NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1855.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie, Officier de la Légion d'honneur

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME QUATORZIÈME,

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1855.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

AVIS DE L'ÉDITEUR.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* vont entrer dans leur quatorzième année, et, malgré les sacrifices que nous nous sommes souvent imposés, elles ne sont pas encore, nous devons l'avouer, parvenues à nous donner une juste rémunération. Les *Nouvelles Annales* auraient-elles manqué au but qu'elles se sont proposé, de présenter aux jeunes gens qui se destinent aux Écoles Polytechnique et Normale les solutions des problèmes qui peuvent le plus les intéresser? Nous ne le pensons pas. En effet, les *Annales* ont traité toutes les belles et difficiles questions des anciens examens, et également les questions des nouveaux examens lorsqu'elles présentaient quelque intérêt. On a donné des exercices de calculs numériques, logarithmiques avec une étendue qu'on ne trouve nulle part ailleurs.

Nonobstant la position restreinte faite aux *Nouvelles Annales* par les Programmes officiels, nous allons faire, à partir de janvier 1855, de nouveaux efforts dans l'intérêt de la science.

Chaque mois contiendra en plus une feuille au moins, avec une pagination à part et sous ce titre: *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*, par M. O. Terquem.

Le titre de Bulletin annonce suffisamment l'objet.

L'histoire de la science est celle de l'esprit humain, tandis que les annales de l'homme ne sont le plus souvent qu'un récit perpétuel de nos folies, de nos vices, de nos passions. *Toute la dignité de l'homme est dans la pensée*, selon Pascal. Les Mathématiques sont une pensée continue.

Puissions-nous nous rendre digne de notre nouvelle mission!

Tout ouvrage qui sera adressé à la rédaction sera analysé avec une étendue réglée sur son importance.

En janvier, nous présenterons l'historique de l'établissement des logarithmes depuis l'invention (Neper, Briggs, Vlacq, Justus Byrgius) jusqu'à nos jours (Vega, Leonelli, Gauss, Babbage); ensuite l'histoire de la duplication du cube, les biographies de M. Gauss, d'Abel, de Jacobi, etc. Ce numéro contiendra un travail d'Amoretti, suivi d'une Note biographique sur cet élève qui donnait de si belles espérances.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES, DIAMÈTRES BISSECTEURS;

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Les diamètres dont il est question dans cet article sont, comme pour les lignes du second ordre, des droites divisant en deux parties égales une suite de cordes parallèles entre elles.

On doit entendre expressément cette définition dans ce sens, que, si d'un point quelconque de la courbe on mène une droite jusqu'au diamètre, parallèlement aux cordes qu'il divise en parties égales ou qui lui sont *conjuguées*, et que l'on prolonge cette droite d'une quantité égale à sa longueur, le point ainsi obtenu appartient à la courbe (*).

THÉORÈME I. *Quand l'équation d'une courbe est irréductible, aucune de ses branches ne peut avoir un diamètre qui ne soit pas un diamètre général.*

S'il existe un diamètre particulier, divisant les cordes d'une branche de la courbe, mais non de la courbe entière, en deux parties égales, on pourra le prendre pour axe des x, et prendre pour axe des y une parallèle aux cordes conjuguées. Soit alors

$$F(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, sous forme rationnelle et entière,

(*) Ces recherches se confondent, en quelques points, avec celles que renferme le Mémoire posthume de Wantzel, inséré dans le *Journal* de M. Liouville, tome XIV, page 111. Cette publication est trop récente pour qu'il soit nécessaire de signaler ici ce qui appartient à ce géomètre.

Il faut que, pour chaque valeur de x,

$$F(x, y) = o$$

donne deux valeurs au moins de y égales et de signes contraires, et d'autres ayant entre elles des relations différentes ; en d'autres termes, $F(x,y)$ doit contenir à la fois des puissances impaires et des puissances paires de y. Par conséquent, si l'on change le signe de y, l'équation

$$F(x, -y) = o$$

donnera pour y un certain nombre de valeurs comprises parmi celles déduites de $F(x, y) = o$, et d'autres qui leur seront étrangères. Il y aura donc un commun diviseur entre $F(x, y)$ et $F(x, -y)$, et ce diviseur sera nécessairement d'un degré moindre que celui de l'équation proposée. D'après le procédé connu qui sert à l'obtenir, ce diviseur ne pourra qu'être entier en x, y, de sorte que l'on aura

$$F(x, y) = \varphi(x, y) \times \psi(x, y),$$

$\varphi(x,y)$ étant le diviseur en question, et $\psi(x, y)$ le quotient de la division de $F(x, y)$ par $\varphi(x,y)$. On pourrait donc décomposer la courbe proposée en deux autres ayant pour équations

$$\varphi(x, y) = o, \qquad \psi(x, y) = o.$$

Or nous avons supposé $F(x,y)$ irréductible : donc il est impossible que la courbe qui a pour équation

$$F(x, y) = o,$$

ait un diamètre qui soit particulier, par exemple, à une de ses branches et étranger aux autres.

Scholie. En général, on ne peut supposer, entre quelques-unes des valeurs de y qui satisfont à une équation irréductible $F(x, y) = o$, une relation qui ne soit pas commune à toutes ces valeurs. Soit en effet, s'il est possible, $f(y_1, y_2) = 0$ une telle relation sous forme rationnelle et entière. Comme on a en même temps

$$F(x, y_2) = 0,$$

si l'on élimine y_2 entre cette équation et la précédente, l'équation finale obtenue entre x et y_1 aura un certain nombre de racines communes avec $F(x_1, y_1) = 0$, et *non toutes*, puisque, par hypothèse, la relation

$$f(y, y_2) = 0$$

est restreinte à certaines valeurs de y. Donc il y aura entre les premiers membres de ces deux équations un commun diviseur de degré moindre que celui de $F(x, y)$; donc $F(x, y)$ ne serait pas irréductible, contrairement à l'hypothèse. C'est ainsi, par exemple, qu'il n'existe aucune courbe à équation irréductible, dans laquelle une suite de cordes parallèles soient divisées par une ligne droite en segments ayant entre eux un rapport constant autre que l'unité.

THÉORÈME II. *Il ne peut y avoir, pour chaque diamètre d'une courbe algébrique à équation irréductible, qu'un seul système de cordes conjuguées à ce diamètre.*

Soit, s'il est possible, m_1 le point d'une courbe possédant un diamètre conjugué à la fois à deux systèmes de cordes affectant des directions différentes, et $m_1 m_2$ la corde appartenant à l'un de ces systèmes. Construisons la corde $m_2 m_3$ appartenant au second système, puis les cordes $m_3 m_4$, $m_4 m_5$, $m_5 m_6$, tour à tour dans l'un et dans l'autre système. On aura ainsi une ligne brisée indéfinie, et les points m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, etc., seront sur deux droites parallèles au diamètre. Or il est évident, par cette construction, que le nombre des points que l'on peut ainsi obtenir est infini, de sorte que la courbe serait coupée par deux droites en un nombre infini de points. Ce qui ne saurait avoir lieu pour une courbe algébrique, à moins que ces deux droites n'en fassent partie, auquel cas l'équation de la courbe serait décomposable contrairement à l'hypothèse; donc, etc.

Théorème III. *Une courbe algébrique à équation irréductible qui a deux diamètres non conjugués en a nécessairement un troisième.*

Soient OD$'$, OD$''$ les deux diamètres supposés et m_1 un point quelconque de la courbe. Ayant construit les points m_2, m_3 sur les cordes $m_1 m_2$, $m_1 m_3$ conjuguées respectivement à OD$'$, OD$''$, et ensuite au moyen de m_2 le point m_4, sur la corde $m_2 m_4$, parallèle à $m_1 m_3$, ou conjuguée à OD$''$, je dis que la droite OD$'''$, qui divise $m_3 m_4$ en deux parties égales, est un nouveau diamètre de la courbe.

En effet, par cette construction, la figure $m_1 m_2 m_3 m_4$ est un trapèze, dont les côtés parallèles $m_1 m_3$, $m_2 m_4$ ont leurs milieux sur la droite OD$''$. Il suit de là que, de part et d'autre de ce diamètre, à l'inclinaison près des cordes qui lui sont conjuguées, tout est symétrique. Donc les cordes telles que $m_3 m_4$, qui répondent à un système de cordes parallèles, conjuguées à OD$'$, sont aussi parallèles entre elles; et, de ce que les milieux des unes sont en ligne droite, on en conclut que les milieux des autres sont également sur une ligne droite, laquelle coupe OD$''$ au même point que OD$'$ et, par conséquent, passe en O.

Il est évident que OD$'''$ ne peut être le prolongement de OD$''$; il ne peut l'être non plus de OD$'$, car les cordes $m_1 m_2$, $m_3 m_4$ n'étant point parallèles, puisque les diamètres OD$'$, OD$''$ sont supposés non conjugués entre eux, il faudrait admettre que la droite D$'$ D$'''$ est conjuguée à deux systèmes de cordes de directions différentes, ce qui ne saurait être, d'après le théorème qui précède.

Remarque. On ne peut pas supposer que les cordes conjuguées à deux diamètres différents soient de même direction, ou, ce qui revient au même, qu'à un système de cordes parallèles puissent répondre deux diamètres distincts. Il est facile de voir qu'autrement il y aurait sur chaque corde un nombre infini de points appartenant à la courbe, ce qui ne peut avoir lieu pour une courbe algébrique.

Théorème IV. *Une courbe algébrique à équation irréductible ne peut avoir deux diamètres parallèles entre eux.*

Il faut excepter la parabole qui a une infinité de diamètres parallèles entre eux, et la ligne droite qui en est un cas particulier.

Cela posé, soient, s'il est possible, $d'D'$, $d''D''$ deux diamètres parallèles d'une courbe algébrique; il y en aura un troisième $d'''D'''$, que l'on obtiendra par une construction toute semblable à celle qui nous a servi dans le théorème III. On en trouvera de la même manière un quatrième, puis un cinquième, etc., et tous seront parallèles entre eux. Or il résulte de ce mode de construction que si l'on fait passer par le point m_1 de la courbe et par les points m_2, m_3 qui s'en déduisent, une parabole ayant son axe parallèle aux diamètres dont il s'agit, tous les autres points en nombre infini, tels que m_4, qu'on peut obtenir, de proche en proche, au moyen du point de départ m_1 et des divers diamètres, appartiendront à cette parabole, qui couperait ainsi une courbe algébrique en un nombre infini de points, ce qui ne saurait avoir lieu, à moins que la parabole ne fasse partie de la courbe ellemême. Mais alors l'équation de celles-ci serait décomposable, contrairement à l'hypothèse; donc, etc.

Théorème V. *Les points d'une courbe algébrique à équation irréductible que l'on peut construire au moyen d'un de ses points et de ses diamètres, sont toujours sur une ellipse, et jamais sur une hyperbole.*

On doit excepter de cet énoncé le cas où la courbe n'a que deux diamètres, lesquels sont nécessairement conjugués entre eux.

Nous avons vu, par le théorème III, comment deux diamètres OD', OD'' d'une courbe étant connus, ainsi que les directions des cordes qui leur sont respectivement conjuguées, on peut, au moyen d'un point m_1, construire de nouveaux points m_2, m_3, m_4, puis un troisième diamètre OD'''. Rien n'empêche de continuer la même construction au moyen des diamètres OD'', OD''' et du point m_3, et de déterminer ainsi d'autres points et d'autres diamètres. Il est toujours possible de faire passer par les trois points m_1, m_2, m_3 une section conique dont le point O soit le centre. Or, par la nature même des constructions que l'on vient de rappeler, les points m_4, m_5, etc., appartiennent évidemment à cette section conique, je dis maintenant que celle-ci ne peut être qu'une ellipse.

Admettons en effet, pour un instant, que cette courbe soit une hyperbole, et que les points m_1, m_2, m_3 soient situés sur la même branche. Il en sera de même de m_4, obtenu en conjuguant $m_1\,m_4$ à OD''; de m_5 obtenu en conjuguant $m_2\,m_5$ à OD''', etc. On resterait donc ainsi sur la même branche, laquelle rencontrerait la courbe proposée en un nombre infini de points, ce qui ne saurait avoir lieu, cette courbe étant algébrique, à moins toutefois que l'hyperbole n'en fasse partie. Mais alors son équation serait décomposable, contrairement à l'hypothèse.

Si l'un des trois points m_1, m_2, m_3 ne se trouvait pas sur la même branche que les deux autres, on trouverait facilement deux diamètres de la courbe rencontrant l'hyperbole, et l'on serait ramené au cas précédent.

Donc il est impossible que la section conique qui a pour centre le point O, et qui passe par les points m_1, m_2, m_3 soit une hyperbole; donc elle ne peut être qu'une ellipse.

Théorème VI. *L'ensemble de tous les diamètres d'une courbe algébrique à équation irréductible forme une rosette elliptique.*

Bien qu'il ne soit pas encore établi que les diamètres déterminés en vertu des théorèmes précédents, et se coupant en un même point, forment l'*ensemble de tous les diamètres de la courbe*, j'admettrai provisoirement cette proposition, qui sera démontrée plus loin.

Cette réserve faite, on remarquera qu'il est permis, sans diminuer la généralité du théorème qui nous occupe, de supposer les deux diamètres OD$'$, OD$''$ choisis de telle manière qu'il ne s'en trouve aucun autre entre eux.

Les secteurs $m_1 O m_2$, $m_2 O m_3$, $m_3 O m_4$ formés par les rayons menés du centre aux points m_1, m_2, m_3, etc., dans l'ellipse, que, d'après le théorème précédent, on peut toujours faire passer par ces points, sont divisés respectivement en deux parties équivalentes par les diamètres OD$'$, OD$''$, OD$'''$, etc., qui passent par les milieux des cordes $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_4$, etc. Le secteur $m_1 O m_4$ étant de même divisé en deux parties équivalentes par le diamètre OD$''$ qui passe par le milieu de $m_1 m_4$, on en conclut que les secteurs compris dans les angles D$'$OD$''$, D$''$OD$'''$ sont équivalents entre eux. Il résulte de là que le secteur déterminé par les deux diamètres consécutifs OD$'$, OD$''$ est nécessairement une partie aliquote de l'aire de la demi-ellipse. S'il en était autrement, l'un des diamètres obtenus en formant une suite de secteurs équivalents, ou son prolongement, tomberait dans l'angle D$'$OD$''$, contrairement à l'hypothèse. Donc l'ensemble des diamètres divise l'ellipse en secteurs équivalents, ce qui est la définition même de la *rosette elliptique*.

Théorème VII. *Une courbe de l'ordre* n *à équation irréductible ne peut avoir plus de* n *diamètres.*

Car, d'après le théorème qui vient d'être démontré, le nombre des points d'intersection de la courbe avec l'ellipse $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$, est égal à deux fois le nombre des diamètres. Si ce dernier surpassait n, le nombre des intersections surpasserait m. Or une ligne de l'ordre n ne peut être rencontrée en plus de $2n$ points par une ligne du second ordre; donc, etc.

Remarque. Une ligne d'ordre impair à équation irréductible ne peut avoir un nombre pair de diamètres, mais une ligne d'ordre pair peut en avoir un nombre impair.

En effet, quand les diamètres sont en nombre pair, ils peuvent se combiner deux à deux comme les diamètres conjugués d'une ellipse, ainsi qu'on le voit par le théorème VI. Si l'on rapporte la courbe à l'un de ces systèmes, toutes les puissances impaires de chacune des coordonnées doivent disparaître, et il ne peut rester qu'une équation de degré pair.

Pour démontrer que la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'une ligne d'ordre pair peut avoir un nombre impair de diamètres, il suffit d'un exemple. Prenons l'équation polaire $\rho = \cos 3\omega$, qui appartient à une courbe à trois axes. Faisant

$$\cos\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\omega = \frac{y}{\rho} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

il vient, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3xy^2,$$

équation du quatrième degré.

Théorème VIII. *Une courbe algébrique à plusieurs diamètres est toujours la projection orthogonale d'une courbe ayant le même nombre d'axes.*

C'est une conséquence intuitive du théorème VI.

Corollaire. Appelons a, b, les longueurs des demi-axes principaux de l'ellipse $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$, et soit

$$F(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, rapportée au centre et aux axes de cette ellipse. Si l'on pose

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \qquad \text{ou} \qquad x = ax', \quad y = by',$$

la transformée $F(ax', by') = 0$ n'aura plus que des axes. Si l'on fait ensuite $x' = \rho \cos\omega$, $y' = \rho \sin\omega$, on aura l'équation polaire $F(a\rho \cos\omega, b\rho \sin\omega) = 0$ de la transformée. Cette équation jouit d'une propriété remarquable, définie par l'énoncé suivant.

Théorème IX. *L'équation polaire*

$$F(a\rho \cos\omega, \; b\rho \sin\omega) = 0$$

peut toujours être mise sous la forme

$$f(\rho, \cos\varpi\omega, \sin\varpi\omega) = 0,$$

f désignant une fonction rationnelle et entière.

Car cette équation est de telle nature, que, si l'on y change successivement ω en

$$\omega + \frac{2\pi}{\varpi}, \quad \omega + 2.\frac{2\pi}{\varpi}, \quad \omega + 3.\frac{2\pi}{\varpi}, \ldots, \quad \omega + (\varpi - 1)\frac{2\pi}{\varpi},$$

elle n'éprouve aucun changement de forme. Appelons F_1, F_2, F_3,..., $F_{\varpi-1}$, les résultats de ces substitutions: on pourra en conséquence prendre pour équation de la courbe l'équation

$$F + F_1 + F_2 + \ldots + F_{\varpi-1} = 0.$$

Or on sait que les fonctions ainsi composées, lorsque l'on remplace les puissances de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$ par leurs expressions connues en fonction des sinus et cosinus des multiples de ω, ne peuvent contenir que ceux de ces multiples qui renferment le facteur ϖ, les autres disparaissant; donc, etc.

Corollaire. Pour reconnaître si une courbe, donnée par son équation

$$F(x, y) = 0$$

rapportée à des axes quelconques, admet un groupe de ϖ diamètres se coupant en un même point, il faut changer d'axes en s'imposant la condition que l'équation nouvelle soit de la forme indiquée ci-dessus, ce qui revient à poser

$$x = \xi + \frac{\rho}{\sin\theta}[a\sin(\theta-\varphi)\cos\omega - b\cos(\theta-\varphi)\sin\omega],$$

$$y = \eta + \frac{\rho}{\sin\theta}(a\sin\varphi\cos\omega + b\cos\varphi\sin\omega];$$

ξ, η sont les coordonnées de la nouvelle origine, θ désigne l'angle des axes, et φ est l'angle formé par la ligne polaire avec l'axe des x. Faisons, pour abréger,

$$p = [a\sin(\theta-\varphi)\cos\omega - b\cos(\theta-\varphi)\sin\omega],$$
$$q = [a\sin\varphi\cos\omega + b\cos\varphi\sin\omega],$$

de sorte que l'on ait

$$x = \xi + \frac{p\rho}{\sin\theta}, \quad y = \eta + \frac{q\rho}{\sin\theta},$$

la substitution de ces valeurs dans $F(x, y) = 0$ donnera

$$0 = F(\xi,\eta) + \left. \begin{array}{l} p\dfrac{dF(\xi,\eta)}{d\xi} \\ + q\dfrac{dF(\xi,\eta)}{d\eta} \end{array} \right| \frac{\rho}{\sin\theta} + \left. \begin{array}{l} p^2\dfrac{d^2F(\xi,\eta)}{d\zeta^2} \\ + 2pq\dfrac{d^2F(\xi,\eta)}{d\xi\, d\eta} \\ + q^2\dfrac{d^2F(\xi,\eta)}{d\eta^2} \end{array} \right| \frac{\rho^2}{1.2.\sin\theta^2} + \ldots$$

ce développement procède suivant les puissances ascendantes de ρ, et son terme général peut s'écrire sous la forme symbolique

$$\left[p\frac{dF(\xi,\eta)}{d\xi} + q\frac{dF(\xi,\eta)}{d\eta}\right]^i \frac{\rho^i}{1.2.3\ldots i\sin\theta^i}.$$

Il faut disposer de ξ, η, a, b, φ de manière que les coefficients des diverses puissances de ρ se réduisent à des fonctions rationnelles et entières de $\sin \varpi\omega$, $\cos \varpi\omega$, ce que l'on fera en égalant à zéro tous les termes de ces coefficients qui ne satisfont pas à cette condition. S'il existe un groupe de ϖ diamètres, toutes ces équations admettront une solution commune, et nous verrons bientôt qu'elles n'en pourront admettre qu'une seule.

