supposer dans ce qui suit $\mu > 0$.

Rayons de courbure. Points de rebroussement. Jarrets.

L'équation (1) montre que les points de rebroussement correspondent aux valeurs de α pour lesquelles on aura $\cos \alpha = -\mu$.

Ces points ne sont donc réels, que si l'on a : $1 > \mu > 0$.

On déduit de (1) :

$$dR = -m \sin \alpha d\alpha .$$

Dans l'intervalle $(0, \pi)$ le rayon de courbure décroît constamment de la valeur $m(1 + \mu)$ à $m(-1 + \mu)$.

dR change de signe pour les valeurs de α égales à : $0, \pi, 3\pi$, etc... Les jarrets se trouvent donc sur des droites parallèles à oy équidistantes entre elles, définies par :

$$x = \frac{m\pi}{2} , \quad m, \quad \frac{3m\pi}{2} , \quad \text{etc...}$$

Ces différentes variations sont contenues dans les tableaux suivants :

$\mu > 1$:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x	0	$m\left(\frac{\pi}{4} + \mu\right)$	$m\frac{\pi}{2}$
y	$-m\mu$	$\frac{m}{2}$	$m\mu$
R	$m(\mu + 1)$	$m\mu$	$m(\mu - 1)$

$\mu < 1$:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	α_1	π
x	0	$m \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right)$	x_1	$\frac{m\pi}{2}$
y	$-m\mu$	$\frac{m}{2}$	y_1	$m\mu$
R	$m(\mu + 1)$	$m\mu$	0	$m(\mu - 1)$

avec

$$\cos \alpha_1 = -\mu, \quad \sin \alpha_1 = \sqrt{1 - \mu^2},$$

$$x_1 = \frac{m}{2} \left(\mu \sqrt{1 - \mu^2} + \alpha_1 \right), \quad y_1 = \frac{m}{2} (1 + \mu^2).$$

Exemple : Pour $\mu = \frac{1}{2}$: $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$,

$$x_1 = m \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right), \quad y_1 = \frac{5m}{8},$$

Pour $\mu = 0$, la courbe est la cycloïde ordinaire ; et pour μ très grand, les courbes se rapprochent de plus en plus du cercle.

Lieu des points de rebroussement.

Nous obtenons les équations paramétriques du lieu des points de rebroussement en remplaçant dans les équations (2) μ par $-\cos \alpha$; on trouve :

$$X = \frac{m}{4} (\sin 2\alpha - 4 \cos \alpha \sin \alpha + 2\alpha),$$

$$Y = \frac{m}{2} (\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha),$$

formules qui peuvent encore s'écrire :

$$X = \frac{m}{4} (2\alpha - \sin 2\alpha),$$

$$Y = \frac{m}{2} (1 + \cos^2 \alpha).$$

Cette nouvelle courbe est une cycloïde ordinaire, admettant la droite $y = \frac{m}{2}$ comme base et dont le cercle générateur a pour diamètre $\frac{m}{2}$. Elle constitue, conformément aux résultats que nous avons donnés dans le chapitre VIII, l'unique enveloppe des cycloïdes élastiques. On peut s'en rendre compte directement.

En effet, on obtient l'enveloppe des courbes (2) dépendant du paramètre μ en annulant le déterminant fonctionnel :

$$\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \mu)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0 ,$$

ou :

$$\begin{vmatrix} (\cos \alpha + \mu) \cos \alpha & (\cos \alpha + \mu) \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix} = -(\cos \alpha + \mu) = 0.$$

Les points remarquables des cycloïdes élastiques et contractiles.

1° Le point C_0 , de coordonnées $x_0 = 0$, $y_0 = m$, est le centre de courbure à l'origine de toutes les cycloïdes élastiques définies par (2). En effet, pour $\alpha = 0$, on voit que :

$$\overline{OM_0} = -m\mu , \quad \overline{M_0C_0} = R_0 = m(1 + \mu) ;$$

et par suite :

$$\overline{OC_0} = \overline{M_0C_0} - \overline{M_0O} = m .$$

2° Le point C_1 , de coordonnées $x_1 = \frac{m\pi}{2}$, $y_1 = m$, est le centre de courbure des mêmes courbes aux points où $\alpha = \pi$. En effet, pour cette valeur de α :

$$x = \frac{m\pi}{2} , \quad y = m\mu , \quad R = m(\mu - 1).$$

3° Le point C_2 de coordonnées $x_2 = \frac{m\pi}{4}$, $y_2 = \frac{m}{2}$ est le centre de courbure de toutes les courbes aux points où $\alpha = \frac{\pi}{2}$; pour cette valeur de α :

$$x = m \left(\frac{\pi}{4} + \mu \right), \quad y = \frac{m}{3}, \quad R = m\mu.$$

Développante des cycloïdes élastiques et contractiles.

L'arc de la cycloïde élastique, compté à partir du sommet, est donné par :

$$s = \int_0^\alpha R \, d\alpha = m (\sin \alpha + \mu \alpha).$$

Les coordonnées du point courant de la développante relative au sommet sont :

$$X = x - s \cos \alpha, \quad Y = y - s \sin \alpha,$$

où x et y sont données d'après (2).

D'où :

$$D_0 \begin{cases} X = \frac{m}{4} [2\alpha - \sin 2\alpha + 4\mu (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)] \\ Y = \frac{m}{4} [\cos 2\alpha - 1 - 4\mu (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha)] \end{cases} \quad (3)$$

Pour $\mu = 0$, la courbe D_0 est une développante de cycloïde, c'est-à-dire une cycloïde ordinaire.

La courbe D_0 est le lieu géométrique du milieu d'un segment rectiligne, dont les extrémités décrivent une cycloïde et une développante de cercle, de telle sorte que les pentes de ces deux courbes en des points associés soient égales.

Quand μ varie, les courbes D_0 forment une famille qui jouit des mêmes propriétés que les cycloïdes élastiques au point de vue des enveloppements. En particulier, leur enveloppe est constituée par le lieu des points de rebroussement et des tangentes fixes. Écrivons :

$$\frac{D(X, Y)}{D(\alpha, \mu)} = m^2 \begin{vmatrix} \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \alpha) & \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \\ -\cos \alpha (\sin \alpha + \mu \alpha) & -\cos \alpha - \alpha \sin \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$m^2 \alpha (\sin \alpha + \mu \alpha) = 0 ,$$

Nous obtenons d'abord les tangentes fixes en remplaçant dans (3) α par zéro, ce qui donne :

$$X = 0, \quad Y = \mu m.$$

Donc la tangente commune à ces développantes D_0 est l'axe oy .

Le lieu des points de rebroussement correspond à la solution :

$$\sin \alpha + \mu \alpha = 0 ,$$

ce qui donne (par élimination de μ), comme coordonnées des points de rebroussement et, par suite, pour équations représentant le lieu de ces points, quand μ varie :

$$X = \frac{m}{4} \left[2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right] ,$$

$$Y = \frac{m}{4} \left[1 - \cos 2\alpha + \frac{2 \sin 2\alpha}{\alpha} \right] .$$

CHAPITRE XII

LE RAYON MOYEN DE COURBURE ET LE RAYON DE COURBURE MOYENNE.

Rayon moyen de courbure.

Soit une courbe plane (C), u le paramètre du point courant M. Supposons que quand u varie uniformément de U_0 à u , le point M décrive un arc continu M_0M . Dans ces conditions, on appelle rayon moyen de courbure de l'arc M_0M , relatif au paramètre u , la quantité r définie par :

$$(u - u_0) r = \int_{u_0}^u R \, du,$$

R étant le rayon de courbure ordinaire de la courbe le long de l'arc considéré.

En particulier, si x est pris comme paramètre on a :

$$(x - x_0) r = \int_{x_0}^x R \, dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} R^2 \cos \alpha \, d\alpha ;$$

en désignant par α_0 et α les angles formés par les tangentes en M_0 et M avec ox .

Calculons les rayons moyens de courbure des courbes de Ribaucour. On a :

$$R = R_0 \cos^{-(k+1)} \alpha.$$

En introduisant la portée $2a$, on a :

$$x - x_0 = a, \quad \frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\alpha \cos^{-(2k+1)} \alpha \, d\alpha ;$$

Donc pour :

$k = -3$, développante d'astroïde :

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\alpha \cos^5 \alpha \, d\alpha = \sin \alpha - \frac{2}{3} \sin^3 \alpha + \frac{1}{5} \sin^5 \alpha ;$$

$k = -2$, cycloïde ordinaire :

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha = \sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha ;$$

$$\frac{3r}{R_0} = \frac{9 \sin \alpha + \sin 3\alpha}{2\alpha + 3 \sin 2\alpha} .$$

$k = -1$, cercle :

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\alpha \cos \alpha \, d\alpha = \sin \alpha ;$$

$k = -\frac{1}{2}$, courbe élastique :

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\alpha d\alpha = \alpha ;$$

$k = 0$, courbe d'égale résistance :

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = L \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) ;$$

$k = 1$, chaînette :

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} ;$$

ou en employant l'argument associé φ défini par :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad \varphi = L \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\varphi \operatorname{ch}^2 \varphi \, d\varphi = \frac{2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi}{4} .$$

$k = 2$, parabole :

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\cos^5 \alpha} = \int_0^\varphi \operatorname{ch}^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{8} \left[\frac{\operatorname{sh} 4 \varphi}{4} + 2 \operatorname{sh} 2 \varphi + 3 \varphi \right].$$

$k = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{ar}{R_0^2} &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^7 \alpha} = \int_0^\varphi \operatorname{ch}^6 \varphi d\varphi \\ &= \int_0^\varphi \frac{\operatorname{ch} 6 \varphi + 6 \operatorname{ch} 4 \varphi + 15 \operatorname{ch} 2 \varphi + 10}{32} d\varphi, \\ &= \frac{1}{32} \left[\frac{\operatorname{sh} 6 \varphi}{6} + \frac{3}{2} \operatorname{sh} 4 \varphi + \frac{15}{2} \operatorname{sh} 2 \varphi + 10 \varphi \right]. \end{aligned}$$

Pour les courbes de Ribaucour élastiques ou contractiles, courbes dont l'équation naturelle est :

$$R = R_0 \left(\cos^{-(n+1)} \alpha + \mu \cos^{-(n+2)} \alpha \right),$$

on a :

$$R^2 = R_0^2 \left(\cos^{-(n+1)} \alpha + 2\mu \cos^{-(n+3)} \alpha + \mu^2 \cos^{-(2n+4)} \alpha \right).$$

Donc :

$$\frac{ar}{R_0^2} = \int_0^\alpha \left(\cos^{-(n+1)} \alpha + 2\mu \cos^{-(2n+2)} \alpha + \mu^2 \cos^{-(2n+3)} \alpha \right) d\alpha.$$

Rayon de courbure moyenne.

De la même façon et dans les mêmes conditions, on définit le rayon de courbure moyenne de la courbe entre M_0 et M par la relation :

$$\frac{x - x_0}{\rho} = \int_0^x \frac{dx}{R}.$$

On en déduit, pour toutes les courbes planes :

$$\frac{x - x_0}{\rho} = \sin \alpha.$$

Si donc divers arcs correspondent à la même portée $2a$ et à la même pente aux naissances, le rayon de courbure moyenne aura la même valeur pour tous ces arcs :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

De ce fait, la formule approchée pour l'évaluation de l'aire du débouché (chapitre XIV) donnera la même valeur pour ces arcs. Pour $\alpha = 30^\circ$, $\rho = 2a$, quelque soit la courbe.

D'autre part, pour une même épaisseur à la clef, l'épaisseur à la naissance sera la même, si l'on prend une loi d'épaisseur fonction de l'inclinaison α .

Du coefficient de hardiesse (RESAL).

A la détermination du rayon moyen de courbure se rattache la *hardiesse* de la voûte. Il est difficile de donner une définition précise d'une fonction aussi complexe d'éléments aussi divers que le sont la longueur de la portée, celles de la montée, de l'épaisseur à la clef, et surtout la valeur du surbaissement. Mais, ainsi que l'écrit M. A. AURIC, on sent instinctivement qu'une arche de faible ouverture mais très surbaissée peut être très hardie, car elle donne naissance à une poussée considérable.

En première approximation, on peut concevoir que la poussée est proportionnelle au rayon de courbure moyen.

RESAL a introduit le coefficient K de hardiesse qu'il définit comme produit de l'ouverture $2a$ par le rayon r de courbure moyen :

$$K = 2a \ r.$$

L'ouvrage *Ponts en maçonnerie* de A. AURIC reproduit, en le complétant, un tableau de ces coefficients pour divers ouvrages. Le Pont de Valence, sur le Rhône ($2a = 49$ m. 20, $r = 50$ m.) a un coefficient de hardiesse $K = 2460$. Le grand pont de Plauen (Saxe), de 90 m. d'ouverture, a un coefficient :

$$K = 90 \times 65,25 = 5872 ;$$

tandis que le Pont Adolphe de Luxembourg, sur la Pétrusse, construit par P. SÉJOURNÉ, a un coefficient :

$$K = 84,65 \times 51,6 = 4.368.$$

Application.

Dans les formules pratiques que nous avons données pour les courbes de Ribaucour, on a vu que, si l'on néglige les infiniment petits du quatrième ordre, on pourra utiliser la formule :

$$3\rho = 2 R_0 + R.$$

Il y a donc lieu de déterminer les courbes planes telles qu'on ait rigoureusement en tout point :

$$3\rho = R + 2 R_0,$$

où R_0 est une constante, R le rayon de courbure ordinaire, ρ le rayon de courbure moyenne, défini en prenant x comme paramètre.

On peut écrire :

$$\frac{3x}{\sin \alpha} = R + 2R_0.$$

D'où :

$$3 x = R \sin \alpha + 2 R_0 \sin \alpha.$$

Dérivons par rapport à α :

$$3 \frac{dx}{d\alpha} = R \cos \alpha + \frac{dR}{d\alpha} \sin \alpha + 2R_0 \cos \alpha.$$

Par suite :

$$2 (R - R_0) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{dR}{d\alpha}.$$

D'où :

$$R = R_0 + \lambda \sin^2 \alpha, \quad \lambda = \text{C}^{\text{te}}.$$

Telle est l'équation naturelle de la courbe cherchée. Elle montre que la courbe est une parallèle de développante d'astroïde.

Pour $R_0 = 0$, la courbe est la développante d'astroïde que nous avons étudiée au chapitre V.

Formule empirique de A. Auric pour la courbure des arches elliptiques.

Rappelons que M. AURIC (1) a donné la formule empirique suivante pour le calcul du rayon moyen de courbure R de la région médiane, au milieu de la portée d'une arche elliptique :

$$2R = R_0 + f + \frac{\sqrt{3}}{2} (R_0 - f) ;$$

R_0 est le rayon de courbure à la clef, f la flèche.

Nous avons pour l'ellipse la formule exacte :

$$R = \frac{(a^2 + b^2 - \overline{OM}^2)^{3/2}}{ab} .$$

$\overline{OM}$ est le rayon vecteur du point courant, a et b sont les axes de l'ellipse :

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 = x^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = b^2 + \frac{c^2}{a^2} x^2 ,$$

et si l'on développe R par rapport à x :

$$R = \frac{a^2}{b} \left(1 - \frac{c^2 x^2}{a^4} \right)^{3/2} = \frac{a^2}{b} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{c^2 x^2}{a^4} + \frac{3}{8} \frac{c^4 x^4}{a^8} \right) . \quad (1)$$

D'autre part :

$$R_0 = \frac{a^2}{b} , \quad f = \frac{bx^2}{2a^3} \left(1 - \frac{x^2}{4a^2} \right) .$$

D'où :

$$R_0 + f + \frac{\sqrt{3}}{2} (R_0 - f) = \frac{a^2}{b} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{bx^2}{2a^3} \left(1 - \frac{x^2}{4a^2} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) . \quad (2)$$

Si l'on multiplie les deux membres de (1) par 2 et si l'on en retranche (2), il vient, pour l'expression de l'erreur ϵ en posant :

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866.2 ,$$

(1) A. AURIC : L'art de la construction des ponts en maçonnerie. (*La Revue du mois*, juin 1906, p. 730.)

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = \frac{a^2}{b} \left\{ 1 - \lambda - \frac{x^2}{2a^4} \left[6c^2 + (1 - \lambda) b^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{x^4}{4a^6} \left[\frac{3c^4}{a^2} + \frac{(1 - \lambda) b^2}{2} \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

La formule de M. AURIC est donc exacte au quatrième ordre près pour :

$$\frac{x^2}{a^4} = \frac{2(1 - \lambda)}{6c^2 + (1 - \lambda)b^2},$$

c'est-à-dire pour :

$$\frac{x^2}{a^4} = \frac{0,133.8}{3c^2 + 0,066.9 b^2},$$

ou, en fonction de l'excentricité e :

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{0,133.8}{2,933.1 e^2 + 0,066.9}.$$

On voit que cette limite décroît avec e ; elle est maximum pour le cercle ($e = 0$), où la formule donne :

$$2R_0 = R_0 (1,866.2) + f (0,133.8).$$

Le résultat est rigoureusement exact pour le plein cintre :

$$f = R_0, \quad 2R = 2R_0.$$

L'écart augmente quand f décroît, c'est-à-dire au fur et à mesure que le surbaissement $\frac{1}{\sigma}$ de l'arche circulaire augmente. L'erreur reste inférieure à $R_0 \times 0,066.9$.

La formule de M. AURIC s'applique dans la totalité de l'arche elliptique considérée $\left(\frac{x}{a} = 1 \right)$ jusqu'à la valeur suivante de e :

$$e = \sqrt{\frac{0,066.9}{2,933.1}} = 0,047.75.$$

Voici, pour quelques valeurs de e , les limites dans lesquelles la formule s'applique au quatrième ordre près :

e	$\frac{x}{a}$
0,1	0,609.47
0,2	0,452.47
0,3	0,375.92
0,4	0,328.43
0,5	0,295.40
0,6	0,270.64
0,7	0,251.21
0,8	0,235.46

CHAPITRE XIII

FORMULES CANONIQUES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES FONDAMENTAUX RELATIFS AUX APPLICATIONS DE LA CHAÎNETTE (1)

Soient :

$$x = \mu, \quad y = m(\text{chu} - 1),$$

les équations paramétriques d'une chaînette ordinaire, rapportée à son axe et à sa directrice.

Supposons que cette chaînette soit le profil d'une voûte en berceau ayant pour ouverture $2a$ et pour montée f .

D'une manière générale, les problèmes qui se posent pratiquement à propos des applications techniques de la chaînette, se ramènent à la résolution d'équations transcendantes de types particuliers ; elles peuvent être résolues, avec une approximation très satisfaisante pour les calculs mécaniques, par des formules canoniques que M. TURRIÈRE a systématiquement recherchées dans des études sur les câbles de lignes aériennes. Par analogie, nous allons, sous le point de vue des applications aux voûtes, examiner certains problèmes donnant lieu à des équations transcendantes qui seront résolues empiriquement.

(1) EMILE TURRIÈRE. — Formules canoniques pour les calculs mécaniques des lignes électriques aériennes dans le cas des portées symétriques. (*Revue générale de l'Electricité*, t. XXXVIII, novembre 1935, pp. 621 627.)

Etude mécanique des câbles téléphériques. La flèche en charge des câbles aériens. (*Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, t. XXIV, 1939, 63 p.)

Premier problème fondamental.

Connaissant l'ouverture $2a$ et la longueur $2L$, de l'arc, déterminer le paramètre de la chaînette (et accessoirement la flèche et l'inclinaison de la tangente à la naissance).

Les données sont donc :

$$a = mu, \quad L = mshu.$$

Il faut d'abord calculer l'argument u par l'équation transcendante :

$$\frac{shu}{u} = \frac{L}{a} = k. \quad (1)$$

On aura ensuite le paramètre m par la formule :

$$m = \frac{a}{u}.$$

L'équation transcendante (type équation de KÉPLER) :

$$\frac{shu}{u} = k > 1,$$

a une racine positive u et une seule, comme on peut s'en rendre compte graphiquement en étudiant les variations de la fonction :

$$y = \frac{shx}{x}.$$

Lorsque la longueur L est faiblement supérieure à la portée, on peut poser :

$$L = a (1 + \lambda), \quad k = 1 + \lambda,$$

λ étant petit ; une valeur approchée de u s'obtient en prenant le développement limité :

$$shu = u + \frac{u^3}{6};$$

d'où en première approximation :

$$u^2 = 6\lambda, \quad u = \sqrt{6\lambda}.$$

Une seconde formule, basée sur les développements en série des fonctions shu et chu , est :

$$\frac{shu}{u} = \frac{2 + chu}{3} - \frac{u^4}{180};$$

elle correspond à la formule du Cardinal de CUSA pour les fonctions trigonométriques ; elle donne des résultats suffisamment précis pour $u < 0,4$, c'est à-dire pour une inclinaison α (α , arc associé à u) inférieure à 20° .

Pour x infiniment petit, on a les formules de MASKELYNE :

$$\sin x = x \sqrt[3]{\cos x}, \quad \operatorname{tg} x = x : \sqrt[3]{\cos^2 x}.$$

Si x est exprimé en secondes, en posant :

$$R'' = 206\,264'', 8 \dots,$$

on a :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{R''} \sqrt[3]{\cos x}.$$

La formule analogue pour fonctions hyperboliques est :

$$\frac{\operatorname{sh} u}{u} = \operatorname{ch}^{\frac{1}{3}} u + \varepsilon, \quad \operatorname{ch}^{\frac{1}{3}} u = 1 + \frac{u^2}{6} - \frac{u^4}{72}.$$

Le premier terme négligé est : $\varepsilon_1 = \frac{u^4}{45}$.

Avec une approximation du même ordre, mais une erreur absolue légèrement inférieure, on peut poser :

$$\frac{\operatorname{sh} u}{u} = \operatorname{ch} \frac{u}{\sqrt[3]{3}},$$

formule résultant des développements en séries :

$$\frac{\operatorname{sh} u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120}, \quad \operatorname{ch} \frac{u}{\sqrt[3]{3}} = 1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{216}.$$

Le premier terme négligé est : $\varepsilon_1 = \frac{u^4}{270}$.

Pour u inférieur ou égal à $0,405$, ce qui correspond à $\alpha < 23^\circ$, l'erreur est inférieure à 1×10^{-4} .

Par exemple :

$$\begin{aligned} u &= 0,4049, & \frac{u}{\sqrt[3]{3}} &= 0,23377, \\ \operatorname{sh} u &= 0,4167, & \operatorname{ch} u &= 1,0831, \\ \operatorname{ch} \frac{u}{\sqrt[3]{3}} &= 1,02745, & \frac{\operatorname{sh} u}{u} &= 1,02765, & \frac{u^4}{270} &= 1,10^{-4}. \end{aligned}$$

Mais voici la formule qui donne une bien meilleure approximation et que M. TURRIÈRE retient spécialement :

$$\frac{\text{sh} u}{u} = 3 \frac{2 \text{chu} + 3}{\text{chu} + 14}.$$

On a :

$$\frac{15}{\text{chu} + 14} = 1 - \frac{u^2}{30} - \frac{u^4}{600} + \frac{u^6}{18.000},$$

$$z = 3 \cdot \frac{2 \text{chu} + 3}{\text{chu} + 14} = 6 - \frac{75}{\text{chu} + 14},$$

$$z = 1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} - \frac{u^6}{3.600}.$$

En posant donc :

$$\frac{\text{sh} u}{u} = z + \varepsilon,$$

le premier terme négligé :

$$\varepsilon = \frac{x^6}{2100},$$

est cette fois-ci du 6^e ordre ; la condition $\varepsilon < 1.10^{-5}$ est vérifiée par :

$$u < 0,5253, \text{ c'est-à-dire : } \alpha < 30^{\circ} 6';$$

et la condition : $\varepsilon < 1 \times 10^{-4}$ l'est dès que l'on a :

$$u < 0,770, \text{ c'est-à-dire } \alpha < 40^{\circ} 18',$$

valeur qui dépasse de beaucoup les inclinaisons habituelles.

La conclusion pratique est que, lorsque l'inclinaison α ne dépasse pas une quarantaine de degrés, en commettant une erreur inférieure à 1×10^{-4} , la résolution de l'équation transcendante (1) est effectuée au moyen des formules :

$$\text{chu} = \frac{14k - 9}{6 - k}, \quad \cos \alpha = \frac{6 - k}{14k - 9}.$$

On aura ensuite :

$$f = m (\text{chu} - 1).$$

Supposons par exemple : $u = 0,7702$, ce qui correspond à $\alpha = 40^{\circ}20'$. On aura :

$$\text{shu} = 0,8487, \quad \text{chu} = 1,3116,$$

$$\frac{\text{shu}}{u} = 1,1019, \quad z = 3 \frac{2\text{chu} + 3}{\text{chu} + 14} = 1,1018.$$

D'où l'erreur $\epsilon = 0,0001$.

Dans cet exemple :

$$k = 1,1264, \quad L = a(1 + \lambda), \quad f = \frac{a}{2,45},$$

$$\lambda = 0,1264, \quad m = \frac{a}{0,7702}.$$

Deuxième problème fondamental.

Les données sont l'ouverture $2a$ et la flèche f ; il s'agit de calculer m .

Les équations de résolution sont :

$$a = mu, \quad f = m(\text{chu} - 1).$$

On a d'abord à résoudre l'équation transcendante en u :

$$\frac{\text{chu} - 1}{u} = \frac{f}{a}. \quad (2)$$

Cette équation admet d'abord la racine évidente $u = 0$, puis une autre racine positive comme l'on peut s'en rendre compte en cherchant graphiquement l'intersection de la chaînette :

$$y = \text{ch}x,$$

avec la droite :

$$y = 1 + \frac{f}{a} x.$$

Dans le cas des voûtes très surbaissées (f petit par rapport à a), u est petit et on peut poser :

$$\text{chu} = 1 + \frac{u^2}{2},$$

pour avoir en première approximation : $u = \frac{2f}{a}$.

Une formule plus approchée consiste à poser :

$$\frac{\text{chu} - 1}{u} = \frac{3 \text{ shu}}{\text{chu} + 5} + \epsilon ,$$

en tenant compte des développements en série suivants :

$$\frac{\text{chu} - 1}{u} = \frac{u}{2} \left(1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{360} \right) ,$$

$$\frac{3 \text{ shu}}{\text{chu} + 5} = \frac{u}{2} \left(1 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{180} \right) .$$

Le premier terme négligé est du 5^e ordre :

$$\epsilon = \frac{u^5}{240} > 0 ,$$

et la condition :

$$\epsilon < 1 \times 10^{-4} ,$$

est satisfaite dès que l'on a :

$$u < 0,4743, \text{ c'est-à-dire : } \alpha < 26^{\circ} 12'.$$

Pour $u = 0,4739$, ou $\alpha = 26^{\circ} 11' 24''$, on a :

$$\text{shu} = 0,4918, \quad \text{chu} = 1,1144,$$

$$\frac{\text{chu} - 1}{u} = 0,241.40, \quad \frac{3 \text{ shu}}{\text{chu} + 5} = 0,241.28.$$

$$\epsilon = 0,000.12.$$

Pour $u = 0,4100$, c'est-à-dire $\alpha = 22^{\circ} 51' 17''$, on a :

$$\text{shu} = 0,4216, \quad \text{chu} = 1,0852,$$

$$\frac{f}{a} = 0,207.85, \quad \frac{3 \text{ shu}}{\text{chu} + 5} = 0,207.80.$$

D'où : $\epsilon = 0,000.05.$

Ces résultats montrent que pour des surbaissements de l'ordre de $\frac{1}{10}$ et au-dessous, l'erreur est inférieure à celle commise en utilisant les tables usuelles de fonctions hyperboliques.

En utilisant la dernière formule pratique indiquée, on ramène donc l'équation transcendante (2) à l'équation linéaire entre shu et chu (c'est à-dire une simple équation du second degré en e^u) :

$$\frac{3 \text{shu}}{\text{chu} + 5} = \frac{f}{a} ;$$

en passant à l'arc α associé à l'argument u , l'équation précédente devient :

$$\frac{\sin \alpha}{1 + 5 \cos \alpha} = \frac{f}{3a} ; \quad (3)$$

l'équation transcendante a été remplacée, dans d'excellentes conditions d'approximation, par une équation linéaire classique de la trigonométrie élémentaire.

La résolution s'achève alors en posant :

$$\text{tg } \omega_0 = \frac{5}{3} \frac{f}{a} ;$$

l'équation (3) se met ainsi, selon la méthode bien connue, sous la forme définitive :

$$\sin (\alpha - \omega_0) = \frac{1}{5} \sin \omega_0.$$

Dans les calculs que nous effectuerons par la suite, les résultats numériques seront pris dans les tables de POTIN (1).

Formule approchée pour la résolution de l'équation transcendante $\frac{\text{thu}}{u} = K$

Basée sur les développements en série, on a encore la formule pratique :

$$\frac{\text{thu}}{u} = \frac{21 + 9 \text{chu}}{1 + 29 \text{chu}} ,$$

(1) L. POTIN. — « *Formules et tables numériques relatives aux fonctions circulaires, hyperboliques, elliptiques.* » (G. Doin et Gauthier-Villars, édit., Paris, 1925 ; in-8°, 862 p.)

qui est exacte au 5^e ordre près. On a en effet :

$$\frac{thu}{u} = 1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2}{15} u^4 - \frac{17}{315} u^6 + \dots$$

$$\frac{21 + 9chu}{1 + 29chu} = 1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2}{15} u^4 - \frac{551}{360} u^6 + \dots$$

(La différence est de l'ordre de $\frac{3}{2} u^6$).

Application.

Dans les calculs relatifs à l'intrados du hangar de Montebourg en caténoïde (chapitre XXIV), on a précisément à résoudre l'équation transcendante :

$$\frac{thu}{u} = \frac{28}{33}.$$

La formule pratique ci-dessus indiquée donne :

$$\frac{21 + 9chu}{1 + 29chu} = \frac{28}{33}.$$

D'où :

$$chu = \frac{665}{515} = 1,291.20, \quad u = 0,745.71.$$

La valeur exacte de la racine est :

$$u = 0,745.13.$$

L'erreur absolue, qui résulte de l'application de la formule empirique de résolution, est donc inférieure à 6×10^{-4} .

CHAPITRE XIV

FORMULES POUR LE DÉBOUCHÉ SUPERFICIEL DES PONTS.

Le théorème d'Hermite.

M. TURRIÈRE a donné une formule rapide et très rapprochée permettant l'évaluation du débouché superficiel d'une arche de pont, connaissant l'ouverture, la montée et l'angle d'inclinaison sur l'horizontale de la tangente à la courbe d'intrados aux naissances.

Cette formule est fondée sur la proposition suivante, due à Ch. HERMITE (1) :

A M B étant un arc de courbe plane convexe, on projette A en A' sur la tangente BA' en B et l'on projette B en B' sur la tangente AB' en A. Cela posé, si l'on néglige les quantités du 5^e ordre le segment A M B est équivalent au sixième de la somme des triangles rectangles AA'B et BB'A.

Parmi les belles démonstrations de cette proposition que M. TURRIÈRE a données en 1916, nous reprenons celle qui utilise les coordonnées tangentielles et qui est certainement la plus simple.

(1) Ch. HERMITE. — *Œuvres*, t. III, p. 248.

EMILE TURRIÈRE. — Sur l'aire d'un segment de courbe convexe. (*Annaes da Academia polytechnica do Porto*, 1916, t. XI, pp. 129-140.)

Supposons la courbe A M B rapportée au point A comme origine des coordonnées et à la tangente A B' comme axe des abscisses.

Soit :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p, \quad (1)$$

l'équation de la tangente au point courant ; p est la distance de l'origine à la tangente. L'équation :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p',$$

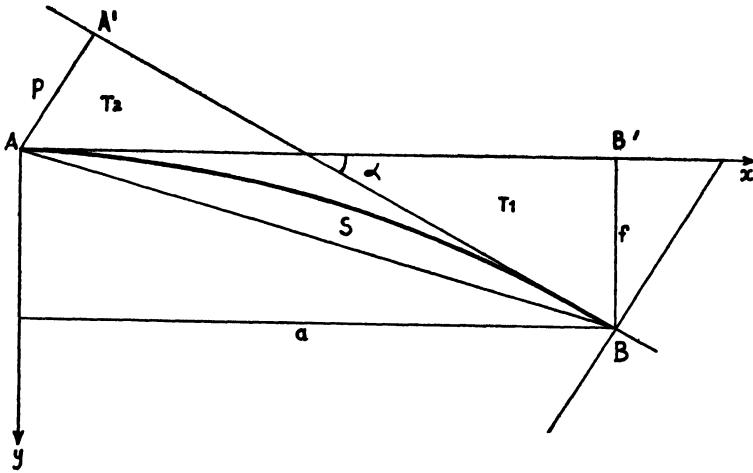


FIGURE 13.

représente la normale au point courant. Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, la fonction $p(\alpha)$ doit donc s'annuler en même temps que sa dérivée première p' pour la valeur 0 de α , de sorte que la fonction $p(\alpha)$ doit avoir un développement de la forme :

$$p = A\alpha^2 + B\alpha^3 + C\alpha^4 + \dots$$

Soit T_1 l'aire du triangle A B A'. On a :

$$2T_1 = pp' = 2A^2\alpha^3 + 5AB\alpha^4 + (3B^2 + 6AC)\alpha^5 + \dots,$$

α étant l'inclinaison de la tangente en B sur la tangente en A, c'est-à-dire la déviation de la tangente.

L'aire du triangle A B B' est donnée par :

$$2T_2 = xy,$$

les expressions générales des coordonnées de B sont :

$$x = p \sin \alpha + p' \cos \alpha, \quad y = -p \cos \alpha + p' \sin \alpha,$$

relations qui sont absolument rigoureuses.

Si l'on remplace p et p' par leurs développements limités en fonction de α , on obtient les développements des deux coordonnées courantes x et y en fonction de α :

$$x = 2A \alpha + 3B \alpha^2 + 4C \alpha^3,$$

$$y = A \alpha^2 + 2B \alpha^3 + \left(3C + \frac{A}{6}\right) \alpha^4 + \dots,$$

de sorte que l'aire T_2 a pour développement :

$$2T_2 = 2A^2 \alpha^3 + 7AB \alpha^4 + \left(6B^2 + 10AC + \frac{A^2}{3}\right) \alpha^5 + \dots$$

Soit M un point de l'arc A B et M' un point infiniment voisin. L'aire élémentaire du segment A M M' est égale à la moitié du produit vectoriel des vecteurs AM et MM', de sorte que :

$$2dS = xdy - ydx,$$

ce qui, en tenant compte de (1), s'écrira :

$$2dS = \frac{p dx}{\cos \alpha} = p R d\alpha.$$

En définitive, l'aire S du segment A M B est donnée par :

$$2S = \int p R d\alpha,$$

avec :

$$R = p + p''.$$

Si on remplace alors p, p'' par leurs développements limités, on a immédiatement :

$$2S = \frac{2A^2}{3} \alpha^3 + 2AB \alpha^4 + \frac{14AC + A^2 + 6B^2}{5} \alpha^5 + \dots$$

et par suite :

$$6S - (T_1 + T_2) = \frac{1}{10} \left[4AC - 9B^2 + \frac{13}{3} A^2 \right] \alpha^5 + \dots$$

D'autre part, si on désigne par R_1 , R_2 , R_3 les rayons de courbure successifs de la courbe A M B au point A, c'est-à-dire son rayon de courbure, et ceux de ses deux premières développées, leurs expressions seront :

$$R_1 = (p + p'')_0 = 2A,$$

$$R_2 = (p' + p''')_0 = 6B,$$

$$R_3 = (p'' + p^{iv})_0 = 2A + 24C,$$

et par suite :

$$6S - (T_1 + T_2) = \frac{R_1 R_3 + 12 R_1^2 - 3 R_2^2}{120} \alpha^5 ;$$

La proposition de Ch. HERMITE est donc établie.

L'expression $R_1 R_3 + 12 R_1^2 - 3 R_2^2$ peut s'annuler, auquel cas la différence $6S - (T_1 + T_2)$ sera du sixième ordre. Pour une courbe donnée cette circonstance peut arriver pour un point A convenablement choisi. Elle peut même se produire, pour une courbe convenablement choisie, pour chacun de ses points.