On aura toujours, dans le cas de plusieurs diamètres, quel que soit ω,

$$p\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}+q\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\eta}=0,$$

ou, en remettant pour p et q leurs valeurs,

$$a\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}\sin(\theta-\varphi)+\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\eta}\sin\varphi\right]\cos\omega$$

$$-b\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}\cos(\theta-\varphi)-\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\eta}\cos\varphi\right]\sin\omega=0.$$

Cette équation devant être satisfaite quelque valeur que l'on attribue à ω, il faut que les coefficients de $\sin\omega$ et de $\cos\omega$ soient nuls séparément, ce qui donne, en développant $\sin(\theta-\varphi)$ et $\cos(\theta-\varphi)$ et supprimant les facteurs a et b qui ne peuvent être nuls,

$$\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}\sin\theta=\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}\cos\theta-\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\eta}\right]\operatorname{tang}\varphi$$

$$\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}\sin\theta\operatorname{tang}\varphi=-\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}\cos\theta-\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\eta}\right];$$

multipliant membre à membre, il vient

$$\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}\right]^2\sin^2\theta+\left[\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}\cos\theta-\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\eta}\right]^2=0,$$

en supposant que l'on ait reconnu que l'angle φ n'est pas nul, ce qui exige des essais préalables faciles à imaginer. Cette dernière équation se partage en deux autres, savoir :

$$\frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\xi}=0,\qquad \frac{d\mathrm{F}(\xi,\eta)}{d\eta}=0.$$

D'où l'on conclut que *les coordonnées* ξ, η *des points où peuvent se couper plusieurs diamètres sont celles qui satisfont à la fois aux équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées par rapport à* x *et par rapport à* y *du premier membre de l'équation proposée*

$$\mathrm{F}(x,y)=0.$$

THÉORÈME X. *Tous les diamètres d'une courbe algébrique à équation irréductible se coupent nécessairement en un même point.*

Supposons, s'il est possible, un triangle formé par trois diamètres, et admettons, ce qui est évidemment permis, que ce triangle ne soit traversé par aucun autre diamètre. Au moyen de la direction des cordes conjuguées à chacun d'entre eux, on répétera d'un de ses côtés à l'autre, non-seulement la courbe, mais aussi les deux autres diamètres, en formant de nouveaux triangles de même surface que le premier, et les côtés de ces triangles seront eux-mêmes des diamètres. Par une construction semblable, poursuivie de proche en proche sur le périmètre du polygone ainsi obtenu, on formera un réseau de ces triangles, lesquels devront se juxtaposer, car si cette condition n'était pas remplie, et que l'un en couvrît un autre partiellement, ce dernier serait traversé par un diamètre, et en revenant, par une voie inverse, au triangle primitif, ce diamètre s'y trouverait répété, et traverserait par conséquent ce triangle, contrairement à l'hypothèse. Le réseau, considéré dans toute son étendue, couvrira donc entièrement le plan de la courbe, et le divisera en triangles de même surface. De plus, chaque côté ou diamètre prolongé sera rencontré par tous les autres, puisque deux diamètres ne peuvent être parallèles entre eux, et le nombre de ces rencontres, pour un même diamètre, sera infini, puisque n étant l'ordre de la courbe, il ne peut jamais arriver, d'après le théorème VII, que plus de n diamètres se coupent en un même point.

On a démontré dans le corollaire du théorème précédent, que $F(x, y) = 0$, étant l'équation de la courbe, les points d'intersection des diamètres sont donnés par les équations

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = 0, \qquad \frac{dF(x, y)}{dy} = 0;$$

d'où il suit que les lieux géométriques qui expriment chacune d'elles passent par tous les points de rencontre des diamètres. Ces lieux sont ainsi coupés en un nombre infini de points par toute droite faisant partie du réseau, et cela ne peut être qu'autant que les premiers membres des équations ci-dessus ont pour facteurs les trinômes du premier degré, lesquels étant égalés à zéro donnent les diamètres. Ceux-ci étant en nombre infini, il en est de même de ces facteurs, de sorte que le degré des équations ci-dessus, et par conséquent celui de l'équation proposée, ne sauraient être finis; donc, etc.

Waring a énoncé (*Proprietates algebraïcarum curvarum*, in-4, 1772; théorème VI, p. 13) plusieurs propositions sur les diamètres bissecteurs, et entre autres celle-ci: *Quand le degré* n *de l'équation d'une courbe algébrique est un nombre* premier, *cette courbe a* n *diamètres, ou n'en a qu'un, ou n'en a pas du tout.* « *Si modo* n *est primus numerus, tum habet unam vel* n *diametros vel nullam omnis algebraïca curva.* » Proposition fausse. Par exemple, l'équation

$$(x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2) = 1,$$

qui est du *cinquième degré*, revient à $\rho^5 \cos 3\omega = 1$ et représente conséquemment une courbe à *trois* diamètres.

SUR LES QUESTIONS 241 ET 141;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

Question 241. — Théorème d'Euler démontré par M. Loxhay. (*Nouvelles Annales*, tome XI, page 424).

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots,\ A_r$$

sont les termes d'une série récurrente; si l'on a

$$A_{r+2} = a\,A_{r+1} + b\,A_r,$$

on a aussi

$$\frac{A_{r+1}^2 - a\,A_r\,A_{r+1} + b\,A_r^2}{b^r} = \text{const.}$$

Théorème plus général. En supposant

$$A_{r+s} = a_1 A_{r+s-1} + a_2 A_{r+s-2} + \ldots + a_s A_r,$$

on a

$$\frac{1}{a_s^r}\begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \ldots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \ldots & A_{r+s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} \ldots & A_{r+2s-2} \end{vmatrix} = \text{const.}$$

En effet, en substituant au lieu des éléments de la dernière ligne de ce déterminant les valeurs données par l'équation caractéristique, on a :

$$\begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \ldots A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \ldots A_{r+s} \\ \ldots & \ldots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} \ldots A_{r+2s-2} \end{vmatrix} = (-1)^{(s-1)} a_s \begin{vmatrix} A_{r-1} & A_r \ldots & A_{r+s-2} \\ A_r & A_{r+1} \ldots & A_{r+s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r+s-2} & A_{r+s-1} \ldots & A_{r+2s-3} \end{vmatrix}.$$

et, par conséquent (*) :

$$\begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \ldots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_r \ldots & A_{r+s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} \ldots & A_{r+2s-2} \end{vmatrix} = (-1)^{r(s-1)} a_s^r \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \ldots & A_{s-1} \\ A_1 & A_2 \ldots & A_s \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{s-1} & A_s \ldots & A_{2s-2} \end{vmatrix}.$$

(*) Tous les a, à l'exception de a_s, s'en vont; ensuite on passe de A_{r-1} à A_{r-2}, de là à A_{r-3}, etc.

Si, dans le premier membre de cette équation, on met pour A_{r+s}, A_{r+s+1} etc., leurs valeurs données par l'équation caractéristique, on a

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_{r+s-1}) = a_s^r . \text{ const.}$$

La question 141 (t. VI, p. 134) est un théorème énoncé par Fourier (*). M. Tardy (**) pense qu'il s'est glissé quelque erreur dans ce qu'avance Fourier à propos de l'application du même théorème à la recherche des racines d'une équation par l'emploi des séries récurrentes. Je suis conduit à partager l'opinion de mon savant ami en m'appuyant sur les considérations suivantes.

Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée; soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses racines; je suppose

$$(1) \qquad A_r = \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}},$$

et je considère les deux séries récurrentes

$$L_0,\ L_1, \ldots,\ L_r, \ldots, \qquad M_0,\ M_1, \ldots,\ M_r, \ldots,$$

dans lesquelles

$$L_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \\ A_{r+2} & A_{r+3} \end{vmatrix}, \qquad M_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \end{vmatrix}.$$

En substituant pour A_r, A_{r+1}, etc., les valeurs données par l'équation (1), on a

$$L_r = \begin{vmatrix} \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}}, & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+2}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+3}}, & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+4}} \end{vmatrix} = \sum_s \sum_t \frac{c_s c_t}{(x_s x_t)^{r+1}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x_t} \\ \frac{1}{x_s^2} & \frac{1}{x_t^3} \end{vmatrix},$$

(*) *Analyse des équations déterminées*, Exposé synoptique, p. 72.
(**) *Nouvelles Annales*, janvier 1854.

c'est-à-dire,

$$L_r = \sum_s \sum_t \frac{c_s\, c_t}{(x_s\, x_t)^{r+3}} \cdot \frac{1}{x_t} (x_t^2 - x_s^2),$$

et analoguement,

$$M_r = \sum_s \sum_t \frac{c_s\, c_t}{(x_s\, x_t)^{r+2}} \cdot \frac{1}{x_t} (x_t - x_s).$$

J'observe que les séries des quotients $\frac{L_r}{L_{r-1}}$, $\frac{M_r}{M_{r-1}}$ ne peuvent avoir pour limites que le produit $x_s\, x_t$ des deux premières racines de la proposée; et cela est contraire à ce qu'avance Fourier à propos de la première série $\frac{L_r}{L_{r-1}}$.

Mais nous pouvons former une autre série de termes de la forme $\frac{L_r}{M_{r+1}}$, qui évidemment a pour limite la somme $x_s + x_t$ des deux premières racines.

Pour déterminer les trois premières racines on pourra former trois séries récurrentes :

$L_0, L_1, \ldots, L_r, \ldots$; $M_0, M_1, \ldots, M_r, \ldots$; $N_0, N_1, \ldots, N_r, \ldots$,

en posant

$$L_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_{r+3} & A_{r+4} & A_{r+5} \\ A_{r+2} & A_{r+3} & A_{r+4} \end{vmatrix}, \qquad M_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_{r+1} & A_{r+2} & A_{r+3} \\ A_{r+3} & A_{r+4} & A_{r+5} \end{vmatrix},$$

$$N_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_{r+1} & A_{r+2} & A_{r+3} \\ A_{r+2} & A_{r+3} & A_{r+4} \end{vmatrix}.$$

En effet, on a

$$L_r = \begin{vmatrix} \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}} & \sum \frac{c_t}{x_t^{r+2}} & \sum_i \frac{c_i}{x_i^{r+3}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+4}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+5}} & \sum_i \frac{c_i}{x_i^{r+6}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+3}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+4}} & \sum_i \frac{c_i}{x_i^{r+5}} \end{vmatrix},$$

ou

$$L_r = \sum_s \sum_t \sum_i \frac{c_s c_t c_i}{(x_s x_t x_i)^{r+4}} \cdot \frac{1}{x_t x_i^2} \begin{vmatrix} x_s^3 & x_t^3 & x_i^3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_s & x_t & x_i \end{vmatrix},$$

ou bien

$$L_r = -\sum_s \sum_t \sum_i \frac{c_s\ c_t\ c_i}{(x_s\ x_t\ x_i)^{r+4}} \cdot \frac{\Delta (x_s + x_t + x_i)}{x_t . x_i^2};$$

et analoguement

$$M_r = \sum_s \sum_t \sum_i \frac{c_s\ c_t\ c_i}{(x_s\ x_t\ x_i)^{r+4}} \cdot \frac{\Delta (x_s x_t + x_s x_i + x_t x_i)}{x_t . x_i^2},$$

$$N_r = \sum_s \sum_t \sum_i \frac{c_s c_t c_i}{(x_s x_t x_i)^{r+3}} \cdot \frac{\Delta}{x_t x_i^2},$$

ayant posé

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_s^2 & x_t^2 & x_i^2 \\ x_s & x_t & x_i \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les trois séries composées des quotients $\frac{L_r}{L_{r-1}}$, $\frac{M_r}{M_{r-1}}$, $\frac{N_r}{N_{r-1}}$ ne peuvent donner que le produit $x_s\ x_t\ x_i$; mais les deux séries $\frac{L_r}{N_{r+1}}$, $\frac{M_r}{N_{r+1}}$ peuvent donner la somme $x_s + x_t + x_i$ des trois premières racines, et la somme des produits deux à deux $x_s\ x_t + x_s\ x_i + x_t\ x_i$.

Quoique, pour l'application des séries récurrentes à la recherche des racines selon les vues de Fourier, il n'y ait besoin que des séries qui donnent les sommes et les produits des racines; cependant je vais donner le moyen de former aussi les autres séries en considérant s racines. Je nomme $L_{r,1}$, $L_{r,2}, \ldots, L_{r,s}$ les termes généraux de ces séries récurrentes, et je pose

$$L_{r,s} = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \ldots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \ldots & A_{r+s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} \ldots & A_{r+2s-2} \end{vmatrix}.$$

On obtient $L_{r,1}$ en substituant aux éléments de la seconde ligne de $L_{r,s}$ les éléments suivants :

$$A_{r+s},\ A'_{r+s+1},\ldots,\ A_{r+2s-1}\,;$$

de même on obtient $L_{r,2}$ en substituant aux éléments de la troisième ligne de $L_{r,s}$ ces dernières quantités, et ainsi de suite. Les séries des quotients

$$\frac{L_{r,1}}{L_{r,s}},\ \frac{L_{r,2}}{L_{r,s}},\ldots,\ \frac{L_{r,s-1}}{L_{r,s}},$$

donnent la somme des racines, la somme des produits deux à deux, la somme des produits à $s-1$ à $s-1$, et chacune des séries $\frac{L_{r,1}}{L_{r-1,1}}$, $\frac{L_{r,2}}{L_{r-1,2}}$, etc., donnera le produit des racines.

L'exposé synoptique des recherches de Fourier sur l'application des séries récurrentes à la résolution des équations se termine par ces paroles : « *Au reste, nous ne pensons point que l'on parvienne assez promptement par cette voie à la connaissance des racines. Les exemples cités par Euler sont ingénieusement choisis, mais ce mode d'approximation exige en général trop de calculs. Nous ne considérons donc cette question que sous les rapports théoriques.* » C'est pour cela que je crois inutile d'entrer en de plus longs détails.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LEXELL;

PAR M. LEBESGUE.

---

1. *Lemme.* Étant donnés sur une sphère deux cercles parallèles, situés de part et d'autre et à distances égales de l'équateur, les arcs de grands cercles interceptés entre

ces parallèles sont coupés en parties égales par l'équateur.

2. *Lemme.* Si l'on prend sur le premier parallèle un arc ab, et sur le second un arc $a'b'$ égal à ab et que l'on joigne les points a, a', b, b' par des arcs de grands cercles aa' bb', ces arcs sont égaux; les diagonales ab', ba' sont égales et se coupent mutuellement en parties égales, sur l'équateur; les triangles $aa'b$, $ba'b'$ sont égaux, et chacun est la moitié du quadrilatère sphérique $aba'b'$; de même les triangles $aa'b'$, abb'.

Observation. Le quadrilatère sphérique $a'b'ab$ a des propriétés analogues à celles du parallélogramme plan; nous le désignerons par le nom de *parallélogramme sphérique.*

3. *Théorème de Lexell.* Prenons sur le premier parallèle un arc cd égal à l'arc ab, et menons les arcs de grand cercle $a'c$, $b'd$; on aura un second parallélogramme sphérique $a'b'cd$; et on démontre, comme dans la géométrie plane, que le parallélogramme $a'b'cd$ est équivalent au parallélogramme $a'b'ab$; et, par conséquent, le triangle $a'b'c$, moitié du second parallélogramme, est équivalent au triangle $a'b'a$, moitié du premier parallélogramme.

Si par les points a', b' nous menons un arc de grand cercle $a'mb'$, il est évident que les deux triangles sphériques ayant pour base $a'mb'$ et leurs sommets en a et c sont équivalents. Il en est de même pour tous les triangles qui ont pour base $a'mb'$ et leurs sommets sur le parallèle $abcd$. C'est le théorème de Lexell (*voir* t. V, p. 22).

Note du Rédacteur. On trouve le théorème de Lexell dans les *Éléments de Géométrie* de M. Catalan (liv. VII, probl. VII).

4. Il est évident que le théorème subsiste pour les points correspondants a, a', b, b' de courbes quelconques, mais déterminées par *deux points*, par exemple, des lignes

loxodromiques; il subsiste aussi pour toutes les surfaces de révolution qui ont un équateur, en prenant toujours les parallèles à égale distance de l'équateur; les triangles ont pour côtés des lignes loxodromiques ou géodésiques.

5. Dans tous les triangles sphériques équivalents, la somme des angles est la même. Donc, si l'on fait la projection stéréographique de tous les triangles équivalents $a'b'a$, $a'b'b$, $a'b'c$, $a'b'd$, etc., on aura dans un même plan des triangles formés par des arcs de cercles, dans lesquels la somme des angles est constante, qui ont une base commune et dont les sommets sont sur une même circonférence.

DEUX THÉORÈMES DE M. BORCHARDT

Sur les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et sur les rayons de courbure principaux des surfaces.

Fonctions symétriques.

Soit l'équation algébrique

$$0 = \varphi(x) = x^n - A x^{n-1} + \ldots +$$

racines $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$;

la fonction symétrique $\sum a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_i^{\alpha_i}$ est le coefficient du terme $x_1^{-(\alpha_1+1)} x_2^{-(\alpha_2+1)} \ldots x_i^{-(\alpha_i+1)}$ dans le développement, suivant des puissances décroissantes, de l'expression suivante :

$$\frac{\Sigma \pm \varphi'(x_1)[x_2\varphi'(x_2)-\varphi(x_2)][x_3^2\varphi'(x_3)-2x_3\varphi(x_3)][x_4^3\varphi'(x_4)-3x_4\varphi(x_4)]\ldots[x_i^{i-1}\varphi'(x_i)-(i-1)\varphi(x_i)]}{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_i).(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_i-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})}.$$

On voit que ce théorème est une extension du théorème dont on se sert ordinairement pour trouver la somme de la fonction symétrique $a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m$, somme qu'on obtient en développant $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$.

Rayons de courbure principaux.

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface et soient

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\delta f}{dz};$$

de sorte que $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Cela posé, faisons

$$x_1 = x - p\xi, \quad y_1 = y - p\eta, \quad z_1 = z - p\zeta;$$

p désignant une quantité indépendante de x, y, z; formons le déterminant

$$\sum \pm \frac{dx_1}{dx}\frac{dy_1}{dy}\frac{dz_1}{dz}.$$

Ce déterminant, égalé à zéro, donne une équation du second degré en p; car le terme p^3 est multiplié par le déterminant $\sum \pm \frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}$, qui s'évanouit d'après un principe général pour tout déterminant dans lequel les n fonctions de n variables dont on considère les coefficients différentiels du *premier ordre* ne sont pas indépendantes. Or l'équation du second degré en p a pour racines les rayons des deux courbures principales de la surface.

Observation. Ces deux théorèmes sont dans une Lettre de M. Borchardt, du 21 mars 1854, adressée à M. Hermite, qui a bien voulu m'en faire part.

SUR LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES QUI AVAIT ÉTÉ PROPOSÉE AU DERNIER CONCOURS.

Au Rédacteur.

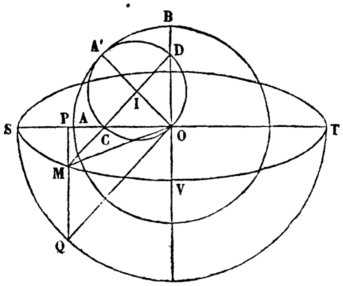
Monsieur,

Je lis dans le numéro de septembre dernier des *Nouvelles Annales*, page 359, à propos de la question de mathématiques spéciales qui fut proposée au concours général et retirée par suite de réclamation, l'observation suivante :

« La première partie est facile, mais la seconde paraît » difficile, si l'on n'emploie pas le calcul infinitésimal. »

La seconde partie se résout aisément en s'appuyant sur ce que l'aire *elliptique* décrite par le rayon vecteur est dans un rapport constant avec le secteur qui lui correspond dans le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.

Deux mots vont éclaircir ce point.



Lorsqu'un cercle OCA′ roule intérieurement sur la circonférence d'un autre cercle AA′B d'un rayon double, on démontre d'abord sans difficulté que tout point M situé à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle mobile et lié invariablement à ce cercle, est dans les mêmes conditions que s'il appartenait à une droite mobile MCID dont le segment CD, intercepté entre deux axes fixes et rectangulaires (OA, OB), serait constamment égal au diamètre du cercle roulant (A est le point de contact des deux cercles, quand le point M se trouve en S sur la ligne des centres).

Il résulte de là, comme on sait, que le lieu décrit par M est une ellipse SMVT dont les demi-axes ont pour longueurs OS et AS, et sont dirigés suivant OA et OB. La normale à cette ellipse est la droite qui va du point décrivant M au point de contact A′ du cercle roulant.

Maintenant, si l'on décrit un cercle sur le grand axe ST comme diamètre, et qu'on mène l'ordonnée PMQ, on a

$$\frac{\text{secteur elliptique MSO}}{\text{secteur circulaire QSO}} = \frac{\text{OV}}{\text{OS}} = \frac{\text{SA}}{\text{OS}};$$

or le secteur circulaire croît proportionnellement à son angle QOS. Il sera donc prouvé que le secteur elliptique croît proportionnellement à l'angle MCS décrit par le rayon qui va du centre I du cercle mobile au point décrivant, si l'on démontre l'égalité des deux angles QOS et MCS. En effet, on a

$$\frac{\text{MP}}{\text{PQ}} = \frac{\text{SA}}{\text{OS}} = \frac{\text{MC}}{\text{OQ}};$$

donc les triangles rectangles QOP, MCP sont semblables, et MC est parallèle à OQ, etc.

Cette solution s'est également présentée à mon honorable collègue M. Vannson, qui surveillait avec moi les opérations du concours.

Agréez, etc.

16 octobre 1854.

JULES VIEILLE.

Note. M. le lieutenant Mannheim nous a aussi communiqué une solution.

M. Mauduit, professeur au lycée de Metz, vient de nous adresser une bonne solution complète des deux parties du problème. TM.

Sur le dernier terme de l'équation au carré des différences et sur le véritable auteur d'un théorème d'analyse sur les racines d'une équation.

(Extrait d'une Lettre.)

Permettez-moi de vous adresser une très-courte observation au sujet d'une phrase que je viens de lire dans les *Nouvelles Annales* (septembre, page 355).

Après avoir apprécié d'une manière très-bienveillante et très-juste l'excellent ouvrage d'algèbre dont M. Serret vient de donner la seconde édition, vous analysez les notes ajoutées au texte primitif, et vous dites, à propos de l'une d'elles :

« Le dernier terme de l'équation au carré des diffé-
» rences occupe une place importante dans certaines
» recherches ; on indique, pour le former, le procédé de
» M. Cauchy, et, dans une note, une méthode *nouvelle*
» qui semble fondée sur celle de M. Joachimstahl et
» même ne pas en différer essentiellement. »

Savez-vous que les choses qui ne diffèrent pas essentiellement sont bien rares ? Leibnitz doutait même qu'il en existât. Nos grands-pères, d'un autre côté, croyant qu'entre deux idées quelconques on peut toujours établir un rapprochement tel quel, s'exerçaient quelquefois à chercher une ressemblance et une différenceplus ou moins ingénieuses entre deux choses proposées.

Il me semble qu'un géomètre ne serait guère embarrassé si, jouant à ce vieux jeu, il avait à comparer la Note de M. Serret à celle de M. Joachimstahl.

Les deux géomètres s'occupent de l'équation au carré des différences, et examinent d'abord sous quelle forme figure dans l'expression de son dernier terme, le terme tout connu de l'équation proposée.

Voilà la ressemblance.

M. Serret, partant de ce résultat presque évident, parvient à un moyen fort ingénieux d'obtenir l'expression complète du dernier terme. La Note de M. Joachimstahl ne donne aucun procédé pour atteindre ce but. Voilà la différence.

Elle me semble établir entre les deux méthodes une *séparation essentielle*.

Vous tenez beaucoup, je le sais, à l'indication exacte des sources et à ce que les noms des inventeurs soient mis sous les yeux du lecteur. Quand il s'agit d'un ouvrage élémentaire, je ne partage pas entièrement votre opinion, et vous avez pu vous en apercevoir en parcourant mon *Traité d'Algèbre*. Le livre de M. Serret, s'adressant à des savants, est dans des conditions toutes différentes; aussi je m'associe volontiers aux reproches que vous lui faites indirectement (page 355) de ne pas avoir cité l'auteur de ce beau théorème :

Toute fonction rationnelle des racines d'une équation peut être rendue entière.

Mais le véritable nom à citer est celui de Gauss; il a donné ce théorème dans son Mémoire trop peu connu sur la détermination numérique des intégrales (*Commentaires de Gottingue*, t III, p. 53; 1816), et l'une de ses démonstrations est précisément celle que M. Serret développe en indiquant qu'elle s'étend d'elle-même au cas de plusieurs racines.

Recevez, etc.

J. BERTRAND,
Professeur au Lycée Napoléon.

Note du Rédacteur. Nous acceptons avec reconnaissance ces savantes et spirituelles indications. Un journal jouit de l'avantage de pouvoir réparer le lendemain les erreurs commises la veille, et nous considérons comme un devoir d'user d'un tel privilége. Mais nous nous permettrons de faire observer que l'équation auxiliaire $A_m = p_{m-1}^2 V_{m-1}$ (p. 453, Serret) appartient à M. Joachimstahl, c'est convenu. Quant à la méthode pour parvenir à l'équation fondamentale (même page)

$$m\frac{dV_m}{dp_1} + (m-1)p_1\frac{dV_m}{dp_2} + \ldots = 0,$$

on la trouve dans les deux dernières pages du Mémoire français de M. Cayley : *Nouvelles Recherches sur les covariants* (Crelle, tome XLVII ; 1853) : observation que je dois à l'obligeance de l'éminent analyste M. Brioschi.

Je dois une autre indication historique à l'érudition si vaste de M. Angelo Genocchi : la démonstration du théorème que le produit de deux expressions de la forme

$$p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2,$$

conserve la même forme (leçon vingt-cinquième), démonstration attribuée à M. Hermite, coïncide exactement avec celle qui est donnée par Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1767 et 1770).

NOTE SUR LA SOLUTION DE LA QUESTION 289

(voir tome XIII, p. 331).

Cette solution n'est pas exacte. Abaissons du sommet A une perpendiculaire AF sur le côté BC. Tant que le point D est entre F et D, le raisonnement est juste. Il n'en est plus de même lorsque F est entre D et D'; alors on peut avoir AD' > AD et la conclusion du § 2° n'est plus admissible. Le § 3° étant fondé sur le § 2°, cesse aussi d'être concluant. (*Observation* de M. Angelo Genocchi.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1854.

Épreuve graphique. — Questions proposées.

Cette année, presque toutes les questions ont été empruntées à l'intersection des surfaces courbes, l'une de ces surfaces étant toujours cylindrique ou conique; de sorte que le résultat représente, finalement, un effet d'ombre portée sur un corps de révolution dont l'axe est vertical, ou d'ombre portée par ce corps sur lui-même. La surface cylindrique inclinée répond au cas d'un système de rayons lumineux parallèles, et la surface conique au cas d'un point lumineux. Ces sujets mixtes, où la Géométrie et la Physique s'unissent dans les conditions les plus simples, nous paraissent très-convenables.

On voit que l'École Polytechnique poursuit son opposition contre les épures qui ne sont que la reproduction des planches gravées des auteurs de géométrie descriptive, c'est-à-dire, contre un enseignement graphique plus répandu encore qu'on ne le pense.

Étant donné un corps solide formé de deux cylindres droits de même axe, l'un inférieur ayant pour base sur le plan horizontal un cercle de 3 centimètres de rayon et 10 centimètres de hauteur, l'autre surmontant le premier, ayant 5 centimètres de rayon et 2 centimètres de hauteur :

1. Considérez la base inférieure de ce second cylindre comme la base d'un cylindre oblique, dont les génératrices

seraient parallèles à la diagonale d'un cube qui aurait une face sur le plan horizontal et une sur le plan vertical. On propose de trouver l'intersection du cylindre oblique avec le premier cylindre droit et de déterminer ensuite trois tangentes à cette intersection ; savoir : une tangente en un point quelconque, la tangente au point situé dans un plan tangent au premier cylindre et parallèle au cylindre oblique, la tangente au point le plus bas.

2. Sur la projection horizontale O de l'axe des deux cylindres, menez dans le plan horizontal une droite qui fasse avec la ligne de terre un angle de 45 degrés ; sur cette droite portez à partir du point O une longueur OS = 12 centimètres, puis concevez qu'au point S on élève une verticale ST de 16 centimètres.

Cela posé, on propose de construire l'intersection du cylindre de 3 centimètres de rayon avec le cône qui aurait pour sommet le point T, et pour base la base inférieure du cylindre supérieur. On veut aussi connaître : la tangente en un point quelconque de l'intersection, la tangente en un point situé dans un plan tangent mené au cylindre inférieur par le sommet du cône, un point où la tangente soit horizontale.

Un tronc de cône droit à bases parallèles est posé sur le plan horizontal par sa grande base, qui est un cercle de 5 centimètres de rayon ; la hauteur du tronc est de 10 centimètres et la petite base a 2 centimètres de rayon. Ce tronc de cône est surmonté d'un cylindre droit ayant même axe que le tronc, un rayon de 5 centimètres et 2 centimètres de hauteur.

3. On veut connaître l'intersection du tronc de cône avec un cylindre oblique qui aurait pour base la base inférieure du cylindre qui surmonte le cône, et dont les

génératrices seraient parallèles à la diagonale d'un cube dont une face serait sur le plan horizontal, l'autre sur le plan vertical.

On cherchera aussi : la tangente en un point quelconque, la tangente au point situé dans le plan tangent mené au tronc de cône parallèlement au cylindre oblique, un point où la tangente soit horizontale.

4. Dans un plan passant par l'axe commun des corps ci-dessus et faisant un angle de 45 degrés avec le plan vertical, on prend un point S distant de cet axe de 12 centimètres et de 20 centimètres du plan horizontal.

Cela posé, on propose de construire l'intersection du tronc de cône avec un cône oblique ayant pour sommet le point S, et pour base la base inférieure du cylindre qui surmonte le cône tronqué.

On veut aussi connaître : la tangente en un point quelconque; la tangente en un point situé dans un plan tangent mené au tronc de cône par le sommet du cône oblique; la tangente en un des points pour lesquels elle a une direction horizontale.

---

5. Un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical a ses génératrices inclinées de 45 degrés sur le plan horizontal, et un cercle de gorge de 2 centimètres de rayon; il est supposé limité à deux plans horizontaux distants chacun de 5 centimètres du cercle de gorge.

On propose de trouver son intersection avec un cylindre oblique ayant pour directrice la circonférence qui limite l'hyperboloïde à sa partie supérieure, dont les génératrices seraient inclinées sur le plan horizontal comme celles de l'hyperboloïde, et dont les projections horizontales feraient avec la ligne de terre un angle de 45 degrés.

On construira la tangente en un point quelconque de cette intersection.

---

6. Un cône droit a pour base sur le plan horizontal un cercle de 3 centimètres de rayon; ses génératrices sont inclinées sur le plan horizontal d'un angle dont la tangente est 2. Un cylindre oblique a pour base sur le même plan horizontal un cercle de 4 centimètres de rayon; les génératrices font aussi avec le plan horizontal un angle dont la tangente est 2, et leurs projections horizontales sont inclinées de 45 degrés sur la ligne de terre.

On propose de trouver l'intersection du cône et du cylindre, et de construire la tangente en un point quelconque de cette intersection.

On aura soin de placer les bases des deux surfaces de manière que le cylindre pénètre entièrement dans le cône par une de ses nappes.

7. La question précédente, mais avec cette différence : les bases des deux surfaces seront placées de manière que l'intersection ait des branches infinies, dont on déterminera les asymptotes.

---

8. Un cône droit a pour base sur le plan horizontal un cercle de 5 centimètres de rayon; les génératrices sont inclinées de 45 degrés sur le plan horizontal.

Trouver son intersection avec un cône droit de même axe, dont le sommet est à 7 centimètres et demi au-dessus du plan horizontal et dont la base sur ce plan serait, en supposant qu'on fît descendre ce second cône jusqu'à ce qu'il ait même sommet que le premier, une ellipse dont les axes inclinés à 45 degrés sur la ligne de terre auraient pour longueurs 5 centimètres et 10 centimètres.

On construira la tangente en un point de l'intersection, et les asymptotes de cette courbe, s'il y en a.

Une calotte de sphère creuse repose par sa base sur le plan horizontal; le rayon extérieur de cette base est de

10 centimètres, le rayon intérieur de 3 centimètres et demi. La hauteur de la calotte, mesurée jusqu'à la surface extérieure, est de 3 centimètres.

9. Par le centre de la base on mène une droite parallèle à la diagonale d'un cube dont une face serait sur le plan horizontal et une autre sur le plan vertical; puis on prend cette droite pour l'axe d'un cylindre dont la section droite serait un cercle de 3 centimètres de diamètre.

Cela posé, on veut connaître l'intersection de ce cylindre avec les deux surfaces sphériques qui limitent la calotte creuse, ainsi que la tangente en un point quelconque de l'une de ces courbes. On construira en outre le développement de la surface cylindrique du solide commun aux deux corps.

10. Par le centre de la base on mène une droite dont la projection horizontale fait un angle de 45 degrés avec la ligne de terre et la projection verticale un angle de 60 degrés, puis on prend cette droite pour l'axe d'un cône dont le sommet est à 8 centimètres du centre de la base de la calotte et dont la section, faite perpendiculairement à l'axe et à 3 centimètres du sommet, est un cercle de 1 centimètre de rayon.

Cela posé, on veut connaître l'intersection de ce cône droit avec les deux surfaces sphériques qui limitent la calotte creuse, ainsi que la tangente en un point quelconque de l'une de ces courbes. On fera une coupe par le plan des deux axes, et cette coupe devra être dégagée de toute ligne de construction, afin de représenter plus nettement l'ouverture faite par le cône dans la calotte.

---

11. Étant donné un corps solide dont deux faces sont des plans verticaux représentés sur le plan horizontal par les droites parallèles xy et uv, entre lesquelles il y a une

distance de 9 centimètres ; on suppose que dans ce corps solide on pratique un vide composé comme il suit : 1° un prisme droit ayant 3 centimètres de hauteur et pour base le parallélogramme ABCD dans lequel les côtés AD, BC sont à 8 centimètres l'un de l'autre, et inclinés de 45 degrés sur les premiers ; 2° un demi-cylindre surmontant ce prisme, ayant ses génératrices horizontales, une section droite circulaire de 8 centimètres de diamètre, et placé de telle sorte qu'il soit tangent aux deux plans verticaux AD et BC.

Cela posé, on demande de représenter sur un plan vertical parallèle à AB les limites de la partie enlevée dans le corps solide, en ayant soin de distinguer les parties vues des parties cachées.

On propose de construire l'intersection des surfaces qui limitent ce solide enlevé par un cylindre oblique qui aurait pour base l'ellipse projetée sur CD, et dont les génératrices seraient parallèles à une droite dont la projection horizontale fait un angle de 45 degrés avec la ligne de terre, et la projection verticale un angle de 60 degrés. On veut aussi connaître le point où l'intersection des deux cylindres rencontre l'ellipse projetée sur CD et la tangente au point d'intersection situé sur une des génératrices AD ou BC.

---

12. Étant donné un tore produit par la rotation d'un cercle de 3 centimètres de rayon autour d'un axe vertical situé dans son plan, et distant de 5 centimètres du centre du cercle générateur, on suppose qu'un plan parallèle à la ligne de terre soit incliné de 40 degrés sur le plan horizontal et placé de telle sorte qu'il coupe à la fois la nappe du tore décrite par le demi-cercle qui tourne sa concavité vers l'axe et celle qui est décrite par l'autre demi-cercle, sans cependant que ces courbes soient séparées.

On propose de construire l'intersection du tore par le plan, ainsi que la tangente en un point quelconque de cette courbe. Il faudra aussi trouver cette section en vraie grandeur, et ce que devient la tangente au point considéré.

---

13. Une demi-sphère creuse de 9 centimètres de rayon intérieur et de 2 centimètres d'épaisseur est posée sur le plan horizontal, la convexité en dessous.

On veut connaître son intersection avec un cône oblique déterminé comme suit : le sommet est au point le plus bas de la surface intérieure de la sphère; l'axe es la corde du quart de cercle, section de la sphère intérieure par un plan méridien vertical, faisant un angle de 45 degrés avec le plan vertical; la base du cône sur le plan de l'hémisphère est un cercle de 6 centimètres de rayon. On construira en outre la tangente en un point quelconque de l'intersection.

On fera une coupe par le plan des deux axes; elle sera dégagée de toute ligne de construction, afin de représenter plus nettement l'ouverture faite par le cône dans la demi-sphère.

La question sera traitée sans changement de plans de projection. On pourra indiquer des méthodes de solution où la position de ces plans serait changée.

Note du Rédacteur. On cherche avec raison à répandre, à populariser cette langue universelle qu'on appelle le *dessin*. Pourquoi cette langue est-elle exclue du grand concours universitaire? pourquoi négliger un tel stimulant? On pourrait donner des prix adaptés à ce genre de connaissances; entre autres les *notes et croquis de Géométrie descriptive* ou quelques uns des *solides* de la collection en relief (t. XII, p. 456). Nous ne saurions trop recommander ces productions du chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique à l'attention de l'Université, des professeurs et des chefs d'institution.

Outre le sentiment de l'art, l'habileté de l'artiste, M. Bardin possède les qualités du professeur et les théories graphiques spécialement enseignées dans la grande école. De là le mérite distinctif de ses ouvrages.

SUR LA FRACTION CONTINUE

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ldots}}}};$$

PAR M. F. AMORETTI,
Élève du Lycée de Versailles (*).

Travaillant sur la fraction continue que l'on doit à Brounker, pour représenter π, j'ai été conduit à me demander ce que pouvait représenter la fraction

$$u = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}\cdots}}$$

Après quelques recherches inutiles, j'ai trouvé dans les Notes à la *Géométrie* de Legendre un passage qui se rapportait à ma question; je copie textuellement (Note IV, page 289 de la 14ᵉ édition).

« Considérons la suite infinie :

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{a^2}{z(z+1)} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)} + \ldots,$$

(*) Lauréat de 1854.

dont le terme général est

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^n}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$

Si l'on remplace z par $z+1$ dans $\varphi(z)$ et qu'on retranche, on aura

$$\varphi(z+1)=1+\frac{a}{z+1}+\frac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\ldots,$$

et

$$-\varphi(z+1)+\varphi(z)=\frac{a}{z(z+1)}+\frac{a^2}{z(z+1)(z+2)}+\ldots,$$

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\left[1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+2)(z+3)}+\ldots\right].$$

» Dans la série entre crochets, on reconnaît $\varphi(z+2)$, on a donc

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2).$$

Divisons par $\varphi(z+1)$, et posons

$$\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}=f(z),$$

on aura

$$f(z)=\frac{a}{z+f(z+1)}.$$

Mettant successivement $z+1$, $z+2$, à la place de z, et mettant sa valeur pour $f(z+1)$ dans $f(z)$, pour $f(z+2)$ dans $f(z+1)$, etc., on obtient

$$f(z)=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3}\cdots}}}$$

» Posant (*)

$$a=z=1,$$

(*) Ce dernier alinéa n'est pas dans Legendre. TM.

on obtient

$$f(1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}=u."$$

[C'est ici que commence le travail qui m'est propre.]