La relation :

$$R_1 R_3 + 12 R_1^2 - 3 R_2^2 = 0, \quad (2)$$

définit et caractérise ces courbes, qui ont été déterminées par M. TURRIÈRE et dépendent de transcendentes compliquées.

Formules pour l'évaluation du débouché superficiel (TURRIÈRE).

Lorsque la courbe — et c'est ici le cas — présente un axe de symétrie Oy et un sommet O avec une tangente horizontale Ox ($\alpha=0$), la développée a un rebroussement sur l'axe de symétrie.

D'une manière générale, les rayons de courbure successifs sont :

$$R_2 = \frac{dR_1}{d\alpha}, \quad R_3 = \frac{d^2 R_1}{d\alpha^2} ;$$

dans le cas symétrique $R_2 = 0$. La formule se simplifie par suite et donne :

$$S = \frac{T_1 + T_2}{6} + \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{R_1}{720} (R_3 + 12 R_1) \alpha^5.$$

R_1 ici est identique au rayon de courbure à la clef (que nous désignons par R_0). R_3 est une grandeur algébrique : la valeur pour $\alpha = 0$ de la dérivée seconde $\frac{d^2 R}{d\alpha^2}$.

En introduisant le rayon R_n de courbure aux naissances,

$$R_n = R_0 + \frac{R_3}{2} \alpha^2,$$

on donne à l'infiniment petit ϵ , terme correctif de la formule précédente, la forme :

$$\epsilon = \frac{R_0(R_n - R_0)}{360} \alpha^3 + \frac{R_0^2}{60} \alpha^5.$$

Des applications numériques seront faites plus loin, qui fixeront sur l'ordre pratique de l'approximation de telles formules.

CHAPITRE XV

LE THÉORÈME DE JEAN BERNOULLI ET LES FORMULES POUR LA RECTIFICATION DES ARCHES ELLIPTIQUES.

Après le cercle, la courbe d'intrados la plus simple est l'ellipse. Historiquement, l'emploi de l'anse de panier se généralisa et fatalement conduisit à l'emploi de l'ellipse comme courbe d'intrados « qui, si elle a l'inconvénient d'exiger un panneau différent pour « chaque voussoir et de posséder un rayon de courbure un peu « trop faible aux naissances, présente par contre le grand avantage d'être une courbe de définition simple, de tracé facile « et sans variation brusque de courbure. Cette transformation « de l'anse en ellipse s'effectue lentement au fur et à mesure « de la substitution des moellons de petit appareil aux gros « voussoirs en pierre de taille et il est curieux de constater « que l'abandon progressif des anciennes courbes coïncide à peu « près avec la publication dans les *Annales des Ponts et Chaussées* « de mémoires très complets (1831 et 1839) sur le tracé général et « systématique des anses de panier : malheureusement, ces considérations subtiles ne répondaient plus à un besoin réel et « devenaient dès lors de simples problèmes de géométrie amusante (1). »

(1) A. AURIC. — *Ponts en maçonnerie*, p. 59. — Les articles visés par M. AURIC sur les anses de panier sont ceux de MICHAL, « Anses de panier » (*A. P. C.*, 1831, 2^e semestre, p. 49) et de LEROUGE, « Voûtes en anse de panier » (*A. P. C.*, 1839, 2^e semestre, p. 335).

Soit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

l'équation de l'ellipse ; elle sera aussi représentée par les équations paramétriques :

$$x = a \sin \varphi \quad , \quad y = b \cos \varphi,$$

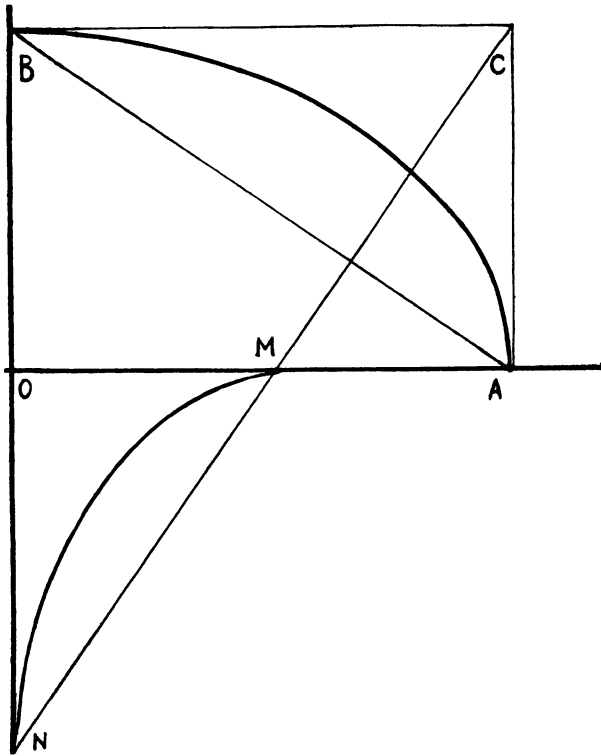


FIGURE 14.

φ désignant le complément de l'habituelle anomalie excentrique (cette légère modification apportée aux équations classiques a pour but d'obtenir la loi de rectification sous la forme normale de la fonction elliptique de seconde espèce).

Quoique le tracé de la courbe s'effectue très simplement sur l'épure par des procédés géométriques très connus, on le fait habituellement par points en calculant les coordonnées.

Pour les tangentes et les normales, on remarque que la sous-normale au point x, y , est égale à $b^2 x$, c'est-à-dire proportionnelle à x .

Une fois la normale tracée, on place le centre de courbure en calculant le rayon de courbure par la formule :

$$R = \frac{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{ab},$$

ou encore :

$$R = \frac{(a^2 + b^2 - \rho^2)^{3/2}}{ab} \quad ; \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Aux sommets de l'ellipse, les rayons de courbure extrêmes sont :

$$R_1 = \frac{b^2}{a} \quad (\text{sommets du grand axe}),$$

$$R_0 = \frac{a^2}{b} \quad (\text{à la clef}).$$

Rappelons la construction géométrique très simple de ces deux rayons de courbure .

Soient A et B deux sommets de l'ellipse. Du point C d'intersection des tangentes à l'ellipse en ces points, on trace la normale à la corde AB qui coupe OA en M et OB en N ; M et N sont les centres de courbure en A et B

Posons :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi ;$$

Nous aurons :

$$R^2 (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^3 = a^4 b^4 ;$$

d'où la loi de courbure de l'ellipse :

$$\frac{R_1}{R} = (1 - e^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}.$$

On reproche à l'ellipse, employée comme courbe de voûte, d'avoir le rayon de courbure R_1 trop faible ; il en résulte en effet pour les ponts un moindre débouché superficiel, ce qui peut être nuisible pour l'écoulement des eaux ou pour la navigation.

Divers procédés ont été proposés pour remédier à cet inconvénient, parmi lesquels on pourrait citer l'utilisation des courbes parallèles à l'ellipse.

Mais l'inconvénient le plus grave réside dans le fait que la rectification de l'ellipse dépend des intégrales elliptiques.

La formule de rectification de l'ellipse est :

$$s = \int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = a \int \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi ;$$

en posant (module k des fonctions elliptiques) :

$$k = e = \sin \theta, \quad s = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \, d\varphi = a \, E(\theta, \varphi).$$

Les tables de LEGENDRE donnent de degré en degré pour θ et pour φ , les valeurs de l'intégrale de seconde espèce :

$$E(\theta, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \, d\varphi.$$

En particulier, si P désigne le périmètre total de l'ellipse, on a :

$$P = 4a \, E(\theta, \pi) ;$$

l'expression $E(\theta, \pi/2)$ désignant l'intégrale elliptique modulaire de deuxième espèce :

$$E(\theta, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \, d\varphi,$$

dont on trouve les valeurs dans les tables de LEGENDRE.

Il est facile de tracer la courbe $y(x)$ représentative de la fonction :

$$y = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi,$$

en tenant compte des valeurs trouvées dans les tables. L'examen de ces données numériques montre que la fonction est décroissante et d'ailleurs on a :

$$\frac{dy}{dx} = 4a \int_0^{\pi/2} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi < 0.$$

La fonction :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (0 < x < 1),$$

est elle-même l'intégrale elliptique de première espèce dont on trouve les valeurs dans les tables de LEGENDRE.

Le développement en série.

Le périmètre P de l'ellipse entière est déterminé par les formule :

$$P = 4a E, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Le développement de la fonction modulaire E en série entière de e^2 est (1) :

$$E = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 \frac{e^{2n}}{2n-1} \right\}.$$

La longueur de l'arc d'intrados est donc :

$$L = \pi R,$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{R}{a} = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \frac{175}{16384} e^8 \\ - \frac{441}{65536} e^{10} - \frac{4851}{1048576} e^{12}. \end{aligned}$$

(1) A.C. GREENHILL. — Les fonctions elliptiques et leurs applications, p. 266.

Cette série converge lentement et son emploi exige un grand nombre de termes. C'est ainsi que pour le pont de Chalonnes, construit en 1865, surbaissé au $\frac{1}{3}$ avec une ouverture de 30 m., P. SÉJOURNÉ a trouvé pour longueur de la demi-ellipse d'intrados :

avec 7 termes	44 m. 98,
— 8 termes	44 m. 97,
— 9 termes	44 m. 96.

Les théorèmes de Jean Bernoulli et de Prouhet sur le périmètre de l'ellipse.

Nous donnerons quelques détails sur d'ingénieuses formules empiriques permettant la rectification de l'ellipse sans l'usage des fonctions elliptiques et évitant des sommations de séries lentement convergentes. Leur origine paraît résider dans une curieuse proposition due à Jean BERNOULLI.

Dans une lettre à LEIBNIZ, du 15 avril 1709, Jean BERNOULLI a donné une curieuse méthode de transformation des courbes fermées en d'autres ayant le même périmètre. Cette méthode se rattache à la théorie du *motus reptorius*, le mouvement de *reptation* auquel Jean BERNOULLI avait en 1703 consacré des recherches contenant maints passages obscurs (1).

Les écrits du géomètre suisse ne contiennent ni démonstration de la méthode générale de transformation ni celle de la proposition spéciale applicable à l'ellipse. LEGENDRE (2) a essayé de justifier ces résultats au moyen de développements en série ; mais comme l'observe PROUHET, LEGENDRE, tout en donnant deux valeurs approchées d'un arc, n'indique nullement à quel caractère on reconnaîtra qu'elles comprennent l'arc considéré.

(1) JEAN BERNOULLI. — *Journal des Savans*, 12 février 1703 ; *Johannis Bernoulli opera omnia*, t. I, 1742, articles 26, 72, 74, 77 85 ; *Leibnizii et Joh. Bernoulli commercium philosophicum et mathematicum*, 1745, t. II, p. 165, 167-168, 217-218.

(2) LEGENDRE. — *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, appendice VI.

PROUHET (1) a repris l'étude des mouvements de reptation et mis en lumière la proposition concernant le périmètre de l'ellipse.

Mais PROUHET lui-même, qui a reconstruit d'une manière rigoureuse la théorie générale de Jean BERNOULLI, n'a pas donné la démonstration du résultat concernant l'ellipse.

Après divers essais, la théorie a été reprise par P. MANSION, qui a donné la démonstration rigoureuse pour l'intégrale de seconde espèce et l'a étendue à l'intégrale de première espèce (2).

Voici l'énoncé du théorème de Jean BERNOULLI :

La moyenne des distances d'un point pris dans le plan d'un cercle aux sommets d'un polygone régulier d'une infinité de côtés inscrits dans le cercle, est égale au périmètre de l'ellipse ayant pour demi-axes la plus grande et la plus courte distance du point à la circonférence, divisé par 2π .

Sous sa forme pratique, cet énoncé peut être présenté ainsi (PROUHET) :

Soit CD une droite partagée au point E en deux segments $CE = a$, $CD = b$. Si l'on partage en $2n$ parties égales la demi-circonférence décrite sur CD comme diamètre et qu'on désigne par r_0, r_1, r_{2n} les droites menées du point E aux divers points de division, le périmètre de l'ellipse ayant $2a$ et $2b$ pour axes sera compris entre deux circonférences ayant pour rayons respectifs :

$$\text{petit rayon} = \frac{\frac{1}{2} r_0 + r_2 + r_4 + \dots + r_{2n-2} + \frac{1}{2} r_{2n}}{n},$$

$$\text{grand rayon} = \frac{r_1 + r_3 + \dots + r_{2n-3} + r_{2n-1}}{n}.$$

(1) PROUHET — Etude géométrique sur les courbes engendrées par le mouvement de reptation, pour servir d'éclaircissement à plusieurs passages des œuvres de Jean Bernoulli (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854, 1^{re} série, t. XIII, pp 274 282, 335 348)

— Exercices sur la rectification des courbes planes (*Ibid.*, 1864, 2^e série, t. III, pp 403 408)

(2) P. MANSION. — Sur l'approximation des intégrales définies et, en particulier, du périmètre de l'ellipse (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, VIII^e année, seconde partie, 1883 1884, pp 11 24.)

Le théorème aurait encore lieu si le point E était extérieur au segment CD, avec $EC = a$, $ED = b$ (PROUHET).

Soit P le périmètre de l'ellipse, R le rayon du cercle isopérimétrique :

$$P = 2\pi R.$$

PROUHET donne les inégalités suivantes, conséquences du théorème de BERNOULLI :

$$a > R > b, \quad \sqrt{2(a^2 + b^2)} > 2R > a + b,$$

$$2\sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4}} > 4R > a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

La construction de Jean BERNOULLI s'applique au périmètre de l'ellipse entière. Macquorn RANKINE (1865), se plaçant sous le même point de vue d'une génération cinématique de l'ellipse, a étendu la construction à un arc quelconque d'ellipse, n'excédant pas un quadrant (1).

Soit I le centre instantané pour une position déterminée d'une figure de grandeur invariable, mobile dans un plan fixe ; $d\varphi$ l'angle de rotation instantanée ; r le rayon de roulement représentant la distance du point M générateur d'une roulette au centre I instantané. L'intégrale de rectification de cette roulette est :

$$s = \int_0^\varphi r \, d\varphi.$$

Elle sera calculée approximativement, en application des règles de SIMPSON, en décomposant l'angle φ , soit en $2n$, soit en $3n$ parties équivalentes.

(1) M. RANKINE. — On the approximate graphic measurement of elliptic and trochoidal arcs (*The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine*, série IV, t. XXIX, janvier 1865, pp. 22-25.)

— Rectification approchée d'arcs d'ellipse et de trochoïde et construction d'un arc de cercle de longueur donnée. (*Annales du Génie Civil*, t. V, 1866, pp. 187-189.)

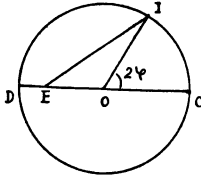


FIGURE 15.

Considérons un cercle de centre O ; le diamètre CD ; un point E sur le diamètre CD . Posons :

$$CE = a, \quad DE = b ; \quad CD = a + b ;$$

soit I un point quelconque de la circonférence, 2φ l'angle au centre ; r le rayon vecteur IE ; le triangle IOE donne :

$$\angle IOE = 2\varphi,$$

$$\begin{aligned} r^2 &= \overline{EI}^2 = \overline{EO}^2 + \overline{OI}^2 + \overline{EO} \cdot \overline{OI} \cdot \cos 2\varphi, \\ &= \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{a^2 - b^2}{2} \cos 2\varphi, \\ &= a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{r}{a} \right)^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi.$$

Le calcul de la moyenne de la fonction $r(\varphi)$ est identique à la rectification de l'ellipse.

P. MANSION a montré que la méthode d'approximation est particulièrement précise parce que la courbe représentative de la fonction :

$$y = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 x},$$

présente une inflexion ; elle admet, en effet, des tangentes parallèles aux extrémités $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ de l'arc utile.

Pour $k = \frac{3}{5}$, par exemple, l'intégrale a pour valeur, d'après

LEGENDRE :

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \times 0,9027799.$$

La méthode déduite du théorème de BERNOULLI donne une erreur relative de l'ordre de 1×10^{-7} .

La courbe représentative de la fonction $\frac{I}{r}$ admet aussi des tangentes parallèles aux extrémités de l'arc $(0, \frac{\pi}{2})$. P. MANSION en déduit que l'intégrale K de première espèce est comprise entre les deux limites suivantes, dont la première est la limite inférieure :

$$\frac{\pi}{2n} \left\{ \frac{I}{2r_0} + \frac{I}{r_2} + \dots + \frac{I}{r_{2n-2}} + \frac{I}{2r_{2n}} \right\},$$

$$\frac{\pi}{2n} \left\{ \frac{I}{r_1} + \frac{I}{r_3} + \dots + \frac{I}{r_{2n-1}} + \frac{I}{r_{2n+1}} \right\}.$$

Mais MANSION n'apporte aucune conclusion quant aux intégrales elliptiques de troisième espèce d'amplitude quelconque. C'est précisément d'une intégrale de cette espèce que dépend la rectification de la courbe affine de la chaînette, que nous étudierons dans la suite.

Formules empiriques pour le périmètre de l'ellipse. Formule de Muir et d'Escott.

Diverses formules empiriques ont été données pour éviter l'emploi des tables de Legendre. Étant donné l'importance de la question, nous avons tenu à les rassembler dans l'étude qui suit.

Soit l'ellipse :

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi,$$

e son excentricité.

Th. MUIR (1) en 1882 a donné une excellente formule qui a été reproduite en 1896 par E.B. ESCOTT (2). Le cercle isopérimétrique à l'ellipse a pour rayon R la longueur définie par la formule :

$$2R^{3/2} = a^{3/2} + b^{3/2};$$

(1) Th. MUIR. — On the perimeter of an ellipse. (*The Messenger of Mathematics* (2), t. XII, 1882 1883, pp. 149 151.)

(2) E.B. ESCOTT. — *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. III, 1896, p. 235. — Voir aussi *I. M.*, 1895, p. 401, 1896, pp. 7, 137, 235, 1897, pp. 64, 202, 1900, p. 409, 1902, p. 239, 1903, p. 281, 1904, p. 93; 1905, p. 151.

ce qui revient à poser :

$$\frac{R}{a} = \left[\frac{1 + (1 - e^2)^{\frac{3}{4}}}{2} \right]^{\frac{2}{3}}.$$

MUIR précise en outre que l'erreur par défaut est $\frac{e^8}{2^{14}}$.

La formule est particulièrement excellente pour les valeurs très faibles de l'excentricité e (e < 0,5), c'est-à-dire pour des formes d'ellipse très voisines du cercle.

Pour e = 0,173.65, l'erreur commise est inférieure à 1×10^{-5} , et pour e = 0,342.02 elle est de : $\varepsilon = 3 \times 10^{-5}$.

Les valeurs données sont approchées par défaut. L'écart est particulièrement sensible à partir de e = 0,9.

Pour e = 0,906.31, l'erreur absolue atteint 0,001.88.

Formules de Peano. (1)

G. PEANO (1887) et J. BOUSSINESQ (1889) ont recherché des formules empiriques exprimant le rayon R de la circonférence isopérimétrique à l'ellipse en fonction des deux moyennes s et p, arithmétique et géométrique des deux demi-axes. Posons :

$$2s = a + b, \quad p^2 = ab.$$

PEANO donne les limites :

$$a + b + \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 2R > \frac{2}{9} \left[19s - 4 \frac{2s^2 + 3p^2}{\sqrt{s^2 + 3p^2}} \right],$$

l'erreur sur le périmètre $P = 2\pi R$ de l'ellipse entière, étant inférieure à :

$$\frac{5\pi (a - b)^6}{16384 b^5}.$$

(1) G. PEANO. — *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*. (Torino, 1887.)

— Sur une formule d'approximation pour la rectification de l'ellipse. (C. R., 23 déc. 1889, t. CIX, pp 960 961.)

Formules de Boussinesq (1).

a) Les formules de BOUSSINESQ donnent une meilleure approximation pour e petit. En premier lieu, BOUSSINESQ pose :

$$\frac{P}{\pi} = \frac{3}{2} (a + b) - \sqrt{ab} = 3s - p,$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{2R}{a} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{b}{a} \right) - \sqrt{\frac{b}{a}},$$

ou :

$$\frac{2R}{a} = \frac{3}{2} \left(1 + \sqrt{1 - e^2} \right) - \left(1 - e^2 \right)^{\frac{1}{4}}.$$

BOUSSINESQ remarque, en prenant $a = 1$, que s et p ont les développements suivants :

$$s = \frac{a + b}{2} = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{16} - \frac{e^6}{32} - \frac{5e^8}{256} + \dots,$$

$$p = \sqrt{ab} = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{32} e^4 - \frac{7}{128} e^6 - \frac{77}{2048} e^8 + \dots$$

Soit $P = 2\pi R$. Le rayon R du cercle isopérimétrique a pour développement :

$$R = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \frac{175e^8}{16384} + \dots$$

D'où :

$$R - s = \frac{e^4}{64} \left(1 + \frac{3}{4} e^2 \right) + \frac{145}{16384} e^8,$$

$$R - p = \frac{3e^4}{64} \left(1 + \frac{3}{4} e^2 \right) + 3 \frac{147}{16384} e^8.$$

La seconde expression est presque le triple exactement de la première ; on a :

$$\frac{1}{3} (R - p) - (R - s) = \frac{e^8}{8192}.$$

(1) J. BOUSSINESQ. — Expressions approchées du contour de l'ellipse et de la surface de l'ellipsoïde, en fonction des deux moyennes arithmétique et géométrique des demi axes. (*C. R.*, 8 avril 1889, t. CVIII, pp. 695 699.)

D'où la formule de Boussinesq sous la forme :

$$2 R = 3 s - p - \frac{3 e^2}{8192} a.$$

Observons que cette formule n'est autre que la première formule de Peano.

La formule est excellente jusqu'à la valeur 0,5 de e environ. La fonction est décroissante comme la fonction correcte $E\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

A partir de la valeur 0,4 de e , les résultats donnés par cette formule sont toujours approchés par excès, remarque qui permet de combiner les deux formules d'ESCOTT et de BOUSSINESQ.

Pour $e = 1$, c'est-à-dire pour le diamètre de l'ellipse, on a :

$$\frac{P}{a} = \frac{3\pi}{2} = 4,712,38.$$

L'erreur commise est très importante (0,712.38) ; en général la formule n'est pas applicable pour les ellipses très aplaties ($e > 0,7$).

Pour le cercle, la formule est exacte.

b) La deuxième formule de BOUSSINESQ est :

$$2 R = (a + b) \left\{ \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{a - b}{a + b} \right)^2 \right]^2 + \frac{1}{256} \left(\frac{a - b}{a + b} \right)^6 \right\},$$

elle donne des résultats plus rapprochés surtout pour les valeurs de e voisines de 0. Pour $e = 1$, $a = 1$, on a :

$$2R = \left(1 + \frac{1}{8} \right)^2 + \frac{1}{256} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} ;$$

$$P = \pi \times 1,269.53 = 3,988.35.$$

C'est donc une valeur approchée par défaut. L'erreur commise est $\epsilon = 0,011.65$.

Formules de Williot pour le périmètre de l'ellipse.

Nous ne saurions trop recommander aux techniciens le mémoire des *Annales des Ponts et Chaussées* de 1896 que l'Ingénieur des Ponts et Chaussées V. WILLIOT (1) a consacré à des considérations élémentaires relatives aux intégrales elliptiques. Partant de la première formule de BOUSSINESQ :

$$2R < 3s - p,$$

WILLIOT donne d'abord une formule analogue, aussi approchée, mais par défaut :

$$R > 3 \sqrt{ps} - 2p.$$

En prenant la moyenne des résultats donnés par ces deux formules, on obtient une formule pour laquelle l'erreur n'affecte que la douzième puissance de l'excentricité :

$$R < \frac{3}{4}s - \frac{5}{4}p + \frac{3}{2}\sqrt{ps};$$

c'est-à-dire :

$$4R < \frac{3}{2}(a+b) - 5\sqrt{ab} + 3\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

Soient s_i et p_i les moyennes successives arithmétiques et géométriques des demi-axes a et b ; posons :

$$\begin{aligned} 2s_1 &= a + b & , & p_1^2 = ab & , & 2d_1 &= a - b & , \\ 2s_2 &= s_1 + p_1 & , & p_2^2 &= s_1 p_1 & , & 2d_2 &= s_1 - p_1 & , \\ 2s_3 &= s_2 + p_2 & , & p_3^2 &= s_2 p_2 & , & 2d_3 &= s_2 - p_2 & ; \end{aligned}$$

les moyennes arithmétiques s_i décroissent ; les moyennes géométriques p_i croissent ; les différences d_i tendent vers zéro. Les deux suites s_i et p_i définissent une même limite.

A l'aide de ces formules et de la transformation de LANDEN, on obtient ainsi les formules équivalentes :

$$\begin{aligned} R &= \frac{a^2 - 2s_1 d_1 - 4s_2 d_2 - 8s_3 d_3}{s_m} \\ &= \frac{p_2^2 + 2s_2 d_2 - 16s_4 d_4 - 32s_5 d_5}{s_m} . \end{aligned}$$

(1) V. WILLIOT. — Essai technique sur la rectification de l'ellipse et des intégrales elliptiques ou hyperelliptiques. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 7^e série, t. XII, 1896, 2^e semestre, pp. 22 69, mémoire n° 32.)

En particulier, en première approximation :

$$R = \frac{a^2 - 2s_1 d_1}{s_1} = s_1 + \frac{d_1^2}{s_1} = s + \epsilon ;$$

c'est la formule grossièrement approchée : $R = a + b$. En deuxième approximation :

$$R = \frac{a^2 - 2s_1 d_1 - 4s_2 d_2}{s_2} = s_2 + 2d_2 + \frac{d_2^2}{s_2} = 3s_2 - 2p_1 + \epsilon,$$

c'est la formule de BOUSSINESQ :

$$2R = 3s - p.$$

En troisième approximation :

$$R = s_3 + 2d_2 - 2d_3 + \frac{2d_2 d_3 + d_3^2}{a_3} ;$$

en négligeant la fraction finale, c'est la formule :

$$R = \frac{3}{4}s - \frac{5}{4}p + \frac{3}{2}\sqrt{ps}.$$

Les progrès successifs dans l'approximation résultent des développements en séries. Prenons $a = 1$ et posons pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{e^2}{4} &= A, & \frac{e^4}{64} &= B, & \frac{e^6}{256} &= C, \\ \frac{e^8}{16384} &= D, & \frac{e^{10}}{65536} &= E, & \frac{e^{12}}{1048576} &= F. \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} s_1 &= A - 4B - 8C - 320D - 896E - 10752F, \\ p_1 &= A - 6B - 14C - 616D - 1848E - 23408F; \\ s_2 &= A - 5B - 11C - 468D - 1372E - 17080F, \\ p_2 &= A - 5B - 11C - 470D - 1386E - 17366F. \end{aligned}$$

Dès la troisième opération, a_3 et b_3 sont égales jusqu'au terme e^{12} inclus :

$$s_3 = p_3 = A - 5B - 11C - 469D - 1379E - 17223F.$$

Comme le rayon R a pour expression rigoureuse :

$$R = A - 3B - 5C - 175D - 441E - 4851F,$$

la comparaison avec les expressions :

$$3s_2 - 2p_1 = A - 3B - 5C - 172D - 420E - 4424F,$$

$$3s_2 - 2p_1 = A - 3B - 5C - 178D - 462E - 5282F,$$

$$3s_3 - 2p_1 = A - 3B - 5C - 175D - 441E - 4853F,$$

met en évidence la haute approximation de la formule de BOUSSINESQ et surtout de celles de WILLIOT.

Voici trois cas d'application correspondant à des hypothèses d'excentricité faible, moyenne ou grande. Dans les trois cas $a = 1$; e sera successivement $\sin 15^\circ$, $\sin 45^\circ$ et $\sin 80^\circ$.

a	I	I	I
b	0,96593	0,70711	0,173648
e	0,25882	0,70711	0,98481
s ₁	0,98296	0,85356	0,586824
p ₁	0,98282	0,84090	0,416711
s ₂	0,98289	0,84723	0,501767
p ₂	0,98289	0,84720	0,494506
s ₃			0,498137
p ₃			0,498123
s ₄			0,498130
p ₄			0,498130
3s ₂ —2p ₁	0,98304	0,85988	0,671879
3p ₂ —2p ₁	0,98304	0,85980	0,650096
3s ₃ —2p ₁		0,85984	0,660981

Dans le cas de faible excentricité, les tables donnent :

$$R = 0,98.304 ;$$

les cinq décimales données par $3s_2 - 2p_1$ et $3p_2 - 2p_1$ sont correctes.

Dans le cas $e = \sin 45^\circ$, d'excentricité moyenne, la moyenne de $3s_2 - 2p_1$ et $3p_2 - 2p_1$ est précisément la valeur de $3s_3 - 2p_1$: c'est la valeur exacte $R = 0,85.984$, donnée par les tables.

Enfin, pour le cas de forte excentricité la valeur des tables est :

$$R = 0,662.155.$$

$3s_3 - 2p_1$ est égale à la moyenne 0,660.981 des valeurs de $3s_2 - 2p_1$ et $3p_2 - 2p_1$, mais l'écart est ici notable.

Voici enfin un exemple de plus haute approximation :

$$a = 1, \quad b = 0,258.8190, \quad e = \sin 75^\circ = 0,96.593,$$

LEGENDRE donne :

$$R = 0,685.260.8, \quad \frac{\pi}{2} R = 1.076.405.1,$$

$$s_1 = 0,629.409.5, \quad p_1 = 0,508.742.6,$$

$$s_2 = 0,569.076.1, \quad p_2 = 0,565.868.8,$$

$$s_3 = 0,567.472.4, \quad p_3 = 0,567.470.1,$$

$$s_4 = p_4 = 0,567.471.3,$$

$$\text{La formule } R < \frac{p_2^2 + 2s_2d_2}{s_4} - 16d_4,$$

$$\text{donne : } p_2^2 = 0,320.207.4, \quad 2s_2d_2 = 0,0686686,$$

$$R < 0,685.261.1.$$

La comparaison avec le résultat des tables de LEGENDRE montre qu'elle est exacte à 3.10^{-7} près.

Formule de Williot pour la rectification des arcs d'ellipse.

Les formules de WILLIOT s'appliquent au cas d'un arc appartenant au premier quadrant et dont les normales ont pour longueurs n et n' , les segments étant limités aux points d'incidence et au grand axe de l'ellipse. Soit ω l'angle des normales ($0 < \omega < \frac{\pi}{2}$).

Le cas du quadrant correspond à :

$$n = a, \quad n' = b, \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

L'arc elliptique sera considéré comme équivalent à un arc de cercle de rayon R , d'angle au centre égal à ω . On aura les mêmes formules :

$$R = \frac{n + n'}{2}, \quad R = \frac{3}{4} (n + n') - \frac{1}{2} \sqrt{nn'},$$

que pour l'ellipse entière.

Mais ici la considération de l'angle ω prend une importance considérable ; si les normales extrêmes de l'arc sont voisines, ω étant faible, la formule :

$$R = \frac{n + n'}{2} ,$$

pourra donner un résultat très satisfaisant.

Prenons un arc partant du sommet A du grand axe. On a :

$$R = \frac{b^2}{a} \left[1 + \frac{e^2}{2} u^2 - \left(\frac{e^2}{10} - \frac{3}{8} e^4 \right) u^4 + \left(\frac{e^2}{105} - \frac{5e^4}{28} + \frac{5e^6}{16} \right) u^6 \right] ,$$

$$\frac{n + n'}{2} = \frac{b^2}{a} \left[1 + \frac{e^2}{2} u^2 - \left(\frac{5e^2}{48} - \frac{3e^4}{8} \right) u^4 + \left(\frac{17e^2}{1440} - \frac{3e^4}{16} + \frac{5e^6}{16} \right) u^6 \right] ,$$

$$R - \frac{n + n'}{2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{e^2 u^4}{240} \left[1 - \left(\frac{23}{43} - \frac{15}{7} e^2 \right) \right] u^2 .$$

Le calcul sera rendu plus rigoureux en fractionnant l'arc en parties auxquelles sera appliquée successivement cette formule.

Formule de Soreau. (1)

1) SOREAU pose :

$$\frac{P}{4a} = \frac{u}{\sin u} ;$$

en premier lieu, il prend :

$$u = \frac{b}{a + b} \pi , \quad u = \frac{\pi \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} .$$

La formule est exacte pour le cercle puisque pour $e = 0$, on a :

$$u = \frac{\pi}{2} , \quad P = 2\pi a .$$

Elle l'est aussi pour le cas de l'ellipse réduite au diamètre principal : pour $e = 1$, on a en effet : $P = 4a$.

Les résultats donnés sont approchés par défaut. Ils ne sont applicables pratiquement que pour $e < 0,5$.

(1) R. SOREAU. — Nouvelle formule approchée de la longueur de l'ellipse. (C. R., t. CLVI, 19 mai 1913, pp. 1513-1515.)

2) En deuxième approximation, SOREAU pose :

$$\beta = \frac{b}{a}, \quad u = \pi \beta \cdot \frac{1 + 0,03 \beta}{0,97 + 1,09 \beta}.$$

Autres formules de rectification de l'ellipse.

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes. Sur le grand axe ox d'une part, sur oy de l'autre, considérons les points A' et B' définis par les coordonnées :

$$A'(3a, 0), \quad B'(0, 3b).$$

Les droites BA' et AB' ont respectivement pour équations :

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{3b} = 1.$$

Elles se rencontrent au point M de coordonnées :

$$x = \frac{3a}{4}, \quad y = \frac{3b}{4}.$$

En première approximation, on peut remplacer l'arc AB du quadrant de l'ellipse par les segments AM et BM :

$$AM = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{9b^2}{16}} = \frac{a}{4} \sqrt{10 - 9e^2},$$

$$BM = \sqrt{\frac{9a^2}{16} + \frac{b^2}{16}} = \frac{a}{4} \sqrt{10 - e^2}.$$

De sorte que si P désigne le périmètre total de l'ellipse, on a la formule approchée :

$$\frac{P}{a} = \sqrt{10 - e^2} + \sqrt{10 - 9e^2}.$$

La formule est exacte pour $e = 1$, c'est-à-dire pour le diamètre AA' de l'ellipse ($P = 4a$).

Pour les autres valeurs elle donne des résultats approchés par excès, avec une erreur absolue de l'ordre de 0,04. Pour $a = 1$:

$e = 0,$	$P = 6,324,56,$
$e = 0,087.16,$	$P = 6,311.07,$
$e = 0,258.82,$	$P = 6,217.20,$
$e = 0,5,$	$P = 5,906.38,$
$e = 0,707.11,$	$P = 5,427.41.$

C'est pour cette dernière valeur que l'erreur paraît être la plus faible. On a en se reportant aux tables de LEGENDRE :

$$\varepsilon = 0,024.84.$$

Enfin, pour le cercle, la formule revient à prendre $\pi = \sqrt{10}$.

Signalons aussi la formule $P = 2\pi R$ avec $\beta = \frac{b}{a}$:

$$\frac{4R}{a} = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) + \beta^2(2 - \sqrt{2})} + \sqrt{(2 - \sqrt{2}) + \beta^2(2 + \sqrt{2})},$$

qui donne, avec une approximation inférieure à e^8 , le rayon R du cercle de même périmètre que l'ellipse. L'erreur, par excès,

$$\text{est } \frac{5}{16384} e^8.$$

Formule de PLCH pour le périmètre P de l'ellipse (1) :

$$P = 4a + (2\pi - 4) \frac{b^2}{a}.$$

Formule de CAVALLIN (2) :

$$P = \frac{1}{4} \pi \left\{ \sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b + 2 \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + 2a^2b^2}} \right\}.$$

M. AURIC (3) indique les formules suivantes :

$$P = \pi(a + b) \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{a - b}{a + b} \right)^2 \right\},$$

$$P = \pi(a + b) + (4 - \pi)(a - b)\varphi,$$

avec :

$$\varphi = \frac{\text{Arcsin } \frac{2}{3} \frac{a - b}{a + b}}{\text{Arcsin } \frac{2}{3}}.$$

(1) P.C. PLCH. — Formules pour le périmètre d'une ellipse. (*Casopis*, 1883, t. XII, p. 265, en tchèque.)

(2) C.B.S. CAVALLIN — Harledning af ett par närmewarden på ellipser omkrets. (*Tidskrift för Matematik*, 5^e série, t. I, 1883, pp. 33-37.)
— Sur certaines moyennes géométriques et sur le périmètre de l'ellipse. (*Mathesis*, t. III, 1883, pp. 56-60.)