On a

$$f(z)=\frac{a}{z}\cdot\frac{1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\ldots}{1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z(z+1)}+\ldots};$$

faisant $z=a=1$,

$$u=\frac{1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots}{1+\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{1.2}\right)^2+\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2+\ldots}.$$

Il s'agit de sommer les suites des deux termes. Posons

$$(1)\qquad \psi(x)=x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1^2.2^2.3}+\frac{x^4}{1^2.2^3.3^2.4}+\ldots.$$

Différentiant les deux membres,

$$(2)\qquad \frac{d\psi}{dx}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1^2.2^2}+\frac{x^3}{1^2.2^3.3^2}+\ldots,$$

et divisant membre à membre,

$$\frac{\psi\,dx}{d\psi}=\frac{x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1^2.2^2.3}+\ldots}{1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1^2.2^2}+\ldots}.$$

On voit maintenant que u n'est autre chose que ce que devient la fonction $\frac{\psi\,dx}{d\psi}$, quand on y fait $x=1$; il ne reste donc plus qu'à trouver la nature de la fonction ψ, qui se développe suivant la série (1), ou seulement la nature de sa dérivée que je désigne par t et qui se développe suivant la série (2),

$$t = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1^2 . 2^2} + \frac{x^3}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \ldots .$$

Différentiant les deux membres,

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{x}{1^2 . 2} + \frac{x^2}{1^2 . 2^2 . 3} + \frac{x^3}{1^2 . 2^2 . 3^2 . 4} + \ldots;$$

multipliant par x et différentiant de nouveau,

$$\frac{x\,dt}{dx} = x + \frac{x^2}{1^2 . 2} + \frac{x^3}{1^2 . 2^2 . 3} + \ldots;$$

d'où

$$d\left(\frac{x\,dt}{dx}\right) = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1^2 . 2^2} + \frac{x^3}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \ldots\right) dx.$$

Mais la série du second membre est précisément celle dont t désigne la somme : par suite, la sommation de cette série est rappelée à l'intégration de l'équation du second ordre,

$$d\left(\frac{x\,dt}{dx}\right) = t\,dx.$$

Faisons

$$t\,dx = dy,$$

d'où

$$t = \frac{dy}{dx}, \quad \text{et} \quad \frac{x\,dt}{dx} = \frac{x\,d^2y}{dx^2};$$

nous aurons, en substituant,

$$d\left(x \frac{d^2y}{dx^2}\right) = dy,$$

et en intégrant,

$$\frac{x\,d^2y}{dx^2} = y + \mathrm{A};$$

A désignant la constante arbitraire.

On donnera une forme plus simple à l'équation en posant

$$y + A = p, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2p}{dx^2},$$

et, en substituant,

$$(3) \qquad \frac{xd^2p}{dx^2} = p.$$

Nous ramènerons cette équation au premier ordre en posant $p = e^{\int v dx}$, v étant une autre fonction de x, car on a

$$dp = e^{\int v dx}.\, v dx, \quad d^2p = dx\,(pdv + v^2 pdx),$$

on trouve, en reportant cette dernière expression dans l'équation (3) et supprimant le facteur p,

$$\frac{dv}{dx} + v^2 - x^{-1} = 0;$$

cas particulier de l'équation de Riccati.

Versailles, 24 octobre 1854.

(La Note suivante a été communiquée par M. Herlobig, chef de l'institution Saint-Louis, à Versailles, neveu et successeur de M. Potin.)

Émile-Michel Amoretti est né à Moscou, le 1er juin 1838, de parents piémontais. Son père naquit à Nice alors que le Piémont, sous le nom d'Alpes-Maritimes, appartenait à la France. En 1830, sa famille quitta Nice, où elle avait été malheureuse, pour aller chercher fortune en Russie.

E. Amoretti dès son enfance aimait l'étude. Son père fit un dernier sacrifice et l'amena en France en 1849, le confia d'abord aux soins de M. Tanquerel, maître de pension à Saint-Germain, puis, peu de temps après, à ceux de M. Potin, chef de l'institution Saint-Louis, à Versailles. Son nouveau maître reconnut bientôt toutes les brillantes qualités de son élève et mit tout en œuvre pour lui assurer un bel avenir.

A l'âge de 13 ans, Amoretti obtint au concours général de 1851 le premier accessit de mathématiques accessoires : succès qui devait en faire présager bien d'autres.

En 1850, la position de M. Amoretti ne lui permit plus de subvenir aux besoins de son fils, et il pria M. Potin de ne point abandonner son élève. M. Amoretti mourut en 1852, et M. Potin devint le père adoptif de cet orphelin qui s'est toujours montré digne et reconnaissant d'un pareil sacrifice.

Le malheur qui venait de frapper E. Amoretti lui inspira de nouveaux efforts ; son intelligence supérieure grandit encore par le travail qui devenait pour lui une nécessité plus pressante, une passion impérieuse. « Je veux, disait-il, me faire une position ; je me sens la force de tout faire pour arriver à mon but. »

Il ne s'occupait pas exclusivement des ouvrages des grands maîtres en mathématiques, mais il lisait avec une satisfaction aussi grande Montaigne et Montesquieu ; l'*Imitation* était sa lecture favorite. Sa mémoire était prodigieuse.

Il observait dans les plus petites choses un ordre merveilleux, réglant jour par jour, heure par heure, l'emploi de son temps. Depuis le mois de janvier 1852, il a consigné sur un carnet ses moindres actions ; il n'oublie pas le plus petit détail, mettant en toutes choses une exactitude mathématique.

S'il se livrait presque exclusivement aux mathématiques, c'était pour arriver plus tôt à son but ; mais il aurait eu une aptitude presque égale pour les langues. Il put sans peine étudier avec succès l'hébreu, l'anglais et l'allemand, et jamais il n'a fait montre de son savoir. Lauréat du grand concours, admis sans concours à l'École

Normale, présenté à l'Impératrice, il ne conçut pas le moindre orgueil. Sa modestie était extrême (*).

D'un caractère très-gai, il avait une conversation très-aimable et très-spirituelle lorsqu'on le mettait à l'aise.

D'une constitution robuste, d'une santé de fer, Amoretti fut légèrement indisposé vers la fin du mois d'octobre; il combattit ce malaise jusqu'au 28. Cette indisposition devint plus grave et le força à garder le lit; c'était la veille de son entrée à l'École. Les symptômes de la fièvre typhoïde se manifestèrent; il eut deux hémorragies très-abondantes qui, en diminuant ses forces, nous donnaient de l'espoir; mais la fièvre, qui avait pendant les huit premiers jours suivi un cours parfaitement régulier, fut, le 8 novembre, accompagnée de nouveaux accidents; et, à la suite d'une crise violente, il y eut une prostration complète de forces et Amoretti mourut paisiblement. On est contraint à admirer une existence aussi belle, aussi bien remplie, une intelligence aussi brillante qui pouvait rendre des services à la science.

Note du Rédacteur. M. Vannson, le professeur d'Amoretti, nous écrit : « Depuis trente ans que j'enseigne les mathématiques je n'ai jamais rencontré dans aucun élève une intelligence aussi remarquable et un goût aussi prononcé pour l'étude des sciences. »

(*) C'est lui qui lors du dernier concours a déclaré connaître la première question (voir t. XIII, p. 296) : acte de délicatesse et de loyauté plus honorable que le prix du concours.

Dans une Lettre jointe à son travail, il dit qu'il nous enverra le prix couronné, en ajoutant qu'il cherchera à relever la faiblesse du sujet par quelques considérations générales.

Lauréat de 1810, M. Cousin, âgé de 18 ans, fut admis à l'École Normale, sans concours : premier et illustre précédent. TM.

DESCRIPTION D'UN APPAREIL DESTINÈ A L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

CONSTRUIT PAR M. WEISSAND,

Professeur de travaux graphiques, chargé des Cours municipaux de Dessin, à Strasbourg;

PAR M. TERQUEM (ALFRED),

Professeur de Physique au Lycée de Châteauroux.

L'appareil de M. Weissand se compose de deux plans rectangulaires ayant environ 30 centimètres de longueur sur 20 centimètres de largeur; les deux plans en zinc recouvert de bois noirci sont réunis par une charnière placée le long de la plus grande dimension; ils font entre eux un angle droit, et figurent ainsi les deux plans de projection, la charnière étant la ligne de terre. Comme, dans certains cas, il faut employer des plans auxiliaires de projection, à la suite de chacun des plans de projection se trouve placé un rectangle de mêmes dimensions que le premier, qui peut tourner autour d'une charnière perpendiculaire à la ligne de terre, verticale pour le plan vertical de projection, horizontale pour le plan horizontal. On a ainsi deux plans auxiliaires qui peuvent se placer perpendiculairement à la ligne de terre et se rabattre l'un sur le plan vertical et l'autre sur le plan horizontal. Si l'on ne veut pas se servir de ces plans, placés à la suite des premiers, ils doublent la longueur de l'appareil.

Chacun des plans de projection porte parallèlement à la ligne de terre une rainure qui le divise en deux parties égales; quatre autres rainures, également espacées, sont disposées perpendiculairement à la première. Ces rainures ont pour section un trapèze, afin que les règles qui y glissent, et les remplissent quand on ne veut pas s'en servir, ne puissent s'en échapper. C'est dans ces diverses rainures que l'on glisse le support sur lequel on fixe les diverses figures destinées à être projetées.

Ce support consiste en un tronc de pyramide quadrangulaire glissant à frottement dur dans les diverses rainures. Ce tronc de pyramide est traversé, suivant son axe, par un cylindre creux dans lequel peut tourner, à frottement dur, un cylindre plein des mêmes dimensions. Sur ce cylindre est placée une petite virole de cuivre, dans laquelle peuvent se visser diverses petites tiges de fer. Cette virole n'est pas invariablement liée au cylindre qui la supporte, mais elle peut tourner autour d'un axe perpendiculaire à celui du cylindre et parallèle, par suite, au plan de projection sur lequel est fixée la petite pyramide. On peut donc donner à cette virole deux mouvements rectangulaires.

1°. En faisant tourner le cylindre sur lui-même, le mouvement de rotation s'exécute autour d'un axe perpendiculaire au plan de projection.

2°. En faisant tourner la virole autour de l'axe perpendiculaire à celui du cylindre, on peut lui donner, ainsi qu'à la tige qu'elle supporte, toutes les inclinaisons sur le plan de projection.

3°. Enfin, en faisant glisser tout le support dans les diverses rainures, on peut faire occuper à cette tige des positions très-variées.

Dans la virole viennent se fixer, à l'aide d'un pas de vis, diverses tiges de fer représentant des lignes droites, courbes, planes, à double courbure, etc. On peut ainsi démontrer tous les théorèmes relatifs à la ligne droite et aux lignes courbes.

Pour placer dans l'espace des figures planes, on visse dans la virole une tige sur laquelle glisse un curseur; le curseur porte latéralement un petit axe qui traverse les diverses figures planes figurées par des petites plaques de tôle découpées qui sont fixées invariablement à l'aide d'un écrou de pression.

Enfin on peut également prendre des volumes quelconques, faits également en tôle vernie, tels que des cylindres, des cônes, des pyramides, des sphères, etc. Pour soutenir ces corps, on fixe sur la virole une tige qui porte perpendiculairement une seconde tige; cette dernière se replie ensuite d'équerre parallèlement à la première; on a ainsi deux tiges parallèles très-rapprochées l'une de l'autre et invariablement liées ensemble. Les divers corps solides que l'on veut placer dans l'espace sont traversés à la fois par ces deux tiges et se trouvent ainsi fixés d'une manière invariable. A ces diverses figures sont joints des plans qui sont découpés de manière à s'appliquer entre les deux plans de projection sous différentes inclinaisons.

A l'aide d'un petit fil à plomb et d'une règle, on peut tracer avec de la craie sur les plans de projection les projections des diverses lignes, plans, corps situés dans l'espace et surtout montrer les transformations que ces projections subissent, quand on donne aux figures à projeter tel ou tel mouvement.

Telles sont les principales dispositions de cet ingénieux appareil avec lequel il est facile de construire toutes les figures qui doivent être étudiées dans un cours de géométrie descriptive; appareil supérieur à ceux qui ont déjà été construits pour le même but, à cause de la généralité de son emploi. Il peut être surtout utile pour l'enseignement de la géométrie descriptive à des élèves peu accoutumés aux considérations abstraites et qui ont peu l'habitude de la géométrie. Sa place est naturellement marquée dans tous les cours industriels où il est appelé à rendre de grands services au professeur et aux auditeurs.

QUESTION.

296. On donne dans le même plan deux systèmes de sept points chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques. Démontrer qu'il n'y a que trois solutions. (CHASLES.)

EXERCICES SUR DE GRANDS NOMBRES.

$$2^{99} = 63382\,533001\,14114\,70074\,83516\,02688 = a,$$
$$\log 2 = 0,30102\,99956\,63981\,19521\,37388\,94724\,49,$$

$a \log 2$ donne pour caractéristique

$$19080\,04273\,45073\,52812\,21794\,13680 = b,$$

ainsi, $b + 1$ est le nombre de chiffres de 2^a.

Ce calcul a été fait par Clausberg et se trouve dans son ouvrage *Démonstrativer Rechenkunst*, Arithmétique démonstrative, III[e] partie, § 1474; Leipsig, 1782; in-8°. On y donne les logarithmes de Briggs de 1 à 100 avec 32 décimales. Les Tables de Callet renferment de tels logarithmes de 1 à 1097 avec 61 décimales; mais il faut prendre les dix décimales à gauche dans la Table des 20 décimales.

THÉORIE DE LA DIVISION ARITHMÉTIQUE DES NOMBRES ENTIERS;

Par M. L.-E. FAUCHEUX.

Traitée avec la simplicité convenable, la division ne présentera pas aux élèves plus de difficultés que les autres règles arithmétiques.
(*Nouveau Programme de l'École Polytechnique.*)

Lemme. Soit à multiplier deux nombres, par exemple 7436 par 48. On pourra toujours obtenir le produit de la manière suivante. On multipliera d'abord 48 par 6, ce qui donnera 288; on écrira 8 et on retiendra 28. On multipliera ensuite 48 par 3, ce qui donnera 144, à quoi on ajoutera 28 du produit partiel précédent, ce qui donnera 172; on écrira 2 et on retiendra 17. On multipliera 48 par 4, et au produit 192 on ajoutera 17, ce qui donnera 209; on écrira 9 et on retiendra 20. Enfin on multipliera 48 par 7, et au produit 336 on ajoutera 20; on aura 356, qu'on écrira entièrement, et le produit sera 356928.

On pourra toujours considérer le produit d'une multiplication effectuée comme ayant été obtenu par ce procédé-là.

Dans cette multiplication, il n'y a qu'un produit partiel entièrement écrit, c'est le dernier, c'est-à-dire le produit du multiplicateur par le chiffre des plus hautes unités du multiplicande. Des autres produits partiels on n'a écrit que le chiffre des unités; et ce chiffre exprime des unités de même ordre que celles du chiffre du multiplicande qui a donné le produit partiel.

Les retenues de chaque produit partiel n'égaleront jamais le multiplicateur 48; en effet, le premier produit partiel sera au plus $48 \times 9 < 48 \times 10$, ou 48 dizaines; donc les retenues du premier produit partiel seront moindres que 48 ; le deuxième produit partiel sera encore au plus 9×48, et il faudra l'augmenter d'un nombre moindre que 48; la somme sera donc plus petite que 10 fois 48; donc les retenues du deuxième produit seront aussi moindres que 48, et ainsi de suite.

Ce qui précède sont des remarques qui appartiennent à la multiplication.

Division.

Définition. La division a pour but de trouver un nombre nommé *quotient*, qui, multiplié par un nombre donné nommé *diviseur*, reproduise un troisième nombre aussi donné, nommé *dividende*.

De cette définition résulte comme conséquence qu'on doit employer la division pour partager un nombre donné en parties égales, ou pour chercher combien de fois un nombre en contient un autre.

Soit à diviser 356928 par 48. D'après la définition, nous pouvons regarder le quotient comme étant le multiplicande d'une multiplication dont 48 serait le multiplicateur et 356928 le produit.

Nous avons vu que dans toute multiplication il y avait un produit partiel entièrement écrit, et qu'il n'y en avait qu'un, que c'était le dernier produit partiel, et que, par conséquent, il était exprimé par un certain nombre de chiffres à gauche du produit total. Or il est facile de trouver ce dernier produit partiel dans le produit total 356928.

En effet, dans notre exemple, il a été obtenu par la multiplication de 48, nombre de deux chiffres par un nombre d'un chiffre; il y a donc au plus trois chiffres et au moins deux. C'est donc 356 ou 35 ; mais il est au moins égal à 48 et plus petit que 10 fois 48; donc c'est 356.

[De là la règle suivante : Pour trouver le premier chiffre du quotient, il faut prendre au dividende autant de chiffres qu'il y en a au diviseur, si, etc., ou un chiffre de plus, si, etc.]

Ce nombre 356 a été obtenu en multipliant 48 par le chiffre des plus hautes unités du multiplicande qui est le quotient cherché, et augmentant le produit des retenues du produit précédent, retenues qui sont moindres que 48. Donc 356 tombera entre deux multiples consécutifs de 48, et le plus petit de ces deux multiples sera le produit de 48 par le chiffre des plus hautes unités du multiplicande, c'est-à-dire du quotient. Donc si l'on forme le tableau des 9 premiers multiples de 48, celui qui sera immédiatement inférieur ou au plus égal à 356 sera le dernier produit partiel débarrassé des retenues du produit précédent.

356928	48
336	7436
209	
192	
172	
144	
288	
288	
0	

1	48
2	96
3	144
4	192
5	240
6	288
7	336
8	384
9	432

En consultant le tableau des multiples de 48, on trouve que le multiple immédiatement inférieur à 356 est le septième, qui est 336; donc le chiffre des plus hautes unités du quotient est 7. Retranchant 336 de 356, le reste 20 représente les retenues, c'est-à-dire les dizaines du produit partiel précédent; de plus, le chiffre des unités de ce produit est le chiffre qui, dans le dividende, est immédiatement à la droite de 356, c'est-à-dire 9 : l'avant-dernier produit partiel augmenté des retenues du produit partiel précédent était donc 209. Mais ce produit a été obtenu par la multiplication de 48 par le chiffre du quotient immédiatement à droite de 7; donc on aura ce chiffre en cherchant quel est le multiple de 48 immédiatement inférieur ou au plus égal à 209. On trouve que c'est 192, qui est le quatrième multiple : donc le second chiffre du quotient est 4; et en continuant le même raisonnement on aura successivement tous les chiffres du quotient.

Les différents produits 256, 209, 172, 288, se nomment *dividendes partiels.*

Abréviation. On peut se dispenser de faire le tableau des neuf multiples. En effet, en reprenant l'opération ci-dessus, on voit qu'il s'agit de trouver par quel chiffre il faut multiplier 48 pour avoir 356 ; or ce chiffre *est à peu près* le même que celui par lequel il faudrait multiplier 40 pour avoir 350, lequel est exactement le même que le chiffre par lequel il faudrait multiplier 4 pour avoir 35. Mais ce dernier se trouve immédiatement par la table de Pythagore; donc on pourra se dispenser de former les multiples du diviseur.

On démontrera sans peine que le chiffre ainsi obtenu ne peut être jamais trop faible, mais qu'il peut être exact ou trop fort. Il faudra donc vérifier le chiffre obtenu: ce que l'on fera en le multipliant par le diviseur et retranchant le produit du dividende partiel. Si la soustraction peut se faire, le chiffre trouvé sera le chiffre convenable. Si le produit est plus grand que le dividende partiel, le chiffre trouvé sera trop fort, il faudra diminuer le quotient d'une unité et recommencer l'essai.

Il n'existe pas toujours un nombre entier qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende. Alors le quotient est compris entre deux nombres entiers consécutifs, et en prenant pour quotient l'un ou l'autre de ces deux nombres entiers, on a le quotient, à moins d'une unité. Dans ce cas, le reste de la dernière soustraction n'est pas nul; on le nomme le *reste* de la division.

Si l'on prend pour quotient le plus petit des deux nombres entiers, on a le quotient par défaut et le reste par excès; si l'on prend le plus grand des deux nombres, on a le quotient par excès et le reste par défaut. Il est facile de voir que le reste par excès plus le reste par défaut égalent le diviseur.

En choisissant convenablement l'un des deux quotients, on peut obtenir le résultat à moins d'une demi-unité : il suffit de prendre le quotient qui donne le plus petit reste.

On déduira facilement de là, la règle générale ordinaire.

Cette théorie, dont quelques points sont seulement esquissés, est soumise à l'appréciation critique de MM. les Professeurs, et cette Note, tirée à très-petit nombre, leur est uniquement destinée.

CONTACT DES CERCLES SUR LA SPHÈRE, PAR LA GEOMÉTRIE;

PAR M. VANNSON,
Professeur à Versailles.

1°. *Par un point* C *mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné.*

Soient P le pôle du petit cercle donné, r sa distance polaire $< \frac{\pi}{2}$, et Δ la distance de C à P; de P comme pôle, avec $2r$ pour distance polaire, décrivez un arc de cercle, et de C comme pôle un autre arc avec Δ pour distance polaire. Soit X un des points de rencontre de ces deux arcs; joignez X avec P : la rencontre de l'arc obtenu avec la circonférence donnée sera le point de contact. Deux solutions. Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait $\Delta > r$ et $\Delta < \pi - r$.

2°. *Étant donnés deux petits cercles, construire un grand cercle qui leur soit tangent.*

Soient P, P′ les pôles des cercles donnés; Δ la distance P, P′; R, r leurs distances polaires. Considérons d'abord le cercle tangent qui coupe l'arc PP′ sur son prolongement; on trouvera le pôle de ce grand cercle tangent, en construisant un triangle sphérique dont les côtés soient Δ, $\left(\frac{\pi}{2} - R\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} - r\right)$. P, P′ seront deux sommets, le troisième sommet sera le pôle cherché. On trouve pour conditions

$$\Delta > R - r, \quad \text{et} \quad \Delta + R + r < \pi.$$

Considérons maintenant le cercle tangent qui coupe l'arc PP′ entre P et P′. Son pôle sera le troisième sommet d'un triangle ayant pour côtés Δ, $\left(\frac{\pi}{2} + r\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} - R\right)$. On trouve pour conditions

$$\Delta > R + r, \quad \Delta + R - r < \pi.$$

3°. Théorème. *Si trois cercles tracés sur une sphère se coupent deux à deux, les trois arcs de grands cercles qui joignent les points d'intersection sur un même cercle concourent au même point.*

Ce théorème se déduit facilement de son analogue sur un plan, à l'aide des projections stéréographiques. Pour cela, traçons sur un plan P trois cercles qui se coupent deux à deux; soient AB, A′B′, A″B″ les trois cordes communes, et X leur point de concours. Du point X comme centre, décrivons une sphère, et prenons pour centre de projection le pôle P′ du plan P. Les trois cercles donnés auront pour projection sur la sphère trois autres cercles, et les cordes communes auront pour projections trois arcs de grands cercles qui passeront par les points communs aux trois cercles de la sphère pris deux à deux, et par les pôles du plan P : ce qui démontre le théorème énoncé.

4°. *Étant donné un petit cercle sur une sphère, si de son pôle on décrit un second cercle ayant pour distance polaire le complément de la distance polaire du premier, et que, par le pôle commun, on trace un arc quelconque de grand cercle coupant les deux petits en* A *et* B ; *ces deux points convenablement choisis seront à* 90 *degrés de distance l'un de l'autre, et chacun d'eux sera le pôle de la tangente menée par l'autre au cercle sur lequel il se trouve. On les nomme* points conjugués. *Les deux cercles ainsi obtenus sont appelés* polaires réciproques.

Cela posé, si deux cercles se coupent en deux points A, B, et qu'on trace pour chacun d'eux le cercle polaire réciproque, les grands cercles ayant A et B pour pôles seront tangents à ces deux derniers cercles en des points conjugués de A et de B, et l'intersection de ces deux tangentes communes sera le pôle de l'arc passant par A et B.

5°. Si trois cercles se coupent deux à deux, et qu'on trace leurs cercles polaires reciproques, puis qu'on mène à ces derniers cercles, pris deux à deux, deux tangentes communes, les trois points de rencontre de chaque couple de tangentes seront les pôles des trois arcs menés par les points d'intersection. Or ces trois arcs concourent en un même point O; donc les trois points de rencontre des tangentes seront sur un grand cercle ayant O pour pôle.

6°. *Si par deux points* A, B *on fait passer des cercles* *et que par un point* C, *pris sur* AB *prolongé, on leur mène des arcs de grands cercles tangents, le lieu du point de contact sera une circonférence ayant pour pôle le point* C.

Ce théorème se démontre facilement par les projections stéréographiques. Si le point C est pris entre A et B, l'arc tangent se remplace par l'arc minimum, et le point de contact par le point où cet arc minimum coupe la circonférence.

7°. Problème. *Par deux points* A, B *mener un cercle tangent à un petit cercle.*

Le théorème 3 conduit à la construction suivante : Par A et B menez un cercle quelconque, qui coupe le cercle donné aux points C, D; prolongez les arcs CD, AB jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point O; menez de ce point O deux tangentes au cercle donné. Soient M et N leurs points de contact : la question sera ramenée à faire passer un cercle par les trois points A, B, M ou A, B, N. L'explication se ferait comme sur un plan.

Cette construction ne serait pas applicable si le cercle donné était un grand cercle. Mais en se reportant au théorème 6, on est conduit à la construction suivante : Par A et B menez un cercle arbitraire et par le point O une tangente à ce cercle. Soit D le point de contact; prenez, à partir du point O sur le cercle donné, deux longueurs OM, ON égales à OD : les points MN seront les points de contact demandés.

8°. On peut résoudre de la même manière le problème suivant :

Étant donnés un cercle et deux points, faire passer par ces deux points un second cercle qui coupe le premier en deux points éloignés l'un de l'autre d'une longueur donnée.

9°. La considération des cercles polaires réciproques permet de ramener au problème 8 celui dont voici l'énoncé :

Étant donnés deux grands cercles et un petit A, *mener aux deux premiers un cercle tangent* B *tel, que si l'on mène aux deux cercles* A *et* B *deux tangentes communes, l'angle de ces tangentes soit égal à un angle donné.*

10°. Problème. *Étant donnés deux points et un grand cercle, trouver sur ce cercle un point tel, que la somme des distances de ce point aux deux points donnés soit égale à un arc donné.*

Ce problème se ramène facilement au problème 8, comme sur un plan.

11°. Par la considération des cercles polaires, on ramène le problème suivant au problème 10 :

Étant donnés un point et deux arcs de grands cercles, mener par le point un troisième cercle coupant les deux autres sous deux angles dont la somme est donnée.

12°. Les problèmes 10 et 11 peuvent encore s'énoncer de la manière suivante :

1. *Étant donnés les foyers d'une ellipse sphérique et l'axe des foyers, trouver son intersection avec un grand cercle donné de position.*

2. *Construire un triangle sphérique, connaissant la surface, un angle et un point par lequel doit passer le côté opposé.*

13°. Théorème. *Étant donnés deux petits cercles sur une sphère, on peut évidemment mener une infinité de grands cercles qui les coupent tous deux sous des angles égaux; tous ces cercles passent par un point fixe sur le prolongement de la ligne des pôles, ou par un second point sur la même ligne entre les deux pôles. Le premier point se nomme centre de similitude directe; le second, centre de similitude inverse.*

Soient A, B, A′, B′ les quatre points de rencontre de l'arc des pôles avec les circonférences données, A, B étant les deux points les plus rapprochés. (Nous supposerons, pour fixer les idées, deux cercles extérieurs l'un à l'autre.) Supposons mené un grand cercle coupant les cercles donnés sous des angles égaux, et soient C, D, C′, D′ les quatre points de rencontre, C, D désignant les plus voisins. Les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle : on le démontre facilement en faisant voir que dans le quadrilatère ABCD, la somme de deux angles opposés égale celle des deux autres. Soient E, H, E′, H′ les quatre points analogues aux précédents pour un autre grand cercle, les quatre points A, B, E, H sont de même sur un cercle, ainsi que les quatre points C, D, E, H (même démonstration). On a donc deux cercles qui se coupent deux à deux; donc (nº 3) nos deux grands cercles et l'axe des pôles se coupent au même point.

C. Q. F. D.

Remarque. Il est aisé de voir qu'un grand cercle coupant les deux donnés sous des angles égaux peuvent couper l'axe des pôles entre les deux pôles ou sur le prolongement de cet arc; de là la distinction des deux centres de similitude. Pour trouver géométriquement le premier centre de similitude, considérons d'abord deux cercles extérieurs l'un par rapport à l'autre; soient PP′ leurs pôles, RR′ leurs distances polaires, Δ la distance de leurs pôles. De P comme pôle avec $R + a$ comme distance polaire décrivons un cercle, et de P′ comme pôle un second cercle avec $R' + a$ pour distance polaire; ces deux cercles se couperont, pourvu qu'on ait $2a < \Delta - (R + R')$ et $2a > 2\pi - (\Delta + R + R')$, conditions auxquelles on peut toujours satisfaire. Joignons le point de rencontre à P et à P′ par deux arcs de grands cercles, ils couperont nos deux cercles en deux points C et D; joignant CD, la rencontre de cet arc avec l'axe des pôles sera, comme il est aisé de le voir, le centre de similitude directe. L'autre centre de similitude se trouve d'une manière analogue, quelle que soit la position des deux cercles.

14°. PROBLÈME. *Étant donnés un point* A *et deux grands cercles, construire un cercle passant par le point* A *et tangent aux deux cercles donnés.*

Première solution. Si l'on divise l'angle des cercles en deux parties égales et qu'on prenne par rapport à l'arc bissecteur le symétrique de A, on ramènera le problème à celui du n° 7.

Deuxième solution. Soit C l'intersection des deux grands cercles, joignons A avec C, et menons un cercle tangent quelconque aux deux côtés de l'angle C dans lequel est A : le cercle tangent coupera l'arc AC en deux points F, G. Joignons chacun d'eux au pôle (P) du cercle tangent, nous obtiendrons le triangle isocèle PFG. Maintenant menons par le point A deux arcs de grands cercles formant avec AC deux angles égaux à l'angle à la base de ce triangle isocèle. Ces grands cercles détermineront sur l'arc bissecteur deux points qui seront les pôles de deux cercles satisfaisant à la question. Cette construction est une conséquence immédiate du théorème précédent.

15°. *Mener par un point connu* (A) *un cercle tangent à deux petits cercles donnés.*

Supposons les cercles extérieurs ; soient P, P′ leurs pôles, C, D les points les plus voisins l'un de l'autre, où l'axe des pôles coupe les circonférences données ; supposons le problème résolu dans le cas du contact extérieur, et soient X, Y les deux points de contact. L'arc XY ira évidemment passer par le centre de similitude directe. Soit Z ce centre ; je le joins à A par un arc qui coupe la circonférence demandée en un point O. Les quatre points C, D, X, Y sont sur un même cercle, ainsi que les quatre points X, Y, A, O. D'où il est facile de conclure que les quatre points C, D, A, O sont aussi sur un même cercle. On connaît trois points de ce cercle, on peut donc le tracer, et, par suite, déterminer le point O; nous rentrons ainsi dans le cas du n° 7. Ce qui donne deux solutions. Les autres cercles tangents se trouvent de la même manière, en employant le centre de similitude inverse.

La même construction s'applique encore, si l'on remplace un des petits cercles par un grand.

Le problème de mener un cercle tangent à trois autres se ramène au précédent, comme dans la géométrie plane.

On peut aussi le résoudre directement, comme sur un plan, en se fondant sur quelques propriétés des axes radicaux et des centres de similitude que nous allons exposer.

1°. Les sinus des distances du centre de similitude de deux cercles aux pôles de chacun d'eux sont comme les sinus des distances polaires.

2°. Si par le centre de similitude on fait passer un grand cercle, les sinus des distances de chaque pôle à ce grand cercle sont aussi comme les sinus des distances polaires.

3°. Si le grand cercle coupe les deux cercles donnés, les tangentes des demi-cordes interceptées sont comme les tangentes des distances polaires.

4°. Les tangentes des distances de chaque pôle au grand cercle sont comme les sinus des demi-cordes, et aussi comme les sinus des arcs compris depuis le centre de similitude jusqu'au milieu de chaque corde. Si dans la dernière proportion entre ces quatre sinus on fait la somme des deux premiers termes et leur différence, on arrive au théorème suivant :

Les tangentes des moitiés des quatre arcs compris entre le centre de similitude et les quatre points d'intersection sont proportionnelles.

5°. On sait que le produit des tangentes des demi-segments relatifs à un des cercles est égal au carré de la tangente du demi-arc tangent mené par le centre de similitude. Si l'on combine cette relation avec le théorème 4, on arrive à cette conséquence :

6°. Si par le centre de similitude de deux cercles on mène un cercle sécant, les tangentes des demi-segments homologues sur ce grand cercle sont comme les tangentes des demi-arcs tangents menés par le centre de similitude. Si le centre de similitude est dans l'intérieur des cercles, le théorème 6 a toujours lieu, en remplaçant l'arc tangent par la moitié de l'arc minimum passant par ce centre.

7°. Si après avoir mené un grand cercle par le centre de similitude, on détermine son pôle relativement à chaque cercle donné, ces deux pôles et le centre de similitude sont sur un grand cercle.

8°. *Étant donnés trois cercles sur une sphère, si l'on détermine leurs centres de similitude directe et inverse en les prenant deux à deux, les trois centres de similitude directe seront sur un même grand cercle, qu'on nomme* axe de similitude directe; *deux centres de similitude inverse et un des centres de similitude directe sont aussi sur un même grand cercle, qu'on nomme* axe de similitude inverse.

Ce théorème se démontre comme sur un plan par la théorie des transversales.

9°. Si par le pôle P d'un petit cercle on fait passer un arc de grand cercle, et qu'on prenne sur ce cercle à partir de P deux arcs PA, PB tels, qu'on ait

$$\text{tang}\,\text{PA} \times \text{tang}\,\text{PB} = \text{tang}^2 r,$$

r, étant la distance polaire, ces deux points sont appelés *points conjugués*. Si par A ou B on mène un grand cercle perpendiculaire sur PA, ce cercle s'appelle *cercle polaire* du point B ou du point A, et, réciproquement, B se nomme le *pôle* du grand cercle mené par le point A. Les propriétés des pôles et polaires sont les mêmes que sur un plan, et se démontrent sans difficulté.

10°. *Axe radical de deux cercles.* Si l'on coupe deux cercles par un cercle arbitraire qui rencontre le premier en A et B, le deuxième en A' et B', qu'on fasse passer par A et B un arc de grand cercle, et un autre par A', B', ces deux cercles se couperont en un point O. Le lieu du point O est un grand cercle perpendiculaire à l'axe des pôles des deux cercles donnés; on le nomme *axe radical* de ces deux cercles.

Démonstration. Soit M la projection de O sur l'axe des pôles P, P'; soient r, r' les distances polaires; nous avons, par un théorème connu,

$$\operatorname{tang}\frac{OA}{2}\times\operatorname{tang}\frac{OB}{2}=\operatorname{tang}\frac{OA'}{2}\operatorname{tang}\frac{OB'}{2}.$$

Mais le premier produit égale $\operatorname{tang}\frac{OP\times r}{2}\times\operatorname{tang}\frac{OP\times r}{2}$ et le second égale $\operatorname{tang}\frac{OP'+r'}{2}\operatorname{tang}\frac{OP'+r'}{2}$: donc

$$\cot\frac{OP+r}{2}\times\cot\frac{OP-r}{2}=\cot\frac{OP'+r'}{2}\cot\frac{OP'-r'}{2};$$

de là, par une transformation très-simple,

$$\frac{\cos OP+\cos r}{\cos OP-\cos r}=\frac{\cos OP'+\cos r'}{\cos OP'-\cos r'},$$

et enfin,

$$\frac{\cos OP}{\cos OP'}=\frac{\cos r}{\cos r'}.$$

Mais $\cos OP=\cos OM\cos PM$ et $\cos OP'=\cos OM\cos P'M$; donc on a

$$\frac{\cos PM}{\cos P'M}=\frac{\cos r}{\cos r'},$$

d'où

$$\frac{\tang \dfrac{PM - P'M}{2}}{\tang \dfrac{P+P'}{2}} = \frac{\tang \dfrac{r+r'}{2}}{\tang \dfrac{P-P'}{2}}.$$

Ce qui démontre que la position du point M est la même, quel que soit le cercle sécant. Donc le lieu demandé est un grand cercle perpendiculaire à l'axe des pôles.

Si l'on calcule tang PM, on trouve

$$\frac{\tang^2 \dfrac{PP'}{2} + \tang\left(\dfrac{r+r'}{2}\right)\tang\left(\dfrac{r-r'}{2}\right)}{\left[1 - \tang\left(\dfrac{r+r'}{2}\right)\tang\left(\dfrac{r-r'}{2}\right)\right]\tang \dfrac{PP'}{2}},$$

résultat analogue à celui de la géométrie plane.

Les trois axes radicaux de trois cercles combinés deux à deux se coupent en un point, qu'on nomme *centre radical* des trois cercles.

Remarque. Quand deux cercles sont tangents, le point de contact peut se trouver entre les deux pôles, ou sur le prolongement de l'arc qui les joint. Dans le premier cas, nous dirons qu'il y a contact de *première* espèce, et de *seconde* dans l'autre cas. Cette convention nous servira pour énoncer en moins de mots les théorèmes suivants.

11°. *Étant donnés deux cercles* P, P′, *si l'on trace deux autres cercles* Q, Q′ *ayant avec chacun des premiers un contact de même espèce, le centre de similitude directe de* PP′ *sera sur l'axe radical des cercles* Q *et* Q′, *et réciproquement.*

Si le cercle Q a un contact de première espèce avec P et P′, et Q′ un contact de deuxième espèce avec chacun des mêmes cercles, il faudra dans la deuxième partie de l'énoncé prendre le centre de similitude inverse. Si le cercle Q a avec P un contact de première espèce, et Q′

avec P′ un contact de la deuxième, il faudra dans les deux parties de l'énoncé considérer le centre de similitude inverse. Ces théorèmes résultent immédiatement de la définition de l'axe radical.

12°. *Étant donnés trois cercles* P, P′, P″, *si l'on trace deux cercles* Q, Q′, *ayant avec chacun des premiers un contact de première espèce pour* Q, *de deuxième pour* Q′, *le centre de similitude inverse de* Q *et* Q′ *sera sur chacun des trois axes radicaux des cercles donnés pris deux à deux; il sera donc le centre radical de ces trois cercles; de plus, comme chaque centre de similitude directe des cercles* P, P′, P″ *appartiendra à l'axe radical des cercles* Q, Q′, *il s'ensuit que l'axe de similitude directe des cercles donnés sera l'axe radical des mêmes cercles* Q, Q′.

Si le cercle Q avait avec P, P′ un contact de première espèce, et de seconde avec P″; si de plus Q′ avait un contact de seconde espèce avec P, P′, et de première avec P″, il faudra prendre, au lieu de l'axe de similitude directe, un axe de similitude inverse.