(3) A. AURIC. — *Ponts en maçonnerie*, p. 106.

G. CAMUS. — Ricerca geometrica della lunghezza di un arco di ellisse. (*Atti del R. Istituto Veneto di Scienze*, série (6), t. I, 1884, pp. 997-1005.)

La première formule rapportée par M. Auric n'est autre que la seconde formule de Boussinesq :

$$P = \pi (a + b) \left\{ \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \right] + \frac{1}{256} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^6 \right\}$$

Ouvrages avec intrados elliptiques.

Citons le pont de l'Alma, sur la Seine à Paris (1854-1855), dont l'arche centrale est une demi-ellipse d'ouverture 43 mètres, flèche 8 mètres 60, surbaissement $\sigma = 1/5$.

Dans les remarquables et célèbres réalisations de Paul SÉJOURNÉ, nous mentionnerons les arches elliptiques du Pont Adolphe de Luxembourg, d'ouverture 84 m. 65, le Pont des Amidonniers de Toulouse dont l'arche centrale a 46 m. de portée.

P. SÉJOURNÉ a même employé une ellipse à grand axe *vertical* pour le viaduc de Scarassoui qu'il construisit en 1921-1922 (ligne de Nice à Coni).

e	Valeur exacte	Boussinesq		Soreau		Escott Muir	
0							
0,087.16	6,271.236	6,271.22	.02	6,271.24	.00	6,271.24	.00
173.65	235.548	235.55	.00	235.52	.03	235.54	.01
258.82	176.600	176.60	00	176 64	.04	175.56	.04
342.02	095.196	095.19	00	095.08	0 12	095.16	.04
422.62	5,992.456	5,992 47	— 01	5,992.20	0 26	5,992.44	.02
0 500	869.848	869 93	— .08	869 32	0 53	869.83	.02
573.58	729.160	729.26	— 0 10	745 68	0 88	729.10	.06
642.79	572.560	572.71	— 0 15	571.00	01.56	572.50	.06
707.11	402.572	402.91	— 0.34	400.04	02.53	402.50	.07
766.04	222.156	223.90	— 0.74	218 36	02.70	221 91	0.25
819.15	034.716	036 03	— 01.31	029.28	05.44	034.07	0.65
866.03	4,844 224	4,847.13	— 02 91	4,836 80	07 42	4,843 29	0.93
906.31	655.308	651.62	— 06.31	645.68	09.63	653 43	01.88
939.69	473.508	497.16	— 023.65	461.48	012 03	469.87	03.64
965 93	305 620	333 81	— 028 19	292 36	013.26	299.27	06.35
984.81	160.456	221.83	— 061 37	147 08	013 38	146 86	013.60
996.195	050.652	195.60	— 144 95	060 44	09.79	025.75	024.90

Valeurs du périmètre de l'ellipse (a = 1).

CHAPITRE XVI

LA RECTIFICATION DE LA CATÉNOÏDE.

La rectification de la projection de chaînette :

$$x = nu \quad , \quad y = mch u,$$

dépend des fonctions elliptiques.

L'arc compté de la clef au point d'argument u est défini, en effet, par l'intégrale :

$$s = \int_0^u \sqrt{n^2 + m^2 \operatorname{sh}^2 u} \, du .$$

Rectification par les fonctions elliptiques de Jacobi.

Nous nous bornerons à indiquer les formules de réduction canonique et les constantes elliptiques, dans les deux modes de représentation des fonctions elliptiques.

En fonction de y , on a immédiatement :

$$s = \int \sqrt{\frac{y^2 + n^2 - m^2}{y^2 - m^2}} \, dy = \int_m^y \frac{y^2 + n^2 - m^2}{\sqrt{(y^2 - m^2)(y^2 + n^2 - m^2)}} \, dy ,$$

ou, en posant :

$$y = \frac{m}{z} , \quad s = \int_z^1 \frac{m^2 + (n^2 - m^2) z^2}{\sqrt{(1 - z^2)[m^2 + (n^2 - m^2) z^2]}} \frac{dz}{z^2} .$$

Deux cas sont à distinguer, suivant que la chaînette est projetée sur un plan passant par son axe ou sa directrice.

1^o $n^2 < m^2$. — Posant :

$$k^2 = \frac{n^2 - m^2}{n^2}, \quad k'^2 = \frac{m^2}{n^2}, \quad z = cnv;$$

il vient, après réductions :

$$\frac{s}{n} = \int \frac{k'^2 + k^2 cn^2 v}{cn^2 v} dv = k^2 v + k'^2 \int \frac{dv}{cn^2 v}.$$

2^o $n^2 < m^2$. — On pose :

$$k^2 = \frac{m^2 - n^2}{m^2}, \quad k'^2 = \frac{n^2}{m^2}, \quad z = sn v.$$

Il vient :

$$\frac{s}{m} = \int dn^2 v. \quad dv.$$

Dans les deux cas les intégrales se réduisent à des formes connues et classiques.

Rectification par les fonctions elliptiques de Weierstrass.

Reprenons l'intégrale définissant l'arc s de caténoïde en fonction de l'ordonnée y . Posons maintenant :

$$\frac{y - m}{y + m} = t, \quad y = m \frac{1 + t}{1 - t}.$$

L'intégrale devient :

$$\frac{s}{n} = \int \sqrt{\frac{(t - 1)^2 + 4k'^2 t}{t}} \frac{dt}{(1 - t)^2};$$

elle prend la forme :

$$\frac{s}{n} = \int \sqrt{(p - e_1) [p^2 + e_1 p + 1 - 2e_1^2]} \cdot \frac{dp}{(p - e_1)(p - e_1 - 1)^2},$$

avec la notation de la fonction p de WEIERSTRASS.

Les constantes elliptiques sont :

$$k' = \frac{m}{n},$$

$$\frac{2m^2 - n^2}{n^2} = 2k'^2 - 1 = \frac{3e_1}{2}, \quad 4k'^2 = 3e_1 + 2,$$

$$g_2 = 4(3e_1^2 - 1), \quad g_3 = 4e_1(1 - 2e_1^2),$$

$$t = pv - e_1, \quad \Delta = 16(9e_1^2 - 4),$$

$$e_2 e_3 = 1 - 2e_1^2, \quad \alpha_1 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 1.$$

Les racines e_2, e_3 sont réelles pour $|e_1| > \frac{2}{3}$, ce qui exige $m > n$. On a :

$$pw = e_1 + 1, \quad p'^2 w = p''w = 4(3e_1 + 2), \quad w_1 = \frac{\omega_1}{2}.$$

Pour w_1 , défini par $pw_1 = e_1 - 1$,

$$p'^2 w_1 = 4(3e_1 - 2), \quad p''w_1 = 4(2 - 3e_1),$$

$$p(2w_1) = e_1, \quad w_1 = \frac{\omega_1}{2} + \omega_2.$$

On a donc :

$$\frac{2s}{n} = \int \frac{p'^2 v \, dv}{(pv - e_1)(pv - pw)^2}, \quad \frac{s}{2n} = \int \frac{(pv - e_2)(pv - e_3) \, dv}{(pv - pw)^2}.$$

$$\frac{s}{2n} = v + (2 + 3e_1) \left[\int \frac{dv}{pv - pw} + \int \frac{dv}{(pv - pw)^2} \right].$$

La décomposition en éléments simples est ainsi opérée, permettant d'exprimer l'arc au moyen des fonctions de WEIERS-TRASS.

Développement en série de l'arc.

Si l'on veut éviter l'emploi d'intégrales elliptiques, on peut songer au développement en série de s en fonction de u . Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{du} &= n \left[1 + \frac{m^2}{n^2} \operatorname{sh}^2 u \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= n \left[1 + \frac{m^2}{2n^2} u^2 + \frac{m^2}{2n^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{m^2}{4n^2} \right) u^4 + \dots \right], \\ s &= nu \left[1 + \frac{m^2}{6n^2} u^2 + \frac{m^2}{10n^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{m^2}{4n^2} \right) u^4 + \dots \right].\end{aligned}$$

Nous pouvons toujours simplifier les calculs en adoptant une *caténoïde réduite*, par similitude, c'est-à-dire en posant $n = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}s &= \int_0^u \sqrt{1 + k'^2 \operatorname{sh}^2 u} \, du, \quad (k' = m), \\ \operatorname{sh}^2 u &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2u - 1) = \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{3} + \frac{2}{45} u^6 + \frac{u^8}{7 \times 45} + \frac{u^{10}}{25 \times 81 \times 7} \dots \\ \sqrt{1 + k'^2 \operatorname{sh}^2 u} &= 1 + \frac{k'^2}{2} u^2 + A \frac{u^4}{4!} + B \frac{u^6}{6!} + C \frac{u^8}{8!} + \dots \\ A &= k'^2 (4 - 3k'^2), \\ B &= k'^2 (16 - 60k'^2 + 45k'^4), \\ C &= k'^2 [64 - 63(4 - 5k'^2)^2 k'^2].\end{aligned}$$

Nous observons que cette fonction et $\operatorname{ch}(k'u)$ sont égales aux limites $k' = 0$ et $k' = 1$. Leur différence sera donc mise sous la forme :

$$\sqrt{1 + k'^2 \operatorname{sh}^2 u} - \operatorname{ch}(k'u) = \frac{1}{6} k'^2 k^2 u^4 \times U(u),$$

en introduisant le module k des fonctions elliptiques,

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

et une fonction $U(u)$. On remarque que :

$$\begin{aligned}A - k'^4 &= 4k^2 k'^2 \\ B - k'^6 &= 4k^2 k'^2 (4 - 11k'^2) \\ C - k'^8 &= 8k^2 k'^2 [8 - 118k'^2 + 197k'^4];\end{aligned}$$

et, par suite, le développement limité de $U(u)$ est :

$$U = 1 + \frac{4 - 11k'^2}{30} u^2 + \frac{8 - 118k'^2 + 197k'^4}{840} u^4.$$

Cette formule s'appliquera donc avec une excellente approximation à la mesure des arcs voisins de la clef. Sur la courbe réduite, la loi de rectification sera :

$$s = \frac{1}{k'} \operatorname{sh} k'u + \frac{1}{30} k^2 k'^2 u^5 \left[1 + \frac{4 - 11k'^2}{42} u^2 + \dots \right] ;$$

et sur la courbe d'intrados :

$$s = \frac{n^2}{m} \operatorname{sh} k'u + \varepsilon,$$

ε étant un infiniment petit du cinquième ordre en u .

Rappel de la règle de P. Tchebichef pour l'évaluation pratique des intégrales définies.

Pour calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{+1} y \, dx$, une excellente et rapide méthode consiste à prendre la valeur :

$$I = \frac{1}{6} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6),$$

les six valeurs de y_1 correspondant aux racines x_1 de l'équation :

$$x^6 - x^4 + \frac{x^2}{5} - \frac{1}{105} = 0.$$

Les valeurs approchées de ces racines sont :

$$\pm 0,266 \ 635, \quad \pm 0,422 \ 519, \quad \pm 0,866 \ 247 ;$$

cela revient à prendre pour y la moyenne arithmétique correspondant à ces six valeurs de la variable x .

Dans le cas d'une fonction $y(x)$ paire, la valeur moyenne de zéro à un sera celle des trois points correspondant aux valeurs absolues des racines précédentes.

1. R. RADAU. — Sur les formules de quadrature à coefficients égaux. (*C. R.*, t 90, 8 mars 1880, pp. 520 523.)

R. RADAU. — Etude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* (3), t VI, 1880, pp. 283 336.)

P. Tchebichef — Sur les quadratures, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2), t XIX, 1874, pp 19 34 (Les résultats numériques sont entachés de nombreuses erreurs, corrigées par RADAU.)

La méthode s'applique rigoureusement à l'aire de la parabole $y = x^2$. Elle donne pratiquement d'excellents résultats pour des courbes présentant l'allure de l'arc de parabole, de chaînette $y = \text{ch}x$, etc., c'est-à-dire précisément pour les arcs des *courbes paraboliques de voûtes*.

Pour faciliter les calculs, voici le tableau des racines, de leurs carrés, cubes et logarithmes :

x	$x^2 = 0,$	$x^3 = 0,$	$\text{Log } x = \overline{1},$
0,266 635	071 094 2	018 956 2	425 917 2
0,422 519	178 522 2	075 602 9	625 846 3
0,866 247	750 383 7	650 017 7	937 641 7

Rectification de la caténoïde par la méthode de Tchebichef.

Nous avons rappelé que le théorème de BERNOULLI relatif à la rectification de l'ellipse donnait une excellente approximation, par suite du fait que la courbe représentative de la fonction :

$$y = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 x},$$

présentait une inflexion sur l'arc utile. Cette inflexion correspond à :

$$\cos 2x = \frac{1}{e^2} \left[2 \sqrt{1 - e^2} - (2 - e^2) \right] = -\frac{e^2}{4} \left(1 - \frac{e^2}{2} \right) + \dots$$

Mais la courbe :

$$y = \sqrt{n^2 + m^2 \text{sh}^2 x},$$

ne peut avoir d'inflexion. On ne pourrait donc songer à étendre le théorème de Bernoulli à la rectification de la courbe affine de la chaînette. Mais la courbe représentative de cette seconde fonction a l'allure d'un arc de parabole ou de chaînette au voisinage de son sommet. Dans ces conditions, la méthode de Tchébichef est spécialement indiquée pour ces calculs.

D'une manière plus générale, cette même méthode s'appliquera avec succès à de nombreux calculs relatifs aux arcs de paraboloïques.

Nous avons à calculer par cette méthode des intégrales de la forme :

$$I = \int_0^u \gamma \, du ,$$

en posant :

$$\gamma = \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + k'^2 \operatorname{sh}^2 u} , \quad k' = \frac{m}{n} .$$

	Pont Boucicaut	Pont d'Orléans
Formule des trois niveaux	1,046'642	1,05516
« de Tchebichef	1,0449	1,05460
Valeur de l'intégrale I	2,0065	1,35939
Arc s	20 ^m ,902	23 ^m ,623
Excès s — a	0 ^m ,902	1 ^m ,223

Le tableau mentionne, pour les deux ouvrages étudiés par la suite, les valeurs de γ à la naissance u , au quart de portée $\frac{u}{2}$ et aux trois points (u_1, u_2, u_3) correspondant à l'application de la méthode de Tchebichef.

Les valeurs moyennes de la fonction γ sont donc :

$$\gamma = \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + k'^2 \operatorname{sh}^2 u}.$$

	Pont Boucicaut	Pont d'Orléans
k'	0, 193· 236 0	0, 386 703
u	1, 920 106 5	1, 289 018
γ	1, 189 934	1, 191 84
$\frac{u}{2}$	0, 960 053 2	0, 644 509
α	12° 09' 13''	14° 55' 39''
γ	1, 022 93	1, 034 780
u_1	0, 511 966 2	0, 343 695
α_1	5° 53' 53''	7° 41' 47''
γ_1	1, 005. 322	1, 009 10
u_2	0, 811 280	0, 544 631
α_2	9° 53' 57''	12° 28' 14''
γ_2	1, 015 11	1, 024 18
u_3	1, 663 281	1, 116 600
α_3	26° 10' 27''	27° 48' 05''
γ_3	1, 114 390 5	1, 130 50

CHAPITRE XVII

LA FONCTION CATÉNAIRE.

Les théories de DENFERT-ROCHEREAU, de RANKINE, de HEINZERLING, les réalisations d'ouvrages en caténoïdes (Pont Boucicaut, Pont d'Orléans, Hangars d'aviation, etc...), donnent une certaine importance à la chaînette et à ses transformées en tant que courbes de voûte.

Si l'on considère la caténoïde :

$$x = nu, \quad y = mchu, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n} \operatorname{sh} u,$$

d'équation naturelle :

$$\frac{n^2}{R \cos^2 \alpha} = \sqrt{(m^2 - n^2) \cos^2 \alpha + n^2} ;$$

nous avons établi la relation :

$$\frac{y}{n^2} = \frac{1}{R \cos^3 \alpha} ,$$

qui donne par élimination de y :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{3R \sin \alpha - R' \cos \alpha}{R^3 \sin \alpha \cos^4 \alpha} , \quad \frac{dR}{d\alpha} = R'.$$

Nous appellerons, d'une façon générale, *fonction caténaire* attachée à une courbe quelconque, la fonction :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{3R \sin \alpha - R' \cos \alpha}{R^3 \sin \alpha \cos^4 \alpha} ,$$

qui s'écrit aussi simplement :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dy}.$$

Cette fonction est constante pour la chaînette, la caténoïde, et en général pour toutes les courbes qui vérifient la relation :

$$\frac{y}{n^2} - \frac{1}{R \cos^3 \alpha} = C^{te},$$

c'est-à-dire qui sont les intégrales de l'équation différentielle :

$$n^2 y'' - y = C^{te}.$$

Ce sont précisément les courbes de voûte de HEINZERLING, dont il était question au chapitre III.

La fonction caténaire nous servira à reconnaître les arcs qui se comportent en arcs de caténoïde. Observons qu'elle est *nulle pour la parabole d'axe vertical*, dont l'équation naturelle est :

$$R \cos^3 \alpha = C^{te}.$$

Pour les courbes de Ribaucour :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0, \quad R' \cos \alpha = (k + 1) R \sin \alpha,$$

$$\Gamma(\alpha) = \frac{2 - k}{(R \cos^2 \alpha)^2} = \frac{2 - k}{R_0^2} \cos^{2(k-1)} \alpha.$$

En particulier, pour les paraboliques primaires :

	k	$\Gamma(\alpha)$
Développante d'astroïde	— 3	$\frac{5}{R_0^3} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha}$
Cycloïde	— 2	$\frac{4}{R_0^3} \cdot \frac{1}{\cos^6 \alpha}$
Cercle	— 1	$\frac{3}{R_0} \cdot \frac{1}{\cos^4 \alpha}$
Chaînette d'égale résist....	0	$\frac{2}{R_0^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
Chaînette	1	$\frac{1}{R_0^3}$
Parabole	2	0

Courbes figuratives de la fonction caténaire.

A chaque courbe considérée faisons correspondre une courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho = \rho_0^3(\Gamma\alpha).$$

Cette courbe sera la *figuratrice* de la fonction $\Gamma(\alpha)$ attachée à la précédente.

Pour la caténoïde, la chaînette, cette figuratrice est un cercle. Pour la parabole, elle se réduit à un point.

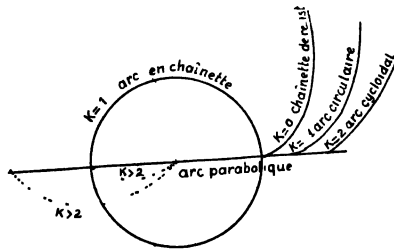


FIGURE 16.

Pour les courbes de Ribaucour, la figuratrice aura pour équation polaire :

$$\rho = \rho_0^3 \cdot \frac{2-k}{R_0^2} \cdot \cos^{2(k-1)}\alpha.$$

Ce sont donc les radiales de ces courbes elles-mêmes, c'est-à-dire les *multiplicatrices de Clairaut* (1). Ainsi :

pour $k = 0$, c'est-à-dire pour la chaînette d'égale résistance, la figuratrice est le *kampile d'Eudoxe* ;

pour $k = \frac{2}{3}$, c'est la *courbe de Roche* ;

pour $k = \frac{5}{4}$, la *courbe d'égale attraction* ;

pour $k = \frac{5}{2}$, le *folium simple* ;

pour $k = 3$, la *courbe d'Encke*.

(1) Gomès Teixeira, l. c. cit., III, p. 218.

Nous pouvons également écrire, en négligeant un facteur constant, la fonction caténaire attachée aux courbes de Ribaucour sous la forme :

$$\Gamma = (2 - k)R_0^{-\frac{2}{k}} y^{\frac{2}{k} - 2}.$$

La formule n'est pas valable pour la chaînette d'égale résistance.

Nous obtiendrons un autre système de courbes figuratrices des fonctions caténaïres relatives à ces diverses courbes en portant y en abscisses et $\Gamma(y)$ en ordonnées :

	k	Γ
Développante d'astroïde	— 3	$5 R_0^{2/3} y^{-8/5}$
cycloïde	— 2	$4 R_0^4 y^{-3}$
cercle	— 1	$3 R_0^2 y^{-4}$
chaînette d'égale résistance	0	$2 R_0 e^{\frac{2y}{R_0}}$
chaînette	1	R_0^{-2}
parabole	2	0

On constate alors que :

$k < 0$. — Les courbes figuratrices sont des arcs ayant une allure hyperbolique et se rapprochant de plus en plus de l'axe des ordonnées.

$0 < k < 1$. — Les courbes figuratrices sont des arcs à allure parabolique. Pour $k = \frac{2}{3}$, on a une droite passant par l'origine, et pour $k = 1$, c'est-à-dire pour la chaînette, la courbe figuratrice est une droite parallèle à l'axe des abscisses. Pour $k = 0$, c'est-à-dire pour la chaînette d'égale résistance, elle prend une allure exponentielle.

$1 < k < 2$. — Dans cet intervalle les courbes figuratrices reprennent une allure hyperbolique tout en restant toujours au-dessus de l'axe des abscisses. Pour $k = 2$, c'est-à-dire pour la parabole, la figuratrice se confond avec cet axe.

$2 < k$. — Les courbes figuratrices sont des arcs à allure hyperbolique situés au-dessous de l'axe des abscisses.

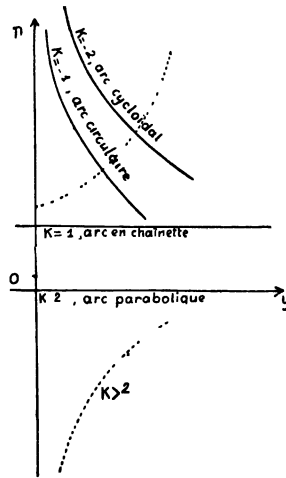


FIGURE 17.

Application.

Appliquons ces considérations à la cubique de SÉJOURNÉ, dont l'équation est :

$$y = \frac{6mx^2}{12n^2 - x^2}.$$

On tire :

$$y'' = \frac{144 mn^2 (x^2 + 4n^2)}{(12 n^2 - x^2)^3} = \frac{(2y + 3m) (y + 6m)^2}{108 m^2 n^2},$$

$$n^2 y'' = m + y + \frac{y^2}{4m} + \frac{y^3}{54 m^2}.$$

Par suite :

$$n^2 \Gamma = n^2 \frac{dy''}{dy} = 1 + \frac{y}{2m} + \frac{y^2}{18m^2}.$$

La courbe figuratrice de la fonction caténaire attachée à cette cubique est donc une parabole ordinaire d'axe vertical.

Si donc, m étant assez élevé, y varie entre zéro et une limite $f > 0$ assez faible, ce qui est le cas des courbes d'intrados, l'arc de la figuratrice est très voisin de la droite d'ordonnée 1 et par suite la cubique se rapproche beaucoup de la caténoïde :

$$y = m \operatorname{ch} \frac{x}{n}.$$

Pour l'intrados du pont d'Orléans, si l'on désigne par A le sommet de la parabole figuratrice, par B le point de celle-ci ayant pour ordonnée f , on voit que l'angle ω de la corde AC avec l'horizontale AB sera tel que :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2m} + \frac{f}{18m^2} = 0,075.192 ; \quad \omega = 4^{\circ}18'.$$

L'arc de la parabole figuratrice est donc très voisin de la droite AB.

CHAPITRE XVIII

CHAINETTE OSCULATRICE A UNE COURBE PLANE

Détermination de la chaînette osculatrice à une courbe plane.

Soient une courbe plane (C), x, y , les coordonnées du point courant M, α l'inclinaison de la tangente sur l'axe ox , R , le rayon de courbure en M.

Au lieu de considérer le cercle osculateur à la courbe (C) au point M, on peut se proposer de déterminer la chaînette d'axe vertical ascendant osculatrice à la courbe en ce point.

Une telle chaînette (Γ) aura pour équations :

$$X = x_0 + mu \quad , \quad Y = y_0 + mchu,$$

x_0, y_0 et m étant fonctions du paramètre du point M sur la courbe (C).

Si φ est le paramètre du point M sur la chaînette (Γ), la condition d'osculation des deux courbes s'exprime par :

$$x = x_0 + m\varphi \quad , \quad y = y_0 + mch\varphi \quad ,$$

$$sh\varphi = tg\alpha \quad , \quad m = R \cos^2\alpha = \frac{dx}{d\varphi} \quad .$$

α et φ sont donc associés par les formules habituelles.

Les chaînettes d'axe vertical osculatrices à une courbe plane (C) forment une famille à un paramètre (φ ou α) :

$$X = x + m(u - \varphi) \quad , \quad Y = y + m(chu - ch\varphi) \quad ,$$

dont l'enveloppe se détermine par la condition :

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, \varphi)} = m \frac{dm}{d\varphi} \left[\operatorname{sh} u (u - \varphi) - (\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} \varphi) \right] = 0.$$

Les points caractéristiques comprennent donc :

1° Les points où $m = 0$, c'est-à-dire les points de rebroussement de la courbe (C) et ceux où la tangente est verticale. Il y a lieu de remarquer que pour ces points les chaînettes osculatrices se réduisent aux points correspondants.

2° Les points où la dérivée $\frac{dm}{d\varphi} = 0$, c'est-à-dire où le paramètre m est maximum ou minimum. Dans le cas particulier où $\frac{dm}{d\varphi}$ est constamment nul, m est une constante et la courbe (C) est une chaînette ordinaire.

3° Enfin les points correspondant à la condition :

$$\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} \varphi = (u - \varphi) \operatorname{sh} u.$$

Cette équation transcendante, qui exprime que la corde AB, joignant les points d'arguments u et φ de la chaînette :

$$y = \operatorname{ch} x,$$

est parallèle à la tangente en A, n'admet d'autre solution réelle que la racine double :

$$\varphi = u;$$

l'enveloppe réelle ne comprend donc que la courbe (C) elle-même.

Appliquons ces considérations aux courbes de Ribaucour (paraboloïques primaires) :

$$x = R_0 \int_0^\varphi \operatorname{ch}^{k-1} \varphi \, d\varphi, \quad y = R_0 \frac{\operatorname{ch}^k \varphi}{k}.$$

Nous trouvons :

$$m = R_0 \operatorname{ch}^{k-1} \varphi, \quad \frac{dm}{d\varphi} = R_0 (k-1) \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch}^{k-2} \varphi,$$

$$x_0 = R_0 \left(\int_0^\varphi \operatorname{ch}^{k-1} \varphi \, d\varphi - \operatorname{ch}^{k-1} \varphi \cdot \varphi \right), \quad y_0 = R_0 \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \operatorname{ch}^k \varphi.$$

On voit immédiatement que la famille de chaînettes osculatrices à ces courbes n'admet pas d'autres enveloppes réelles que ces courbes elles-mêmes et la tangente au sommet.

Pour $k = 1$, on aura évidemment :

$$m = R_0 ; \quad x_0 = y_0 = 0.$$

Il en résulte que l'addition d'une chaînette de paramètre m à une courbe plane (C) entraîne l'augmentation du paramètre de la chaînette osculatrice de la quantité m , mais ne modifie pas les autres éléments de cette chaînette osculatrice.

Ces résultats s'étendent aux courbes de Ribaucour élastiques ou contractiles, en tenant compte du caractère additif de l'expression du paramètre m en fonction de R et α :

$$m = R_0 (1 + \mu \operatorname{ch} \varphi) \operatorname{ch}^{k-1} \varphi, \quad \frac{dm}{d\varphi} = R_0 [k - 1 + k\mu \operatorname{ch} \varphi] \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch}^{k-2} \varphi.$$

Soit la parabole élastique :

$$x = \operatorname{sh} \varphi + \frac{c}{4} (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi), \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 \varphi + \frac{c}{3} \operatorname{ch}^3 \varphi.$$

La chaînette osculatrice au point courant aura pour paramètre :

$$m = (1 + c \operatorname{ch} \varphi) \operatorname{ch} \varphi, \quad \frac{dm}{d\varphi} = (1 + 2c \operatorname{ch} \varphi) \operatorname{sh} \varphi.$$

L'enveloppe de ces chaînettes osculatrices se compose donc :

1° des points de rebroussement, s'il en existe : $-1 < c < 0$;

2° de la courbe elle-même ;

3° des points : $\operatorname{ch} \varphi = -\frac{1}{2c}$, avec la condition : $-\frac{1}{2} < c < 0$,

4° et de la tangente au sommet.

Généralisation.

Étant donnés la même courbe plane (C) et le point courant M, proposons-nous de déterminer la paraboloïque primaire d'axe vertical :

$$X = x_0 + p \int_0^u \text{ch}^{k-1} u \, du, \quad Y = y_0 + p \frac{\text{ch}^k u}{k},$$

osculatrice à cette courbe en M.

Les éléments caractéristiques de cette paraboloïque primaire sont fournis par les mêmes relations :

$$x = x_0 + p \int_0^\varphi \text{ch}^{k-1} u \, du, \quad y = y_0 + \frac{p}{k} \text{ch}^k \varphi,$$

$$p = R \cos^{k+1} \alpha, \quad \text{tg} \alpha = \text{sh} \varphi.$$

Les paraboloïques primaires d'indice k osculatrices à la courbe (C) :

$$X = x + p \int_\varphi^u \text{ch}^{k-1} u \, du, \quad Y = y + \frac{p}{k} (\text{ch}^k u - \text{ch}^k \varphi),$$

forment une famille à un paramètre et leur enveloppe se détermine par la condition :

$$\frac{D(X, Y)}{D(\varphi, u)} = p \text{ch}^{k-1} u \frac{dp}{d\varphi} \left[\int_\varphi^u \text{ch}^{k-1} u \, du - \frac{\text{ch}^k u - \text{ch}^k \varphi}{k \text{sh} u} \right] = 0.$$

Les points caractéristiques comprennent :

1° les points de rebroussement de la courbe (C) et ceux où la tangente est verticale ;

2° les points où la dérivée : $\frac{dp}{d\varphi} = 0$.

Dans le cas où dp est constamment nul, p est constant et la courbe (C) est elle-même une paraboloïque primaire d'indice k ;

3° les points correspondant à :

$$\int_\varphi^u \text{ch}^{k-1} u \, du = \frac{\text{ch}^k u - \text{ch}^k \varphi}{k \text{sh} u},$$

équation transcendante qui exprime que la corde AB joignant les points d'arguments u et φ de la paraboloïque primaire d'indice k est parallèle à la tangente au point A (u).

Cette équation n'admet d'autre solution réelle que la racine double :

$$\varphi = u ;$$

de sorte que l'enveloppe ne comprend comme branche réelle que la courbe (C) elle-même.

L'addition d'une paraboloïque primaire d'indice k à une courbe plane (C), augmente p d'une constante, mais ne modifie pas les autres éléments de la paraboloïque primaire osculatrice.

Application des paraboloïques osculatrices à la rectification des arches.

Soit un arc de courbe plane AB , *sans inflexion*. Soient x_1, y_1 les coordonnées de A , α l'inclinaison de la tangente sur l'horizontale en ce point, R_1 le rayon de courbure. Soient x_2, y_2, α_2, R_2 les quantités correspondantes pour B .

Considérons *une courbe de Ribaucour* (1) d'indice k , d'axe vertical, osculatrice à l'arc AB en A . La présence du paramètre arbitraire k permet d'imposer une nouvelle condition.

1° On peut déterminer l'indice k de façon que l'arc de la courbe de Ribaucour osculatrice passe également par le point B , ce qui amène à résoudre, par rapport à k et à φ , les deux équations :

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + p \int_{\varphi_1}^{\varphi} \operatorname{ch}^{k-1} u \, du, \\ y_2 &= y_1 + \frac{p}{k} (\operatorname{ch}^k \varphi - \operatorname{ch}^k \varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2° On peut également déterminer k de façon que la courbe de Ribaucour osculatrice possède la même inclinaison α_2 sur l'horizontale du point C d'ordonnée y_2 :

$$y_2 = y_1 + \frac{p}{k} (\operatorname{ch}^k \varphi_2 - \operatorname{ch}^k \varphi_1),$$

φ_1 et φ_2 étant associés à α_1 et α_2 par les formules habituelles.

3° Enfin on peut imposer à la courbe de Ribaucour osculatrice la condition d'avoir le même rayon de courbure R_2 au point C où l'inclinaison de la tangente sur l'horizontale est égale à α_2 , ce qui détermine k par la relation :

$$R_1 \cos^{k+1} \alpha_1 = R_2 \cos^{k+1} \alpha_2 ,$$

ou :

$$k + 1 = \frac{\log R_2 - \log R_1}{\log \cos \alpha_1 - \log \cos \alpha_2} .$$

Pour les courbes qui nous intéressent, celles qui sont utilisées pour le tracé des intrados de voûte en maçonnerie et en béton

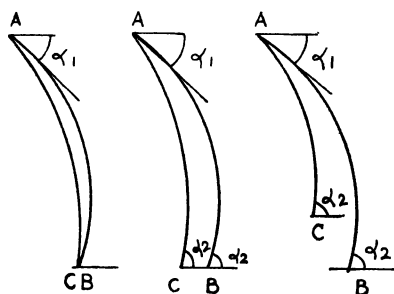


FIGURE 18.

armé, l'arc AB est en général très voisin d'un arc de paraboloïque primaire ordinaire ou transformé, de sorte que k oscille entre les valeurs -3 et $+3$.

Le paramètre k étant déterminé par l'une des conditions que nous avons définies, supposons qu'il soit compris entre deux valeurs entières positives ou négatives k' et k'' , et considérons alors les *paraboloïques primaires* d'indices k' et k'' ($k' < k''$) osculatrices à l'arc AB en A.

Soient C' et C'' les extrémités des arcs de ces paraboloïques primaires limités aux points d'ordonnée y_2 . Quitte à se rendre compte par le calcul que C' et C'' sont suffisamment voisins de l'extrémité B, ou à diviser l'arc AB de façon que cette condition se réalise pour chaque arc partiel, on peut, pour la rectification de l'arc AB, proposer cette formule pratique :

$$AB = \frac{AC' + AC''}{2} .$$

Dans le cas où il y a *pratiquement* fusion entre les arcs des paraboloïques primaires osculatrices AC' et AC'' , la formule se simplifie et devient :

$$AB = AC'.$$

Observons toutefois que la première méthode, simple en théorie, offre en général des difficultés d'ordre analytique provenant du fait que les équations (1) sont en général transcendantes.

Nous proposons de ne retenir que les deux dernières méthodes, et principalement la troisième, et d'ailleurs dans la pratique, les trois conduisent aux mêmes paraboloïques osculatrices.

A titre d'exemple, appliquons ces méthodes au nouveau pont d'Orléans. Considérons le demi-arc d'intrados AB compris entre la clef et la naissance.

Les paraboloïques primaires osculatrices sont la cycloïde et le cercle :

$$k + 1 = \frac{\log R_2 - \log R_1}{\log \cos \alpha_1 - \log \cos \alpha_2} = -0,81 \dots$$

Au point C' de la cycloïde nous aurons :

$$\begin{aligned} x'_2 &= 22 \text{ m. } 791, & y'_2 &= 6 \text{ m. } 40, \\ \alpha'_2 &= 32^\circ 15' 20'', & R'_2 &= 37 \text{ m. } 898. \end{aligned}$$

L'arc de la cycloïde osculatrice à la clef aura pour longueur :

$$AC' = 23 \text{ m. } 984.$$

Pour le cercle osculateur, on aura :

$$\begin{aligned} x''_2 &= 23 \text{ m. } 113, & y''_2 &= 6 \text{ m. } 40 \\ \alpha''_2 &= 30^\circ 57' 10'', & R''_2 &= R_0 = 44 \text{ m. } 938 \\ AC'' &= 24 \text{ m. } 129. \end{aligned}$$

La moyenne arithmétique de ces deux arcs est :

$$s = 24 \text{ m. } 056.$$

Si l'on calcule l'arc de cycloïde passant par A et B, on trouve :

$$AB = 23 \text{ m. } 607.$$

Ces résultats sont conformes à ceux de la méthode de TCHEBICHEF ou celle des trois niveaux.

Pour obtenir une meilleure approximation, on pourrait diviser l'arc AB en plusieurs parties et appliquer à chacun de ces arcs ainsi obtenus les méthodes de rectification pratiques que nous avons indiquées.

On peut encore étendre ces notions en considérant plus généralement des *paraboloïques élastiques* osculatrices à une courbe plane. Les formules nécessaires pour la détermination des éléments de ces paraboloïques élastiques s'obtiennent sans la moindre difficulté. Nous ne développons pas cette dernière question qui n'offre pas d'intérêt pratique.

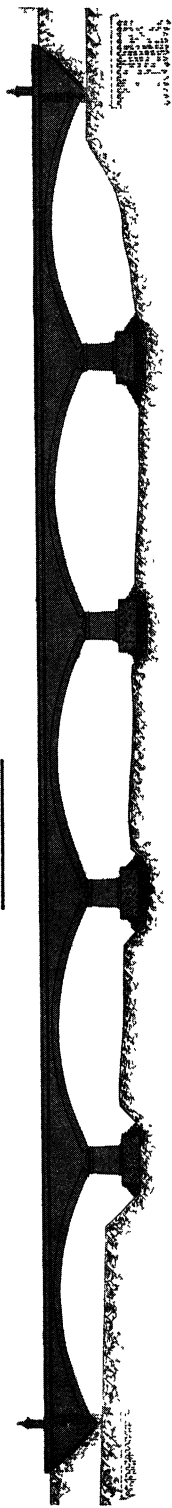
DEUXIÈME PARTIE

PARTIE PRATIQUE

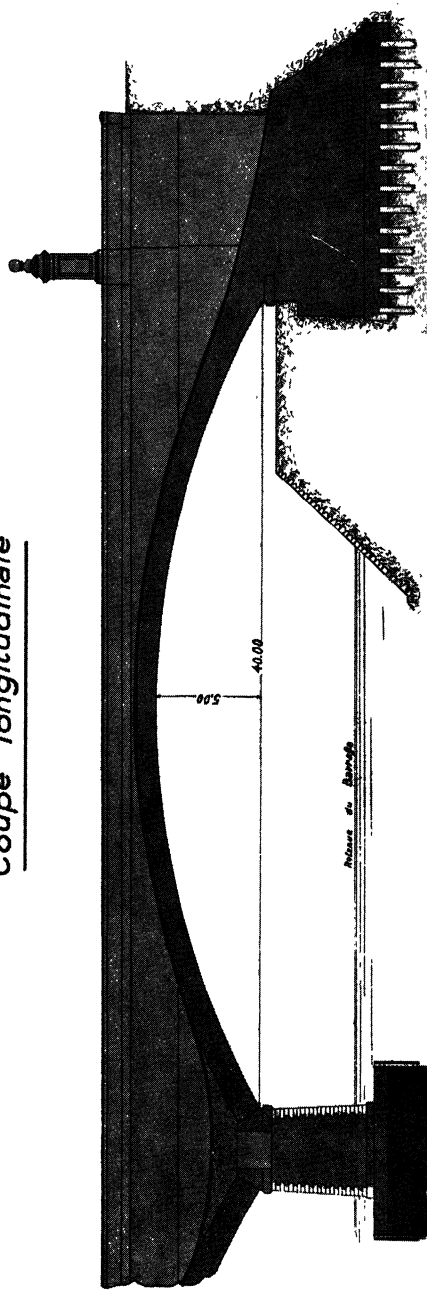


LE PONT BOUCICAUD A VERJUX

— PONT BOUCICAUT —
Élévation



Coupe longitudinale



CHAPITRE XIX

ETUDE DU PONT DE VERJUX, SUR LA SAONE (PONT BOUCICAUT)

Dans la théorie de DENFERT-ROCHEREAU (1859), la courbe de voûte en berceau doit être une projection de chaînette, une caténoïde selon la dénomination de LEGAY.

Dans ses mémoires sur les pressions réelles dans les voûtes (1888), TOURTAY part des conclusions de DENFERT-ROCHEREAU et adopte la projection de chaînette (qu'il appelle d'ailleurs « *chaînette* ») comme courbe d'intrados.

Mme BOUCICAUT ayant en 1889 offert à sa commune natale un pont sur la Saône, TOURTAY fut spécialement détaché à Verjux (Saône-et-Loire) pour la construction de cet ouvrage. Passant alors du domaine de la théorie à celui de la pratique, le jeune Ingénieur des Ponts et Chaussées construisit dans ces conditions cet ouvrage remarquable, un des plus hardis qui aient été édifiés.

Pour une ouverture de 40 m., un surbaissement de $1/8$, l'épaisseur à la clef n'est que de 1 m. 05. Si l'on remarque que, dans leurs travaux sur la caténoïde, publiés à la même époque en 1888 dans les « *Transactions of the Royal Irish Academy* », ALEXANDER et THOMSON préconisaient une épaisseur de 0 m. 93 pour une ouverture de 22 m. 82 et un surbaissement $1/5 = 3,5$, on comprend ce que l'ouvrage de TOURTAY présentait d'audacieux.

A noter, d'après P. Séjourné, que le pont construit par M. ARMAND sur le bras du Rhône, à Villeneuve, près Avignon, a des dimensions identiques à celles du pont Boucicaut avec mêmes courbes en projections de chaînette.

TOURTAY avait choisi comme courbe d'intrados la caténoïde dont il mettait l'équation sous la forme :

$$y = \frac{f}{2r} \left(\frac{x}{\omega a} + \omega \frac{x}{a} - 2 \right),$$

avec :

$$a = 20 \text{ m.}, \quad f = 5 \text{ m.}, \quad \omega = 6,821.685.$$

L'arc de l'extrados a ses ordonnées par rapport à la tangente au sommet, proportionnelles à celles de l'arc d'intrados et dans le rapport :

$$\frac{y_e}{y_i} = 0,1919.668.$$

Le tableau suivant donne pour les abscisses de deux en deux mètres à partir du sommet les ordonnées de la courbe d'intrados et celles du cercle de même ouverture et de même montée.

	2 m	4 m	6 m	8 m	10 m	12 m	14 m	16 m	18 m	20 m
ordonnées du cercle : y_e	0,0047	0,0189	0,0426	0,0760	0,1193	0,1729	0,2372	0,3127	0,4000	5m
ordonnées de l'intrados y_i	0,0037	0,0150	0,0343	0,0623	0,1001	0,1490	0,2109	0,2880	0,3832	5m
$\Delta = y_e - y_i$	0,0010	0,0039	0,0083	0,0137	0,0192	0,0239	0,0263	0,0247	0,0168	0

L'arc de l'intrados est notablement au-dessus de l'arc de cercle. vers les reins. L'intervalle vertical entre les deux courbes atteint 0 m. 263 aux points d'abscisse 14 m.

Le rayon du cercle est de 42 m. 50. Celui de la caténoïde est, comme nous allons voir, 53 m. 90 à la clef et 26 m. 07 aux reins.

La variation de la courbure est peu sensible à l'œil quand l'attention n'y est pas spécialement appelée. Elle n'a rien de disgracieux. Bien au contraire, la réduction du rayon de courbure à la naissance donne aux raccords sur les piles moins de raideur qu'avec le cercle.

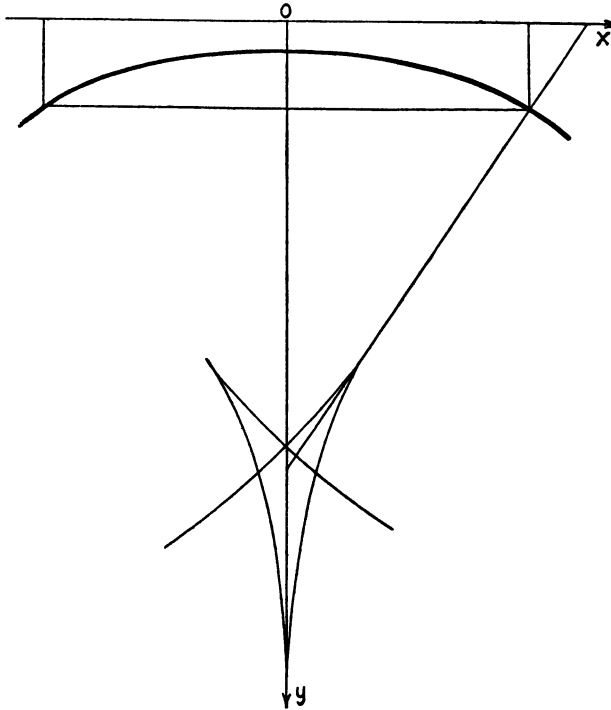


FIGURE 19.

Nous allons d'abord étudier la courbe adoptée par le constructeur ; puis nous examinerons quels résultats aurait donnés l'emploi des diverses paraboliques.

La caténoïde de Tourtay.

Reprenons les données de TOURTAY :

$$y = \frac{f}{2r} \left(\omega^{\frac{x}{a}} + \omega^{-\frac{x}{a}} - 2 \right), \quad (1)$$

$$a = 20 \text{ m}, \quad f = 5 \text{ m}, \quad \omega = 6,821.685.$$

Calcul de r. — Pour calculer r , faisons $y = f$, on a :

$$f = \frac{f}{2r} \left[\omega + \frac{1}{\omega} - 2 \right], \quad \omega + \frac{1}{\omega} = 2(r + 1);$$

$$\log. \omega = 0,833.891.64, \quad L \omega = 1,920.101 \text{ (log. naturel).}$$

$$\frac{1}{\omega} = 0,146.591, \quad 2(r + 1) = \omega + \frac{1}{\omega} = 6,968.276;$$

le paramètre r a pour valeur :

$$r = 2,484.138.$$

(r , notation même de TOURTAY, à ne pas confondre avec le rayon de courbure moyenne de notre exposé).

Pour plus de commodité dans les calculs, nous allons d'abord écrire y sous la forme :

$$y = m \left(\operatorname{ch} \frac{x}{n} - 1 \right).$$

On a, d'après (1) :

$$y = \frac{f}{r} \left(\frac{e^{\frac{x}{a} L \omega} + e^{-\frac{x}{a} L \omega}}{2} - 1 \right).$$

D'où ;

$$m = \frac{f}{r}, \quad n = \frac{a}{L \omega}.$$

Les valeurs des paramètres sont (en mètres) :

$$\log. m = 0,303.794.3, \quad m = 2 \text{ m. } 012.77;$$

$$\log. n = 1,017.706.0, \quad n = 10 \text{ m. } 416.12.$$

Le rayon de courbure R_0 à la clef, dont l'expression générale est $R_0 = \frac{n^2}{m}$, pour une caténoïde, a pour valeur :

$$\log. R_0 = 1,731.617.7, \quad R_0 = 53 \text{ m. } 903.59.$$

Données à la naissance.

On a pour le calcul de l'angle α à la naissance :

$$x = n\varphi, \quad y = m \operatorname{ch} \varphi; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \operatorname{sh} \varphi.$$

D'où : $f = m (\operatorname{ch} \varphi - 1)$,

$$\operatorname{ch} \varphi = 1 + \frac{f}{m} = 1 + r = 3,484.138.2 ,$$

$$\operatorname{sh} \varphi = 3,337.546.8 ; \quad \varphi = 1,920.106.5,$$

$$\operatorname{ch} 2\varphi = 12,139.217, \quad \operatorname{sh} 2\varphi = 11,139.213,$$

$$\log. \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},809.515.5, \quad \alpha = 32^{\circ}49'09'' ;$$

$$R = \frac{(n^2 + m^2 \operatorname{sh}^2 \varphi)^{3/2}}{mn \operatorname{ch} \varphi} = \frac{(n^2 - m^2 + y^2)^{3/2}}{ny} ;$$

$$n^2 = 108,495.57, \quad m^2 = 4,051.24$$

$$y = f + m = 7,012.77, \quad y^2 = 49,178.93,$$

$$\log. R = 1,416.089,6, \quad R = 26 \text{ m. } 0669.$$

Jarrets et rayon minimum de courbure.

On déduit de l'expression de $R(y)$:

$$\frac{dR}{dy} = \frac{\sqrt{n^2 - m^2 + y^2}}{my^2} (2y^2 + m^2 - n^2).$$

La dérivée $\frac{dR}{dy}$ s'annule pour :

$$2y^2 - m^2 - n^2 = 0, \quad y^2 = 52,222.16, \quad \operatorname{chu} = 3,590.3,$$

$$y - m = y_1 = 5 \text{ m. } 213.72, \quad y = 7 \text{ m. } 226.49.$$

Le jarret est donc très voisin de la naissance, mais il est en dehors de l'arc utilisé. On a donc une *retombée en jarret*.

Le rayon minimum a pour expression :

$$R = \frac{3\sqrt{3}}{n} y^2 ;$$

d'où sa valeur :

$$\log. R = 1,415.8307, \quad R = 26 \text{ m. } 0513.$$

Le rayon de courbure à la naissance ne lui est supérieur que de 16 millimètres.

En résumé, nous trouvons :

à la naissance :

$$\begin{aligned}\varphi &= 1,920.106,5, & x &= 20, & y &= 7,012.77, \\ R &= 26 \text{ m. } 0669, & \alpha &= 32^{\circ}49'09''.\end{aligned}$$

au jarret :

$$\begin{aligned}u &= 1,951.41, & x &= 20,2261, & y &= 7,226,49, \\ R &= 26 \text{ m. } 0513, & \alpha &= 33^{\circ}40'30''.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant examiner quels arcs de paraboloïques primaires correspondraient à l'hypothèse d'une portée $2a = 40 \text{ m.}$ et d'une flèche de $f = 5 \text{ mètres}$, c'est-à-dire indiquer les valeurs correspondantes de α , R_0 , R .

LES PARABOLOIQUES PRIMAIRES

ET LE PONT BOUCICAUT.

Emploi de la développante d'astroïde.

Dans son ouvrage *Ponts en maçonnerie*, M. A. AURIC suggère l'emploi de courbes parallèles aux courbes simples ; notamment celui des courbes telles que les axes coordonnés déterminent un segment de longueur constante sur la normale au point courant.

Nous avons vu que ces courbes sont des développantes d'astroïdes dont les équations paramétriques peuvent s'écrire :

$$x = \frac{R_0}{12} \left[\sin 3\alpha + 9 \sin \alpha \right], \quad y = \frac{R_0}{12} \left[4 - \cos 3\alpha - 3 \cos \alpha \right],$$

avec l'équation naturelle :

$$R = R_0 \cos^2 \alpha.$$

Si on utilise cette courbe comme intrados d'une arche d'ouverture $2a$ et de montée f , on doit avoir :

$$\frac{12a}{R_0} = \sin 3\alpha + 9 \sin \alpha, \quad \frac{12f}{R_0} = 4 - \cos 3\alpha - 3 \cos \alpha,$$

de sorte que le surbaissement σ est lié à l'angle α de la tangente à la naissance avec l'horizontale par la relation suivante :

$$2\sigma = \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha (3 - \sin^2 \alpha)} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{2 + \cos^2 \alpha}.$$

En posant : $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t,$

l'expression du surbaissement devient :

$$2\sigma = t \frac{t^4 + 3}{3t^4 + 2t^2 + 3}.$$

Il s'agit donc au préalable de résoudre cette équation du cinquième degré en t ; pour le surbaissement $\sigma = 1/8$ du Pont Boucicaut :

$$4t(t^4 + 3) = 3t^4 + 2t^2 + 3.$$

La formule empirique :

$$\alpha = 4 \sigma \left(1 + \frac{4}{3} \sigma^2\right),$$

donne ici :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{48} \right] = 0,510.416.7,$$

$$\alpha = 29^{\circ}14'41'', \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,260.90.$$

L'interpolation par les tables (appendice) donne $\alpha = 29^{\circ}25'$. Cette valeur servant de départ, la résolution de l'équation du cinquième degré donne :

$$t = 0,262.22, \quad \alpha = 29^{\circ}23'10''.$$

D'où pour les rayons de courbure :

à la clef : $R_0 = \frac{12 a}{\sin 3\alpha + 9 \sin \alpha} = 44 \text{ m. } 047,$

aux naissances : $R = R_0 \cos^2 \alpha = 33 \text{ m. } 442,$

rayon de courbure moyenne : $\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 40 \text{ m. } 758.$

Emploi de la cycloïde ordinaire.

Pour la montée et la flèche du Pont Boucicaut, la cycloïde ordinaire donnerait :

$$\frac{4a}{R_0} = 2\alpha + \sin 2\alpha, \quad \frac{4f}{R_0} = 1 - \cos 2\alpha,$$

$$2\sigma = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha}.$$

La formule pratique donnerait :

$$\alpha = 4\sigma = 28^{\circ}38'51'',$$

tandis que l'équation transcendante :

$$2\alpha + \sin 2\alpha = 4(1 - \cos 2\alpha),$$

donne par interpolation au moyen de la table (appendice) :

$$\alpha = 28^{\circ}41'30''.$$

Par suite :

$$R_0 = \frac{2f}{\sin^2 \alpha} = 43 \text{ m. } 390, \quad R = R_0 \cos \alpha = 38 \text{ m. } 063,$$

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 41 \text{ m. } 658.$$

Observons que :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{2\sigma} \right) = - \frac{2\alpha \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}.$$

Quand α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, 2σ croît de 0 à $\frac{2}{\pi}$.

Emploi d'un arc circulaire.

Si on emploie le cercle pour le pont Boucicaut, on a :

$$\frac{a}{R_0} = \sin \alpha, \quad \frac{f}{R_0} = 1 - \cos \alpha.$$

$$2\sigma = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

d'où, pour le surbaissement $\sigma = 1/8$:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\alpha}{2} = 14^{\circ}02'14'', \quad \alpha = 28^{\circ}04'28''.$$

Si nous employons la formule empirique :

$$\alpha = 4\sigma \left(1 - \frac{4}{3} \sigma^2 \right),$$

nous avons :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{48} \right) = 0,489.573.333, = 28^{\circ}03'02'';$$

ce qui correspond à une erreur absolue par défaut de 1'26'', et une erreur relative inférieure au millième.

On a d'autre part :

$$\rho = R_0 = R_n = \frac{a}{\sin \alpha} = 42 \text{ m. } 495.$$

On peut aussi employer la relation pour arches circulaires :

$$R = \frac{a^2 + f^2}{2f}, \quad R = \frac{400 + 25}{10} = 42 \text{ m. } 500;$$

d'où un écart de moins de 5 mm.

Remarquons d'autre part que la formule de surbaissement donne :

$$\frac{d(2\sigma)}{d\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

σ croît donc constamment quand α augmente de 0 à 90°.

Emploi de la chaînette d'égale résistance.

On pourrait aussi utiliser la chaînette d'égale résistance :

$$\frac{a}{R_0} = \alpha, \quad \frac{f}{R_0} = \left| L \cos \alpha \right|, \quad 2\sigma = \frac{1}{\alpha} \text{Log. nat.} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right).$$

La formule empirique que nous avons donnée conduit au résultat suivant :

$$\alpha = 4\sigma \left(1 - \frac{8}{3} \sigma^2 \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{24} \right) = 0,479.166.67.$$

On peut écrire, si l'on néglige les termes en α^8 :

$$\sigma = \frac{\text{sh } \alpha}{4} + \frac{\alpha^5}{1.440} \left(13 + \frac{67}{14} \alpha^2 \right).$$

Si l'on prend la première formule empirique, on trouve :

$$\alpha = 27^{\circ}30'28'' = 0,480.066.$$

Si l'on prenait la relation :

$$\operatorname{sh} \alpha = 4\sigma = \frac{1}{2},$$

on trouverait :

$$\alpha = 0,481.27 = 27^{\circ}34'21'',$$

avec un écart de $3'53''$.

La table (appendice) donne, par interpolation :

$$\alpha = 27^{\circ}30'16'', \quad \cos \alpha = 0,886.975.0.$$

On a d'autre part, pour cette valeur de α :

$$R_0 = \frac{a}{\alpha} = 41 \text{ m. } 661.0.$$

Pour le rayon de courbure à la naissance, on a :

$$R_n = \frac{R_0}{\cos \alpha} = 46 \text{ m. } 971.3.$$

Le rayon de courbure moyenne est :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 43 \text{ m. } 305.5.$$

Emploi de la chaînette ordinaire.

L'emploi de la chaînette ordinaire pour le pont Boucicaut dépend des équations suivantes :

$$a = R_0 \varphi, \quad f = R_0 (\operatorname{ch} \varphi - 1);$$

d'où l'équation transcendante en φ :

$$2\sigma = \frac{\operatorname{ch} \varphi - 1}{\varphi}.$$

Si nous employons la formule empirique pour calculer l'angle α à la naissance, nous devons écrire :

$$\alpha = 4\sigma (1 - 4\sigma^2),$$

$$\alpha = \frac{15}{32} = 0,468.750.0 = 26^{\circ}51'26''.$$

Conformément à la méthode que nous avons développée, nous pouvons écrire, en négligeant les termes du 5^e ordre :

$$2\sigma = \frac{3\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi + 5}.$$

Si donc nous passons à l'arc α associé à l'argument φ , c'est-à-dire à l'angle à la naissance lui-même, nous avons :

$$2\sigma = \frac{3 \sin \alpha}{1 + 5 \cos \alpha} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\sin \alpha}{1 + 5 \cos \alpha} = \frac{1}{12}.$$

Posons :

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{5}{12}, \quad \omega_0 = 22^\circ 37' 16''.$$

On pourra alors écrire :

$$\frac{\sin \alpha}{1 + 5 \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \omega_0}{5} = \frac{\sin \omega_0}{5 \cos \omega_0}.$$

D'où :

$$5 \sin (\alpha - \omega_0) = \sin \omega_0 ; \\ \alpha - \omega_0 = 4^\circ 24' 43'', \quad \alpha = 27^\circ 01' 59''.$$

L'écart de $10' 33''$ est assez important pour la formule empirique des paraboliques primaires.

Si l'on prend $\alpha = 27^\circ 01' 59''$, on a :

$$\varphi = 0,49037, \quad \operatorname{ch} \varphi = 1,12266,$$

$$8\sigma = 4 \cdot \frac{\operatorname{ch} \varphi - 1}{\varphi} = 1 + \frac{27}{49037} = 1 + \frac{1}{1816} = 1,000550 ;$$

donc une erreur relative de $5 \cdot 10^{-4}$.

Ensuite :

$$R_0 = \frac{a}{\varphi} = 40 \text{ m. } 785.5, \quad \log R_0 = 1,610.5061.$$

Pour calculer le rayon de courbure aux naissances R_n , nous écrivons :

$$R_n = R_0 \operatorname{ch}^2 \varphi = 51 \text{ m. } 405, \quad \operatorname{ch} \varphi = 1,12266.$$

Le rayon de courbure moyenne est égal à :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 44 \text{ m. } 003.5.$$

Emploi de la parabole ordinaire.

La parabole nous donnerait les résultats suivants :

$$\frac{a}{R_0} = \text{sh } \varphi, \quad \frac{f}{R_0} = \frac{\text{sh}^2 \varphi}{2}, \quad 2\sigma = \frac{\text{sh} \varphi}{2},$$

d'où, rigoureusement :

$$\text{tg} \alpha = 4\sigma = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 26^{\circ}33'54''.$$

Le rayon de courbure à la clef s'obtient immédiatement :

$$R_0 = \frac{a}{\text{tg} \alpha} = 2a = 40 \text{ m.}$$

On obtient le rayon de courbure aux naissances R_n par la formule :

$$R_n = \frac{R_0}{\cos^3 \alpha} = R_0 \text{ch}^3 \varphi = 55 \text{ m. } 901.5.$$

Pour le rayon de courbure moyenne, on a :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\text{th} \varphi} = 44 \text{ m. } 720.0.$$

CHAPITRE XX

ETUDE DU NOUVEAU PONT D'ORLÉANS DE LEGAY.

Données numériques.

Suivant les principes de TOURTAY, LEGAY a étudié en 1900 un projet de pont de 44 m. 80 d'ouverture et 6 m. 40 de montée, surbaissé au $1/7^e$. C'est d'après ces calculs que fut construit le nouveau pont d'Orléans, sur la Loire.

La courbe employée pour le tracé de l'intrados est encore une caténoïde d'équations paramétriques :

$$x = n u, \quad y = m \operatorname{chu}.$$

LEGAY avait pris pour paramètre m :

$$\log. m = 0,827.3693, \quad m = a \times 0,30 = 6 \text{ m. } 720.$$

Nous avons les données suivantes pour la courbe d'intrados :

$$a = 22 \text{ m. } 40, \quad f = 6 \text{ m. } 40, \quad \sigma = 1/7^e.$$

Cherchons l'argument u qui correspond à la naissance :

$$f = m (\operatorname{chu} - 1);$$

d'où :

$$\operatorname{chu} = \frac{f}{m} + 1 = \frac{41}{21} = 1,952.381,$$

$$\operatorname{shu} = 1,676.840,$$

$$e^u = \operatorname{shu} + \operatorname{chu} = 3,629.221.$$

Les tables de logarithmes naturels de POTIN donnent l'argument :

$$u = 1,289,014.$$

Pour calculer le paramètre n , nous avons ensuite la condition :

$$n = \frac{a}{u} = 17 \text{ m. } 377, \quad \log n = 1,239.9917.$$

L'angle α de pente à la naissance est lié à l'argument u par la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n} \operatorname{sh} u.$$

Nous avons donc :

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 1,811.8691, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,761.850.$$

$$\alpha = 32^{\circ}57'39''.$$

C'est donc sensiblement la même inclinaison que pour la caténoïde de TOURTAY du pont Boucicaut.

Le rayon de courbure à la clef est, pour la caténoïde :

$$R_0 = \frac{n^2}{m}, \quad n^2 = 301,983,$$

$$\log R_0 = 1,652.6141, \quad R_0 = 44 \text{ m. } 938.$$

Le rayon de courbure à la naissance est donné par la formule :

$$R_n = \frac{(n^2 + m^2 \operatorname{sh}^2 u)^{3/2}}{mn \operatorname{ch} u} = 38 \text{ m. } 967, \quad \log R_n = 1,590.6950,$$

$$n^2 + m^2 \operatorname{sh}^2 u = 428,956.$$

Le rayon de courbure moyenne est donné par la formule générale :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 41 \text{ m. } 181, \quad \log \rho = 1,614.6967.$$

La variation de la courbure est sensiblement plus faible dans la caténoïde de Legay que dans celle de Tourtay.

L'intrados du nouveau pont d'Orléans a une forme beaucoup plus voisine du cercle que celui du pont Boucicaut, comme on s'en rendra compte dans la suite. Le raccordement à la pile au pont d'Orléans est pourtant assez souple grâce au surbaissement qui est plus grand ici que dans l'ouvrage de TOURTAY.

Le jarret correspond à :

$$\begin{aligned} n^2 &= 301,983, & m^2 &= 45,158, \\ 2y^2 &= n^2 - m^2, & y^2 &= 128,412.5, \\ x &= 19\text{ m}, 220, & y &= 11\text{ m}, 332, \\ chu &= 1,683.4, & shu &= 1,3540, \end{aligned}$$

$$u = 1,111.0, \quad R = \frac{\sqrt{27}}{n} y^2 = 38\text{ m. } 396.$$

Il y a lieu de remarquer que, dans le cas de la courbe d'intrados réalisée au pont d'Orléans, le jarret est apparent ; *il est compris dans l'arc utilisé*, mais il est près de la naissance :

$$a - x = 3\text{ m}, 180, \quad y - m = 4\text{ m. } 612.$$

Les jarrets sont au-dessus des naissances, à 1 m. 788. Le rayon de courbure minimum est 38 m. 396 alors que le rayon de courbure aux naissances est 38 m. 967, avec un excès de 0 m. 57. C'est une sorte de *retombée en jarret*.

LES PARABOLOIQUES PRIMAIRES

ET LE PONT D'ORLÉANS.

Nous allons maintenant examiner les divers arcs surbaissés au 7^e de paraboloïques primaires, dans l'hypothèse d'une ouverture $2a = 22\text{ m. } 40$ et d'une montée $f = 6\text{ m. } 40$.

Emploi de la développante d'astroïde.

Si on consulte la table que nous donnons en appendice, on trouve, pour l'angle α à la naissance, une valeur comprise entre $33^\circ, 30'$ et 34° .

Par tâtonnement, nous trouvons une valeur plus approchée :

$$\alpha = 33^\circ 55' 23''.$$

En effet, avec cette dernière valeur :

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} + 11^{\circ}46'09'', = 1,776.205.$$

$$\sin 3\alpha = 0,978.98, \quad \cos 3\alpha = -0,203.96,$$

$$9 \sin \alpha = 5,022.64, \quad 3 \cos \alpha = 2,489.37,$$

$$\frac{12a}{R_0} = \sin 3\alpha + 9 \sin \alpha = 6,001.62,$$

$$\frac{12f}{R_0} = 4 - (\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha) = 1,714.59,$$

$$2\sigma = 6,999.18.$$

Il y a donc un écart absolu de 0,000.82 sur la valeur du surbaissement.

Le rayon de courbure à la clef est donné par la formule :

$$R_0 = \frac{12a}{\sin 3\alpha + 9 \sin \alpha} = 44 \text{ m. } 792, \quad \log R_0 = 1,651.1987.$$

Le rayon de courbure à la naissance est :

$$R_n = R_0 \cos^2 \alpha = 30 \text{ m. } 842, \quad \log R_n = 1,489.1309.$$

Le rayon de courbure moyenne est :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 40 \text{ m. } 138, \quad \log \rho = 1,603.5586.$$

Emploi de la cycloïde ordinaire.

Si nous employons la formule pratique, il faudra retrancher de la valeur de l'angle α trouvée pour la développante d'astroïde :

$$\frac{16\sigma^3}{3} = 0,015.585 = 53'35''.$$

On trouvera donc :

$$\alpha = 33^{\circ}55'23'' - 53'35'' = 32^{\circ}44'25''.$$

D'ailleurs la formule pratique donne aussi :

$$\alpha = 4\sigma = \frac{4}{7} = 0,571.4285 = 32^{\circ}44'25''.$$

Nous avons alors :

$$2\alpha = 65^{\circ}29'50'', = 1,142.86.$$

$$\sin 2\alpha = 0,909.84, \quad \cos 2\alpha = 0,414.96.$$

D'où :

$$\frac{12a}{R_0} = 2\alpha + 2\sin 2\alpha = 2,052.70,$$

$$\log R_0 = 1,639.9825, \quad R_0 = 43 \text{ m. } 649.$$

$$\log R_n = 1,564.8467, \quad R_n = R_0 \cos \alpha = 36 \text{ m. } 715.$$

$$\log \rho = 1,617.186,1, \quad \rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 41 \text{ m. } 418.$$

Si l'on compare ces résultats à ceux trouvés pour la caténoïde de LEGAY, on voit que ce sont sensiblement les mêmes.

De toutes les courbes usuelles à un paramètre, la cycloïde est celle qui se rapproche le plus de la forme adoptée par le constructeur.

Emploi d'un arc circulaire.

Le cercle donne une inclinaison α à la naissance correspondante à :

$$\frac{\alpha}{2} = \text{arc tg } 2\sigma = \text{arc tg } \frac{2}{7} = 15^{\circ}56'42'',$$

$$\alpha = 31^{\circ}43'24''.$$

On a ensuite :

$$\log R_0 = 1,629.4862, \quad R_0 = R_n = \rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 42 \text{ m. } 608.$$

Le rayon de l'arc de cercle ayant la même ouverture $2a$ et la même montée f , est sensiblement égal au rayon de courbure moyenne de la caténoïde utilisée par LEGAY. Donnons, pour les abscisses successives de 2 m. en 2 m. à partir du sommet, les ordonnées de la caténoïde de LEGAY et celles du cercle :

x	2 m	4 m	6 m	8 m	10 m	12 m	14 m	16 m	18 m	20 m	22 m
y = ordonnée de la caténoïde	0 ^m ,044	0 ^m ,178	0 ^m ,404	0 ^m ,725	1 ^m ,142	1 ^m ,666	2 ^m ,298	3 ^m ,057	3 ^m ,937	4 ^m ,972	6 ^m ,142
y ₁ = ordon- née du cercle	0 ^m ,047	0 ^m ,188	0 ^m ,424	0 ^m ,755	1 ^m ,187	1 ^m ,722	2 ^m ,364	3 ^m ,118	3 ^m ,990	4 ^m ,989	6 ^m ,177
Δ = y ₁ — y	0 ^m ,003	0 ^m ,010	0 ^m ,020	0 ^m ,030	0 ^m ,045	0 ^m ,056	0 ^m ,066	0 ^m ,061	0 ^m ,053	0 ^m ,017	0 ^m ,035

Il résulte de la comparaison des nombres du tableau, que *le cercle reste constamment au-dessous de la caténoïde et la différence des ordonnées respectives dans la partie utile n'atteint jamais 10 cm.*

Emploi de la chaînette d'égale résistance.

La formule pratique donnerait :

$$\alpha = 4\sigma \left(1 - \frac{8}{3} \sigma^2 \right) = 30^{\circ}57'15''.$$

La table appendice relative à la chaînette d'égale résistance montre qu'on doit avoir $\alpha > 31^{\circ}$.

Pour $\alpha = 31^{\circ}10'$, = 0,543.960, on a :

$$| L \cos \alpha | = 0,155.81, \quad \frac{2\alpha}{| L \cos \alpha |} = 6,982.4.$$

Pour $\alpha = 31^{\circ}05'$ = 0,542.51, on a :

$$| L \cos \alpha | = 0,154.95, \quad \frac{2\alpha}{| L \cos \alpha |} = 7,002.4.$$

Par interpolation, on obtient :

$$\alpha = 0,542.80, \quad \alpha = 31^{\circ}06'.$$

$$| L \cos \alpha | = 0,155.12, \quad \frac{2\alpha}{| L \cos \alpha |} = 6,9985.$$

C'est cette valeur que nous adopterons pour α , les tables de POTIN ne permettant pas d'obtenir une plus grande précision.

On a ensuite :

$$\log R_0 = 1,615.0365, \quad R_0 = \frac{f}{|L \cos \alpha|} = 41m.213.$$

$$R_n = \frac{R_0}{\cos \alpha} = 48 m. 131; \quad \rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 43m. 366.$$

Emploi de la chaînette ordinaire.

Pour la chaînette ordinaire, on a les formules :

$$a = R_0 \varphi, \quad f = R_0 (\operatorname{ch} \varphi - 1), \quad \frac{f}{a} = \frac{\operatorname{ch} \varphi - 1}{\varphi}.$$

Avec la formule approchée :

$$\frac{\operatorname{ch} \varphi - 1}{\varphi} = \frac{3 \operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi + 5},$$

et en passant à l'angle α associé à l'argument φ :

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{sh} \varphi = \operatorname{tg} \alpha,$$

on a :

$$\frac{f}{a} = \frac{3 \sin \alpha}{1 + 5 \cos \alpha}, \quad \frac{\sin \alpha}{1 + 5 \cos \alpha} = \frac{f}{3a} = \frac{2}{21}.$$

Il s'agit de résoudre une équation classique de trigonométrie.

$$\text{Posons :} \quad \operatorname{tg} \omega_0 = \frac{10}{21},$$

$$\log \operatorname{tg} \omega_0 = 1,677.7807, \quad \omega_0 = 25^{\circ}27'48'',$$

il vient :

$$\frac{\sin \alpha}{1 + 5 \cos \alpha} = \frac{\sin \omega_0}{5 \cos \omega_0}.$$

D'où :

$$5 \sin \alpha \cos \omega_0 = \sin \omega_0 + 5 \cos \alpha \sin \omega_0,$$

$$\sin (\alpha - \omega_0) = \frac{\sin \omega_0}{5}, \quad \alpha - \omega_0 = 4^{\circ}58'55''.$$

$$\alpha = 30^{\circ}26'43'', \quad \operatorname{ch} \varphi = 1,161.93,$$

$$R_0 = \frac{f}{\operatorname{ch} \varphi - 1} = 39 m. 524, \quad \log R_0 = 1,596.8527,$$

$$R_n = R_0 \operatorname{ch}^2 \varphi,$$

$$\log R_n = 1,727.2137, \quad R_n = 53 \text{ m. } 359,$$

$$\log \rho = 1,643.3454, \quad \rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 43 \text{ m. } 989.$$

$$\text{Tandis que :} \quad \frac{2R_0 + R_n}{3} = 44 \text{ m. } 132.$$

Emploi de la parabole ordinaire.

$$\text{La parabole ordinaire donne : } \operatorname{tg} \alpha = 4\tau = \frac{4}{7},$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 1,756.9320, \quad \alpha = 29^\circ 344' 35'',$$

$$\log R_0 = 1,593.3160, \quad R_0 = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = 39 \text{ m. } 203,$$

$$\log \rho = 1,654.6689, \quad \rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 45 \text{ m. } 151,$$

$$\log R_n = 1,777.3687, \quad R_n = \frac{R_0}{\cos^3 \alpha} = 59 \text{ m. } 892.$$

Fibre moyenne du Pont d'Orléans.