Étant donnés trois cercles P, P′, P″ *sur une sphère, leur mener un cercle tangent.*

Supposons le problème résolu, et soient Q, Q′ deux cercles ayant avec les trois cercles donnés un contact de première espèce pour Q, de seconde pour Q′. Soient X″, X′, X les trois centres de similitude directe des cercles donnés et O leur centre radical. Ce point sera le centre de similitude inverse des cercles cherchés. Nommons A, A′ les points de contact sur le cercle P, l'arc AA′ passera par le point O. Pour avoir un second point de AA′, menons par les points A, A′ deux arcs tangents au cercle P : soit Z leur point de rencontre; comme de ce point Z partent deux tangentes égales menées aux cercles Q, Q′, ce point Z est sur l'axe radical des cercles Q, Q′, c'est-à-dire sur l'arc XX′X″. Donc l'arc AA′ doit passer par le pôle de l'arc XX″ relativement au cercle P. Il suffira donc de joindre ce pôle au point O par un arc de grand cercle, et l'intersection de cet arc avec le cercle P déterminera les points A, A′; les autres points de contact se trouvent de la même manière.

Si l'on fait la même construction en remplaçant l'axe de similitude directe par chacun des trois axes de similitude inverse, on déterminera les cercles qui ont avec P et P′ un contact de première espèce, et de la seconde avec P″, ou réciproquement. La construction relative à chaque axe radical donnant deux cercles, on aura en général huit solutions.

Beaucoup de problèmes peuvent se ramener à une question de contact. Nous nous bornerons à indiquer quelques exemples.

1°. Étant donnés deux points sur une circonférence, trouver sur cette circonférence un troisième point tel, que le joignant aux deux points donnés par deux arcs de grand cercle, ces arcs fassent entre eux un angle donné.

Par la considération du triangle polaire, on ramène le problème à construire un triangle connaissant le cercle inscrit, un angle et le côté opposé, et cette question revient elle-même à mener un grand cercle tangent à deux cercles donnés.

2°. Construire un triangle sphérique, connaissant le cercle circonscrit, un côté et la surface.

Ce problème se résout comme le précédent.

3°. Construire un triangle sphérique, connaissant la base, la hauteur et la surface.

Il peut aussi se ramener par le triangle polaire à mener un cercle tangent à deux cercles donnés.

4°. Étant donnés les grands axes et les foyers de deux ellipses sphériques qui ont un foyer commun, trouver leurs points d'intersection.

Ce problème se ramène à tracer un cercle tangent à deux cercles et passant par un point donné.

Nous terminerons cette Note par quelques énoncés de théorèmes et problèmes de Géométrie sphérique.

1°. Étant donnés deux points A et B sur une circonférence, si l'on prend un point quelconque C sur l'arc AMB, qu'on mène les arcs CA, CB et qu'on les prolonge jusqu'à leur rencontre en C′, le triangle AC′B aura une surface constante, et, par suite, le lieu du point C′ sera une circonférence de cercle (*).

2°. Si par le point de contact de deux cercles tangents on fait passer un arc de grand cercle qui coupe les cercles donnés en A et B, et un second qui les coupe en A′ et B′, si l'on joint A à A′ et B à B′, qu'on prolonge les arcs AA′, BB′ jusqu'à leur rencontre aux points C et D, les deux triangles AA′C, BB′D seront équivalents.

3°. Étant donné un arc de grand cercle AB, si à partir de son point milieu M on prend sur cet arc un quadrant MN, qu'on mène par N un arc perpendiculaire NP sur AB, la somme des distances d'un point quelconque O de NP aux points A et B est constante et égale à π, et les angles formés par OA et OB avec l'arc AB seront égaux. Si l'on diminue de plus en plus l'arc AB jusqu'à la limite zéro, on arrive au théorème suivant : Le lieu des intersections successives des cercles qui font avec une circonférence de grand cercle donnée des angles égaux, est une circonférence de petit cercle ayant pour distance polaire le complément de la mesure de l'angle donné.

4°. Étant données deux circonférences qui se coupent aux points A et B, si par le point A on suppose mené un arc sécant MAN de longueur donnée, trouver la distance

(*) Si l'arc AMB est une demi-circonférence, la surface constante sera équivalente à un grand cercle de la sphère.

polaire d'un cercle qui passerait par les trois points MNB.

5°. Étant donné un triangle sphérique ABC, si l'on prolonge les trois côtés jusqu'à ce qu'ils se coupent aux points A′, B′, C′, on aura formé trois triangles ABC′, etc.; si à chacun d'eux on circonscrit un cercle, les tangentes des distances polaires de ces trois cercles sont comme les tangentes des demi-côtés du triangle donné.

6°. Dans un triangle sphérique rectangle, la tangente carrée de la moitié de l'hypoténuse est plus petite que la somme des carrés des tangentes des demi-côtés, et la différence est égale au produit des carrés des tangentes des trois demi-côtés.

7°. Transformer par une construction géométrique un parallélogramme sphérique en un carré sphérique équivalent.

8°. Étant donnés deux polygones réguliers sphériques d'un même nombre (n) de côtés, on propose de construire un polygone régulier du même nombre de côtés, équivalent à leur somme.

Ce problème se résout aisément par la géométrie. Si on le traite par le calcul on trouve, en désignant par ρ, ρ', ρ'' les distances polaires des trois cercles circonscrits aux polygones,

$$\tang^2 \frac{\rho''}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\rho}{2} + \sin^2 \frac{\rho'}{2} - 4 \sin^2 \frac{\rho}{2} \sin^2 \frac{\rho'}{2} \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\rho + \rho'}{2} \cos \left(\frac{\rho - \rho'}{2}\right)}.$$

Si $n = 4$, on a

$$\tang^2 \frac{\rho''}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\rho}{2} \cos \frac{\rho'}{2} + \cos^2 \frac{\rho}{2} \sin^2 \frac{\rho'}{2}}{\cos \frac{\rho + \rho'}{2} \cos \left(\frac{\rho - \rho'}{2}\right)}.$$

Si $n = \infty$, on trouve

$$\sin^2 \frac{\rho''}{2} = \sin^2 \frac{\rho}{2} + \sin^2 \frac{\rho'}{2},$$

résultat facile à vérifier.

9°. Si l'on projette un point C d'une circonférence sur un arc AB passant au pôle, les carrés des sinus des demi-arcs AC et CB sont comme les sinus de leurs projections sur l'arc diamétral.

10°. Étant donnés un triangle sphérique ABC et un point O, si l'on joint ce point à un sommet A, qu'on mène sur l'arc OA et par le sommet A un arc perpendiculaire prolongé jusqu'à la rencontre de BC en un point X, si l'on opère de même pour les deux autres sommets, les trois points ainsi obtenus sont sur une circonférence de grand cercle.

11°. Etant donnés une courbe sur la sphère et un point O, si on le joint à un point A quelconque de la courbe, puis qu'on divise l'arc OA au point A′ de manière à avoir $\frac{\sin OA'}{\sin AA'} = \alpha$, la courbe, lieu du point A′, aura la propriété suivante: si par les points homologues A et A′ on mène une tangente à chaque courbe, le point de rencontre (X) des arcs tangents sera toujours à 90 degrés de distance du point A, ce qui donne une construction simple pour mener une tangente à la seconde courbe, si l'on sait mener une tangente à la première; si la première courbe est une circonférence, le lieu du point X sera une autre circonférence ayant même pôle que la première. Si $\alpha = 1$, le lieu du point A′ sera une ellipse sphérique dont on peut trouver géométriquement le centre et les axes.

12°. Si l'on projette deux points A, A′ sur une circonférence de grand cercle (mn), par les arcs AB, A′ B′, si l'on prend sur ces arcs ou leurs prolongements deux points

C, C′ tels, qu'on ait la proportion

$$\frac{\text{tang}\,(AB)}{\text{tang}\,(CB)} = \frac{\text{tang}\,(A'B')}{\text{tang}\,(C'B')},$$

si enfin on joint A à A′, C à C′, les arcs ainsi déterminés et l'arc *mn* auront un point commun, et réciproquement.

Corollaire. Si l'on projette un point quelconque A d'une courbe donnée sur une circonférence de grand cercle *mn*, si l'on détermine sur l'arc AB projetant un point C par la relation $\frac{\text{tang}\,AB}{\text{tang}\,CB} = \alpha$, le lieu du point C jouira de la propriété suivante : les tangentes aux deux courbes menées par les points conjugués A et C iront couper l'arc *mn* au même point ; ce qui donne un moyen simple de mener une tangente à la seconde courbe par un point pris sur la courbe ou hors de la courbe, si l'on sait résoudre le problème de contact pour la première. Si, par exemple, on compare l'ordonnée y d'une ellipse sphérique à l'ordonnée Y de son cercle principal, on démontre facilement qu'on a la relation $\frac{\text{tang}\,y}{\text{tang}\,Y} = \frac{\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a}$ (a et b étant les demi-axes de l'ellipse). Cette relation combinée avec le théorème (12) donne une construction simple de l'ellipse par points et un moyen de mener une tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe ou hors de la courbe. On peut appeler ellipses *semblables* celles pour lesquelles on a la relation $\frac{\text{tang}\,a}{\text{tang}\,b} = \frac{\text{tang}\,a'}{\text{tang}\,b'}$. Si les axes homologues de deux ellipses semblables sont sur une même circonférence, on pourra leur mener une tangente commune. Il suffira pour cela de tracer une circonférence qui soit tangente commune aux deux cercles principaux. Soient A, A′ les points de contact : si l'on détermine sur chaque ellipse les points correspondants A et A′, ces points correspondants détermineront la circonférence tangente aux deux ellipses.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1848;

Par M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

Composition de Mécanique.

Un cylindre droit à bases circulaires, de matière hétérogène, mais dont tous les points situés sur une même droite parallèle à l'axe ont la même densité, est posé sur un plan horizontal. Déterminer le mouvement qu'il prend sous l'action de la pesanteur, et en particulier le mouvement du centre de gravité, ainsi que celui d'un point quelconque du rayon qui passe par ce centre. On fera abstraction du frottement.

I. Lorsqu'un cylindre droit quelconque, posé par une arête sur un plan horizontal sans frottement, de manière que son centre de gravité ne soit pas dans le plan vertical de l'arête de contact, est abandonné sans vitesse à l'action de la pesanteur, les arêtes ne doivent pas changer de direction pendant le mouvement qu'il prend, et les bases doivent rester toujours dans les plans verticaux où elles se trouvent d'abord; car les forces qui donneraient à chaque instant à ce corps supposé libre le mouvement qu'il a dans son état réel, savoir : son poids et la résistance du plan d'appui suivant l'arête de contact, sont des forces verticales qui ne peuvent conséquemment ni faire tourner autour d'un axe vertical, ni faire glisser dans la direction horizontale des arêtes.

Quand le cylindre est formé de *filets* homogènes parallèles aux arêtes, son mouvement ne dépend pas de sa hauteur, ou, en d'autres termes, un tronçon compris entre deux plans perpendiculaires aux arêtes, s'il était détaché du reste, prendrait d'abord et aurait continuellement ensuite un mouvement identique à celui qu'il a dans son état réel. En effet, si le cylindre, au moment où on le pose sur le plan, était coupé en un nombre quelconque de tronçons égaux par des plans perpendiculaires aux arêtes, et si ces tronçons étaient sans action les uns sur les autres, il est clair qu'ils prendraient tous le même mouvement; or la juxtaposition des parties ne saurait altérer ce mouvement commun, car elle ne peut produire ou amener aucun frottement, et il ne sera pas altéré davantage par la liaison complète qui reconstitue le cylindre.

D'après cela, il suffit pour résoudre le problème proposé de considérer un tronçon détaché du cylindre par deux plans perpendiculaires aux arêtes; nous pourrons supposer ce tronçon infiniment mince et le regarder comme un cercle composé de points matériels inégalement pesants, puisque le cylindre dont il s'agit est de révolution; enfin nous pourrons prendre la section circulaire contenant le centre de gravité G du cylindre, qui est équidistante de ses bases, et dont le point G sera aussi le centre de gravité.

II. Soient, à la fin du temps t écoulé depuis que le mouvement a commencé,

C la position de centre du cercle qui touche alors en A le plan horizontal;

M un des points matériels dont il se compose;

f la force variable, dirigée suivant AC, qui représente la résistance du plan:

et, par rapport à la trace invariable du plan du cercle sur le plan horizontal et à un axe vertical, pris pour axes des x et des y d'origine O, soient

x' l'abscisse des points A et C (l'ordonnée de C est toujours égale au rayon);

x_1, y_1 les coordonnées de G;
x, y celles de M. (Ces deux dernières varient avec le temps comme les précédentes, de plus avec la position de M dans le cercle.)

Nous désignerons en outre par a le rayon du cercle, par m sa masse et par μ celle du point matériel M.

En appliquant au cercle la force f, on peut le considérer comme libre et l'on a les équations

$$(1) \qquad \Sigma.\mu.\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$(2) \qquad f - mg - \Sigma.\mu\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$(3) \qquad x'f - mgx_1 + \Sigma.\mu\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$

qui expriment l'équilibre des forces perdues. (g représente la gravité et le signe Σ indique une somme qui s'étend à tous les points du cercle.)

On déduit immédiatement de l'équation (1) que $x_1 = \alpha$, α étant une constante, car $\frac{dx}{dt}$ est nulle pour $t = 0$.

Donc *le centre de gravité du cylindre ne quittera pas la verticale sur laquelle il se trouve d'abord, et ne pourra que s'élever ou s'abaisser sur cette droite.*

L'élimination de f entre les équations (2) et (3) donne

$$(4) \quad mg(x' - \alpha) + x'.\Sigma.\mu\frac{d^2y}{dt^2} + \Sigma.\mu\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$

en remplaçant x_1 par α.

Soient encore :

r et θ les coordonnées polaires du point quelconque M du cercle par rapport à l'axe vertical CA et au point C pris pour pôle (θ est positif en tournant autour de C dans le même sens que de Ox vers Oy autour du point O);

r_1 et θ_1 les coordonnées polaires du centre de gravité G.

r_1 est constant, r ne varie qu'avec la position de M dans le cercle, θ_1 qu'avec le temps, et θ varie des deux manières.

On a évidemment

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} x' = \alpha - r_1 \sin\theta_1, \\ x = \alpha - r_1 \sin\theta_1 + r\sin\theta, \\ \text{et } y = a - r\cos\theta. \end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs de x', x et y dans l'équation (4), en ayant égard à ce que

$$\Sigma.\mu r\cos\theta = mr_1\cos\theta_1 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta_1}{dt^2},$$

ainsi qu'au mode de variation de r, θ et θ_1, et mettant $m(k^2 + r_1^2)$ au lieu de $\Sigma.\mu r^2$ (moment d'inertie du cercle par rapport à son centre), il vient, toutes réductions faites,

$$(6)\ (k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1)\cdot\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + r_1^2\sin\theta_1.\cos\theta_1\cdot\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + gr_1\sin\theta_1 = 0.$$

Cette équation est susceptible d'abaissement, car elle ne contient pas t d'une manière implicite; pour arriver tout de suite à une équation linéaire du premier ordre, il suffit de poser

$$\frac{d\theta_1}{dt} = (2\zeta)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{d\zeta}{d\theta_1}.$$

En substituant dans l'équation (6), on trouve

$$(7)\quad \frac{d\zeta}{d\theta_1} + \frac{2r_1\sin\theta_1\cos\theta_1}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1}\cdot\zeta + \frac{gr_1\sin\theta_1}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1} = 0.$$

L'intégrale de cette équation s'obtient par un calcul connu : c'est

$$\zeta = \frac{C_1 + gr_1\cos\theta_1}{k_2 + r_1^2\sin^2\theta_1};$$

et, en déterminant l'arbitraire C_1 de manière à ce que, pour $t = 0$, $\theta_1 = \theta_0$ et $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$ (θ_0 est la valeur initiale donnée de θ_1), on arrive à

$$(8) \qquad \frac{d\theta_1}{dt} = \mp \sqrt{2gr_1} \cdot \sqrt{\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2\theta_1}}.$$

La forme de cette équation montre l'impossibilité d'exprimer t en fonction de θ_1 autrement que par une série ou une intégrale définie, et d'avoir θ_1 en fonction de t; mais cela ne serait nécessaire que pour assigner à chaque instant la position du cylindre, et, comme on va le voir, la discussion de quelques-unes des équations précédentes, ainsi que de

$$(9) \qquad y_1 = a - r_1 \cos\theta_1,$$

achève de faire connaître toutes les circonstances du mouvement.

III. Il faut remarquer d'abord que si θ_1 ne restait pas entre θ_0 et $-\theta_0$, l'expression (8) de $\frac{d\theta_1}{dt}$ deviendrait imaginaire, ce qui ne doit pas arriver; qu'ainsi, en supposant $\pi > \theta_0 > 0$, on doit prendre premièrement le signe — devant le radical, dans le second membre de l'équation (8), afin que $d\theta_1$ soit négative jusqu'à ce qu'on ait $\theta_1 = -\theta_0$, puis le signe $+$, afin que $d\theta_1$ soit positive jusqu'à ce qu'on soit revenu à $\theta_1 = \theta$, et ainsi de suite alternativement. Cela posé :

1°. D'après l'équation (8), la vitesse angulaire relative du cercle autour de son centre C, représenté par le second membre de cette équation, est *maxima* (abstraction faite du signe) et égale à $2\frac{\sqrt{gr_1}}{k} \cdot \sin\frac{\theta_0}{2}$ pour $\theta_1 = 0$, *minima* et nulle pour $\theta_1 = \pm\theta_0$, et cette vitesse est la même, sauf le sens, pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. Donc

Abstraction faite du mouvement de l'axe du cylindre, ce corps oscille autour de cette droite entre deux positions symétriques par rapport au plan vertical qui la contient; les oscillations sont isochrones et se composent chacune de deux parties égales.

L'amplitude de ces oscillations est $2\theta_0$, et leur durée T sera donnée par la formule

$$T = 2\sqrt{2gr_1} \cdot \int_0^{\theta_0} d\theta \cdot \sqrt{\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2\theta}}.$$

2°. La plus petite et la plus grande valeur de x' que donne la première des équations (5) sont $\alpha - r_1 \sin\theta_0$ et $\alpha + r_1 \sin\theta_0$ qui répondent à $\theta_1 = \pm\theta_0$, et cette équation fournit des valeurs de x' équidifférentes de α pour celles de θ_1 qui sont équidifférentes de zéro. En outre, on déduit de la même équation et de l'équation (8)

$$\frac{dx'}{dt} = \pm r_1 \sqrt{2gr_1} . \cos\theta_1 \cdot \sqrt{\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2 \sin^2\theta_1}},$$

ce qui montre que *la vitesse du centre* C *sur la droite* y = a *est toujours égale à la vitesse angulaire relative autour de ce centre, multipliée par la projection de* CG *sur la verticale* Oy; ainsi $\frac{dx'}{dt}$ est nulle pour $\theta_1 = \pm\theta_0$, atteint (abstraction faite du signe) son *maxima*

$$2r\frac{\sqrt{gr_1}}{k} \cdot \sin\frac{\theta_0}{2}$$

pour $\theta_1 = 0$, et prend des valeurs absolues égales pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. Donc

L'axe du cylindre oscille parallèlement à sa première position (I), *dans le plan horizontal où il doit toujours* *rester entre cette position et une autre située à la distance* $2r_1 \sin\theta_0$ *de celles-là; ces oscillations coïncident avec les précédentes, ont même durée et sont aussi formées de deux parties égales.*

3°. D'après l'équation (9), les valeurs extrêmes de y_1 sont $\alpha - r_1\cos\theta_0$ et $\alpha - r_1$ qui répondent à $\theta_1 = \pm\theta_0$ et $\theta_1 = 0$, et y_1 prend des valeurs égales pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro. De plus, cette équation et l'équation (8) donnent

$$\frac{dy_1}{dt} = \mp r_1\sqrt{2gr_1}.\sin\theta_1 \cdot \sqrt{\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1}},$$

d'où il suit que $\frac{dy_1}{dt}$ est nulle pour $\theta_1 = \pm\theta_0$ et $\theta_1 = 0$, nécessairement *maxima* (abstraction faite du signe) pour de certaines valeurs de θ_1 entre 0 et $\pm\theta_0$, et prend des valeurs qui diffèrent seulement par le signe pour des valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro entre lesquelles on n'a qu'une fois $\theta_1 = 0$. Donc

Le centre de gravité G *oscille sur la verticale de sa position primitive* $[x_1 = \alpha, \text{II}]$, *en descendant d'abord de* $r_1(1 - \cos\theta_0)$, *puis remontant de la même quantité; et ces oscillations coïncident encore avec celles qui se font autour de l'axe du cylindre.*

4°. Pour un point M′ du rayon qui passe par le centre de gravité G, à la distance r' du point C, les deux dernières des équations (5) donnent

(10) $\qquad x - \alpha = (r' - r_1)\sin\theta_1, \quad y - a = r'\cos\theta_1.$

En éliminant θ_1 entre ces équations, il vient

$$\left(\frac{x-\alpha}{r'-r_1}\right)^2 + \left(\frac{y-a}{r'}\right)^2 = 1,$$

qui représente une ellipse si $r' \gtrless \frac{r_1}{2}$, un cercle si $r' = \frac{r_1}{2}$; le centre est toujours le point (α, a) situé sur la verticale où se meut le centre de gravité G : si $r' > \frac{r_1}{2}$, le grand axe de l'ellipse est parallèle à Oy, et si $r' < \frac{r_1}{2}$, il est parallèle à Ox.

v désignant la vitesse absolue de M' à la fin du temps t, on déduit des équations (8) et (10)

$$v = \sqrt{2gr_1\left[r'^2 - r_1(2r' - r_1)\cos^2\theta_1\right] \cdot \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_0}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1}};$$

ainsi cette vitesse, nulle pour $\theta_1 = \pm\,\theta_0$, prend la même valeur pour deux valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro, et atteint son maxima $\pm\, 2(r' - r_1)\frac{\sqrt{gr_1}}{k} \cdot \sin\frac{\theta_0}{2}$ pour $\theta_1 = 0$. Donc

Le point M' *oscille sur un arc d'ellipse ou de cercle, formé de deux parties symétriques par rapport à la verticale du centre de gravité, et ces oscillations isochrones, de durée* T, *coïncident avec les autres.*

Il ne reste plus à chercher que la pression exercée par le cylindre sur le plan horizontal. Soient,

p cette pression à la fin du temps t,

P le poids du cylindre.