Pour la *fibre moyenne*, LEGAY a pris le rapport :

$$\frac{m}{a} = 0,293,$$

(alors que pour l'intrados ce même rapport était 0,30). Il en résulte de légères différences, portées au tableau suivant :

	Courbe d'intrados	Fibre moyenne
m	6,723	6,5632
n	17,377	17,198
$\frac{m}{n}$	0,38670	0,38162
$\operatorname{tg} \alpha$	0,761850	0,6500246
α	32°57'39"	33°01'29"
u	1,289014	1,302480
R_0	44,938	45,065
R_n	38,967	38,7110
ρ	41,181	41,552

Comparaison aux naissances avec les paraboliques primaires.

Nous allons rassembler en tableaux les résultats concernant les caténoïdes du pont Boucicaut et du pont d'Orléans, dans leurs relations avec les paraboliques primaires. Puis nous examinerons comment, aux naissances, se comportent ces mêmes courbes, relativement à la loi de courbure :

$$R \cos^{k+1} \alpha = R_0,$$

propre aux courbes de Ribaucour (paraboliques primaires).

Pour le pont Boucicaut :

$$R_0 = 53,90359, \quad R_n = 26,0669, \quad \alpha = 32^\circ 49' 09''.$$

La formule, considérée comme équation par rapport à l'inconnue k donne :

$$(k + 1) \log \cos \alpha = \log \frac{R_0}{R_n}, \quad k = -5,174.13.$$

Conformément au tableau des paraboliques primaires, la courbe d'intrados du pont Boucicaut se classe en dehors des courbes retenues, entre la courbe de Ribaucour d'indice—6 et la courbe d'indice — 5.

La courbe de Ribaucour d'indice — 5,174.13 est en somme la parabolique osculatrice à la caténoïde du pont Boucicaut aux naissances et ayant le même rayon de courbure R_0 à la clef.

Avec les données de LEGAY pour le nouveau pont d'Orléans :

$$R_0 = 44 \text{ m. } 938, \quad R_n = 38 \text{ m. } 967, \quad \alpha = 32^\circ 57' 39'',$$

on trouve :

$$k = -1,812.395.$$

Ainsi la caténoïde du Pont d'Orléans, qui se place, au voisinage de la clef, entre la développante d'astroïde et la cycloïde ordinaire — sensiblement à mi-intervalle entre ces deux courbes — se rapproche encore davantage de cette dernière aux naissances, entre la cycloïde et le cercle.

D'une façon précise, l'arc du pont d'Orléans devient exactement cycloïdal, au sens ci-dessus précisé, au voisinage du point défini par l'équation en y :

$$R_0 (R_0 - 2y) = \frac{[(y + m)^2 + n^2 - m^2]^3}{n^2 (y + m)^2},$$

relation qui exprime qu'en ce point la caténoïde suit la loi de courbure de la cycloïde.

Cette équation du 6^e degré a une racine nulle et une racine positive voisine de 6 :

$$y = 5 \text{ m. } 60,$$

avec en ce point :

$$R = 38 \text{ m. } 937.$$

Cette condition mise sous la forme :

$$\frac{1 - \cos^6 \alpha}{1 - \cos^8 \alpha} = 1 - \frac{m^2}{n^2},$$

conduit à l'équation du 3^e degré :

$$z^3 + \frac{2}{3}z = \frac{n^2}{m^2} - \frac{20}{27} = 5,936.464,$$

en posant :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = z - \frac{4}{3};$$

d'où la racine :

$$\begin{aligned} z &= 1,68924, & \operatorname{tg} \alpha &= 0,59658, \\ \cos^2 \alpha &= 0,7376, & \alpha &= 30^{\circ}49'10'', \\ u &= 1,2200, & y &= m (\operatorname{chu} - 1) = 5,595. \end{aligned}$$

ALEXANDER et THOMSON, dans leur Mémoire précédemment cité, considèrent les points de la caténoïde où $R = R_0$.

Voyons s'il peut se faire que la courbure de l'arc reprenne sa valeur de clef. Il faudra que :

$$\frac{(n^2 + m^2 \operatorname{sh}^2 u)^{3/2}}{mn \operatorname{chu}} = \frac{n^2}{m};$$

d'où l'équation :

$$m^6 \operatorname{sh}^4 u + 3n^2 m^4 \operatorname{sh}^2 u + 3n^4 m^2 - n^6 = 0,$$

équation bicarrée en $\operatorname{sh} u$, qui admet au moins une racine négative, en $\operatorname{sh}^2 u$, si : $3m^2 < 4n^2$.

Pour qu'elle ait une racine positive, il faut et il suffit que :

$$3m^2 < n^2.$$

C'est évidemment la condition d'existence des jarrets (la courbure devant revenir à sa valeur initiale de clef) que nous retrouvons ainsi.

Pour le pont d'Orléans :

$$u = 2,012.2, \quad shu = 3,674.0, \quad chu = 3,807.7;$$

et par suite :

$$x = 34 \text{ m. } 605, \quad y = 18 \text{ m. } 428.$$

Le point correspondant est loin de la naissance, sur l'arc non utilisé.

D'une manière générale, la confrontation de la caténoïde avec les paraboloïques primaires s'effectuera avec simplicité en mettant d'abord la loi de courbure de la caténoïde sous la forme :

$$\left(\frac{\mu R_0}{R \cos^2 \alpha} \right)^2 = 1 - \mu'^2 \cos^2 \alpha,$$

$$\mu = \frac{m}{n}, \quad \mu^2 + \mu'^2 = 1;$$

la comparaison avec la loi de courbure de la paraboloïque primaire d'indice k , de même rayon R_0 à la clef, donne alors

$$\mu^2 \cos^{2(k-1)} \alpha = 1 - \mu'^2 \cos^2 \alpha;$$

d'où l'équation en $\cos \alpha$:

$$\mu'^2 = \frac{1 - \cos^{2(1-k)} \alpha}{1 - \cos^{2(2-k)} \alpha}.$$

Pour la cycloïde $k = -2$:

$$\mu'^2 = \frac{1 - \cos^6 \alpha}{1 - \cos^8 \alpha},$$

équation du quatrième degré en $\cos^2 \alpha$.

CHAPITRE XXI

LA FUSION DES PARABOLOIQUES.

Nous avons mis en évidence que, pour des surbaissements de l'ordre de $\frac{1}{10}$, la formule empirique exprimant l'inclinaison α aux naissances en fonction de σ :

$$\alpha = 4\sigma \left[1 - \frac{4}{3} (k + 2)\sigma^2 \right],$$

a pour conséquence un écart angulaire sensiblement invariable quand à une parabolique primaire est substituée la suivante dans l'ordre des indices k de ces courbes de Ribaucour. L'écart constant est :

$$\Delta\alpha = \frac{16}{3} \sigma^3.$$

Si on admet qu'il y a fusion entre deux courbes consécutives pour :

$$\Delta\alpha \leq \varepsilon \text{ radians,}$$

on voit qu'il suffira de prendre :

$$\frac{1}{\sigma} > \sqrt[3]{\frac{16}{3\varepsilon}} = \frac{1,7461}{\sqrt[3]{\varepsilon}}.$$

Les résultats sont inscrits au tableau de correspondance.

$\Delta \alpha$			$\frac{1}{\sigma}$
1°	=	0,01745	6,751.2
50'	=	0,01454	7,172.1
40'	=	0,01164	7,722.3
30'	=	0,00873	8,499.5
20'	=	0,00582	9,736.3
10'	=	0,00291	12,265.0

De la développante d'astroïde ($k = -3$) à la parabole ($k = 2$) l'écart total est donc le quintuple :

$$\frac{80}{3} \sigma^3, \quad \text{soit } (3\sigma)^3.$$

Pour $\sigma = \frac{1}{7}$, cet écart total est 2°49'. . Pour $\sigma = \frac{1}{8}$, il est 3°05'.

Pour $\sigma = \frac{1}{12}$, il est $\frac{1}{64}$ de radian et tombe ainsi au-dessous du degré et l'écart entre deux paraboliques primaires successives est réduit à une dizaine de minutes sexagésimales. Ce serait le cas de l'ancien pont de Saint-Diez (Meuse), à arches circulaires, d'ouverture $2a = 12$ m. et de flèche $f = 1$ mètre.

Dans le même ordre d'écarts, pratiquement insignifiants, on relèverait le pont Saint-Maxence, sur l'Oise, construit par PERONNET, à trois arches circulaires :

$$2a = 3 \text{ m. } 39, \quad f = 2 \text{ m. } 09, \quad \frac{1}{\sigma} = 11,2 ;$$

le pont de Neckarhausen, sur le Neckar :

$$2a = 50 \text{ mètres,} \quad f = 4 \text{ m. } 55, \quad \frac{1}{\sigma} = 11.$$

Pour des surbaissements de l'ordre du dixième, on peut citer les ouvrages suivants :

Pesnes-sur-Ognon :

$$2a = 13 \text{ m}, 64, \quad f = 1 \text{ m}, 19, \quad \frac{I}{\sigma} = 10,462 ;$$

Pont de Munder Kingen sur le Danube (1893), articulé, en ciment armé :

$$2a = 50 \text{ mètres}, \quad f = 5 \text{ mètres}, \quad \frac{I}{\sigma} = 10 ;$$

Pont de Bonnant, sur la Loire, composé de cinq arcs en béton armé (1935) :

$$2a = 38 \text{ m.}, \quad f = 3 \text{ m. } 80, \quad \frac{I}{\sigma} = 10 .$$

Pont de la Concorde, à Paris :

$$2a = 28 \text{ m. } 60, \quad f = 2 \text{ m. } 99, \quad \frac{I}{\sigma} = 9,4654 ;$$

Pont de Thouest, à Saumur :

$$2a = 25 \text{ m. } 99, \quad f = 2 \text{ m. } 635, \quad \frac{I}{\sigma} = 9,8632 ;$$

Parmi les plus belles réalisations de l'art français, nous citons le pont de Risorgimento, construit par la maison Hennebique. Cet ouvrage en béton armé franchit d'un seul bond de 100 mètres le Tibre, à Rome. Sa flèche est de 10 mètres ; il est donc surbaissé au dixième (1).

On doit à la même firme française, la maison Hennebique, le remarquable Pont de la Balme, sur le Rhône, qui vient d'être détruit en juin 1940. Les caractéristiques de cet ouvrage en béton armé étaient (2) :

$$\text{Ouverture : } 2a = 95 \text{ m. ; flèche : } f = 9 \text{ m.}, \quad \frac{I}{\sigma} = 10,55 .$$

(1) Louis QUESNEL. — Le Pont de Risorgimento, à Rome. (*A. P. C.*, janvier février 1912, 1^{er} semestre.)

Le Béton armé, n° 165 166, février mars 1912.

G. ESPITALIER et RÉGIMBAL, *Cours supérieur de béton armé*, 1939, t. III, pp. 252 254

(2) Pont de la Balme sur le Rhône, *Le béton armé*, n° 213, nov. 1925. G. ESPITALIER et RÉGIMBAL, *Cours supérieur de béton armé*, 1939, t. III, p. 250.

De la maison Hennebique également, le pont de Saint-Thibault, sur la Loire, en béton de ciment fondu pervibré. L'arc circulaire des deux arches de rive a pour caractéristiques (1) :

Intrados : $2a = 64$ m. ; $f = 6$ m. 04, $\frac{I}{\sigma} = 10,596$,

Fibre neutre : 65 6,44 10,093.

Bien que son surbaissement soit plus faible, citons aussi le pont Albert-Loupe, sur l'Elorn, qui est en ce moment le plus grand pont du monde en béton armé. Il se compose de trois arches, chacune de 186 mètres d'ouverture. Il a été construit près de Plougastel, par les entreprises Limousin (2).

Les ponts de Laifour et d'Anchamps sur la Meuse. Le pont de la Balme, sur le Rhône.

Les photographies publiées dans la revue « *Travaux* » et celle reproduite ici, mettent en relief la beauté des ouvrages construits, en 1934, sur la Meuse navigable, par l'Entreprise de génie civil et travaux publics de Lens, d'après les plans de la Société Charles RABUT et C^{ie}. Leur ligne est particulièrement belle et les constructions n'enlaidissent pas un des paysages les plus pittoresques de la région dominée par les Dames de Meuse.

Là résidait, en effet, la difficulté de création en raison de l'intérêt touristique. Le projet retenu après un deuxième concours, avec atténuation du programme primitif, comporte pour chacun des deux ouvrages un arc en béton armé à triple articulation et du type cloisonné, c'est-à-dire à grande inertie. Les deux ponts-route sont à peu près identiques ; le pont de Laifour étant à deux voies charretières, tandis que le pont d'Anchamps est à voie unique.

(1) *Le Génie Civil*, 23 juin 1934, pp. 556-560.

Travaux, mai 1935.

Le Béton armé, n^o 35 et 36, juillet et août 1937.

Annales de la Voirie, nov. 1935, pp. 154-168.

(2) G. ESPITALIER et REGIMBAL, *Cours supérieur de béton armé*, 1939, t. III, pp. 254-263.

Les données pour l'arc du pont de Laifour sont (1) :

portée : $2a = 97$ mètres, montée : $f = 9$ mètres,

d'où :

$$\sigma = 0,092.784, \quad \frac{1}{\sigma} = 10,77.$$

Le tableau ci-dessous mentionne les résultats d'application des paraboloïques primaires au pont de Laifour et au pont de la Balme qui ont même montée et sensiblement même surbaissement :

Pont de Laifour : $\sigma = 0,092.78$,

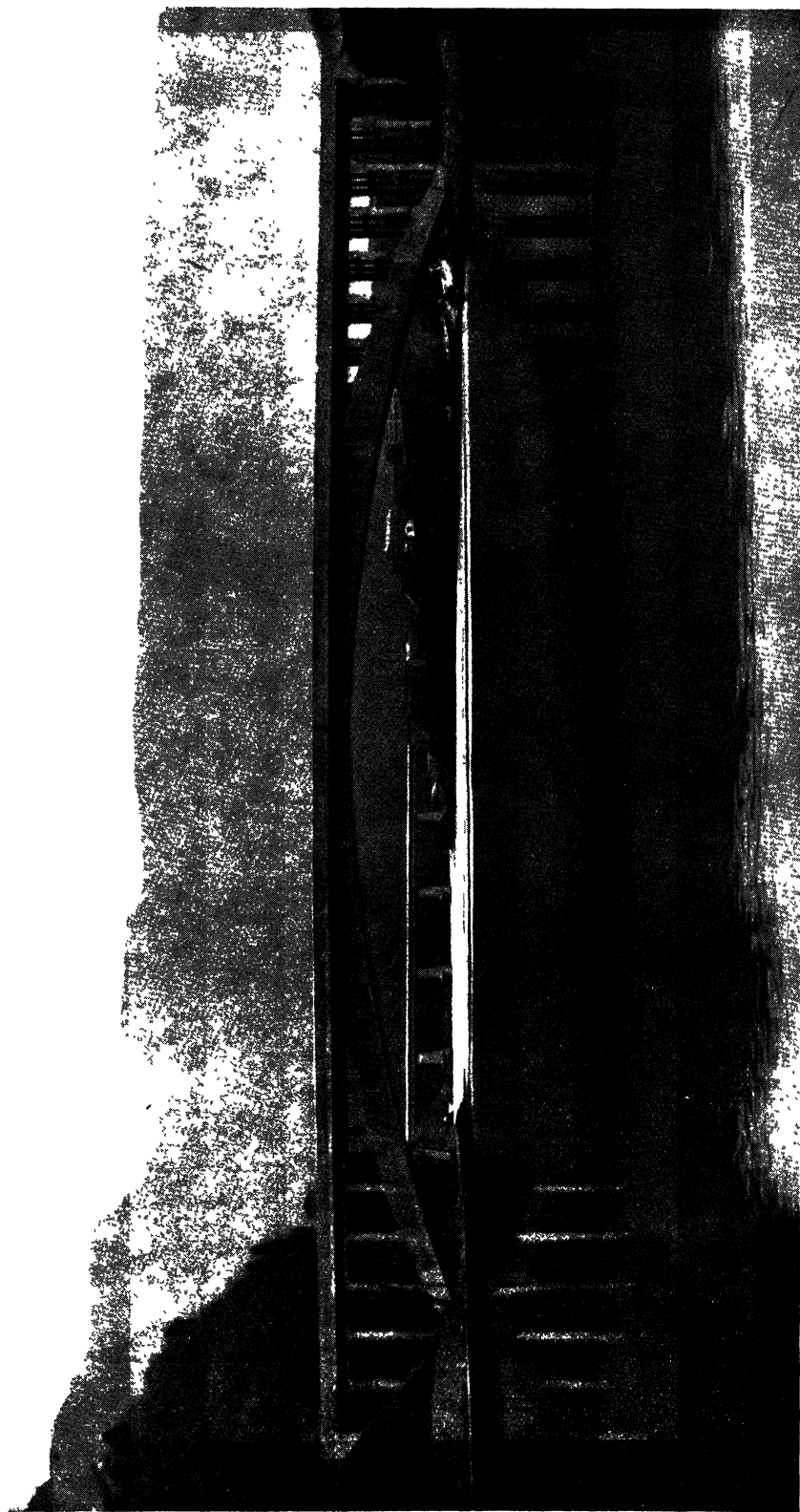
Pont de la Balme : $\sigma = 0,094.74$.

	LAIFOUR			LA BALME			$\Delta \alpha$
	α aux naissances	Ecart	R_0 à la clef	α aux naissances	Ecart	R_0 à la clef	
Développante d'astroïde.	21°32'18"		138 m,38	22°00'24"		132 m,99	28'06"
Cycloïde	21°16'30"	15'48"	136 m,67	21°43'14"	17'10'	131 m,43	26'44"
Cercle	21°01'32"	14'58'	135 m,48	21°27'28"	15'46"	129 m,65	25'56"
Chainette d'égale résist.	20°47'22"	14'10"	133 m,64	21°12'30"	14'58"	128 m,34	25'08"
Chainette	20°34'20"	13'02"	132 m,20	20°58'26"	14'04"	126 m,84	24'06"
Parabole	20°21'42"	12'18'	130 m,60	20°45'14"	13'12"	124 m,78	23'32"

La dernière colonne indique les différences angulaires aux naissances entre les deux exemples de calculs.

Les arcs des diverses paraboloïques primaires ne diffèrent que par des écarts pratiquement indiscernables sur l'ouvrage lui-même et les solutions, avec de tels surbaissements de l'ordre du dixième ou onzième, sont bien équivalentes, sous le point de vue géométrique. Ce qui est conforme aux indications des formules générales. — Dans cet ordre de surbaissement, il y a *fusion des paraboloïques*.

(1) Marcel CAYLA. — Les Ponts en béton armé de Laifour et d'Anchamps sur la Meuse. (*Travaux*, décembre 1934.)



LE PONT DE LAIFOUR AVANT LE RAVALEMENT

CHAPITRE XXII

PARABOLOIQUES A DEUX PARAMÈTRES POUR LE PONT BOUCICAUT

Nous avons proposé de considérer comme *normales* les paraboliques obtenues dans l'addition algébrique des paraboliques *primaires* avec coefficients arbitraires (résultantes de D'Aoust).

Dans cette classification, il faut considérer comme *paraboliques anormales* la plupart des courbes qui ont été proposées. L'ellipse et la caténoïde qui, par projection du cercle ou de la chaînette, ont perdu les propriétés des courbes de direction et dont la rectification s'est, de ce fait, compliquée de transcendentes elliptiques, sont les exemples les plus simples de paraboliques anormales sous notre point de vue.

Nous avons déjà cité le cas de la cubique adoptée par Paul SÉJOURNÉ et dont l'équation est :

$$y = \frac{6mx^2}{12n^2 - x^2}.$$

Nous signalerons aussi les courbes suivantes proposées par RESAL :

$$y = b \left[1 - \left(1 - \frac{x^m}{a^m} \right) \right]^{\frac{1}{n}},$$

$$y = \frac{b p q}{p q - 1} \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p q} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^q \right], (p > 1, q > 1);$$

la projection de la cycloïde :

$$\frac{x}{a} = u - \sin u, \quad \frac{y}{b} = 1 - \cos u ;$$

la laméenne :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1, \quad (m > 1, \quad n > 1),$$

indiquée par RESAL, utilisée par P. SÉJOURNÉ au pont Adolphe de Luxembourg (avec $m = 2$, $n = 6$) ;

les courbes :

$$p + q - y = p \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + q \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}},$$

$$A \frac{x^4}{a^4} + B \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + C \frac{y^4}{b^4} - m \frac{x^2}{a^2} - n \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et d'autres courbes mentionnées dans l'ouvrage de M. A. AURIC.

Nous nous proposons maintenant d'appliquer à certaines de ces courbes, prises en exemples, la méthode de normalisation de M. TURRIÈRE. Nous prendrons successivement les cas des données du pont Boucicaut et du pont d'Orléans et celles du hangar à dirigeables de Montebourg, en substituant aux caténoïdes des paraboliques normales à deux paramètres.

Nous prendrons ensuite la courbe d'intrados du pont de Valence et développerons sur son exemple une théorie plus complète, par considération de paraboliques normales dépendant d'un plus grand nombre de paramètres.

Données pour les paraboliques du pont Boucicaut.

Nous avons précédemment comparé la caténoïde du pont Boucicaut aux paraboliques primaires. La présence de deux paramètres permet d'imposer une condition supplémentaire. Pour pouvoir comparer les résultats à ceux de TOURTAY, nous allons prendre comme données pour tous les calculs qui vont suivre :

$$a = 20^m, \quad f = 5^m, \quad \sigma = \frac{1}{8},$$

$$\alpha = 32^{\circ}49' = 0,572.76,$$

$$\sin \alpha = 0,541'95, \quad \cos \alpha = 0,840'41, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,644'87, \quad .$$

$$\sin 2\alpha = 0,910'92, \quad \cos 2\alpha = 0,412'57,$$

$$\varphi = 0,606'92,$$

$$\operatorname{sh} \varphi = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ch} \varphi \cos \alpha = 1, \quad \operatorname{th} \varphi = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{th} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Pour toutes ces courbes, nous aurons la même valeur de la courbure moyenne :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 36^{\text{m}} 534.$$

Emploi d'un arc elliptique.

Nous examinerons d'abord le cas où l'arc ainsi défini appartiendrait à une ellipse :

$$x = n \sin u, \quad y = a \cos u.$$

L'ellipse donne les conditions :

$$a = n \sin u, \quad f = m (1 - \cos u);$$

d'où pour l'expression du surbaissement :

$$2\sigma = \frac{m}{n} \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \frac{m}{n} \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Calculons le paramètre u à la naissance de l'arche. L'angle α à la naissance est lié à l'anomalie excentrique u , par la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n} \operatorname{tg} u;$$

on en déduit :

$$2\sigma \cot g \alpha = \frac{\cos u (1 - \cos u)}{\sin^2 u} = \frac{\cos u}{1 + \cos u},$$

$$\frac{1}{\cos u} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2\sigma} - 1 = E, \quad \cos u = \frac{1}{E}.$$

Le problème n'a de solution réelle que sous la condition :

$$E = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2\sigma} - 1 \geq 1,$$

c'est-à-dire : $\operatorname{tg} \alpha \geq 4\sigma.$

Pour le pont Boucicaut, on a :

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,644.87, \quad 4\sigma = \frac{1}{2} = 0,50,$$

ce qui satisfait à la condition indiquée.

On a :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2\sigma} = 2,579.740, \quad E = 1,579.740,$$

$$u = 50^{\circ}.43'37'', \quad \cos u = 0,633.015, \quad \sin u = 0,774.116.$$

Le calcul de m et de n se fait ensuite par la formule :

$$m = \frac{f}{1 - \cos u} = 13^m6245, \quad n = \frac{a}{\sin u} = 25^m835.3.$$

Si l'on utilise le rayon vecteur ρ partant du centre de l'ellipse et défini par la formule :

$$\rho^2 = n^2 \sin^2 u + m^2 \cos^2 u,$$

on trouve pour l'expression du rayon de courbure R au point courant de l'ellipse :

$$R = \frac{(m^2 + n^2 - \rho^2)^{3/2}}{m n}.$$

Pour le rayon R_0 à la clef, cette expression générale se réduit à :

$$R_0 = \frac{n^2}{m} = 48^m992.$$

Pour la naissance :

$$n^2 \cos^2 u = 176,716.0, \quad m^2 \sin^2 u = 111,238.9, \\ m^2 + n^2 - \rho^2 = 287,9549.$$

D'où :

$$R_n = 17^m476.0; \quad \rho_1 = \frac{2 R_0 + R_n}{3} = 35^m153.$$

Emploi de la chaînette contractile.

Considérons en particulier la chaînette contractile :

$$x = m (\varphi - 2 c. \operatorname{sh} \varphi), \quad y = m (\operatorname{ch} \varphi - c. \operatorname{ch}^2 \varphi).$$

Nous avons :

$$\frac{a}{m} = \varphi - 2c \operatorname{sh} \varphi, \quad \frac{f}{m} = (\operatorname{ch} \varphi - 1) - c \operatorname{sh}^2 \varphi;$$

$$2\sigma = \frac{f}{a} = \frac{\operatorname{ch} \varphi - 1 - c \operatorname{sh}^2 \varphi}{\varphi - 2c \operatorname{sh} \varphi},$$

$$\varphi = 0,606.92, \quad \operatorname{ch} \varphi = 1,189.90, \quad \operatorname{sh} \varphi = 0,644.87,$$

$$a (\operatorname{ch} \varphi - 1) = 3,798.00, \quad 2f \operatorname{sh} \varphi = 6,448.70, \quad f \varphi = 3,034.60;$$

d'où la valeur du paramètre spécifique : $c = 0,408.67$.

Finalement :

$$2c \operatorname{sh} \varphi = 0,527.08, \quad \varphi - 2c \operatorname{sh} \varphi = 0,079.84,$$

$$m = \frac{a}{\varphi - 2c \operatorname{sh} \varphi}, \quad m = 250^m 500.$$

Pour le rayon de courbure à la clef, on a :

$$R_0 = m (1 - 2c) = 45^m 756;$$

et pour le rayon de courbure à la naissance :

$$R_n = m \operatorname{ch}^2 \varphi (1 - 2c \operatorname{ch} \varphi) = 9^m 732, \quad 2c \operatorname{ch} \varphi = 0,972.56.$$

Par suite :

$$\rho_1 = \frac{2R_0 + R_n}{3} = 33^m 748.$$

Cherchons le point de rebroussement de cette chaînette contractile. Il correspond à :

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{2c};$$

donc :

$$\operatorname{ch} \varphi = 1,223.47, \quad \operatorname{sh} \varphi = 0,704.99$$

$$\varphi = 0,656.75, \quad \alpha = 35^{\circ} 11'.$$

$$2c \operatorname{sh} \varphi = 0,576.22, \quad \varphi - 2c \operatorname{sh} \varphi = 0,080.53$$

$$x = 20^m 126, \quad y = 5^m.082.$$

Le rebroussement est donc assez voisin de la naissance, mais en dehors de l'arc utilisé :

$$\varphi - \varphi_n = 0,05, \quad x - a = 0^m 126.$$

Emploi de la parabole contractile.

Les équations de la parabole contractile sont :

$$x = m \left[\operatorname{sh} \varphi - \frac{\mu}{4} (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) \right],$$

$$y = m \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \varphi}{2} - \frac{\mu}{3} (\operatorname{ch}^3 \varphi - 1) \right].$$

Pour la parabole contractile, nous avons donc :

$$a = m \left[\operatorname{sh} \varphi - \frac{\mu}{4} (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) \right],$$

$$f = m \left[\frac{\operatorname{sh}^2 \varphi}{2} - \frac{\mu}{3} (\operatorname{ch}^3 \varphi - 1) \right], \quad 2\sigma = \frac{f}{a},$$

$$2\varphi = 1,213.84, \quad \operatorname{sh} 2\varphi = 1,534.65,$$

$$6a \operatorname{sh}^2 \varphi = 49,902.50, \quad 12f \operatorname{sh} \varphi = 38,692.10,$$

$$\operatorname{ch}^3 \varphi = 1,684.72, \quad 4a(\operatorname{ch}^3 \varphi - 1) = 54,778.00,$$

$$2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi = 2,748.49, \quad 3f(2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) = 41,227.41,$$

$$\mu = 0,827.30.$$

D'où :

$$3\mu (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) = 6,821.48, \quad \mu \operatorname{ch} \varphi = 0,984.40,$$

$$m = 261^m 740,$$

$$R_0 = m (1 - \mu) = 45^m 202,$$

$$R_n = m (1 - \mu \operatorname{ch} \varphi) \operatorname{ch}^3 \varphi = 6^m 8993,$$

$$\rho_1 = \frac{2R_0 + R_n}{3} = 32^m 435.$$

Emploi de la cycloïde contractile.

Si nous utilisons la cycloïde contractile, nous avons :

$$\frac{4a}{m} = 2\alpha + \sin 2\alpha + 4\mu \sin \alpha,$$

$$\frac{4f}{m} = 1 - \cos 2\alpha + 4\mu (1 - \cos \alpha),$$

$$2\sigma = \frac{1 - \cos 2\alpha + 4\mu (1 - \cos \alpha)}{2\alpha + \sin 2\alpha + 4\mu \sin \alpha}.$$

En tenant compte de la formule de surbaissement et des résultats numériques obtenus, on trouve :

$$\frac{0,587.43 + 4\mu (0,159.59)}{2,056.44 + 4\mu (0,541.95)} = \frac{1}{4}, \quad \mu = -0,760.50.$$

Le calcul du paramètre m se fait ensuite par la formule exprimant a ou par celle exprimant f (qui sont compatibles) :

par la portée :

$$\frac{m}{4} = \frac{20}{0,407.92} = 49^{\text{m}06},$$

par la flèche :

$$\frac{m}{4} = \frac{20}{0,407.72} = 49^{\text{m}10}.$$

D'où, pour le rayon de courbure R_0 à la clef et le rayon R_n aux naissances :

$$R_0 = m (1 + \mu) = 196,12 \times 0,239.50 = 46^{\text{m}970},$$

$$R_n = m (\cos \alpha + \mu) = 196,12 \times 0,079.91 = 15^{\text{m}672}.$$

$$\rho_1 = \frac{2R_0 + R_n}{3} = 36^{\text{m}534}.$$

Emploi d'une cycloïde transformée.

Généralisant l'emploi des courbes obtenues par addition de deux courbes rectifiables, M. TURRIÈRE indique une courbe nouvelle, qu'il appelle la *cycloïde transformée*, et qui s'obtient par addition d'une parabole et d'une cycloïde ordinaires.

L'équation naturelle de cette courbe pourra donc se mettre sous la forme :

$$R = m \left(\cos \alpha - \frac{2 \lambda}{\cos^3 \alpha} \right).$$

D'où l'on déduit la représentation paramétrique suivante :

$$x = \frac{m}{4} \left[2\alpha + \sin 2\alpha - 8 \lambda \operatorname{tg} \alpha \right],$$

$$y = \frac{m}{4} \left[1 - \cos 2\alpha - 4 \lambda \operatorname{tg}^2 \alpha \right].$$

La rectification d'une telle courbe est particulièrement simple puisqu'elle se ramène à celles de la cycloïde et de la parabole. On a en effet :

$$s = \int R d\alpha = m \int \left(\cos \alpha - \frac{2\lambda}{\cos^3 \alpha} \right) d\alpha ,$$

$$s = m \left[\sin \alpha - 2\lambda \int \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} \right] .$$

En employant l'argument associé φ , on trouve :

$$\frac{s}{m} = \text{th} \varphi - 2\lambda \int \text{ch}^2 \varphi d\varphi = \text{th} \varphi - \frac{\lambda}{2} (2\varphi + \text{sh} 2\varphi).$$

L'équation naturelle de la courbe montre que le rayon de courbure s'annule pour :

$$\cos^4 \alpha = 2\lambda.$$

Pour que les points de rebroussement soient donc réels il faut et il suffit que λ satisfasse à la condition :

$$0 < \lambda < \frac{1}{2} .$$

Si l'on fait varier λ d'une façon continue de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient une famille de courbes à un paramètre dont l'enveloppe est définie par :

$$\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \lambda)} = \left(\cos \alpha - \frac{2\lambda}{\cos^3 \alpha} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = 0 .$$

L'enveloppe se compose donc de l'origine des coordonnées (qui correspond à $\sin \alpha = 0$) et du lieu des points de rebroussement, dont les équations paramétriques s'obtiennent en remplaçant λ par $\frac{\cos^4 \alpha}{2}$:

$$X = \frac{m}{4} \left[2\alpha + \sin 2\alpha - 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha \right] ,$$

$$Y = \frac{m}{4} \left[1 - \cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right] .$$

De l'équation naturelle on tire aussi :

$$dR = -m \sin \alpha \left(1 + \frac{6\lambda}{\cos^4 \alpha} \right) d\alpha.$$

Les jarrets sont donc réels pour les courbes dont le paramètre λ vérifie la double inégalité :

$$0 > \lambda > -\frac{1}{6}.$$

Il en résulte la discussion suivante :

1° $\lambda < -\frac{1}{6}$. — Il n'y a ni jarret, ni rebroussement. Le rayon

de courbure croît de la valeur $m(1 - 2\lambda)$ à l'infini. La courbe a l'allure générale de la parabole ordinaire.

2° $-\frac{1}{6} < \lambda < 0$. — Le rayon de courbure décroît de $m(1 - 2\lambda)$

jusqu'à la valeur $\frac{-8\lambda}{(-6\lambda)^{3/4}}$, puis croît jusqu'à l'infini.

La courbe a la forme d'une caténoïde.

3° $0 > \lambda > \frac{1}{2}$. — Ici les jarrets s'évanouissent. Le rayon de

courbure diminue de $m(1 - 2\lambda)$ à la valeur 0 qu'il atteint pour $\cos \alpha = \sqrt[4]{2\lambda}$, puis croît indéfiniment en valeur absolue.

La courbe a l'allure d'une chaînette ou d'une parabole élastique.

Elle possède un point double situé sur Oy , défini par l'équation transcendante en α :

$$2\alpha + \sin 2\alpha - 8\lambda \operatorname{tg} \alpha = 0;$$

cette équation admet une racine réelle α_0 dans les mêmes con-

ditions que l'équation $\cos \alpha - \frac{2\lambda}{\cos^2 \alpha} = 0$ des rebroussements.

Dans ces conditions, on peut obtenir une solution approchée en écrivant :

$$\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 4\lambda \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0,$$

et en posant (voir formules empiriques) :

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 3 \frac{2 \cos \alpha + 3}{\cos \alpha + 14},$$

relation exacte au 5^e ordre près pour $|\alpha| < 1$. Moyennant cette transformation, on se ramène à une équation algébrique du troisième degré en $\cos \alpha$.

4^o $\frac{1}{2} < \lambda$. — Ici les points de rebroussement disparaissent ainsi que le point double. Le rayon de courbure croît constamment en valeur absolue de $|m(1 - 2\lambda)|$ à l'infini.

La courbe reprend de nouveau l'allure de la parabole ordinaire, mais renversée.

La cycloïde transformée possède les mêmes propriétés signalées pour la parabole, la chaînette, la cycloïde élastiques, provenant du caractère additif du rayon de courbure, caractère qui s'étend comme nous l'avons montré aux développantes successives.

Sans insister davantage sur ces propriétés géométriques, nous allons voir le parti qu'on pourrait tirer de cette courbe dans le tracé des voûtes.

Nous avons ici :

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{4} (2\alpha + \sin 2\alpha - 8 \lambda \operatorname{tg} \alpha), \\ f &= \frac{m}{4} (1 - \cos 2\alpha - 4\lambda \operatorname{tg}^2 \alpha), \\ 2\sigma &= \frac{1 - \cos 2\alpha - 4\lambda \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha - 8 \lambda \operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

D'où :

$$4\lambda \operatorname{tg} \alpha = \frac{a(1 - \cos 2\alpha) - f(2\alpha + \sin 2\alpha)}{a \operatorname{tg} \alpha - 2f}.$$

Appliquons au pont Boucicaut.