On a (I)

$$p = \frac{P}{mg} \cdot f,$$

et, en remplaçant f par sa valeur en fonction de θ_1 tirée des équations (2, 5, 7, 8),

$$p = Pk^2\left[\frac{1}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1} + \frac{2r_1^2\cos\theta_1 . (\cos\theta_1 - \cos\theta_0)}{(k^2 + r_1^2\sin^2\theta_1)^2}\right].$$

On voit p augmenter de

$$P . \frac{k^2}{k^2 + r_1^2\sin^2\theta_0} \quad \text{à} \quad P . \left(1 + 4\frac{r_1^2}{k^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right),$$

tandis que θ_1 varie de $\pm\,\theta_0$ à zéro, et prend la même valeur pour deux valeurs de θ_1 équidifférentes de zéro.

Notes.

I. On peut arriver aux équations (1) et (4), sans appliquer la force f au cercle, afin de le considérer ensuite comme libre. Les composantes des forces perdues sont seulement ainsi

$$-\mu\frac{d^2x}{dt^2},\quad -\mu\left(g+\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

pour l'élément (x, y) de masse μ : et on doit avoir

$$\Sigma.\mu\left[\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\left(g+\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y\right]=0,$$

δx, δy étant liées par la condition que le cercle touche toujours le plan horizontal. Or 1° pour un déplacement virtuel horizontal, $\delta x =$ const, $\delta y = 0$, ce qui fournit l'équation (1); 2° pour un déplacement virtuel dans lequel le cercle tournerait de l'angle infiniment petit ω autour de son centre C,

$$\delta x = (a - y)\,\omega,\quad \delta y = (x - x')\,\omega,$$

ce qui fournit l'équation (4) en ayant égard à l'équation (1).

II. Si le plan est incliné au lieu d'être horizontal, en y posant le cylindre de manière que ses arêtes soient horizontales, ce qui a été dit dans l'article I subsiste, pourvu que l'on considère un cylindre formé de filets homogènes aussi bien dans la première partie du raisonnement que dans la seconde.

λ désignant l'angle d'inclinaison du plan, et l'axe des x étant une ligne de pente dirigée de haut en bas, on a, au lieu des équations (1), (2) et (3),

$$mg\sin\lambda - \Sigma.\mu\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

$$f - mg\cos\lambda - \Sigma.\mu\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

$$x'f - mg(x_1\cos\lambda + y_1\sin\lambda) + \Sigma.\mu\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0.$$

Le mouvement du centre de gravité parallèlement au plan est uniformément accéléré et déterminé par

$$x_1 = \alpha + \frac{1}{2}gt^2\sin\lambda.$$

Les équations (6) et (8) sont remplacées par des équations qui diffèrent seulement de celles-là en ce que $g\cos\lambda$ s'y trouve au lieu de g; par conséquent, la partie de la discussion contenue dans l'article III (1°) sur le mouvement angulaire du cylindre autour de son axe subsiste, à cela près que la durée des oscillations est réduite à $T\sqrt{\cos\lambda}$.

x' est donnée par l'équation

$$x' = \alpha + \frac{1}{2}gt^2\sin\lambda - r_1\sin\theta_1,$$

ainsi cette abscisse du point C croîtra indéfiniment, et l'axe du cylindre n'oscille pas de la manière indiquée dans l'article III (2^o). Cependant x' peut décroître au commencement, lorsque θ_1 passe de $-\theta_0$ à θ_0, car on a

$$\frac{dx'}{dt} = gt \sin\lambda - r_1 \cos\theta_1 \frac{d\theta_1}{dt},$$

et $r_1 \cos\theta_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt}$ (qui est positif avec $d\theta_1$) peut surpasser $gt \sin\lambda$; cela ne se présentera plus et x' sera constamment croissante, après que t aura atteint $\frac{2r_1}{k\sin\lambda} \cdot \sqrt{\frac{r_1\cos\lambda}{g}} \cdot \sin\frac{\theta_0}{2}$ qui est le maximum de $\frac{r_1\cos\theta_1}{g\sin\lambda} \cdot \frac{d\theta_1}{dt}$. Quand x' décroît, le cylindre remonte le plan incliné.

L'équation (9) n'est pas modifiée, et, par conséquent, le centre de gravité G a, sur la droite mobile représentée par l'équation (11), le mouvement décrit dans l'article III (3^o); la durée des oscillations est encore réduite à $T\sqrt{\cos\lambda}$.

Enfin, un point M' du rayon CG ne se meut plus sur une ellipse fixe (III, 4^o), mais sur une ellipse qui glisse parallèlement à Ox dans le plan xOy, sans changer de forme ni de grandeur, et dont le centre suit le point d'intersection des droites représentées par les équations

$$x = \alpha + \frac{1}{2} gt^2 \sin\lambda, \quad y = a.$$

MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS;

PAR M. BRIOSCHI,

Professeur à l'Université de Pavie.

Soient

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\ \varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0, \end{cases}$$

les deux équations; $x_1, x_2, \ldots x_n$ les racines de la première supposées inégales, et

$$(2) \qquad V = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n).$$

Supposons que les équations (1) aient r (et seulement r) racines communes, on a la proposition suivante :

Théorème. *Les* r *racines communes aux deux équations* (1) *sont les racines de l'équation suivante,*

$$\frac{d^r V}{db_m^r}x^r - r\frac{d^r V}{db_m^{r-1}\,db_{m-1}}x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{d^r V}{db_m^{r-2}\,db_{m-1}^2}x^{r-2} - \dots$$
$$-(-1)^r r\frac{d^r V}{db_m\,db_{m-1}^{r-1}}x + (-1)^r\frac{d^r V}{db_{m-1}^r} = 0,$$

ou de la suivante,

$$\frac{d^r V}{da_n^r}x^r - r\frac{d^r V}{da_n^{r-1}\,da_{n-1}}x^{r-1} + \dots$$
$$-(-1)^r r\frac{d^r V}{da_n\,da_{n-1}^{r-1}}x + (-1)^r\frac{d^r V}{da_{n-1}^{r-1}} = 0.$$

En effet, de l'équation (2) on déduit

$$(3)\left\{\begin{aligned}
\frac{dV}{db_{s_1}} &= x_1^{r_1}V_1 + x_2^{r_2}V_2 + \dots + x_n^{r_n}V_n,\\
\frac{d^2V}{db_{s_1}db_{s_2}} &= \left(x_1^{r_1}x_2^{r_2} + x_1^{r_2}x_2^{r_1}\right)V_{1,2} + \left(x_1^{r_1}x_3^{r_2} + x_1^{r_2}x_3^{r_1}\right)V_{1,3} + \dots\\
\frac{d^3V}{db_{s_1}db_{s_2}db_{s_3}} &= \left\{\begin{array}{l} x_3^{r_3}\left(x_1^{r_1}x_2^{r_2}+x_1^{r_2}x_2^{r_1}\right) + x_2^{r_3}\left(x_1^{r_1}x_3^{r_2}+x_1^{r_2}x_3^{r_1}\right)\\ + x_1^{r_3}\left(x_2^{r_1}x_3^{r_2} + x_2^{r_2}x_3^{r_1}\right)\end{array}\right\}V_{1,2,3} +
\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite. On a posé

$$V_1 = \frac{V}{\varphi(x_1)},\quad V_{1,2} = \frac{V_1}{\varphi(x_2)},$$
$$V_{1,2,3} = \frac{V_{1,2}}{\varphi(x_3)}\dots\quad r_1 = m - s_1,\ r_2 = m - s_2,\dots$$

Si les équations (1) ont une seule racine commune, par exemple x_1, la première des équations (3) donne

$$\frac{dV}{db_{s_1}} = x_1^{r_1}V_1$$

et, par conséquent,

$$\frac{dV}{db_m}x_1 - \frac{dV}{db_{m-1}} = 0,$$

résultat déjà obtenu par M. Richelot.

Si les équations (1) ont deux seules racines x_1, x_2 communes, la seconde des équations (3) donne

$$\frac{d^2 V}{db_{s_1} db_{s_2}} = \left(x_1^{r_1} x_2^{r_2} + x_1^{r_2} x_2^{r_1}\right) V_{1,2},$$

de laquelle

$$\frac{d^2 V}{db_m^2} = 2 V_{1,2}, \quad \frac{d^2 V}{db_m db_{m-1}} = (x_1 + x_2) V_{1,2},$$

$$\frac{d^2 V}{db_{m-1}^2} = 2 x_1 x_2 V_{1,2},$$

et les x_1, x_2 seront les racines de l'équation

$$\frac{d^2 V}{db_m^2} x^2 - 2 \frac{d^2 V}{db_m db_{m-1}} x + \frac{d^2 V}{db_{m-1}^2} = 0.$$

De même, si les équations (1) ont trois seules racines communes x_1, x_2, x_3, de la troisième équation (3), on a

$$\frac{d^3 V}{db_m^3} = 6 V_{1,2,3}, \quad \frac{d^3 V}{db_m^2 db_{m-1}} = 2(x_1 + x_2 + x_3) V_{1,2,3},$$

$$\frac{d^3 V}{db db_{m-1}^2} = 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) V_{1,2,3}, \quad \frac{d^3 V}{db_{m-1}^3} = x_1 x_2 x_3 V_{1,2,3},$$

et en conséquence les trois racines communes seront les racines de l'équation

$$\frac{d^3 V}{db_m^3} x^3 - 3 \frac{d^3 V}{db_m^2 db_{m-1}} x^2 + 3 \frac{d^3 V}{db_m db_{m-1}^2} x - \frac{d^3 V}{db_{m-1}^3} = 0.$$

Le théorème se trouve ainsi démontré par analogie (*).

(*) M. Brioschi a trouvé depuis une démonstration rigoureuse.

SOLUTION DE LA QUESTION 256

(voir t. X, p. 256);

PAR M. COMBESCURE,
Professeur.

Soit un quadrilatère ABCD circonscrit à un cercle; on décrit un second cercle touchant le côté AB en B et le côté CD, puis un troisième cercle touchant le côté AD en D et le côté BC. La droite qui va du point A au centre du second cercle fait avec le côté AB un angle égal à l'angle que fait la droite qui va de A au centre du troisième cercle avec le côté AD. (QUIDDE.)

Soient O le centre du cercle inscrit au quadrilatère ou le point de concours des bissectrices des angles A, E, F, B (*); I, I′ les centres des deux cercles obtenus par l'intersection des bissectrices EO, FO avec les perpendiculaires BI, DI′ aux côtés AB, AD. En désignant par A, B, C, D les angles du quadrilatère, le triangle BOE donne

$$\text{angle BOE} = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \overline{A+D}\right)$$
$$= \frac{A+B+D-180^\circ}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

On aurait semblablement

$$\text{angle DOF} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Les triangles BOI, DOI′ donneront dès lors

$$\text{BI} = \frac{\text{BO}.\cos\frac{C}{2}}{\sin \text{BIO}} = \frac{\text{BO}.\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{E}{2}} = \frac{\text{BO}.\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A+D}{2}},$$

$$\text{DI}' = \frac{\text{DO}.\cos\frac{C}{2}}{\sin \text{DI}'\text{O}} = \frac{\text{DO}.\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A+D}{2}}.$$

(*) E est l'intersection de AB, CD, et F l'intersection de BC, AD.

Mais

$$BO = \frac{AB.\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}},\quad DO = \frac{AD.\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+D}{2}};$$

donc

$$\frac{BI}{AB} = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+D}{2}} = \frac{DI'}{AD}.$$

Les triangles rectangles IBA, I'DA sont donc semblables, et, partant, les lignes AI, AI' sont également inclinées respectivement sur les côtés AB, AD. C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 276

(voir t. XII, p. 259);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN.

Trois points A, B, C étant liés de manière à conserver toujours les mêmes angles, si trois forces appliquées à ces points sont en équilibre, il faut, outre les conditions ordinaires, que les trois points et le point de rencontre des trois forces soient sur une même circonférence.

(MÖBIUS.)

Notations. x, y; x', y'; x'', y'', coordonnées rectangulaires des points A, B, C;

P, P', P'', forces appliquées respectivement aux points A, B, C;

a, b, c, angles des directions de ces forces avec l'axe des x;

θ, angle de la direction AB avec l'axe des x;

α, β, angles constants formés par les directions AC, BC avec la direction AB.

Les équations qui expriment les liaisons du système sont

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\operatorname{tang}\theta,\quad \frac{y''-y}{x''-x}=\operatorname{tang}(\theta+\alpha),$$

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\operatorname{tang}(\theta+\beta).$$

En posant

$$\operatorname{tang}\alpha=m,\quad \operatorname{tang}\beta=n,$$

on en déduira

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} y' &= y+(x'-x)\operatorname{tang}\theta,\\ y'' &= y-\frac{n(m+\operatorname{tang}\theta)}{m-n}(x'-x),\\ x'' &= x\cdot\frac{m(1-n\operatorname{tang}\theta)}{m-n}-x'\cdot\frac{n(1-m\operatorname{tang}\theta)}{m-n}.\end{aligned}\right.$$

En différentiant ces équations, on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \delta y' &= \delta y+\frac{\delta\theta}{\cos^2\theta}(x'-x)+\operatorname{tang}\theta(\delta x'-\delta x),\\ \delta y'' &= \delta y-\frac{n\,\delta\theta}{(m-n)\cos^2\theta}(x'-x)\\ &\quad -\frac{n(m+\operatorname{tang}\theta)}{m-n}(\delta x'-\delta x),\\ \delta x'' &= \frac{mn.\delta\theta}{(m-n)\cos^2\theta}(x'-x)+\frac{m(1-n)\operatorname{tang}\theta}{m-n}\delta x\\ &\quad -\frac{n(1-m\operatorname{tang}\theta)}{m-n}\delta x',\end{aligned}\right.$$

Si dans l'équation

$$\sum(\mathrm{P}\cos a\,\delta x+\mathrm{P}\sin a\,\delta y)=0,$$

que fournit le principe des vitesses virtuelles, nous substituons les valeurs précédentes des variations $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$, en égalant ensuite à zéro les coefficients des variations arbitraires δx, δy, $\delta' x$, $\delta\theta$, nous obtiendrons les quatre équations suivantes, pour exprimer les conditions d'équilibre :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&P\cos a - P'\sin b.\operatorname{tang}\theta + P''\cos c.\frac{m(1-n\operatorname{tang}\theta)}{m-n}\\
&\qquad\qquad + P''\sin c.\frac{n(1-m\operatorname{tang}\theta)}{m-n} = 0,\\
&P\sin a + P'\sin b + P''\sin c = 0,\\
&P'\cos b + P'\sin b\operatorname{tang}\theta - P''\cos c.\frac{n(1-m\operatorname{tang}\theta)}{m-n}\\
&\qquad\qquad - P''\sin c.\frac{m(1-n\operatorname{tang}\theta)}{m-n} = 0,\\
&P'\sin b + P''\frac{(\cos c.mn - \sin c.n)}{m-n} = 0.
\end{aligned}\right.$$

La direction de l'axe des x étant arbitraire, nous ferons $\theta = 0$. De plus, nous remplacerons la première de ces équations par la somme obtenue en l'ajoutant à la troisième. Ces équations seront ainsi remplacées par le système suivant :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&P\cos a + P'\cos b + P''\cos c = 0,\\
&P\sin a + P'\sin b + P''\sin c = 0,\\
&P'\cos b = P''.\frac{(\cos c + \sin c.m)n}{m-n},\\
&P'\sin b = P''.\frac{(\sin c - \cos c.m)n}{m-n}.
\end{aligned}\right.$$

Il y a cinq inconnues, les rapports des forces et les angles a, b, c ; on peut donc satisfaire d'une infinité de manières à ces quatre équations. Les deux premières expriment que la somme des projections des forces sur une direction quelconque est nulle. On pourrait aussi mettre en évidence l'équation des moments, qui exprime que les trois forces passent par un même point.

Divisons la quatrième équation par la troisième, nous aurons

$$\operatorname{tang} b = \frac{\sin c - \cos c \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos c + \sin c \cdot \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \operatorname{tang}(c - \alpha).$$

En donnant aux forces P′, P″ un signe convenable, nous pouvons admettre que les angles b et $(c - \alpha)$ sont compris entre o et π. Alors l'équation que nous venons d'obtenir équivaut à la suivante :

$$(5) \qquad b = (c - \alpha).$$

Or on voit aisément que les angles b et $c - \alpha$ sont mesurés par la moitié d'un même arc AD, quand le point d'intersection des forces D est situé sur la circonférence du cercle circonscrit et qu'ils ont des mesures inégales, quand cette condition n'est pas remplie. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (5) soit vérifiée, est que le point d'intersection des forces soit situé sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle.

AUTRE SOLUTION DE LA QUESTION 276;

PAR M. BELLAVITIS,
Professeur à l'Université de Padoue.

Pour l'équilibre, il faut que pour chaque mouvement infiniment petit la somme des moments virtuels des forces soit nulle. En supposant que le point C reste immobile, les deux points A et B peuvent, ou tourner autour du point C, ou se mouvoir le long des droites CA, CB, et dans chaque cas leurs vitesses seront proportionnelles aux côtés CA, CB; il faut, par conséquent, que les deux forces appliquées aux points A et B soient également inclinées sur les droites CA, CB. Donc le point de concours de ces forces est sur la circonférence CAB.

De plus, les forces devront être inversement proportionnelles aux côtés CA, CB, c'est-à-dire elles seront proportionnelles aux sinus des angles A, B du triangle ABC; il en résulte que la troisième force, qui fait équilibre avec les deux précédentes, doit passer par le point C, puisque chacune des trois forces en équilibre est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les deux autres, et les angles formés autour du point de rencontre des forces ont les sinus égaux à ceux des angles du triangle ABC. Ainsi l'équilibre subsistera encore, si l'on suppose que le point C soit mobile sous la condition proposée et qu'un des points A, B soit fixe.

SOLUTION DE LA QUESTION 280

(voir t. XII, p. 327);

PAR M. FORTUNATO PADULA,
Professeur à Naples.