Pour le calcul de λ , on a d'abord :

$$\begin{aligned} 1 - \cos 2\alpha &= 0,587.43, & a(1 - \cos 2\alpha) &= 11,748.60, \\ f(2\alpha + \sin 2\alpha) &= 10,282.20, & \lambda &= 0,196.21. \end{aligned}$$

On a ensuite pour le paramètre m :

$$m = 76^m612 ;$$

pour le rayon de courbure à la clef :

$$R_0 = m (1 - 2\lambda) = 46^m547 ;$$

pour le rayon de courbure à la naissance :

$$R_n = m \left(\cos \alpha - \frac{2\lambda}{\cos^3 \alpha} \right) = m \left(\cos \alpha - 2\lambda \operatorname{ch}^3 \varphi \right).$$

$$2\lambda \operatorname{ch}^3 \varphi = 0,661.11 \quad , \quad \cos \alpha - 2\lambda \operatorname{ch}^3 \varphi = 0,179.30,$$

$$R_n = 13^m736, \quad \rho_1 = \frac{2R_0 + R_n}{3} = 35^m643.$$

D'après l'étude précédente, la cycloïde transformée aura ici deux points de rebroussement puisqu'on a :

$$0 < \lambda < \frac{1}{2}.$$

La solution de l'équation :

$$\cos^4 \alpha = 2\lambda,$$

est :

$$\alpha_0 = 37^{\circ}40'45'', \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = 0,772.27,$$

$$2\alpha_0 = 75^{\circ}21'30'' = 1,315.11,$$

$$\sin 2\alpha_0 = 0,967.49, \quad 8\lambda \operatorname{tg} \alpha_0 = 1,212.19 ;$$

d'où pour l'abscisse d'un point de rebroussement :

$$x_0 = \frac{m}{4} [2\alpha_0 + \sin 2\alpha_0 - 8\lambda \operatorname{tg} \alpha_0] = 20^m482.$$

Les points de rebroussement sont encore assez voisins des naissances :

$$\alpha_0 - \alpha = 5^{\circ} \text{ environ, } x_0 - x = 0^m48.$$

Emploi de la cycloïde symétrique.

Au lieu d'ajouter des courbes différentes, on peut par exemple additionner deux courbes semblables.

On pourrait appeler cycloïde symétrique la courbe dont l'équation naturelle est :

$$R = R_0 (\cos \alpha - \lambda \sin \alpha),$$

et dont la représentation paramétrique se fera par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{R_0}{4} [2\alpha + \sin 2\alpha - \lambda (1 - \cos 2\alpha)] \\ y = \frac{R_0}{4} [1 - \cos 2\alpha - \lambda (2\alpha - \sin 2\alpha)]. \end{array} \right.$$

L'étude de cette courbe se fera de la même façon que pour la cycloïde transformée. Il y a lieu de remarquer d'abord qu'on peut se contenter de faire varier α de 0 à π ; l'augmentation de α de π correspondant à une double translation, parallèlement à ox , d'amplitude $\frac{R_0\pi}{2}$ et, parallèlement à oy , d'amplitude $-\frac{\lambda R_0\pi}{2}$ c'est-à-dire à une translation unique dans la direction définie par :

$$\operatorname{tg} \omega = -\lambda,$$

et d'amplitude :

$$\frac{R_0 \pi}{2} \sqrt{1 + \lambda^2}.$$

L'équation naturelle montre que la courbe possède toujours des points de rebroussement réels définis par la condition :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Si on dérive par rapport à α , on trouve :

$$dR = -R_0 (\sin \alpha + \lambda \cos \alpha) d\alpha,$$

ce qui montre que les jarrets sont également réels et qu'ils sont définis par :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\lambda.$$

Les tangentes au point de rebroussement et au jarret sont rectangulaires.

D'où deux cas :

1° $\lambda > 0$. — Le rayon de courbure décroît constamment de la valeur R_0 à la valeur minimum $R_m = -R_0 \sqrt{1 + \lambda^2}$ atteinte pour $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\lambda$, en passant par la valeur 0 qui correspond à $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\lambda}$, puis croît jusqu'à $-R_0$.

2° $\lambda < 0$. — Le rayon de courbure croît de la valeur R_0 à la valeur $+ R_0 \sqrt{1 + \lambda^2}$ atteinte au jarret, puis décroît constamment jusqu'à la valeur $- R_0$ en passant par 0 au point de rebroussement.

Dans l'ensemble, chaque boucle de courbe intérieure à l'intervalle $[k\pi, (k + 1)\pi]$ a une forme très voisine de la partie correspondante de la cycloïde élastique.

Si l'on fait varier λ d'une façon continue de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient une famille de courbes planes dont l'enveloppe correspond à la condition :

$$(\cos \alpha - \lambda \sin \alpha) (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) = 0.$$

Le premier facteur égalé à zéro nous conduit au lieu des rebroussements dont les équations paramétriques sont :

$$X = \frac{R_0 \alpha}{2}, \quad Y = \frac{R_0}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right).$$

Le deuxième facteur nous fournit l'équation transcendante bien connue :

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha;$$

pour l'intervalle considéré, elle n'admet qu'une racine réelle, $\alpha = 0$, qui correspond à l'origine des coordonnées.

La cycloïde symétrique jouit des propriétés analogues à celles qui ont été signalées au sujet des courbes de Ribaucourt avec élasticité au point de vue des enveloppements.

Ajoutons enfin que sa rectification se fait très simplement. Si on prend le point 0 comme origine, l'expression de l'arc est :

$$s = R_0 [\sin \alpha - \lambda (1 - \cos \alpha)].$$

Appliquons ces résultats au pont Boucicaut. On a :

$$\frac{4\alpha}{R_0} = 2\alpha + \sin 2\alpha - \lambda (1 - \cos 2\alpha),$$

$$\frac{4f}{R_0} = 1 - \cos 2\alpha - \lambda (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

La condition de surbaissement :

$$2\sigma = \frac{1 - \cos 2\alpha - \lambda (2\alpha - 2 \sin 2\alpha)}{2\alpha + \sin 2\alpha - \lambda (1 - \cos 2\alpha)} = \frac{f}{a} = \frac{1}{4},$$

donne d'abord le paramètre spécifique λ :

$$\lambda = 0,835.63.$$

Le calcul du rayon de courbure à la clef donne ensuite :

$$\lambda (1 - \cos 2\alpha) = 0,490.87,$$

$$R_0 = \frac{80}{1,565.57} = 51^m 100.$$

Pour le calcul du rayon de courbure de la naissance, on a :

$$\lambda \sin \alpha = 0,452.87, \quad \cos \alpha - \lambda \sin \lambda = 0,387.54,$$

$$R_n = R_0 (\cos \alpha - \lambda \sin \alpha), \quad R_n = 19^m 343.$$

On en déduit :

$$\rho_1 = \frac{2 R_0 + R_n}{3} = 40^m 514.$$

Emploi de la cycloïde proportionnelle de Fermat.

Au lieu d'utiliser l'ellipse ou la caténoïde, on peut considérer la courbe affine de la cycloïde ordinaire, celle que HUYGENS appelait la cycloïde proportionnelle et qui avait été primitivement envisagée par FERMAT.

Cette courbe, *rectifiable élémentairement*, est représentée par les équations paramétriques suivantes :

$$x = \frac{n}{4} (2u + \sin 2u), \quad y = \frac{m}{4} (1 - \cos 2u).$$

L'angle α de la tangente au point courant avec l'axe ox est lié au paramètre u par la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n} \operatorname{tgu}.$$

Il en résulte que l'arc élémentaire est égal à :

$$ds = \cos u \sqrt{m^2 \sin^2 u + n^2 \cos^2 u} du,$$

ou :

$$ds = \sqrt{n^2 + (m^2 - n^2)t^2} dt, \quad \text{en posant : } \sin u = t.$$

Comme FERMAT l'avait fait remarquer (1660) :

a) Si $m^2 < n^2$, la rectification de la courbe se fait par des arcs circulaires ;

b) Si $m^2 > n^2$, elle se fait par fonctions hyperboliques.

De la relation entre α et u on déduit :

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{m}{n} \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{m}{n^2} \frac{dx}{\cos^4 u} = \frac{m R \cos \alpha d\alpha}{n^2 \cos^4 u}.$$

D'où l'expression générale du rayon de courbure :

$$R = \frac{n^2 \cos^4 u}{m \cos^3 \alpha}, \quad \frac{m^3 n^2}{R} = \frac{(m^2 \cos^2 \alpha + n^2 \sin^2 \alpha)^2}{\cos \alpha}.$$

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire à la clef, on a :

$$R_0 = \frac{n^2}{m}.$$

L'expression du rayon de courbure montre que la courbe possède toujours des points de rebroussement qui correspondent à :

$$\cos u = 0, \quad u = (2K + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Comme pour la cycloïde ordinaire, le lieu de ces points de rebroussement est une droite parallèle à ox , d'ordonnée :

$$y = \frac{m}{2}.$$

De la loi de courbure on déduit encore :

$$dR = \frac{n^2 \cos^4 u}{m \cos^3 \alpha} [3 \operatorname{tg} \alpha d\alpha - 4 \operatorname{tg} u du];$$

La dérivée de R s'annule donc pour les points de rebroussement et pour :

$$3 \operatorname{tg} \alpha d\alpha = 4 \operatorname{tg} u du; \quad m (1 + \operatorname{tg}^2 u) du = n (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) d\alpha;$$

on trouve finalement :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{3m^2 - 4n^2}{n^2},$$

ce qui entraîne :

$$\cos^2 \alpha = \frac{n^2}{3(m^2 - n^2)}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{3m^2 - 4n^2}{3(m^2 - n^2)}.$$

Si l'on revient à u , on a :

$$\operatorname{tg}^2 u = \frac{3m^2 - 4n^2}{m^2},$$

$$\cos^2 u = \frac{m^2}{4(m^2 - n^2)}, \quad \sin^2 u = \frac{3m^2 - 4n^2}{4(m^2 - n^2)}.$$

Les jarrets sont donc réels quand on a :

$$3m^2 - 4n^2 > 0, \quad \text{ou : } |n| < \left| \frac{m\sqrt{3}}{3} \right|.$$

Remarquons enfin qu'aux jarrets, on a, quels que soient m et n :

$$\frac{\sin^2 u}{\sin^2 \alpha} = \frac{3}{4}.$$

De toutes ces considérations, résulte la discussion suivante :

1° $3m^2 < 4n^2$. — Pas de jarret. Le rayon de courbure décroît constamment de $\frac{n^2}{m}$ à zéro (point de rebroussement).

2° $3m^2 > 4n^2$. — Le rayon de courbure croît de $\frac{n^2}{m}$ à la valeur maximum $\frac{3m^3}{16n} \sqrt{\frac{3}{m^2 - n^2}}$, puis décroît jusqu'à zéro.

Dans l'ensemble, la courbe a l'allure d'une cycloïde ordinaire.

Passons à l'application. On a :

$$4a = n(2u + \sin 2u), \quad 4f = m(1 - \cos 2u),$$

$$2\sigma = \frac{m}{n} \frac{1 - \cos 2u}{2u + \sin 2u}; \quad 2\sigma \cotg \alpha = \frac{\sin 2u}{2u + \sin 2u}.$$

D'où :

$$\frac{2u}{\sin 2u} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2\sigma} - 1 = E.$$

C'est la même nombre E qui intervenait pour l'ellipse.

Pour le pont Boucicaut, on a donc :

$$E = 1,579.48, \quad \log E = 0,198.5141.$$

Calculons d'abord l'angle u . En étudiant le signe de la fonction :

$$2u - E \sin 2u,$$

au voisinage de $2u = 1,5$, on trouve, comme racine de l'équation de Képler :

$$\frac{2u}{\sin 2u} = E,$$

$$2u = 90^{\circ}.14'40'' = 1,579.4260,$$

$$\sin 2u = 0,999.962, \quad \cos 2u = -0,008.6295.$$

Pour le calcul de m et n , on a ensuite :

$$4a = n(2u + \sin 2u), \quad 2u + \sin 2u = 2,579.388;$$

d'où la valeur de n :

$$n = 31^{m}015.$$

Enfin la formule :

$$4f = (1 - \cos 2u) m,$$

donne celle de m :

$$m = 19^{m}829.$$

Par suite :

$$R_0 = \frac{n^2}{m} = 48^{m}512, \quad R_n = \frac{n^2 \cos^4 u}{m \cos^3 \alpha} = 20^{m}128.$$

$$\frac{2R_0 + R_n}{3} = 35^{m}714.$$

La courbe n'a pas de jarret, puisque $m^2 < n^2$.

Le point de rebroussement, qui correspond à $u = \frac{\pi}{2}$, aura pour coordonnées :

$$x = \frac{n\pi}{4} = 24^{m}359, \quad y = \frac{m}{2} = 9^{m}914.5.$$

Le rebroussement est donc très éloigné de la naissance, en dehors de l'arc utile.

CHAPITRE XXIII

PARABOLOIQUES NORMALES POUR L'INTRADOS DU PONT D'ORLÉANS

Pour les paraboloïques à deux paramètres, nous adopterons les données suivantes :

$$2a = 44^{\text{m}}80, \quad f = 6^{\text{m}}40, \\ \alpha = 32^{\circ}57' = 0,575.09.$$

Pour toutes les courbes que nous allons successivement envisager, on a donc les données numériques suivantes :

$$\sin \alpha = 0,543.91, \quad \cos \alpha = 0,839.15, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,648.17, \\ \sin 2\alpha = 0,912.83, \quad \cos 2\alpha = 0,408.33, \\ \rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 41^{\text{m}}180.$$

Pour l'argument φ associé à α , on a :

$$\varphi = 0,609.69, \quad \operatorname{th} \varphi = \sin \alpha, \\ \operatorname{sh} \varphi = \operatorname{tg} \alpha = 0,648.17, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\cos \alpha} = 1,191.69, \\ \operatorname{sh} 2\varphi = 1,544.78, \quad \operatorname{ch} 2\varphi = 1,840.20,$$

Emploi de la cycloïde contractile.

Pour déterminer le paramètre spécifique μ et le paramètre de similitude m de la cycloïde contractile, nous avons les deux équations :

$$\frac{4a}{m} = \sin 2\alpha + 2\alpha - 4\mu \sin \alpha,$$

$$\frac{4f}{m} = 1 - \cos 2\alpha - 4\mu (1 - \cos \alpha).$$

D'où :

$$\frac{f}{a} = \frac{2}{7} = \frac{1 - \cos 2\alpha - 4\mu (1 - \cos \alpha)}{2\alpha + \sin 2\alpha - 4\mu \sin \alpha},$$

$$\mu = 0,102.87.$$

On a ensuite :

$$4\mu \sin \alpha = 0,223.81, \quad \frac{4a}{m} = 2,063 - 0,22381,$$

$$m = \frac{4a}{1,839.19} = 48^m717.$$

Si l'on calcule m par la formule :

$$\frac{4f}{m} = 1 - \cos 2\alpha - 4\mu (1 - \cos \alpha),$$

on trouve :

$$4\mu (1 - \cos \alpha) = 0,066.13, \quad m = \frac{4f}{0,525.54} = 48^m712.$$

D'où un écart de 5^{mm}, sans importance pour le calcul de R_0 et R .

Calculons R_0 à la clef :

$$R_0 = m (1 - \mu) = 43^m705.$$

A la naissance, on a pour R_n :

$$R_n = m (\cos \alpha - \mu) = 35^m869,$$

$$\frac{2R_0 + R_n}{3} = 41^m093.$$

Le point de rebroussement est très éloigné de la naissance :

$$\cos \alpha_1 = \mu = 0,102.87, \quad \alpha_1 = 84^0.05'.$$

La cycloïde contractile, comme la cycloïde ordinaire, se rapproche donc très sensiblement de la caténoïde adoptée par LÉGAY.

Calculons la longueur L , qu'aurait l'arc de cycloïde élastique utilisé comme intrados. On a :

$$\mu\alpha = 0,059.16, \quad \sin \alpha - \mu\alpha = 0,484.75,$$

$$L = 2m (\sin \alpha - \mu\alpha), \quad L = 47^m232.$$

La corde qui joint la clef à la naissance a pour longueur :

$$l = \sqrt{a^2 + f^2} = 23^m293,$$

$$L - 2a = 2^m432, \quad L - 2l = 0^m646.$$

Emploi de la chaînette contractile.

Les équations relatives à la chaînette contractile sont :

$$\frac{a}{m} = \varphi - 2\cosh \varphi, \quad \frac{f}{m} = (\cosh \varphi - 1) - \cosh^2 \varphi;$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{\cosh \varphi - 1 - \cosh^2 \varphi}{\varphi - 2\cosh \varphi} = \frac{f}{a}.$$

$$\varphi f = 3,902.02, \quad \cosh \varphi - 1 = 0,191.69, \quad a(\cosh \varphi - 1) = 4.293.86,$$

$$2f\sinh \varphi = 8,296.55, \quad a\sinh^2 \varphi = 9,410.72,$$

$$c = \frac{f\varphi - a(\cosh \varphi - 1)}{2f\sinh \varphi - a\sinh^2 \varphi} = 0,352.046.$$

Par suite :

$$m = \frac{a}{\varphi - 2\cosh \varphi}, \quad m = 146^m099,$$

$$2\cosh \varphi = 0,456.37, \quad \varphi - 2\cosh \varphi = 0,153.32,$$

$$R_0 = m(1 - 2c), \quad = 43^m232;$$

$$R_n = m \cosh^2 \varphi (1 - 2c \cosh \varphi); \quad R_n = 33^m392;$$

$$2c \cosh \varphi = 0,839.06, \quad 1 - 2c \cosh \varphi = 0,160.94,$$

$$\frac{2R_0 + R_n}{3} = 39^m952.$$

Le point de rebroussement est encore assez éloigné de la naissance :

$$\text{ch } \varphi_1 = \frac{1}{\cos \alpha_1} = \frac{1}{2c} = \frac{1}{0,704.92} \quad , \quad \alpha_1 = 45^\circ 14' 30''.$$

D'autre part : $dR = m \operatorname{sh} 2\varphi (1 - 3c \operatorname{ch} \varphi) d\varphi$,

Or : $c < -\frac{1}{3}$; donc la chaînette *contractile* n'a pas de jarrets.

Pour la rectification :

$$\frac{s}{2m} = \int_0^\varphi \operatorname{ch} \varphi (1 - 2c \operatorname{ch} \varphi) d\varphi = \operatorname{sh} \varphi - \frac{c}{2} (2\varphi + 2\operatorname{sh} 2\varphi),$$

$$2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi = 2,764.16, \quad \frac{c}{2} (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) = 0,486.55,$$

$$\operatorname{sh} \varphi - \frac{c}{2} (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) = 0,161.62, \quad \frac{s}{2} = 23^m 613.$$

C'est, à moins de trois millimètres près, la valeur que nous avons trouvée pour la cycloïde contractile.

La valeur de s est très voisine de $2a$. D'ailleurs, en général, dans le cas de la chaînette contractile :

$$\begin{aligned} s - 2a &= 2m [\operatorname{sh} \varphi - \varphi - c (\varphi + \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi - 2\operatorname{sh} \varphi)] \\ &= 2m \left[\frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} + \frac{\varphi^7}{5040} - c \left(\frac{\varphi^3}{3} + \frac{7}{20} \varphi^5 + \frac{31}{840} \varphi^7 \right) \right] , \\ &= \frac{R_0 \varphi^3}{6} \left(1 + \frac{1 - 14c}{1 - 2c} \frac{\varphi^2}{20} \right) . \end{aligned}$$

Le premier terme correctif est :

$$\Delta_1 = \frac{R_0 \varphi^3}{6} = 3^m 266,$$

le second :

$$\Delta_2 = \frac{R_0 \varphi^3}{6} \cdot \frac{1 - 14c}{1 - 2c} \frac{\varphi^2}{20} = - 0^m 640.1$$

L'écart réel :

$$s - 2a = 2^m 426,$$

est légèrement supérieur à la somme $\Delta_1 + \Delta_2$.

Pour calculer le débouché superficiel, on pourrait appliquer la règle déduite de la proposition d'HERMITE.

Soit A le sommet de la chaînette, B le point de coordonnées (a, f) .

La tangente BA' a pour équation :

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = a \sin \alpha - f \cos \alpha = \omega.$$

La normale à BA' passant par A a pour équation :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0.$$

On a :

$$AA' = \omega = a \sin \alpha - f \cos \alpha,$$

$$BA' = \omega' = a \cos \alpha + f \sin \alpha,$$

$$a \sin \alpha = 12^m 183.5, \quad f \cos \alpha = 5^m 370.5,$$

$$a \cos \alpha = 18^m 796.8, \quad f \sin \alpha = 3^m 481.0,$$

$$\omega = 6^m 813.0, \quad \omega' = 22^m 277.8 ;$$

$$2 \text{ (Aire ABB')} = af = 143^m 2360,$$

$$2 \text{ (Aire ABA')} = \omega\omega' = 151^m 2776,$$

$$2 \text{ (Aire segment AMB)} = \frac{af + \omega\omega'}{6} + 2\varepsilon = 50^m 2702,$$

$$\varepsilon = \frac{R_0 (R_n - R_0)}{360} \alpha^3 + \frac{R_0^2}{60} \alpha^5 = 1^m 2513.$$

Le débouché total sera donc :

$$A = af + \frac{af + \omega\omega'}{6} = 194^m 2062.$$

Si l'on désigne par $\frac{A'}{2}$ l'aire du triangle curviligne AMBB',

on a :

$$A' = af - \frac{af + \omega\omega'}{6} = 102^m 2076.$$

Calculons directement cette aire, on a :

$$\frac{A'}{2} = m^2 \int_0^{\varphi} [(\operatorname{ch} \varphi - 1) - c \operatorname{sh}^2 \varphi] [1 + 2c \operatorname{ch} \varphi] d\varphi,$$

$$\frac{A'}{2m^2} = \operatorname{sh} \varphi - \varphi - c \left[\frac{3}{4} \operatorname{sh} 2\varphi - 2 \operatorname{sh} \varphi + \frac{\varphi}{2} \right] + \frac{2}{3} c^2 \operatorname{sh}^3 \varphi. (1)$$

Si on développe par rapport à φ , on trouve :

$$\frac{A'}{2} = m^2 \left[(1 - 2c)^2 \frac{\varphi^3}{3!} + (1 - 2c)(1 - 20c) \frac{\varphi^5}{5!} + (1 - 94c + 364c^2) \frac{\varphi^7}{7!} \right].$$

En tenant compte de :

$$R_0 = m (1 - 2c),$$

$$A' = \frac{R_0^2 \varphi^3}{3} \left[1 + \frac{1 - 20c}{1 - 2c} \frac{\varphi^2}{20} + \frac{1 - 94c + 364c^2}{(1 - 2c)^2} \frac{\varphi^4}{840} + \dots \right],$$

au 8^e ordre près par rapport à φ .

Calculons le premier terme :

$$a_1 = \frac{R_0^2 \varphi^3}{3} = 141m^2 196$$

Avec le 1^{er} terme correctif :

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{1 - 20c}{1 - 2c} \frac{\varphi^2}{20}; \quad \frac{1 - 20c}{1 - 2c} \frac{\varphi^2}{20} = -0,37.943.$$

$$1 - 2c = 0,295.908, \quad 1 - 20c = -6,04.902,$$

Avec le 2^e terme correctif :

$$a_3 = a_1 \frac{1 - 94c + 364c^2}{(1 - 2c)^2}.$$

$$1 + 364c^2 = 46,113.0, \quad 94c = 33,092.4,$$

$$1 - 94c + 364c^2 = 13,020.6,$$

$$\frac{1 - 94c + 364c^2}{(1 - 2c)^2} \frac{\varphi^4}{840} = 0,024.466.$$

Avec le premier terme correctif, on a :

$$A' = a_1 \left(1 - \frac{a_2}{a_1} \right) = a_1 \times 0,620.57 = 87m^2 622.$$

Avec ce premier terme correctif, le débouché superficiel sera :

$$2af - A'_1 = 199m^2 098.$$

Avec le 2^e terme correctif :

$$A'_2 = a_1 \times 0,645.04 = 91m^2 034,$$

et le débouché superficiel est :

$$2af - A'_2 = 195m^2 686.$$

Pour nous rendre compte de l'approximation de ces résultats, calculons A' par la formule exacte (1).

On a :

$$\begin{aligned} \text{sh}\varphi - \varphi &= -0,038.48, & \frac{3}{4} \text{sh}2\varphi &= 1,158.585, \\ \frac{3}{4} \text{sh}2\varphi - 2\text{sh}\varphi + \frac{\varphi}{2} &= 0,167.09, & c\left(\frac{3}{4} \text{sh}2\varphi - 2\text{sh}\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) &= 0,058.82, \\ \frac{2c^2}{3} \text{sh}^3\varphi &= 0,022.505, \end{aligned}$$

$$A' = 2m^2 \times 0,002.162 = 92m^2 296.$$

Le débouché superficiel exact est :

$$2af - A' = 194m^2 424.$$

La formule pratique déduite du théorème d'Hermite appliquée avec le terme correctif indiqué par M. TURRIÈRE donne ici une approximation remarquable.

La caténoïde de LEGAY donne pour valeur du débouché :

$$A = 2af - 2 \int_0^\varphi y \, dx = 2af - \int_0^\varphi m n (\text{ch}\varphi - 1) d\varphi,$$

$$\text{sh}\varphi - \varphi = 0,387.825, \quad mn (\text{sh}\varphi - \varphi) = 45m^2 289,$$

$$af - mn (\text{sh}\varphi - \varphi) = 98m^2 071;$$

$$A = 2 [af - mn (\text{sh}\varphi - \varphi)] = 196m^2 142.$$

Le débouché superficiel a donc sensiblement la même valeur que dans le cas de la chaînette contractile.

Emploi de la parabole contractile.

Cette courbe donne :

$$\frac{12a}{m} = 12\text{sh}\varphi - 3\mu (2\varphi + \text{sh} 2\varphi),$$

$$\frac{12f}{m} = 6\text{sh}^2\varphi - 4 (\text{ch}^3\varphi - 1).$$

$$2\varphi = \frac{f}{a} = \frac{6\text{sh}^2\varphi - 4 (\text{ch}^3\varphi - 1)}{12\text{sh}\varphi - 3\mu (2\varphi + \text{sh} 2\varphi)};$$

$$\mu = \frac{6a\text{sh}^2\varphi - 12f\text{sh}\varphi}{4a (\text{ch}^3\varphi - 1) - 3f (2\varphi + \text{sh} 2\varphi)},$$

$$\begin{aligned} 6a \operatorname{sh}^2 \varphi &= 5,646.43, & 12f \operatorname{sh} \varphi &= 4,977.93, \\ \operatorname{ch}^3 \varphi - 1 &= 0,692.34, & 4a (\operatorname{ch}^3 \varphi - 1) &= 6,203.36, \\ 2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi &= 2,764.16, & 3f (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) &= 5,307.19. \\ \mu &= 0,745.953 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{12a}{12 \operatorname{sh} \varphi - 3\mu (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi)}, \\ 3\mu (2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi) &= 6,185.80, & 12 \operatorname{sh} \varphi &= 7,778.04, \\ m &= 168^{\text{m}}823. \\ R_0 &= m (1 - \mu) = 42^{\text{m}}889. \\ R_n &= m \operatorname{ch}^3 \varphi (1 - \mu \operatorname{ch} \varphi) = 31^{\text{m}}730. \\ \frac{2R_0 + R_n}{3} &= 39^{\text{m}}169. \end{aligned}$$

Le rebroussement est très éloigné de la naissance :

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \mu ; & \alpha_1 &= 41^{\circ}46' \\ x_1 &= 24^{\text{m}}773, & y_1 &= 21^{\text{m}}405. \end{aligned}$$

Le jarret est très voisin du sommet :

$$\begin{aligned} dR &= m \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch}^2 \varphi (3 - 4 \operatorname{ch} \varphi) d\varphi, \\ \operatorname{ch} \varphi &= \frac{3}{4\mu} = 1,005.42, \\ \varphi_2 &= 0,104.03, & \alpha_2 &= 5^{\circ}57' \end{aligned}$$

Le rayon maximum est :

$$R_2 = \frac{m}{4} \left(\frac{3}{\mu} \right)^3 = 42^{\text{m}}984.$$

C'est sensiblement la même valeur que R_0 à 10 cm. près.

La variation du rayon de courbure dans le cas de la parabole contractile est encore plus insignifiante que dans celui de la caténoïde de LEGAY. La présence du jarret dans l'arc utilisé constituerait encore moins ici une erreur perceptible au point de vue de l'esthétique du pont, ou un inconvénient pour la stabilité de l'ouvrage et la répartition des charges supportées par la voûte.

On obtient de même les formules approchées pour la rectification de la parabole contractile et le calcul du débouché superficiel. On a en effet :

$$s = 2m \int \text{ch}^2 \varphi (1 - \mu \text{ch} \varphi) d\varphi = 2m \left[\frac{2\varphi + \text{sh } 2\varphi}{4} - \mu \left(\text{sh } \varphi + \frac{\text{sh}^3 \varphi}{3} \right) \right],$$

$$s - 2a = 2m \left[\frac{2\varphi + \text{sh } 2\varphi}{4} - \text{sh } \varphi - \mu \left(\text{sh } \varphi + \frac{\text{sh}^3 \varphi}{3} - \frac{2\varphi + \text{sh } 2\varphi}{4} \right) \right].$$

$$s - 2a = 2m \left[\frac{\varphi^3}{6} + \frac{7}{120} \varphi^5 - \mu \left(\frac{\varphi^3}{6} + \frac{13\varphi^5}{120} \right) \right],$$

$$s - 2a = \frac{R_0}{3} \cdot \varphi^3 \left(1 + \frac{7 - 13\mu}{1 - \mu} \frac{\varphi^2}{60} \right).$$

De même pour le débouché superficiel, si l'on désigne par A' l'aire comprise entre la parabole contractile et la directrice, on a :

$$A' = \int_0^a 2y dx = 2 \int_0^\varphi m^2 \left[\frac{\text{sh}^2 \varphi}{2} - \mu (\text{ch}^3 - 1) \right] [1 - \mu \text{ch} \varphi] d\varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{A'}{2m^2} &= \frac{\text{sh} 3\varphi}{24} - \frac{\text{sh } \varphi}{8} - \mu \left(\frac{3\text{sh } 4\varphi}{64} + \frac{\text{sh } 2\varphi}{4} - \text{sh } \varphi + \frac{5\varphi}{16} \right), \\ &+ \mu^2 \left(\frac{\text{sh} 5\varphi}{80} + \frac{5 \text{sh} 3\varphi}{48} - \frac{\text{sh} 2\varphi}{4} + \frac{5}{8} \text{sh } \varphi - \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

En développant par rapport à φ et limitant au terme du 5^e ordre, on trouve :

$$A' = 2m^2 \varphi^3 (K + K' \varphi^2),$$

$$K = \frac{215}{48} - \frac{2}{3} \mu + \mu^2, \quad K' = \frac{1934 - 184\mu + 781\mu^2}{960}.$$

Pont Boucicaut

I. Paraboliques primaires

Ouverture = 40^m, flèche = 5^m, $\sigma = \frac{1}{8}$.

	k	α	R _o	R _n	$\rho = \frac{a}{\sin \alpha}$
Développante d'astroïde...	— 3	29°23'10''	44 ^m ,047	33 ^m ,442	40 ^m ,758
Cycloïde	— 2	28°41'30''	43 ^m ,390	38 ^m ,063	41 ^m ,658
Cercle	— 1	28°04'28''	42 ^m ,500	42 ^m ,500	42 ^m ,500
Chaînette de résistance...	0	27°34'21''	41 ^m ,661	46 ^m ,971	43 ^m ,305
Chaînette	1	27°01'59''	40 ^m ,785	51 ^m ,405	44 ^m ,003
Parabole	2	26°33'54''	40 ^m ,000	55 ^m ,901	44 ^m ,720

II. Paraboliques normales et anormales.

Données :

$$\sigma = \frac{1}{8}, \quad \alpha = 32^{\circ}49' \quad \rho = 36^{\text{m}},534.$$

		R _o	R _n	$\frac{2R_o + R_n}{3}$
Normales	Cycloïde contractile ...	46 ^m ,470	15 ^m ,672	36 ^m ,534
	Chaînette contractile ..	45 ^m ,756	9 ^m ,732	33 ^m ,748
	Parabole contractile...	45 ^m ,202	6 ^m ,899	32 ^m ,435
	Cycloïde symétrique...	51 ^m ,100	19 ^m ,343	40 ^m ,514
	Cycloïde transformée ..	46 ^m ,547	13 ^m ,736	35 ^m ,643
Anormales	Cycloïde proportionnelle	48 ^m ,512	20 ^m ,128	39 ^m ,057
	Caténoïde	53 ^m ,903	26 ^m ,066	41 ^m ,257
	Ellipse	48 ^m ,992	17 ^m ,476	35 ^m ,153

Nouveau Pont d'Orléans

Ouverture 44^m80, flèche 6^m40, $\sigma = \frac{1}{7}$

I. Paraboliques primaires.

	α	R _o	R _n	ρ
Développante d'astroïde	33°55'23''	44 ^m ,792	30 ^m ,84	40 ^m ,138
Cycloïde	32°44'25''	43 ^m ,649	36 ^m ,715	41 ^m ,418
Cercle	31°43'24''	42 ^m ,608	42 ^m ,608	42 ^m ,608
Chaînette de résistance	31°06'	41 ^m ,213	48 ^m ,131	43 ^m ,366
Chaînette ordinaire	30°26'43''	39 ^m ,524	53 ^m ,359	44 ^m ,132
Parabole	29°44'35''	39 ^m ,203	59 ^m ,892	45 ^m ,151

II. Paraboliques normales et anormales.

Données :

$$\sigma = \frac{1}{7}, \quad \alpha = 32^{\circ}57', \quad \rho = \frac{a}{\sin \alpha} = 41^{\text{m}},180.$$

		R _o	R _n	$\frac{2 R_o + R_n}{3}$
Normales	Cycloïde contractile ...	43 ^m ,705	35 ^m ,869	41 ^m ,093
	Chaînette contractile...	43 ^m ,232	33 ^m ,392	39 ^m ,952
	Parabole contractile...	42 ^m ,889	31 ^m ,730	39 ^m ,169
	Cycloïde symétrique...	45 ^m ,885	31 ^m ,531	41 ^m ,100
Anormales	Cycloïde proportionnelle	44 ^m ,911	31 ^m ,086	40 ^m ,302
	Caténoïde	44 ^m ,938	38 ^m ,967	42 ^m ,947
	Ellipse	45 ^m ,095	31 ^m ,480	40 ^m ,109

CHAPITRE XXIV

LE HANGAR A DIRIGEABLES DE MONTEBOURG

La maison FOURRÉ et RHODES, d'après les calculs de M. LOSSIER, a construit à Montebourg (Manche) un hangar d'aviation de 24 m. 50 d'ouverture et de 12 m. 25 de portée. Le surbaissement est celui d'un plein cintre, $\sigma = 1/2$. La courbe de voûte fait avec l'horizontale à la naissance un angle dont la tangente est égal à $\frac{33}{14}$, soit environ $67^{\circ}0'40''$. C'est une chaînette légèrement déformée (1).

Aucune paraboloïque primaire ne donne à la naissance un angle $\alpha = 67^{\circ}0'40''$ pour un surbaissement égal à $\sigma = 1/2$.

En effet, pour un surbaissement de $1/2$, le cercle donnerait un angle α égal à 90° , tandis que pour un angle d'inclinaison sur l'horizontale à la naissance de $67^{\circ}1'$, la cycloïde ordinaire aurait comme demi-ouverture et comme montée :

$$a = \frac{R_0 \times 3,167.45}{4}, \quad f = \frac{R_0 \times 1,559.68}{4},$$

(1) *Le Génie Civil*, 6 septembre 1919.

« *Travaux* », décembre 1936, XX^e année, p. 557.

G. ESPITALIER — *Cours de béton armé*, 1921, t. II, p. 191.

Au sujet des hangars d'aviation, c. f. « La construction des hangars d'aviation. Conception Réalisation. Tendances » dans le n° du 15 janvier 1939 de la *Technique moderne*, XXXI^e année, n° 2, pp. 75-92.

Voir l'étude de M. Ch. PUJADE-RENAUD dans *Travaux*, Juin 1939.

Signalons aussi le hangar pour deux dirigeables de Luçon (Vendée), d'ouverture 93 m. et de flèche 53 m., mis en construction en 1918 par la maison Fourré et Rhodes (système Lossier). Voir à ce sujet le *Cours d'Architecture et de Constructions civiles* d'ARNAUD (Béranger éditeur, 1931), *Atlas*, pp. CI, et CII.

soit un coefficient de surbaissement :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{2a}{f} = \frac{6,334.90}{1,559.68} = 4,061.6.$$

Pour la même valeur de α , on a :

pour la chaînette d'égale résistance :

$$a = 1,047.49 \times R_0, \quad f = 0,693.64 \times R_0,$$

$$\frac{1}{\sigma} = 3,023.5 ;$$

pour la chaînette ordinaire :

$$a = 1,317.54 \times R_0, \quad f = 1,001.01 \times R_0,$$

$$\frac{1}{\sigma} = 2,632.5 ;$$

pour la parabole enfin :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha} = 1,738.9.$$

La forme adoptée par le constructeur est donc intermédiaire entre la chaînette et la parabole ordinaires : la chaînette élastique paraît donc, a priori, être indiquée.

Nous allons voir ce que donnent les différentes paraboloïques normales à deux paramètres, pour les caractéristiques présentées par le hangar de Montebourg.

Pour éviter les interpolations et pour utiliser sans corrections les tables de POTIN, nous adoptons, sauf indications contraires spécifiées pour certaines courbes, les valeurs :

$$2a = 24 \text{ m. } 50, \quad f = 12 \text{ m. } 25,$$

$$\text{corde} = f\sqrt{2} = 17 \text{ m. } 324.$$

$$\alpha = 67^{\circ}01', \quad \operatorname{tg} \alpha = 2,357.76.$$

Emploi de la chaînette élastique.

Nous avons montré que la chaînette déformée était comprise, dans l'exemple traité, entre la chaînette ordinaire et la parabole, plus près de la seconde de ces deux paraboloïques primaires. On aura donc une bonne représentation, soit par la chaînette élastique, soit par la parabole contractile.

Considérons donc la chaînette élastique ; les conditions seront :

$$a = m (\varphi + 2 c \operatorname{sh} \varphi), \quad f = m (\operatorname{ch} \varphi - 1 + c \operatorname{sh}^2 \varphi).$$

Le paramètre spécifique c de la chaînette élastique sera défini par élimination de m :

$$c = \frac{f\varphi - a(\operatorname{ch} \varphi - 1)}{2f\operatorname{sh} \varphi - a\operatorname{sh}^2 \varphi} = 0,047.94.$$

Cette valeur est relativement faible, ce qui était à prévoir, puisque nous avons indiqué que *la chaînette était légèrement déformée*.

On a ensuite :

$$m = \frac{a}{\varphi + 2 c \operatorname{sh} \varphi} = 13,468,$$

$$R_0 = m (1 + 2c) = 14 \text{ m. } 760,$$

$$R_n = m \operatorname{ch}^2 \varphi (1 + 2c \operatorname{ch} \varphi) = 109 \text{ m. } 868,$$

$$\frac{2R_0 + R_n}{3} = 46 \text{ m. } 462,$$

avec :

$$\varphi = 1,593.07, \quad \operatorname{sh} \varphi = 2,357.76, \quad \operatorname{ch} \varphi = 2,559.30.$$

Emploi de la caténoïde.

La caténoïde donne :

$$a = nu, \quad f = m (\operatorname{ch} u - 1), \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n} \operatorname{sh} u.$$

Pour calculer u , on a :

$$2\sigma = \frac{f}{a} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\operatorname{ch} u - 1}{u}, \quad 2\sigma = \frac{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{ch} u - 1)}{u \operatorname{sh} u}.$$

Si l'on pose : $u = 2v$,

il vient :

$$2\sigma \cot \alpha = \frac{2 \operatorname{sh}^2 v}{4v \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v},$$

v est donc racine de l'équation transcendante :

$$\frac{\operatorname{th} v}{v} = \frac{4\sigma}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Cette équation transcendante admet deux racines réelles opposées, si l'on a entre les données la condition :

$$4\sigma < \operatorname{tg}\alpha,$$

ce qui est réalisé ici, puisque :

$$4\sigma = 2, \quad \operatorname{tg}\alpha = 2,357.76.$$

La racine positive de l'équation :

$$\frac{\operatorname{th}v}{v} = \frac{28}{33} = 0,848.485$$

est :

$$v = 0,745.13, \quad \operatorname{th}v = 0,632.23 ;$$

$$u = 1,490.26, \quad \operatorname{sh}u = 2,107.58, \quad \operatorname{ch}u = 2,331.77.$$

Calculons les paramètres m et n :

$$m = \frac{f}{\operatorname{ch}u - 1} = 9 \text{ m. } 1912 ; \quad n = \frac{a}{u} = 8 \text{ m. } 217.6.$$

Le rayon de courbure à la clef est :

$$R_0 = \frac{n^2}{m} = 7 \text{ m. } 3472.$$

A la naissance :

$$R_n = \frac{n^2}{m} \frac{\operatorname{ch}u}{\cos^3\alpha} = 287 \text{ m. } 73.$$

Le débouché superficiel est égal à 206 mètres carrés, suivant le calcul d'intégration :

$$\begin{aligned} D &= 2 \left(af - \int y dx \right), \\ &= 2 \left(af - mn \int (\operatorname{ch}u - 1) du \right) = 2 \left[(af - mn (\operatorname{sh}u - u)) \right], \\ &= 2 (12,25^2 - mn \times 0,617.32), \\ &= 2 (150 \text{ m}^2 0625 - 46 \text{ m}^2 6259) = 206 \text{ m}^2 8632. \end{aligned}$$

Emploi de la cycloïde hyperbolique proportionnelle.

Dans le même esprit de généralisation, on peut également songer à utiliser une courbe, qu'on pourrait appeler *cycloïde hyperbolique proportionnelle*, ayant comme équations paramétriques :

$$x = \frac{n}{4} (2u + \operatorname{sh} 2u), \quad y = \frac{m}{4} (\operatorname{ch} 2u - 1).$$

On aura alors :

$$\frac{dx}{du} = n \operatorname{ch}^2 u, \quad \frac{dy}{du} = m \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u,$$

de telle sorte que l'angle α que fait la tangente au point courant avec l'axe ox est lié à l'argument u par la condition :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n} \operatorname{th} u,$$

cette relation indique que $\operatorname{tg} \alpha$ varie de $-\frac{m}{n}$ à $+\frac{m}{n}$ en passant par la valeur zéro à l'origine.

La courbe admet deux branches paraboliques dans les directions définies par les valeurs extrêmes.

Étudions la variation du rayon de courbure. De l'équation, précédente on tire par dérivation :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{m}{n} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \frac{du}{d\alpha} = \frac{m}{n^2 \operatorname{ch}^4 u} \frac{dx}{d\alpha} = \frac{m R \cos \alpha}{n^2 \operatorname{ch}^4 u}.$$

D'où l'expression générale du rayon de courbure :

$$R = \frac{n^2 \operatorname{ch}^4 u}{m \cos^3 \alpha}.$$

En fonction de u seul, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \alpha} &= 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{m^2}{n^2} \operatorname{th}^2 u + 1, \\ \cos^2 \alpha &= \frac{n^2 \operatorname{ch}^2 u + m^2 \operatorname{sh}^2 u}{n^2 \operatorname{ch}^2 u}. \end{aligned}$$

D'où :

$$R = \frac{n^2}{m} \frac{\text{ch}^4 u (m^2 \text{sh}^2 u + n^2 \text{ch}^2 u)^{3/2}}{n^3 \text{ch}^3 u},$$

$$R = \frac{\text{chu} (m^2 \text{sh}^2 u + n^2 \text{ch}^2 u)^{3/2}}{mn}.$$

Cette relation montre que la courbe n'a pas de jarret ; le rayon de courbure augmente constamment à partir du sommet.

En outre :

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{m^2 \text{sh}^2 u}{n^2 \text{ch}^2 u} = \frac{m^2}{n^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch}^2 u} \right).$$

D'où l'on déduit :

$$\text{ch}^2 u = \frac{m^2 \cos^2 \alpha}{m^2 \cos^2 \alpha - n^2 \sin^2 \alpha},$$

et par suite :

$$R = \frac{n^2 m^3 \cos \alpha}{(m^2 \cos^2 \alpha - n^2 \sin^2 \alpha)^2}.$$

Telle est l'équation naturelle de la cycloïde hyperbolique proportionnelle.

La rectification de cette courbe est élémentaire.

Elle se déduit immédiatement de la loi de courbure :

$$ds = R d\alpha = \frac{n^2 m^3 \cos \alpha d\alpha}{(m^2 \cos^2 \alpha - n^2 \sin^2 \alpha)^2},$$

$$ds = n^2 m^3 \frac{d(\sin \alpha)}{[m^2 - (n^2 + m^2) \sin^2 \alpha]^2},$$

$$= \frac{n^2}{m} \frac{d(\sin \alpha)}{\left[1 - \frac{n^2 + m^2}{m^2} \sin^2 \alpha \right]^2}.$$

Posant alors :

$$\frac{\sqrt{n^2 + m^2}}{m} \sin \alpha = t,$$

il vient finalement :

$$s = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + m^2}} \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = \frac{n^2}{2 \sqrt{n^2 + m^2}} \left[\arg \text{th } t + \frac{t}{1 - t^2} \right].$$

La loi de courbure montre en outre que la courbe n'a pas de points d'inflexion à distance finie.

Si l'on utilise la cycloïde hyperbolique proportionnelle pour l'intrados du hangar de Montebourg, on doit avoir :

$$4a = n (2u + \text{sh } 2u), \quad 4f = m (\text{ch } 2u - 1),$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{m}{n} \text{thu}.$$

La relation de surbaissement s'écrit donc :

$$2\sigma = \frac{m}{n} \frac{\text{ch } 2u - 1}{2u + \text{sh } 2u},$$

$$2\sigma \cotg \alpha = \frac{(\text{ch } 2u - 1)}{(2u + \text{sh } 2u)} \cdot \frac{\text{chu}}{\text{shu}} = \frac{2 \text{shu chu}}{2u + \text{sh } 2u}.$$

Si l'on pose $v = 2u$, il vient une équation de Kléper :

$$\frac{v}{\text{shv}} = \frac{\text{tg } \alpha}{2\sigma} - 1 = E.$$

L'expression E est la même que pour l'ellipse ; on a la condition de réalité :

$$E < 1,$$

qui entraîne :

$$\text{tg } \alpha < 4\sigma.$$

Cette condition n'est pas vérifiée pour le hangar de Montebourg puisqu'on a :

$$4\sigma = 2, \quad \text{tg } \alpha = 2,357,76.$$

Mais prenons, pour fixer les idées, la valeur suivante de α :

$$\alpha = 60^\circ, \quad \text{tg } \alpha = 1,732.05,$$

et par suite, il faudra résoudre l'équation transcendante :

$$v - 0,732.05 \text{shv} = 0,$$

laquelle admet deux racines réelles et opposées.

En ne considérant que la racine positive et en étudiant le signe du premier membre au voisinage de 1,41, on trouve la valeur approchée :

$$v = 1,410.25, \quad \text{shv} = 1,926.45, \quad \frac{v}{\text{shv}} = 0,732.045.$$

On a donc, pour calculer n :

$$2u + \operatorname{sh} 2u = 3,336.70,$$

$$n = \frac{4a}{2u + \operatorname{sh} 2u} = 14 \text{ m. } 675.$$

Pour calculer m , on a :

$$\operatorname{ch} 2u - 1 = 1,170.53,$$

$$m = \frac{4f}{1,170.53} = 41 \text{ m. } 861.$$

Le rayon de courbure à la clef est :

$$R_0 = \frac{n^2}{m} = 5 \text{ m. } 151 ,$$

A la naissance, on a :

$$R_n = \frac{n^2 \operatorname{ch}^4 u}{m \cos^3 \alpha} = 103 \text{ m. } 570$$

$$u = 0,705.12, \quad \cos \alpha = 1, \quad \operatorname{chu} = \frac{1}{\cos 37^{\circ}25'}.$$

A titre de vérification, on peut calculer :

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{m}{n} \operatorname{thu} = 1,732.04 \quad \alpha' = 59^{\circ}59'59'',5.$$

Il y a un écart d'environ une demi-seconde.

Calculons le débouché superficiel dans cette dernière hypothèse :

$$\begin{aligned} D &= 2 \left(af - \int y dx \right) = 2 \left[af - \frac{mn}{4} \int (\operatorname{ch} 2u - 1) \operatorname{ch}^2 u du \right], \\ &= 2 \left[af - \frac{mn}{64} (\operatorname{sh} 4u - 4u) \right], \\ &= 2 (150 \text{ m}^2,0625 - 53 \text{ m}^2,2562) = 193 \text{ m}^2,6126, \end{aligned}$$

avec :

$$4u = 2,820,50, \quad \operatorname{sh} 4u = 8,365.00.$$

CHAPITRE XXV

LES RACCORDEMENTS DANS LES COURBES D'INTRADOS

LE PONT DE VALENCE, SUR LE RHÔNE

Les problèmes techniques posés par la construction du Pont de Valence, sur le Rhône, ont amené M. A. AURIC, son constructeur, à faire application de diverses courbes de raccordement. Il y avait, en effet, obligation d'assurer à la navigation le tirant d'air nécessaire et de raccorder le profil en long de l'ouvrage avec les chemins conservés, au moyen de déclivités aussi faibles que possible.

Pour le profil en long, il n'était pas possible de descendre au-dessous d'une déclivité de 0,035 pour les rampes d'accès, en raison de la réglementation du réseau de tramways du département de la Drôme, dont une ligne devait en principe emprunter le nouveau pont. D'autre part, il fallait prévoir au milieu de l'ouvrage un palier entre deux déclivités de sens contraires. Pour concilier les conditions, un palier infiniment court fut admis au milieu ; en d'autres termes, la courbe de raccordement AO devait présenter deux points d'inflexion, l'un au centre O de l'ouvrage, avec tangente horizontale, l'autre assurant le raccordement avec la rampe d'accès BA.

La courbe retenue par M. A. AURIC a été finalement un arc de la parabole biquadratique d'équation :

$$y = \frac{px^3}{a^2} \left(1 - \frac{x}{2a} \right), \quad (0 < x < a),$$

rapportée à l'horizontale Ox et à la verticale descendante Oy.

a représente la projection horizontale de l'arc de raccordement,

p la pente de la rampe d'accès.

La courbe d'intrados.

La considération d'un *rectangle navigable* imposait, pour l'arche marinière, un rectangle de 30 mètres de largeur avec une hauteur de 11 mètres au-dessus de l'étiage, soit de 10 mètres au-dessus de la ligne des naissances A A'.

Après l'essai de diverses courbes, M. A. AURIC a admis une courbe d'intrados comprenant une partie supérieure circulaire. Soit M M' m m' la partie supérieure à la ligne des naissances du rectangle navigable :

$$Mm = M'm' = 10 \text{ m.}, \quad MM' = mm' = 30 \text{ m.}$$

L'arc de cercle MCM' a un rayon de :

$$R_0 = 50 \text{ mètres},$$

(rayon de courbure à la clef).

L'angle au centre γ , correspondant, dans ce cercle, à la corde de 30 mètres, est donc défini par la condition :

$$M\gamma M' = 2\alpha, \quad \sin \alpha = \frac{15}{50} = \frac{3}{10},$$

d'où :

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10} = 0,953.939.20,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{91}} = 0,314.485.5,$$

$$\alpha = 17^{\circ}27'28'' = 0,304.695.7,$$

A cet arc circulaire central sont raccordés en M et M' deux arcs symétriques AM et A'M' de cubiques.

Les axes de coordonnées, pour représenter l'arc AM, ont pour origine la naissance A : l'axe Ax est pris suivant la ligne AA' des naissances ; l'axe Ay est la verticale de A.

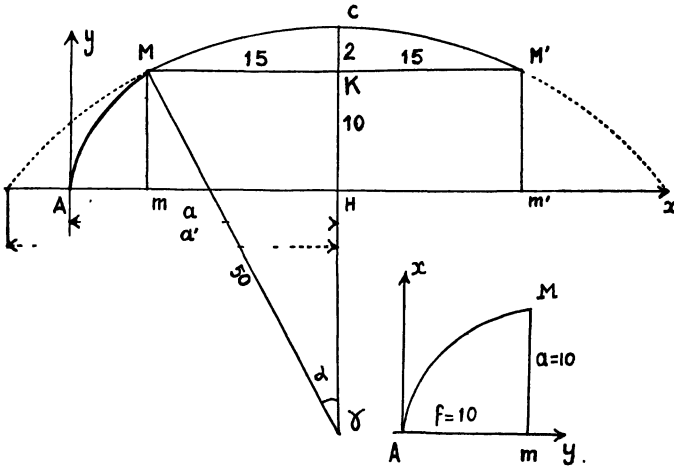


FIGURE 20.

L'équation de la cubique, à laquelle appartient l'arc AM d'intrados, est de la forme :

$$y^2 = 6Ax + 6Bx^2 + 2Cx^3.$$

A, B, C, sont trois coefficients à déterminer par les conditions.

La tangente en A à cette cubique est la verticale Ay ; les retombées sont verticales.

C'est un retour à l'anse de panier. Nous avons rappelé au chapitre XV, à propos des arches elliptiques, les études systématiques relatives aux anses, publiées en 1831 et 1839 par MICHEL et LEROUGE. Ultérieurement, en 1854, Yvon VILLARCEAU reprit l'examen critique de l'emploi de tels tracés.

En 1886 et en 1903, Maurice D'OCAGNE donna diverses propositions géométriques sur les anses de panier à trois centres.

Il convient à ce sujet de rappeler une intéressante étude de l'Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées FONTÈS, présentée en 1892 à l'Académie des Sciences de Toulouse ; tandis que BOSSUT cherchait à rendre extremum le rapport des rayons des arcs circulaires, FONTÈS se prononce en faveur du minimum de la différence de leurs courbures et il indique que cette construction, plus agréable à la vue, conduit à un débouché superficiel plus avantageux.

L'intrados du pont de Valence généralise l'anse de panier à trois arcs ; mais ici on assure l'osculatation aux points M et M' de raccordements.

Tout d'abord, le calcul élémentaire donne :

$$\gamma K = R_0 \cos \alpha = 47 \text{ m. } 696.96,$$

$$CK = R_0 (1 - \cos \alpha) = 2 \text{ m. } 303.04.$$

$$\text{Flèche :} \quad f = 12 \text{ m. } 303.04.$$

L'ouverture correspondante à une arche circulaire limitée par le cercle considéré et par la même ligne des naissances serait $2a'$, avec :

$$a'^2 = \frac{R^2}{20} (5 + 40 \cos \alpha) = 25 (5 + 4\sqrt{91}) = 1079 ;$$

$$a' = 32 \text{ m. } 847.$$

Au lieu de prendre une ouverture de près de 66 mètres, nous adopterons les données théoriques suivantes :

$$\text{portée } 2a = 50 \text{ mètres,}$$

$$\text{flèche } f = 12 \text{ m. } 303,$$

correspondant à un surbaissement de $\frac{1}{4.06}$. La portée véritable est 49 m. 20.

Passons à l'arc AM de cubique. La pente en M est connue :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = 0,314.485.5, \quad y'^2 = 0,0989.01.$$

La dérivée seconde doit être négative ; le rayon de courbure est 50 mètres en A. Donc :

$$R_0 = 50 \text{ m.} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{-y''}$$

$$y'' \times 50 = \frac{-1}{\cos^3 \alpha} = -\frac{1000}{91. \sqrt{91}}, \quad y'' = -\frac{20}{91 \times \sqrt{91}} = -0,023.039.2;$$

la dérivation donne :

$$yy' = 3 (A + 2Bx + Cx^2),$$

$$yy'' + y'^2 = 6 (B + Cx);$$

$$\frac{1}{3} yy' = \frac{10}{\sqrt{91}} = 1,048.285;$$

$$yy'' + y'^2 = \frac{9 \sqrt{91} - 200}{91 \sqrt{91}} = -0,131.491.$$

Les coefficients A, B, C, inconnus, sont déterminés par la résolution du système linéaire de trois équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3Ax_0 + 3Bx_0^2 + Cx_0^3 = 50, \\ A + 2Bx_0 + Cx_0^2 = 1,048.285, \\ B + Cx_0 = -0,021.915, \end{array} \right.$$

où $x_0 = 10 \text{ m.}$

Le déterminant des coefficients des inconnues est :

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 3x_0 & x_0 \\ 1 & 2x_0 & x_0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| x_0^2 = x_0^3;$$

Il y a intérêt, pour éviter des calculs fastidieux, à choisir pour x_0 une valeur numérique simple.

Le système admet une solution :

$$A = + 2,684.28,$$

$$B = - 0,141.684.2,$$

$$C = + 0,011.977.$$

On peut plus rapidement présenter le calcul de détermination de la cubique en transportant parallèlement à eux-mêmes les axes au point M d'osculation. Soit MX, MY les nouveaux axes ; les formules de changement d'axes sont :

$$x = X + x_0, \quad y = Y + 10.$$

L'équation de la cubique se présentera sous la forme :

$$(Y + 10)^2 = 100 + 20 X \operatorname{tg} \alpha - PX^2 + 2QX^3 ;$$

d'où :

$$Y^2 + 20Y = 20 X \operatorname{tg} \alpha - PX^2 + 2QX^3,$$

$$(Y + 10)Y' = 10 \operatorname{tg} \alpha - PX + 3QX^2,$$

$$Y Y'' + Y'^2 + 10 Y'' = -P + 6QX ;$$

à la nouvelle origine M, on aura donc :

$$P = -(10Y'' + Y'^2) = \frac{200}{91 \sqrt{91}} - \frac{9}{91},$$

Q sera enfin déterminé par la condition que la courbe passe au point A ($X = -x_0 = -10$, $Y = -10$), c'est-à-dire :

$$2Qx_0^3 + Px_0^2 + 20x_0 \operatorname{tg} \alpha = 100.$$

Les valeurs de P et Q sont :

$$P = + 0,131.491, \quad Q = + 0,011.977 ;$$

d'où résultent à nouveau les valeurs des coefficients A, B, C.

Finalement, l'équation de la cubique est :

$$y^2 = 16,105.66 x - 0,850.105 x^2 + 0,023.954 x^3.$$

Le rayon de courbure en A est le paramètre de la parabole osculatrice :

$$y^2 = 6Ax,$$

il est donc égal à :

$$R_A = 3A = 8 \text{ m. } 053.$$

Voici un tableau de correspondance des coordonnées de divers points de l'arc de cubique :

x	y
0	0
1	3,9089
2	5,3854
2,5	5,9821
2,66635	6,11177
3	6,4322
4	7,2357
4,22519	7,48408
5	7,89113
6	8,4383
7	8,9130
8	9,3114
8,66247	9,5550
9	9,6724
10	10

Pour $x = 5$,

$$y = 7,89113, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,595.591, \quad \frac{1}{\cos \alpha} = 1,163.980,$$

$$y'' = -0,107.166.2, \quad \alpha = 30^{\circ}46'55'', \quad R = 14,715.63.$$

Nous avons inscrit les ordonnées relatives à l'application de la méthode de TCHEBICHEEF. Leur moyenne est 7,71695. La montée de l'arche étant 12 m. 303, le premier de ces points $x = 2,66635$, $y = 6,11177$ correspond à la demi-montée, c'est-à-dire aux reins.

Il est essentiel de se rendre compte de la variation de la courbure sur l'arc AM. Avec une équation aussi compliquée, il est inutile de songer à la formule habituelle qui entraînerait des calculs fastidieux pour un résultat disproportionné au travail.

La forme de la courbe peut être discutée en observant qu'elle est symétrique par rapport à Ax ; que l'axe Ax ne la rencontre qu'au seul point A ; la cubique entière est donc dépourvue d'ovale et ne présente qu'une simple branche parabolique, n'admettant d'ailleurs pas de tangente horizontale, mais présentant deux inflexions symétriques.

Il est aisé de déterminer les points d'inflexion. En un tel point, les conditions :

$$yy' = 3(A + 2Bx + Cx^2),$$

$$y'^2 = 6(B + Cx),$$

doivent être simultanément vérifiées ; elles entraînent :

$$2y^2 (B + Cx) = 3 (A + 2Bx + Cx^2)^2,$$

d'où (compte tenu de l'équation de la courbe), l'équation aux abscisses des points d'inflexion :

$$x^4 + 4 \frac{B}{C} x^3 + 6 \frac{A}{C} x^2 = 3 \frac{A^2}{C^2},$$

$$\left(\frac{x}{10}\right)^4 - 4,73188 \left(\frac{x}{10}\right)^3 + 13,447.164 \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 15,688.86.$$

Cette équation se prête, par suite de l'absence du terme du premier degré, à une discussion immédiate par le théorème de Rolle. L'équation a une racine positive, une racine négative et deux racines imaginaires. La racine positive convient seule et donne les deux inflexions de la cubique.

En posant :

$$x = 15 t,$$

l'équation se met sous la forme :

$$t^3 + 5,976.517 t = 3,15459 t^2 + \frac{3,09902}{t},$$

dont la résolution au moyen de tables est rapide et donne :

$$t = 0,8944, \quad x = 13,416.$$

L'inflexion est donc en dehors de l'arc utile ; le rayon croît constamment de sa valeur minimum, 8 mètres environ à la naissance, à la limite imposée 50 mètres au point M d'osculation avec le cercle central.

Evaluation de l'aire du débouché.

1° L'aire S limitée par l'arc AM de cubique, l'axe Ox et l'ordonnée Mm correspond à une ordonnée moyenne évaluée par la formule des trois niveaux :

$$\frac{1}{6} (y_A + y_M + 4y_5) = 6,927.42,$$

où :

$$y_5 = (\text{ordonnée pour } x = 5) = 7,89113.$$

L'aire S a ainsi pour valeur approchée $69 \text{ m}^2 2742$ (par l'emploi de la formule des trois niveaux de KÉPLER).

Par la méthode de TCHÉBICHEFF, on aurait $S = 77 \text{ m}^2 1695$.

2° Appliquons à la même aire la formule empirique du chapitre XIV. On peut, pour un instant, considérer la figure comme correspondant à une arche symétrique qui aurait A pour clef et M pour naissance. Les distances ω et ω' de A à la tangente et à la normale en M sont :

$$\omega = \sqrt{91} - 3, \quad \omega' = \sqrt{91} + 3,$$

d'où pour aire $T_1 = \frac{1}{2} \omega \omega' = 41$; pour aire $T_2 = 50$,

$$\Sigma = \frac{T_1 + T_2}{6} + \epsilon = 15,167 + \epsilon,$$

avec la formule :

$$\epsilon = \frac{R_0(R_n - R_0)}{360} \beta^3 + \frac{R_0^2}{60} \beta^5, \quad R_0 = 8^{\text{m}}, 053, \quad R_n = 50^{\text{m}},$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \alpha = 17^{\circ}27'28'' = 0,3047,$$

$$\beta = 1,266, \quad \beta^3 = 2,0291, \quad \beta^5 = 3,252,$$

$$\epsilon = \frac{64,8508}{60} \beta^5 + \frac{337,7}{60} \beta^3 = 3,515 + 1,904 = 5,419;$$

D'où au total pour l'aire Σ du segment AM :

$$\Sigma = 20,586, \quad S = 70,586.$$

L'écart entre les valeurs toutes deux approchées données pour S n'est que $1 \text{ m}^2 3$; ce qui correspond à une différence du 50^e.

3° L'aire du secteur circulaire (cercle MCM') est :

$$R^2 \alpha = 2.500 \times 0,3047 = 761 \text{ m}^2 75 ;$$

il faut lui retrancher l'aire $15 \times \gamma K$ du triangle $M\gamma M'$:

$$15. \gamma K = 15 \times 47,696.96 = 715 \text{ m}^2 4544,$$

pour avoir l'aire comprise au-dessus du rectangle navigable, soit $46 \text{ m}^2 30$.

Au total, l'aire du débouché est donc :

$$140 + 300 + 46 \text{ m}^2 = 486 \text{ m}^2.$$

Normalisation de la parabolique du Pont de Valence.

Il ne s'agit pas de critiquer le remarquable ouvrage que constituait le pont de Valence, malheureusement détruit en juin 1940. Mais, adoptant la réalisation même de M. A. AURIC, l'objet de notre étude est maintenant de substituer à l'arc de parabolique anormale, qui a été construit, un arc normalisé selon la théorie de M. TURRIÈRE. A l'arc d'une cubique, qui se prête mal aux calculs, il convient de substituer un arc très voisin, aussi voisin que possible, d'une courbe se prêtant mieux aux calculs.

Les inconvénients présentés par la cubique, dans le développement des calculs, sont les suivants : complication de l'équation ne permettant pas la discussion de la courbure le long de l'arc et celle des jarrets ; impossibilité de rectifier l'arc élémentairement, complication de l'intégrale dont dépend cette rectification ; impossibilité d'exprimer au moyen de fonctions élémentaires l'aire du débouché ; dans l'ensemble, peu de calculs peuvent être effectués simplement avec cette cubique. Ajoutons l'impossibilité d'exprimer avec simplicité les coordonnées des points courants de la courbe d'extrados et de la fibre moyenne et la complication analytique de la loi d'épaisseur le long de l'arc.

En fait, cet exemple met en relief toutes sortes de difficultés accumulées, rendant fastidieuses la plupart des opérations analytiques qui se posent à l'occasion de l'étude pratique de cette cubique.

La première idée qui se présente à l'esprit est de prendre une loi de courbure :

$$R = R_1 + \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha + \lambda_3 \cos^3 \alpha + \dots ;$$

à la naissance, $\cos \alpha = 0$. On ne peut donc pas prendre de terme avec exposant négatif ; les paraboles et chaînettes s'excluent de ce fait. Il ne peut être fait usage que de paraboliques primaires du type cycloïdal, dans cette addition. On disposerait du rayon R_1 à la naissance et des arbitraires λ_i par les conditions que pour la valeur α donnée les coordonnées de M soient connues, ainsi que le rayon de courbure. Les calculs dépendent donc d'équations linéaires.

La solution qui suit est plus élégante et plus conforme aux considérations antérieures.

Il suffit de renverser la figure de 90°, de considérer A comme la clef (Voir la figure 20, de droite). L'arc de raccordement AM serait alors une demi-arche (à tangente horizontale en A). Il s'agit alors de construire un arc de parabolique normale avec les conditions suivantes :

portée = 20 mètres,

flèche = 10 mètres,

rayon de courbure aux naissances = 50 mètres,

inclinaison aux naissances :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 17^\circ 27' 28'' = 72^\circ 32' 32'' = 1,266.10,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{10} ;$$

rayon de courbure moyenne :

$$\rho = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{100}{\sqrt{91}} = 10^m, 482.85.$$

Comparons d'abord cet arc aux paraboliques primaires. Il s'agit d'un arc de surbaissement égal à celui du plein-cintre ($\sigma = \frac{1}{2}$). Nous devons donc exclure les paraboliques primaires qui précèdent le cercle au tableau.

Dans le cas de la parabole ordinaire, dont l'équation est :

$$10y = x^2,$$

on a en M une inclinaison :

$$\text{tang } \alpha = 2, \quad \alpha = 63^{\circ}26'05'',$$

et un rayon de courbure :

$$R = 5\sqrt{125} = 55^{\text{m}} 902.$$

La longueur de cet arc a pour expression :

$$s = \frac{5}{2} (u + \text{shu chu}),$$

avec :

$$\text{shu} = 2, \quad \text{chu} = \sqrt{5}, \quad u = 1,4436,$$

donc :

$$s = 14^{\text{m}}.789.$$

Pour la chaînette, il faut résoudre l'équation transcendante :

$$\text{chu} = 1 + u;$$

elle a pour solution :

$$\begin{aligned} u &= 1,616.13, & \alpha &= 67^{\circ}31'38'', \\ \text{chu} &= 2,616.13, & \text{shu} &= 2,417.48 = \text{tg } \alpha; \end{aligned}$$

d'où le paramètre m :

$$m = \frac{10}{u} = 6^{\text{m}}.188,$$

et un rayon de courbure en M :

$$R = \frac{(f + m)^2}{m} = m + 20 + 10 u = 42^{\text{m}}.350.$$

L'arc s a pour longueur :

$$s = m.\text{shu} = 14^{\text{m}}.959.$$

Pour la chaînette d'égale résistance, il faut résoudre l'équation transcendante :

$$e^{\alpha} \cos \alpha = 1;$$

pour $\alpha = 74^{\circ} = 1,2915436$, on a :

$$\cos \alpha = 0,27564, \quad | \text{Log. naturel } \cos \alpha | = 1,289.752.0;$$

la racine est donc à peine supérieure à 74° , ce qui représente un écart de $1^{\circ}30'$ environ avec la réalité. Donc, en ce qui concerne l'inclinaison, c'est la chaînette d'égale résistance qui, parmi les paraboliques primaires, représenterait le mieux l'arc de cubique du pont de Valence. Les rayons de courbure en A ne différeraient que de 30 centimètres. Par contre, il y aurait une différence notable pour la courbure en M.

Le paramètre m de la chaînette d'égale résistance est défini par :

$$a = m\alpha,$$

d'où : $m = R_0 = 7 \text{ m. } 743.$

L'argument des fonctions hyperboliques associées aux fonctions circulaires de α est :

$$u = 1,9623 ;$$

l'arc de chaînette d'égale résistance a pour expression générale :

$$s = mu,$$

d'où ici :

$$s = 7,743 \times 1,9623 = 15 \text{ m. } 194.$$

Les résultats des calculs permettant de comparer l'arc réel de cubique avec ceux des diverses paraboliques sont résumés au tableau suivant :

$$a = f = 10 \text{ mètres,}$$

$$2\sigma = 1. \quad 3r = R + 2R_0,$$

	α	R_0	R	r	s
Cubique	$72^{\circ} 32' 32''$	8,06	50	22,04	
Cercle	90°	10	10	10	15,708
Chaînette de résistance.	74°	7,75	28,12	14,54	15,194
Chaînette.....	$67^{\circ} 31' 38''$	6,19	42,35	18,24	14,959
Parabole.....	$63^{\circ} 26' 05''$	5	55,90	21,97	14,789
Parabolique normale..	$72^{\circ} 32' 32''$	8,55	50	22,38	15,280

La parabolique normale est ici la courbe parallèle de chaînette contractile.

Intrados en parallèle de chaînette contractile.

Prenons la loi de courbure :

$$R = A + C \operatorname{ch}^2 \varphi + D \operatorname{ch}^3 \varphi,$$

avec trois coefficients indéterminés A, C, D. Nous avons, pour les déterminer, le système suivant de trois équations linéaires :

$$A \sin \alpha + C \varphi + D \operatorname{sh} \varphi = \sin \alpha (A + D \operatorname{ch} \varphi) + C \varphi = a = 10,$$

$$A + C \operatorname{ch} \varphi + \frac{D}{2} \operatorname{ch} \varphi (\operatorname{ch} \varphi + 1) = \frac{f}{1 - \cos \alpha} = \frac{100}{7},$$

$$A + C \operatorname{ch}^2 \varphi + D \operatorname{ch}^3 \varphi = R = 50.$$

Les deux dernières permettent d'exprimer simplement A et C en fonction de D :

$$A = \frac{D}{2} \operatorname{ch}^2 \varphi - \frac{R \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{f}{(1 - \cos \alpha)^2},$$

$$C = -D \left(\operatorname{ch} \varphi + \frac{1}{2} \right) + \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \left(R - \frac{f}{1 - \cos \alpha} \right),$$

c'est-à-dire :

$$A = \frac{50}{9} D - \frac{50}{49}, \quad C = -\frac{23}{6} D + \frac{225}{49}.$$

La première équation, plus compliquée, s'écrit :

$$A + C \frac{\varphi}{\sin \alpha} + D \operatorname{ch} \varphi = \frac{a}{\sin \alpha} = \rho,$$

ρ désignant le rayon de courbure moyenne :

$$\rho = 10 \text{ m. } 482.85;$$

$$\varphi = 1,8738, \quad \frac{\varphi}{\sin \alpha} = 1,964.354.$$

D'où :

$$\left(\frac{80}{9} - \frac{23}{6} \frac{\varphi}{\sin \alpha} \right) D = \rho + \frac{50}{49} - \frac{225}{49} \frac{\varphi}{\sin \alpha},$$

et finalement :

$$A = 9,132.20,$$

$$C = -2,413.40,$$

$$D = 1,827.45.$$

Le rayon de courbure en A est :

$$R_0 = A + C + D = 8 \text{ m. } 546,$$

$$\frac{R + 2R_0}{3} = 22 \text{ m. } 37.$$

L'équation du troisième degré en $\text{ch } \varphi$ exprimant $R = 0$ n'a qu'une racine négative ; la courbe n'a pas de point de rebroussement. Comme :

$$\frac{dR}{d\varphi} = \text{sh } \varphi \text{ ch } \varphi (2C + 3D \text{ ch } \varphi) > 0 ;$$

le rayon de courbure croît constamment avec φ : la courbe n'a pas de jarret.

L'arc $s = AM$ a pour expression :

$$s = A\alpha + C \text{ sh } \varphi + \frac{D}{2} (\alpha + \text{sh } \varphi \text{ ch } \varphi) = 15 \text{ m. } 284.$$

Intrados avec raccordement au jarret. Discussion du résultat.

Reprenons les calculs avec une nouvelle loi de courbure :

$$R = A + 2B \cos \alpha + C \text{ ch}^2 \varphi + D \text{ ch}^3 \varphi.$$

La paraboloïque normale est maintenant la résultante d'un cercle, d'une cycloïde, d'une parabole et d'une chaînette. Nous avons :

$$\frac{dR}{d\varphi} = \text{sh } \varphi (2C \text{ ch } \varphi + 3D \text{ ch}^2 \varphi - 2B \cos^2 \alpha),$$

$$x = A \sin \alpha + \frac{B}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha) + C \varphi + D \text{ sh } \varphi,$$

$$y = A (1 - \cos \alpha) + B \sin^2 \alpha + C (\text{ch } \varphi - 1) + \frac{D}{2} \text{ sh}^2 \varphi ,$$

d'où les conditions :

$$A + B \left(\cos \alpha + \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) + C \frac{\varphi}{\sin \alpha} + D \text{ ch } \varphi = \frac{a}{\sin \alpha},$$

$$A + B (1 + \cos \alpha) + C \text{ ch } \varphi + \frac{D}{2} \text{ ch } \varphi (\text{ch } \varphi + 1) = \frac{f}{1 - \cos \alpha},$$

$$A + 2B \cos \alpha + C \text{ ch}^2 \varphi + D \text{ ch}^3 \varphi = R.$$

Nous imposerons une nouvelle condition : la surosculation en M entre la courbe et le cercle ; le point M sera donc un jarret pour la courbe. Cette disposition accroîtra le caractère artistique de l'arche. La condition correspondante est que la dérivée de R soit nulle ou :

$$2C \operatorname{ch} \varphi + 3D \operatorname{ch}^2 \varphi = 2B \cos^2 \alpha.$$

L'arc AM aura pour expression :

$$s = A\alpha + 2B \sin \alpha + C \operatorname{sh} \varphi + \frac{D}{4} (2\varphi + 2\operatorname{sh} 2\varphi).$$

La résolution des équations linéaires, autres que celle relative à l'ouverture, permet d'abord d'exprimer A, B, C en fonction de D :

$$B = \frac{f - R (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha)^3} - \frac{D}{2} \operatorname{ch}^3 \varphi,$$

$$C = \frac{f - R (1 - \cos \alpha)}{(\operatorname{ch} \varphi - 1)^3} - \frac{D}{2} (3\operatorname{ch} \varphi + 1),$$

$$A = R - \frac{3\cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)^3} \left[f - R (1 - \cos \alpha) \right] + \frac{D}{2} \operatorname{ch}^2 \varphi (\operatorname{ch} \varphi + 3).$$

Dans l'exemple traité, le système des équations linéaires est le suivant :

$$A + 1,3 B + \frac{10}{3} C + \frac{65}{9} D = \frac{100}{7},$$

$$A + 0,6 B + \frac{100}{9} C + \frac{1000}{27} D = 50,$$

$$C + 5 D = 0,027 B,$$

$$A + 1,627.230 B + 1,964.354 C + \frac{10}{3} D = 10,482.85.$$

Les trois premières donnent :

$$A = -1,9 B - 22,8863, \quad C = 0,297 B + 19,679.30,$$

$$D = -0,054 B - 3,935860.$$

En portant dans l'équation relative à l'ouverture, on obtient la valeur de D. D'où ici :

$$\begin{aligned} A &= -136,7848, & B &= 59,94660, \\ C &= 37,48344, & D &= -7,17300; \end{aligned}$$

et par suite :

$$R_0 = A + 2B + C + D = 13 \text{ m. } 42.$$

Les écarts avec les nombres de la solution précédente sont notables : les deux solutions diffèrent essentiellement en principe. La seconde pose, en effet, une condition étrangère à l'ouvrage établi à Valence ; la courbe d'intrados comprenait un arc d'une cubique qui avait un rayon de courbure croissant de la naissance au point de raccordement M et qui continuait théoriquement à croître sur la cubique prolongée, vers un point d'inflexion. Dans la nouvelle solution, au contraire, le rayon de courbure suit une loi différente et le problème est totalement changé. Pour que la solution avec l'hypothèse introduite de raccordement au jarret soit acceptable, il faut que R soit astreint à croître de la naissance en M, il doit être maintenu stationnaire au voisinage de ce point.

Pour compléter la discussion, considérons l'équation des jarrets qui est du quatrième degré en $\text{ch}\varphi$. Sans développer les calculs, indiquons qu'elle a deux racines réelles et deux racines imaginaires ; l'une des racines réelles est $\frac{10}{3}$ et correspond au point M ; l'autre est légèrement supérieure à $\frac{4}{3}$.

$$\text{Pour : } \text{ch}\varphi = \frac{4}{3}, \quad R = 2 \text{ m. } 767.76.$$

Ainsi, à l'examen critique du résultat, la solution doit être rejetée finalement, car la parabolique correspondante admet un second jarret sur l'arc utile.

Il ne s'agit pas là d'une difficulté exceptionnelle. Dans les essais de normalisation par paraboliques à paramètres multiples, nous avons pu observer des faits analogues, où la courbe

réagit en quelque sorte contre des lois trop arbitraires imposées à sa courbure. Il conviendra dans de telles études de soumettre la solution à un examen critique pour décider si finalement la courbe peut être retenue.

Dans des problèmes où la présence de trois paramètres arbitraires suffit, nous faisons observer que l'emploi des courbes parallèles aux paraboliques normales à deux paramètres est en général avantageux : l'addition d'un cercle à ces courbes ne modifie ni le nombre, ni l'existence des jarrets et par conséquent n'exige aucune discussion supplémentaire, tandis que l'équation des points de rebroussement se présente elle-même sous une forme simple.

TABLEAUX DE CORRESPONDANCE

des valeurs de σ et de α pour les paraboliques primaires (1).

(1) Nous ne croyons pas utile de donner, dans ce qui suit, pour le cercle et la parabole, les tables permettant de trouver la valeur du surbaissement en fonction de l'angle d'inclinaison à la naissance. Les relations entre σ et α pour ces deux paraboliques primaires permettent de trouver immédiatement les résultats cherchés dans toutes les tables de fonctions circulaires.

Tableau des valeurs de α correspondantes
pour les parabol

Paraboloïques	Indice k	2	3	4	5	6	7
Développante d'astroïde	— 3			90°.00'.00"	50°.19'.	40°.19'.	33°.55'.
Cycloïde	— 2			59°.04'.	46°.20'.	38°.22'.	32°.44'.
Cercle	— 1	90°.00'.00"	67°.22'.48"	53°.07'.48"	43°.36'.10"	36°.52'.41"	31°.43'.24"
Chaînette de résistance.	0	74°.04'.	60°.16'.	49°.32'.	41°.35'.	35°.38'.	30°.49'.
Chaînette	1	67°.31'.	56°.04'.	47°.02'	39°.59'.	34°.35'.	30°.26'.
Parabole	2	63°.26'.06"	53°.11'.36"	45°.00'.00"	38°.39'.39"	33°.41'.26"	29°.44'.35"

aux valeurs entières du surbaissement $\frac{1}{\sigma}$,

loïques primaires

8	9	10	11	12	13	14	15	16
29°.23'.10"	26°.01'.	23°.17'.	21°.03'.	19°.17'.	17°.47'.	16°.29'.	15°.22'.	14°.24'.
28°.41'.30"	25°.28'.	22°.58'.	20°.50'.	19°.06'.	17°.38'.	16°.22'.	15°.17'.	14°.20'.
28° 04'.28"	25° 03'.28"	22°.37'.12"	20°.36'.34"	18°.55'.28"	17°.29'.32"	16°.15'.37"	15°.11'.20"	14°.15'.00"
27°.30'.	24°.39'.	22°.19'.	20°.23'.	18°.44'.	17°.20'.	16°.08'.	15°.04'.	14°.10'.
27°.02'.	24°.18'.	22°.03'.	20°.11'.	18°.35'.	17°.14'.	16° 03'.	15°.00'.	14°.06'.
26°.33'.54"	23°.57'.46"	21°.48'.05"	19°.59'.00"	18°.26'.06"	17°.06'.10"	15°.56'.43"	14° 55'.53"	14°.02'.10"

CHAÎNETTE ORDINAIRE

α	φ	$\text{ch } \varphi - 1$	$\frac{1}{\sigma}$
15°	0,264.84	0,035.28	14,965.36
30'	0,273.89	0,037.74	14,476.22
16°	0,282.95	0,040.30	14,040.20
30'	0,292.04	0,042.95	13,599.28
17°	0,301.16	0,045.69	13,180.24
30'	0,310.30	0,048.53	12,780.06
18°	0,319.46	0,051.46	12,413.98
30'	0,328.65	0,054.49	12,060.76
19°	0,337.86	0,057.62	11,727.16
30'	0,347.11	0,060.85	11,408.70
20°	0,356.38	0,064.18	11,100.56
30'	0,365.68	0,067.61	10,817.32
21°	0,375.01	0,071.15	10,541.38
30'	0,384.38	0,074.79	10,278.92
22°	0,393.77	0,078.53	10,028.50
30'	0,403.20	0,082.39	9,789.60
23°	0,412.66	0,086.36	9,556.74
30'	0,422.16	0,090.44	9,335.68
24°	0,431.69	0,094.64	9,122.78
30'	0,441.27	0,098.95	8,919.04
25°	0,450.88	0,103.38	8,722.00
30'	0,460.52	0,107.97	8,581.40
26°	0,470.21	0,112.60	8,350.14
30'	0,479.94	0,117.40	8,245.72

α	φ	$\text{ch } \varphi - 1$	$\frac{1}{\sigma}$
27°	0,489.72	0,122.33	8,006.54
30'	0,499.53	0,127.38	7,843.14
28°	0,509.39	0,132.57	7,684.76
30'	0,519.39	0,137.89	7,533.46
29°	0,529.25	0,143.35	7,384.02
30'	0,539.25	0,148.96	7,220.46
30°	0,549.31	0,154.70	7,101.46
30'	0,559.41	0,160.59	6,959.64
31°	0,569.56	0,166.63	6,836.14
30'	0,579.77	0,172.83	6,709.16
32°	0,590.03	0,179.18	6,585.88
30'	0,600.35	0,185.69	6,466.16
33°	0,610.73	0,192.36	6,349.86
30'	0,621.16	0,199.20	6,237.32
34°	0,631.66	0,206.22	6,126.08
30'	0,642.22	0,213.41	6,047.26
35°	0,652.84	0,220.77	5,914.16
30'	0,663.52	0,228.33	5,811.86
36°	0,674.28	0,236.07	5,712.54
30'	0,685.10	0,244.00	5,615.56
37°	0,695.99	0,252.14	5,520.66
30'	0,706.95	0,260.47	5,428.26
38°	0,717.99	0,269.02	5,337.80
30'	0,729.10	0,277.78	5,249.60
39°	0,740.29	0,286.76	5,163.06
30'	0,751.56	0,295.97	5,078.50
40°	0,762.91	0,305.41	4,994.40

CHAINETTE D'ÉGALE RÉSISTANCE

α	$a = \alpha$ en radians	$f = L \cos \alpha $	$\frac{1}{\sigma}$
15°	0,261.80	0,034.69	15,093.68
30'	0,270.53	0,037.01	14,622.84
16°	0,279.25	0,039.51	14,149.82
30'	0,287.98	0,042.10	13,680.76
17°	0,296.71	0,044.69	13,274.58
30'	0,305.43	0,047.17	12,966.70
18°	0,314.16	0,050.22	12,511.32
30'	0,322.89	0,053.07	12,165.84
19°	0,331.61	0,056.00	11,843.20
30'	0,340.34	0,059.12	11,513.54
20°	0,349.07	0,062.22	11,220.70
30'	0,357.79	0,065.41	10,939.86
21°	0,366.52	0,068.78	10,636.42
30'	0,375.25	0,072.13	10,404.82
22°	0,383.97	0,075.66	10,149.88
30'	0,392.70	0,078.97	9,945.54
23°	0,401.43	0,082.85	9,690.46
30'	0,410.15	0,086.58	9,474.48
24°	0,418.88	0,090.47	9,260.00
30'	0,427.61	0,094.35	9,063.48
25°	0,436.33	0,098.42	8,864.68
30'	0,445.06	0,102.49	8,682.98
26°	0,453.79	0,106.67	8,506.40
30'	0,462.51	0,111.15	8,322.26

α	$a = \alpha \text{ en radians}$	$f = L \cos \alpha $	$\frac{1}{\sigma}$
27°	0,471.24	0,115.43	8,144.48
30'	0,479.97	0,119.91	8,000.54
28°	0,488.69	0,124.52	7,859.20
30'	0,497.42	0,129.20	7,700.00
29°	0,506.15	0,133.93	7,558.06
30'	0,514.87	0,138.90	7,408.20
30°	0,523.60	0,143.86	7,278.94
30'	0,532.33	0,148.93	7,148.72
31°	0,541.05	0,154.11	7,021.60
30'	0,549.78	0,159.41	6,897.70
32°	0,558.51	0,164.78	6,777.58
30'	0,567.23	0,170.31	6,661.18
33°	0,575.96	0,175.96	6,546.48
30'	0,584.69	0,181.73	6,422.58
34°	0,593.41	0,187.52	6,320.90
30'	0,602.14	0,193.43	6,225.92
35°	0,610.87	0,199.46	6,105.74
30'	0,619.59	0,205.64	6,019.48
36°	0,628.32	0,211.91	5,929.76
30'	0,637.05	0,218.32	5,835.58
37°	0,645.77	0,224.85	5,743.98
30'	0,654.50	0,231.42	5,655.86
38°	0,663.23	0,238.20	5,568.64
30'	0,671.95	0,245.10	5,483.06
39°	0,680.68	0,252.06	5,400.92
30'	0,689.41	0,259.24	5,318.66
40°	0,698.13	0,266.46	5,242.00

DÉVELOPPANTE D'ASTROÏDE

$$\frac{12 a}{R_0} = \sin 3 \alpha + 9 \sin \alpha,$$

$$\frac{12 f}{R_0} = 4 - (\cos 3 \alpha + 3 \cos \alpha),$$

$$\sigma = \frac{f}{2 a}.$$

α	$\frac{12 a}{R_0}$	$\frac{12 f}{R_0}$	$\frac{1}{\sigma}$
15°	3,036.49	0,395.10	15,370.74
30'	3,130.53	0,420.76	14,883.58
16°	3,223.90	0,447.09	14,437.04
30'	3,316.59	0,474.09	13,980.30
17°	3,408.48	0,501.78	13,580.54
30'	3,508.74	0,530.08	13,221.84
18°	3,590.20	0,550.07	12,863.46
30'	3,679.83	0,588.63	12,503.02
19°	3,758.80	0,618.80	12,148.84
30'	3,856.93	0,649.58	11,875.16
20°	3,944.21	0,680.93	11,584.76
30'	4,030.71	0,712.83	11,328.98
21°	4,116.34	0,745.27	11,046.54
30'	4,200.46	0,776.92	10,813.10
22°	4,285.04	0,811.72	10,557.78
30'	4,368.00	0,845.68	10,330.14
23°	4,450.15	0,880.13	10,113.58
30'	4,674.85	0,934.51	9,980.34
24°	4,611.72	0,950.33	9,705.48
30'	4,691.03	0,984.30	9,531.70

α	$\frac{12 a}{R_0}$	$\frac{12 f}{R_0}$	$\frac{1}{\sigma}$
25°	4,769.51	1,012.25	9,422.24
30'	4,846.96	1,058.78	9,225.44
26°	4,923.48	1,095.72	9,029.16
30'	4,999.05	1,132.97	8,843.34
27°	5,073.60	1,170.53	8,668.88
30'	5,147.19	1,208.44	8,501.88
28°	5,219.75	1,246.62	8,374.28
30'	5,291.36	1,285.08	8,264.46
29°	5,361.92	1,323.80	8,121.78
30'	5,431.44	1,362.74	7,975.38
30°	5,500.00	1,401.91	7,846.44
30'	5,567.52	1,441.29	7,725.46
31°	5,633.99	1,480.83	7,609.28
30'	5,699.42	1,520.54	7,496.56
32°	5,763.80	1,560.38	7,387.68
30'	5,827.14	1,600.36	7,282.28
33°	5,889.45	1,640.43	7,183.72
30'	5,950.71	1,680.57	7,097.26
34°	6,010.86	1,720.79	6,986.16
30'	6,070.06	1,761.06	6,893.64
35°	6,128.15	1,801.37	6,803.82
30'	6,185.12	1,841.66	6,716.90
36°	6,241.17	1,881.96	6,632.62
30'	6,296.02	1,922.23	6,550.74
37°	6,349.87	1,962.45	6,471.36
30'	6,402.72	2,002.63	6,386.32
38°	6,454.49	2,042.71	6,319.40
30'	6,504.55	2,083.91	6,242.64
39°	6,554.89	2,122.54	6,176.48
30'	6,603.54	2,162.30	6,107.18
40°	6,651.14	2,201.88	6,053.28
30'	6,699.40	2,241.27	5,978.14

CYCLOIDE ORDINAIRE

$$\frac{12 a}{R_0} = 2 \alpha + \sin 2 \alpha ,$$

$$\frac{12 f}{R_0} = 1 - \cos 2 \alpha ,$$

$$\sigma = \frac{f}{2 a} .$$

α	$2 \alpha + \sin 2 \alpha$	$1 - \cos 2 \alpha$	$\frac{1}{\sigma}$
10°	0,691.08	0,060.31	22,884.00
30'	0,724.88	0,066.42	21,824.00
11°	0,758.58	0,072.82	20,834.00
30'	0,792.15	0,079.50	19,928.30
12°	0,825.61	0,086.45	19,100.24
30'	0,858.95	0,093.69	18,336.00
13°	0,892.15	0,101.20	17,631.42
30'	0,925.22	0,108.99	16,978.06
14°	0,958.16	0,117.05	16,371.80
30'	0,990.95	0,125.38	15,807.14
15°	1,023.59	0,133.97	15,280.88
30'	1,056.09	0,142.83	14,788.04
16°	1,088.42	0,151.95	14,419.62
30'	1,120.59	0,161.33	13,891.90
17°	1,152.60	0,170.96	13,476.18
30'	1,184.44	0,180.85	13,098.28

α	$2 \alpha + \sin 2 \alpha$	$1 - \cos 2 \alpha$	$\frac{1}{\sigma}$
18°	1,216.10	0,190.98	12,735.36
30'	1,247.58	0,201.36	12,391.54
19°	1,278.88	0,211.99	12,065.48
30'	1,309.99	0,222.85	11,783.80
20°	1,340.92	0,233.96	11,462.82
30'	1,371.64	0,245.29	11,188.76
21°	1,402.17	0,256.86	10,917.78
30'	1,432.49	0,268.65	10,664.34
22°	1,462.60	0,280.66	10,422.58
30'	1,500.94	0,292.89	10,249.18
23°	1,522.19	0,305.34	9,970.46
30'	1,551.65	0,318.00	9,736.26
24°	1,580.90	0,330.87	9,556.02
30'	1,609.92	0,343.94	9,361.62
25°	1,638.70	0,357.21	9,175.00
30'	1,667.27	0,370.68	8,995.74
26°	1,695.58	0,384.34	8,823.36
30'	1,723.66	0,398.19	8,657.48
27°	1,751.50	0,412.21	8,498.08
30'	1,779.08	0,426.42	8,397.84
28°	1,806.42	0,440.81	8,214.80
30'	1,833.51	0,455.36	8,053.00
29°	1,860.34	0,470.08	7,915.00
30'	1,886.91	0,484.96	7,781.72
30°	1,913.23	0,500.00	7,652.92
30'	1,939.27	0,514.19	7,543.00
31°	1,965.05	0,530.53	7,407.86
30'	1,990.57	0,546.01	7,291.32

α	$2 \alpha + \sin 2 \alpha$	$1 - \cos 2 \alpha$	$\frac{1}{\sigma}$
32°	2,015.80	0,561.63	7,178.40
30'	2,040.77	0,577.38	7,069.06
33°	2,065.47	0,593.26	6,963.10
30'	2,089.87	0,609.27	6,844.56
34°	2,114.00	0,625.39	6,760.52
30'	2,137.85	0,641.63	6,663.70
35°	2,161.42	0,657.98	6,569.86
30'	2,184.70	0,674.43	6,477.38
36°	2,207.69	0,690.98	6,390.02
30'	2,230.39	0,707.63	6,303.82
37°	2,253.80	0,724.36	6,222.86
30'	2,274.92	0,741.18	6,138.64
38°	2,296.75	0,758.08	6,059.38
30'	2,318.27	0,775.05	5,980.22
39°	2,339.50	0,792.09	5,908.56

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE (1)

- ALEXANDER (T.) et THOMSON (A.W.). — Two-nosed catenaries and their application to the design of segmental arches. (*Transactions of the R. Irish Academy*, 1888, vol. XXIX, part. 3, pp. 43-100.)
- AURIC (A.). — Note sur la détermination de la poussée dans les voûtes en maçonnerie. (*A. P. C.*, 1901, 2^e sem., pp. 246-267.)
- L'art de la construction des ponts en maçonnerie. (*Revue du mois*, I, juin 1906, pp. 720-732.)
- Note sur diverses courbes de raccordement. (*A. P. C.*, 1908, 2^e semestre, t. IV, pp. 84-93.)
- *Ponts en maçonnerie* (Calculs et constructions), Paris, 1911.
- BELLIARD (J.-AL.). — Etude comparative au point de vue de la résistance d'un arc de parabole et d'un arc de chaînette de même flèche et de mêmes charges permanentes et mobiles. (*A. P. C.*, n° 40. pp. 415-449, 2^e semestre, t. X, 7^e série, fasc. I.)
- BOSSUT. — Recherche sur l'équilibre des voûtes. (*Mémoires de l'Ancienne Académie des Sciences*, Paris, 1774, pp. 534-566.)
- Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme. (*Mémoires de l'Ancienne Académie des Sciences*, Paris, 1776, pp. 587-596.)

C. R. = Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris).

A.P.C = Annales des Ponts et Chaussées.

- Théorème de géométrie où l'on assigne des portions de voûtes hémisphériques dont la solidité s'exprime par une fonction algébrique. (*Mémoires de l'Institut*, lu le 6 floréal de l'an V, publié t. II, an VII, pp. 226-228.)
- BOUFFET (M.). — Étude sur le calcul des voûtes en maçonnerie et des arcs en général. (*A. P. C.*, 1915, 1^{er} semestre, p. 125.)
- BROCARD (H.). — *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Bar-le-Duc, 1897 et 1899 (2 vol. lithographiés).
- CARVALHO. — Stabilité des voûtes. (*A. P. C.*, 1853, t. I, p. 1.)
- COLLIGNON (Ed.). — Travaux récents relatifs à la théorie des voûtes. (*A. P. C.*, 1876, t. I, p. 539.)
- Note sur la méthode des deux surcharges continues. (*A. P. C.*, n° 24, 7^e série, t. X, 1895, 2^e semestre, pp. 5-77.)
- COUPLET. — De la poussée des voûtes. (*Mémoire de l'Académie royale des Sciences, Paris*, 1731, pp. 79-117 ; *Histoire de l'Académie*, 1731, pp. 75-81.)
- DEBAUVE (A.). — Construction des ponts en maçonnerie (*Manuel de l'Ingénieur des Ponts et Chaussées*, X, Paris, 1873.)
- DENFERT-ROCHEREAU. — Mémoires sur les voûtes en berceau, supportant une surcharge limitée à un plan horizontal. (*Revue d'Architecture*, Paris, 1859.)
- DIEULAFOY. — Notice sur la construction des ponts en Perse. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1883, 2^e sem., pp. 23-48.)
- FONTÈS. — Sur le raccordement bicirculaire de deux droites d'un même plan et, en particulier, sur une anse de panier à trois centres. (*Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, 9^e série, t. IV, 1892, pp. 375-383.)
- EMERY (E.). — Sulla condizione di scambievolezza. (*Atti della R. Accademia*, Torino, t. XXII, 1887, pp. 176-198.)
- GERGONNE (J.D.). — Sur le tracé des voûtes en anse de panier. (*Annales de Mathématiques*, t. XI, 1820-1821, pp. 165-195.) (Article anonyme, mais de Gergonne.)

- GILBERT (D.). — On some properties of the catenarian curve with reference to bridges by suspension. (*Quarterly Journal of Sciences*, t. X, 1821, pp. 230-235.)
- HEINZERLING (F.). — Die Bauwaage und deren Ergebnisse für den Gewölbebau, (*Zeitschrift für Bauwesen*, XIX, 1869, colonnes 89-110.)
- Analytisch-Graphisch construction der Brückengewölbe. (*Ebenda*, XXII, 1872, colonnes 423-448, 559-574.)
- HOUREFAR (Taghi). — *Exposition de recherches de M. E. Turrière sur la théorie des virages dans les routes modernes et étude générale des radioïdes*. (Thèses de la Faculté des Sciences de Montpellier, n° 29, 1^{er} juin 1940.)
- LEBERT (E.). — Etude de courbes pouvant servir au tracé de l'axe neutre des arcs de grandes portées. (*A. P. C.*, 1900, 2^e sem., n° 39, pp. 74-110.)
- LEGAY. — Mémoire sur le tracé et le calcul des voûtes en maçonnerie. (*A. P. C.*, 1900, 2^e semestre., pp. 141-233.)
- LORIA (Gino). — *Curve piane speciali, algebriche e trascendenti* (teoria e storia). (Milano, 2 vol., 1930.)
- MANNHEIM (A.). — Sur le tracé de l'anse de panier. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série. t. XVI, 1897, p. 404-408.
- MATHIEU (E.). — Méthode rapide extrêmement approchée pour le calcul des éléments de la chaînette. (*Revue générale d'Electricité*, 23 sept. 1933, t. XXXIV, pp. 371-373.)
- MONGE (G.). — *Géométrie descriptive*, p. 131.
- OCAGNE (M. D'). — Méthode simple pour le tracé des joints dans les voûtes elliptiques. (*A. P. C.*, 1886, t. II, p. 403.)
- Note sur le tracé des intrados en anse. (*A. P. C.*, 1903, II, p. 296.)
- Sur le tracé pratique de certaines courbes transcendentes utilisables dans la construction des ponts. (*A. P. C.*, 1910, mémoire n° 49, pp. 114-128.)
- PIGEAUD. — Note sur le calcul des arcs encastrés. (*A. P. C.*, 1905, 2^e semestre, pp. 201-231.)

- POINSOT (L.). — *Eléments de statique*, X^e édit., 1861, p. 197.
- RANKINE (M.). — *A manual of applied mechanics*. (Manuel de mécanique appliquée, traduction de A. VIALAY, Paris, 1876.)
- RESAL (H.). — Sur la forme de l'intrados des voûtes en anse de panier. (*C. R.*, t. CXX, 18 février 1895. p. 352-354).
- REVELLAT (J.P.). — Solution analytique du tracé des courbes à plusieurs centres, décrites d'après le procédé géométrique de Perronet. (*C.R.*, t. LXXVII, 11 août 1873, p. 434-439).
- SÉJOURNÉ (P.). — Construction des ponts du Castelet de Lavaur et Antoinette. (*A.P.C.*, 1886, t. II, p. 409).
- *Les grandes voûtes*. (2^e édition en 6 volumes, édité par la librairie des Sciences et des Arts, Paris, 1939.)
- SEVIN (E.). — *Cours de ponts en maçonnerie* (Paris, 1931).
- TEIXEIRA (Gomes). — *Traité des courbes spéciales remarquables*. (Coïmbre, t. I, 1908 ; t. II, 1909 ; t. III, 1915.)
- TOURTAY. — Détermination des pressions réelles dans les voûtes surbaissées en forme de chaînette. (*A. P. C.*, 1888, 1^{er} semestre., pp. 565-636.)
- Note sur la variation de la pression avec l'épaisseur à la clef dans les voûtes. (*A. P. C.*, 1889, 1^{er} semestre, pp. 710-722.)
- Notice sur la construction du pont Boucicaut. (*A. P. C.*, 1892, 2^e semestre, pp. 445-497.)
- Étude sur le calcul des arches surbaissées en maçonnerie. (*Revue de l'architecture et des travaux publics*, 1886.)
- TURRIÈRE (E.). — Sur l'aire d'un segment de courbe convexe. (*Annaes da Academia polytechnica do Porto*, 1916, t. XI, pp. 129-140.)
- Formules canoniques pour les calculs mécaniques des lignes électriques aériennes dans le cas des portées symétriques. (*Revue générale de l'Electricité*, 9 nov. 1935, t. XXXVIII, p. 623.)
- Sur la chaînette élastique et la chaînette hétérogène. (*Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, t. XXII, 1936. p. 5-28).
- Sur les courbes de transition dans les virages. (*Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, 1938, t. XXII, pp. 19-32.)

- Essai sur une théorie générale d'une classe de courbes de transition pour les raccordements progressifs. (*Bulletin de Mathématiques et de Physique appliquées de l'Ecole polytechnique Roi Carol II*, Bucarest, 1938, t. IX, pp. 127-150.)
 - Une nouvelle courbe de transition pour les raccordements progressifs : la radioïde pseudo-elliptique. (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1939, t. LXVII, pp. 62-99.)
 - Courbes de voûtes surbaissées en maçonnerie ou en béton armé. (*Buletinul Societatii politehnice din Romania*, 1939.)
 - Voir HOURFAR (Taghi).
- YVON-VILLARCEAU. — Mémoire sur l'établissement des arches de ponts envisagé au point de vue de la plus grande stabilité. (*C. R.*, 9 nov. 1846, t. XXIII, pp. 1073-1074 ; *C. R.* 26 oct. 1852, t. XXXV, pp. 597-601 ; *Mémoires de l'Institut*, t. XXIII, pp. 503-823 ; *Savants étrangers*, t. XII, 1854.)

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	11
INTRODUCTION	13

PREMIÈRE PARTIE
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE PREMIER. — Les courbes de direction de Laguerre	23
CHAPITRE II. — Les courbes de Ribaucour. — Les paraboliques primaires	28
Equation tangentielle	34
Classification	37
Parabole	39
Cycloïde ordinaire	40
Chaînette	40
Courbe élastique harmonique	41
CHAPITRE III. — Les intrados en chaînette et projection de chaînette.	44
Chaînette projetée ou caténoïde	47
CHAPITRE IV. — La chaînette d'égale résistance	57
CHAPITRE V. — Développante d'astroïde	63
CHAPITRE VI. — Les paraboliques de Lebert	71

CHAPITRE VII. — Les formules pratiques pour les courbes de Ribaucour	75
Fonction surbaissement	83
CHAPITRE VIII. — Les courbes de Ribaucour avec élasticité ou contractilité	85
Propriété statique des courbes de Ribaucour	85
Propriétés générales	88
Addition d'un nombre quelconque de courbes de Ribaucour.	94
CHAPITRE IX. — Chaînette élastique et chaînette contractile	96
CHAPITRE X. — Parabole élastique et parabole contractile	108
CHAPITRE XI. — Cycloïde élastique et cycloïde contractile	115
CHAPITRE XII. — Le rayon moyen de courbure et le rayon de courbure moyenne	122
CHAPITRE XIII. — Formules canoniques pour résoudre les problèmes fondamentaux relatifs aux applications de la chaînette	130
CHAPITRE XIV. — Formule pour le débouché superficiel des ponts.	138
CHAPITRE XV. — Le théorème de Jean Bernouilli et les formules pour la rectification des arches elliptiques	143
Les théorèmes de Jean Bernouilli et de Prouhet sur le périmètre de l'ellipse	148
Formules empiriques pour le périmètre de l'ellipse. Formule de Muir et d'Escott	152
Formule de Peano	153
Formules de Boussinesq	154
Formules de Williot pour le périmètre de l'ellipse	156
Formules de Williot pour la rectification des arcs d'ellipse ...	159
Formules de Soreau	160
Autres formules de rectification de l'ellipse	161
Ouvrages avec intrados elliptiques	163
CHAPITRE XVI — La rectification de la caténoïde	164
Rectification par les fonctions elliptiques de Jacobi	164
Rectification par les fonctions elliptiques de Weierstrass	165
Développement en série de l'arc	166
Rappel de la règle de P Tchebichef pour l'évaluation pratique des intégrales définies	168
Rectification de la caténoïde par la méthode de Tchebichef ...	169

CHAPITRE XVII. — La fonction caténaire	172
Courbes figuratrices de la fonction caténaire	174
CHAPITRE XVIII. — Chaînette osculatrice à une courbe plane ...	178.
Généralisation	181
Application des paraboloïques osculatrices à la rectification des arches	182

DEUXIÈME PARTIE

PARTIE PRATIQUE

CHAPITRE XIX. — Etude du Pont de Verjux, sur la Saône (Pont Boucicaut)	193
La caténoïde de Tourtay	195
Les paraboloïques primaires et le Pont Boucicaut	198
CHAPITRE XX. — Etude du Nouveau Pont d'Orléans de Legay ...	205
Les paraboloïques primaires et le Pont d'Orléans	207
Comparaison aux naissances avec les paraboloïques primaires.	213
CHAPITRE XXI. — La fusion des paraboloïques	216
Les ponts de Laifour et d'Anchamps sur la Meuse. Le pont de la Balme sur le Rhône	219
CHAPITRE XXII. — Les paraboloïques à deux paramètres pour le pont Boucicaut	223
Emploi de l'arc elliptique	225
Emploi de la chaînette contractile	226
Emploi de la parabole contractile	228
Emploi de la cycloïde contractile	228
Emploi de la cycloïde transformée	229
Emploi de la cycloïde symétrique	233
Emploi de la cycloïde proportionnelle de Fermat	236
CHAPITRE XXIII. — Paraboloïques normales pour l'intrados du pont d'Orléans	240
Emploi de la cycloïde contractile	241
Emploi de la chaînette contractile	242
Emploi de la parabole contractile	246
Tableau des résultats numériques pour le Pont Boucicaut ...	249
Tableau des résultats numériques pour le Pont d'Orléans	250

CHAPITRE XXIV. — Le hangar à dirigeables de Montebourg	251
Emploi de la chaînette élastique	252
Emploi de la caténoïde	253
Emploi de la cycloïde hyperbolique proportionnelle	255
CHAPITRE XXV. — Les raccordements dans les courbes d'intrados.	
Le Pont de Valence, sur le Rhône.....	259
La courbe d'intrados	260
Evaluation de l'aire du débouché	267
Normalisation de la paraboloïque du pont de Valence	268
Intrados en parallèle de la chaînette contractile	272
Intrados avec raccordement aux jarrets. Discussion du résultat	273
Tableaux de correspondance des valeurs de σ et de α pour les paraboloïques primaires	277
Tableau des valeurs de α correspondant aux valeurs entières de $\frac{1}{\sigma}$.	278
Tables appendice	280
Bibliographie	289
Table des Matières	295