Une courbe du troisième ordre étant composée d'une branche infinie et d'un ovale, si l'on prend sur la branche infinie trois points en ligne droite, et que par chacun de ces points on mène deux tangentes à l'ovale, les trois cordes de contact passent par un même point.

(CHASLES.)

Lorsque la branche infinie devient une droite, l'ovale se change en conique et l'on revient au théorème de La Hire.

La propriété dont il s'agit dans cette question étant projective, nous nous bornerons à la démontrer pour la courbe donnée par l'équation

$$(1) \qquad my^2 = x(x+a)(x+b),$$

où l'on supposera les quantités m, a, b positives et $a < b$.

Cette courbe est composée d'un ovale dont les points de l'axe des x qui ont pour abscisses respectives $x = -a$, $x = -b$ sont deux sommets, et d'une autre branche qui a deux points d'inflexion à distance finie et s'étend à l'infini au-dessus et au-dessous de l'axe des x vers le troisième point d'inflexion.

Nommons x', y' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe et x, y celles du point de contact d'une des tangentes menées à la courbe par le point x', y'; on aura l'équation

$$(2)\left\{\begin{aligned} 2myy' &= [3x^2 + 2(a+b)x + ab]x' - x^3 + abx \\ &= 2(x+a)(x+b)x' + (x^2 - ab)(x' - x): \end{aligned}\right.$$

mais l'équation (1) donne

$$my'^2 = x'(x'+a)(x'+b);$$

donc on obtiendra

$$(3)\left\{\begin{aligned} &4xx'(x+a)(x+b)(x'+a)(x'+b) \\ &= [2(x+a)(x+b)x' + (x^2 - ab)(x' - x)]^2. \end{aligned}\right.$$

En réunissant tous les termes multipliés par

$$4x'(x+a)(x+b),$$

cette équation est divisible par $(x' - x)^2$, comme cela doit être, et l'on obtient l'équation du quatrième degré en x

$$(4)\qquad (x^2 - ab)^2 = 4x'(x+a)(x+b)x.$$

Lorsque l'abscisse x' est négative, les racines de cette équation sont toutes imaginaires, et réelles lorsqu'elle est positive : dans ce cas, l'équation (4) a deux racines positives et deux négatives. Donc, par un point quelconque pris sur la branche infinie, on peut mener à la courbe quatre tangentes dont deux touchent la même branche et les deux autres l'ovale. Il est évident que l'on ne considère pas les deux tangentes réunies dans la même droite qui touche la courbe au point (x, y) et qui sont données par les deux racines égales $x = x'$ de l'équation (3). L'équation (4) peut se décomposer dans les deux équations de second degré

$$(5)\qquad x^2+2\left[\sqrt{(x'+a)(x'+b)}-x'\right]x+ab=0,$$

$$(6)\qquad x^2-2\left[\sqrt{(x'+a)(x'+b)}+x'\right]x+ab=0,$$

dont la première, ayant les racines négatives, donne les abscisses des points de contact sur l'ovale, et la seconde a les racines positives et donne les abscisses des deux autres points. On voit cependant que, *quel que soit le point* x', y', *le rectangle des abscisses des points de contact sur l'ovale est constant et égal au rectangle des abscisses des deux autres points de contact sur la branche infinie.*

Les équations (5), (6) donnent les valeurs des abscisses des points de contact. Quant à la valeur de y correspondante à chaque valeur de x, on pourrait la déduire de l'équation (1) qui, ayant égard à l'équation (4), donne

$$(7)\qquad y=\pm\frac{x^2-ab}{2\sqrt{mx'}},$$

mais il resterait à déterminer lequel des signes + ou — on doit prendre pour chaque valeur de x. Et, par conséquent, il vaut mieux prendre la valeur de y de l'équation (2), et, ayant toujours égard à l'équation (4), on aura

$$2myy'=\frac{(x^2-ab)^2}{2x}+(x^2-ab)(x'-x)=\frac{x^2-ab}{2x}(2xx'-x^2-ab);$$

mais les équations (5), (6) donnent

$$\frac{2xx'-x^2-ab}{2x}=\pm\sqrt{(x'+a)(x'+b}:$$

donc on aura

$$(8)\qquad y=\pm\frac{(x^2-ab)\sqrt{(x'+a)(x'+b)}}{2my'},$$

où l'on doit prendre le signe supérieur pour les points de contact sur l'ovale et le signe inférieur pour les deux autres. La valeur (8) de y, en y substituant pour y' sa valeur, se réduit à la valeur (7), et l'on voit que, lorsqu'il s'agit des points de contact sur l'ovale, on doit prendre dans l'équation (7) le signe supérieur ou inférieur selon que la valeur y' est positive ou négative : le contraire a lieu pour les deux autres points de contact. L'équation (7), ayant égard à un seul signe, représente une parabole qui passe toujours par les points de l'axe des x qui ont pour abscisses $\pm\sqrt{ab}$. Donc

Si, par un point quelconque de la branche infinie, on mène les quatre tangentes à la courbe, les deux points de contact sur l'ovale et les symétriques des deux autres points de contact sont sur une parabole du second degré qui a pour axe la tangente au sommet de la branche infinie et qui passe toujours par deux mêmes points de l'axe de la courbe.

L'équation (8) donne immédiatement les équations des deux cordes de contact pour l'ovale et pour la branche infinie. En effet, substituant pour x^2 sa valeur tirée des équations (5) (6), on obtiendra

$$y = -\frac{\sqrt{(x'+a)(x'+b)}}{my'}\left[\left(\sqrt{(x'+a)(x'+b)} - x'\right)x + ab\right],$$

$$y = -\frac{\sqrt{(x'+a)(x'+b)}}{my'}\left[\left(\sqrt{(x'+a)(x'+b)} + x'\right)x - ab\right],$$

ou bien

$$(9) \qquad y\sqrt{mx'} + \left(\frac{my'}{\sqrt{mx'}} - x'\right)x + ab = 0,$$

$$(10) \qquad y\sqrt{mx'} + \left(\frac{my'}{\sqrt{mx'}} + x'\right)x - ab = 0,$$

qui expriment deux droites, dont la première est la corde des deux contacts sur l'ovale, et la seconde des deux points sur la branche infinie; dans ces équations on doit prendre $\sqrt{mx'}$ avec le même signe de y', comme il résulte de ce qu'on a dit ci-dessus, c'est-à-dire que si l'ordonnée y'

est négative, on doit changer les signes de x' et de ab dans les équations (9) et (10).

Cela posé, soit

$$y = \alpha x + \beta,$$

l'équation d'une droite qui coupe la branche infinie en trois points (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') ; les abscisses x', x'', x''' seront les racines de l'équation

$$m(\alpha x + \beta)^2 = x(x+a)(x+b),$$

d'où

$$\beta = \sqrt{\frac{x' x'' x'''}{m}},$$

et, par conséquent, l'équation (9) donnera, pour les trois cordes de contact correspondantes sur l'ovale aux points (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''),

$$(11) \quad \begin{cases} y\sqrt{mx'} + \left(\alpha\sqrt{mx'} + \sqrt{x'' x'''} - x'\right)x + ab = 0, \\ y\sqrt{mx''} + \left(\alpha\sqrt{mx''} + \sqrt{x' x'''} - x''\right)x + ab = 0, \\ y\sqrt{mx'''} + \left(\alpha\sqrt{mx'''} + \sqrt{x' x''} - x'''\right)x + ab = 0, \end{cases}$$

et puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} ab & \alpha\sqrt{mx'} + \sqrt{x'' x'''} - x' & \sqrt{mx'} \\ ab & \alpha\sqrt{mx''} + \sqrt{x' x'''} - x'' & \sqrt{mx''} \\ ab & \alpha\sqrt{mx'''} + \sqrt{x' x''} - x''' & \sqrt{mx'''} \end{vmatrix}$$

$$= ab\sqrt{m} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{x'' x'''} - x' & \sqrt{x'} \\ 1 & \sqrt{x' x'''} - x'' & \sqrt{x''} \\ 1 & \sqrt{x' x''} - x''' & \sqrt{x'''} \end{vmatrix}$$

$$= ab\sqrt{mx' x'' x'''} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{x'}} & \sqrt{x'} \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{x''}} & \sqrt{x''} \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{x'''}} & \sqrt{x'''} \end{vmatrix} - ab\sqrt{m} \begin{vmatrix} 1 & x' & \sqrt{x'} \\ 1 & x'' & \sqrt{x''} \\ 1 & x''' & \sqrt{x'''} \end{vmatrix} = 0,$$

il s'ensuit que les trois droites exprimées par les équations (11) passent par un même point (*).

Note. La propriété est projective; par conséquent, elle existe pour une courbe du troisième degré à deux branches séparées, pourvu que l'une d'elles ne puisse être coupée par une droite qu'en deux points. Tm.

THÉORÈME SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES (BRIOSCHI);

Par M. FAURE.

Je viens de trouver une démonstration du théorème de M. Brioschi (*Nouvelles Annales*, tome XIII, page 352), relativement aux sommes des puissances semblables des racines d'une équation. Elle est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général, lequel donne une théorie complète des fonctions symétriques.

(*) Il n'est pas inutile d'observer que, la courbe étant symétrique par rapport à l'axe des x, on peut supposer sans restreindre la généralité de la démonstration que la quantité β soit positive; alors les équations (11) se rapportent au cas des ordonnées y', y'', y''' positives; mais si y' est positive et les deux autres y'', y''' sont négatives, au lieu des équations (11), on aura

$$y\sqrt{mx'} + \left(\alpha\sqrt{mx'} + \sqrt{x''x'''} - x'\right)x + ab = 0,$$
$$y\sqrt{mx''} + \left(\alpha\sqrt{mx''} + \sqrt{x'x'''} + x''\right)x - ab = 0,$$
$$y\sqrt{mx'''} + \left(\alpha\sqrt{mx'''} + \sqrt{x'x''} + x'''\right)x - ab = 0,$$

et l'on continuera la démonstration de la même manière.

En nommant x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4 les coordonnées des quatre points de contact correspondants au point x', y', on déduit des équations (5) et (6),

$$(9) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4x',$$
$$(10) \qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8y'.$$

Donc le point $x', -2y'$ est le centre des moyennes distances des quatre points de contact, et le point $x', -y'$ est le centre des moyennes distances des points de contact de toutes les six tangentes qui passent par le point x', y'.

Si l'on divise le polynôme

$$\Pi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots a_r x^{m-r} \ldots$$

par le polynôme

$$F(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{m-2} + \ldots,$$

et que l'on représente le quotient par

$$A_0 x^{m-n} + A_1 x^{m-n-1} + A_2 x^{m-n-2} + \ldots + A_r x^{m-n-r} + \ldots,$$

on trouve aisément qu'un terme quelconque de quotient tel que A_r a pour valeur

$$A_r = \frac{1}{(\alpha_0)^{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \ldots & \ldots a_0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \ldots & \ldots a_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \ldots & \ldots a_2 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \ldots & \ldots a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \alpha_{r-3} \ldots & a_r \end{vmatrix}.$$

C'est ce principe bien simple qui développé mène à de nombreuses conséquences; ainsi, relativement aux fonctions symétriques, on sait que si l'on veut avoir la somme des valeurs que prend une fonction entière $\varphi(x)$ dans laquelle on remplace x successivement par toutes les racines d'une équation

$$F(x) = 0,$$

il faut effectuer la division $\frac{F'(x)\,\varphi(x)}{F(x)}$, et la somme que l'on demande est le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$ du quotient.

Supposons que $\Pi(x) = F'(x)\;\varphi(x)$ et que $\varphi(x)$ soit de degré r; le terme $A_r x^{m-n-r}$ pour lequel $m-n-r = -1$ donnera A_r pour la fonction symétrique cherchée.

Si l'on a égard au procédé indiqué par M. Transon, on voit que la méthode précédente conduit à la détermination d'une fonction symétrique quelconque, et je substitue ainsi des multiplications aux divisions de M. Transon.

Si l'on suppose en particulier que $\varphi(x) = 1$, le quotient $\frac{F'(x)}{F(x)}$ donnera la somme des puissances des racines de $F(x) = 0$.

Notre valeur de A_r devient alors, en observant que

$$a_0 = m\alpha_0 \quad a_1 = (m-1)\alpha_1, \ldots,$$

$$A_r = \frac{1}{(\alpha_0)^{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & \ldots\ldots & m\,\alpha_0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & (m-1)\,\alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ldots & (m-2)\,\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \alpha_{r-1} & \ldots & (m-r)\,\alpha_r \end{vmatrix},$$

et de là

$$A_r(-\alpha_0)^{r+1} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 \ldots\ldots & 0 \\ 2\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r\alpha_r & \alpha_r & \alpha_{r-1} \ldots & \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Cette relation revient à celle de M. Brioschi, il suppose seulement $\alpha_0 = 1$.

Relativement à la division numérique, dans un système quelconque, on arrive à ceci : supposez que l'on veuille diviser le nombre

$$5312367 \quad \text{par} \quad 23457,$$

écrit, par exemple, dans le système décimal; le quotient sera de la forme

$$A_0\,100 + A_1\,10 + A_2.$$

Or on a, d'après notre valeur générale de A_r,

$$A_0 = \frac{5}{2}, \quad A_1 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$A_2 = -\frac{9}{8};$$

donc le quotient entier est

$$\frac{1}{8}(2000 - 180 - 9) = \frac{1811}{8} = 226,$$

comme on peut le vérifier directement.

On voit de plus que les seuls chiffres qui servent à déterminer le quotient sont 531 dans le dividende, 234 dans le diviseur, et généralement autant de chiffres qu'il doit y en avoir au quotient. Ainsi le quotient des deux nombres précédents revient à celui de 53100 par 234.

Il y a encore d'autres conséquences relatives à la valeur du reste de la division de deux polynômes, aux séries récurrentes, aux fonctions sturmiennes, etc.

Note. Au moyen des déterminants, l'habile analyste M. Sylvester vient de trouver la solution générale de ce problème : *Étant donné un coefficient différentiel d'un ordre quelconque, pour un nombre quelconque de variables, trouver ce que devient ce coefficient pour un changement de système de variables.* Problème qui n'a été résolu par Burmann et Jacobi que pour une seule variable.

TM.

SOLUTION DE LA QUESTION 272 (STEINER)

(voir tome XII, p. 100);

PAR M. FAURE,

Officier d'artillerie.

Lemme. Soit

$$ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = 0$$

une équation du quatrième degré; si l'on pose

$$y = \frac{1}{x^2},$$

l'équation précédente deviendra

$$\left.\begin{array}{r} e^2 y^4 + 2ce \\ - d^2 \\ \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} y^3 + 2ae \\ - 2bd \\ + c^2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} y^2 + 2ac \\ - b^2 \\ \end{array}\right| \begin{array}{l} y + a^2 = 0. \\ \\ \end{array}$$

Les racines de l'équation proposée étant designées par m_1, m_2, m_3, m_4, celles de la transformée seront

$$\frac{1}{m_1^2}, \frac{1}{m_2^2}, \frac{1}{m_3^2}, \frac{1}{m_4^2},$$

et l'on trouve facilement

$$\left(1 + \frac{1}{m_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_4^2}\right) = \frac{(b-d)^2 + (a-c+e)^2}{e^2}:$$

de sorte que si e est constant ainsi que les différences $b - d$, $a - c$, le produit qui est dans le premier membre de l'équation sera aussi constant.

I. Considérons une parabole $y^2 = 2px$, à laquelle on mène quatre tangentes formant le quadrilatère ABCD et dont les côtés auront respectivement pour équation

(AB) $$y = m_1 x + \frac{p}{2m_1},$$

(AD) $$y = m_2 x + \frac{p}{2m_2},$$

(CB) $$y = m_3 x + \frac{p}{2m_3},$$

(CD) $$y = m_4 x + \frac{p}{4m_4};$$

les quantités m_1, m_2, m_3, m_4 indiquant les tangentes des angles que forment les côtés du quadrilatère avec l'axe de la parabole, ou si l'on veut avec la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère donné, car il est visible que ces droites sont parallèles (théorème de Newton). Pour abréger le discours, nous appellerons médiane la ligne dont nous parlons.

Le côté AB touche la parabole au point M_1 qui a pour coordonnées

$$x = \frac{p}{2m_1^2}, \quad y = \frac{p}{m_1}.$$

Le côté AD touche la parabole au point M_2,

$$x = \frac{p}{2m_2^2}, \quad y = \frac{p}{m_2}.$$

De sorte que le produit des distances du foyer F de la parabole aux deux points de contact sera

$$FM_1 . FM_2 = \frac{p^2}{4}\left(1 + \frac{1}{m_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2^2}\right).$$

Or le point A, intersection des deux côtés AB, AD, a pour coordonnées

$$x = \frac{p}{2m_1 m_2}, \quad y = \frac{p(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2},$$

d'où l'on déduit

$$FA^2 = FM_1 . FM_2.$$

Désignant par M_3, M_4 les points de contact des tangentes issues du point C opposé à A dans le quadrilatère, on trouve

$$FC^2 = FM_3 . FM_4 = \frac{p^2}{4}\left(1 + \frac{1}{m_3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_4^2}\right).$$

De sorte que l'on obtient pour le produit des distances du foyer de la parabole à deux sommets opposés quelconques du quadrilatère qui lui est circonscrit, la relation

$$FA.FC = \frac{p^2}{4}\sqrt{\left(1+\frac{1}{m_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_3^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_4^2}\right)}.$$

De là ce premier théorème : *Un quadrilatère étant circonscrit à une parabole, le produit des distances de son foyer à deux sommets opposés est égal à la racine carrée du produit des distances de ce même foyer aux quatre points de contact.*

On peut encore en déduire celui-ci : *Si l'on considère deux points fixes* A *et* C, *ainsi que des paraboles de même foyer* F, *et que l'on mène par les points donnés quatre tangentes à la parabole, le produit des distances de son foyer aux points de contact sera constant, etc.*

Les démonstrations géométriques de ces théorèmes sont faciles.

II. Appelons a et α les foyers d'une conique inscrite dans le quadrilatère ABCD; x, y, x' et y' les coordonnées respectives de ces foyers. Menons par ces deux points des tangentes à la parabole inscrite F, et soient μ_1, μ_2 les coefficients angulaires des tangentes issues du point a; μ_3, μ_4 ceux des tangentes issues du point α. On aura

$$x = \frac{p}{2\mu_1\mu_2}, \quad y = \frac{p(\mu_1+\mu_2)}{2\mu_1\mu_2},$$

$$x' = \frac{p}{2\mu_3\mu_4}, \quad y' = \frac{p(\mu_3+\mu_4)}{2\mu_3\mu_4}.$$

On indiquera que la conique (a, α) est tangente à la droite AB, en écrivant que le produit des perpendiculaires abaissées de ses foyers sur cette droite est égale à une certaine quantité b^2. Cela donne la relation

$$\frac{p^2}{4}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2} - \frac{m_1}{\mu_1\mu_2} - \frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{\mu_3+\mu_4}{\mu_3\mu_4} - \frac{m_1}{\mu_3\mu_4} - \frac{1}{m_1}\right) = b^2(1+m_1^2).$$

Or soient :

S_1 la somme des quantités $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$;

S_2 la somme de leurs produits deux à deux;

S_3 la somme de leurs produits trois à trois;

S_4 leur produit.

La relation précédente développée devient, en posant $\frac{4b^2}{p^2} = K$,

$$(1) \quad (1 - KS_4)m_1^4 - S_1 m_1^3 + (S_2 - KS_4)m_1^2 - S_2 m_1 + S_4 = 0.$$

On aura trois autres équations pour exprimer que la conique est tangente aux autres côtés du quadrilatère et l'on obtiendra ces équations en remplaçant dans la précédente m_1 successivement par m_2, m_3, m_4. D'où il suit que si l'on considère m_1, m_2, m_3, m_4 comme des inconnues, elles seront déterminées par l'équation (1). Cette équation est de la forme indiquée dans le lemme; on aura en conséquence

$$\left(1 + \frac{1}{m_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_4^2}\right) = \frac{(S_1 - S_2)^2 + (1 - S_2 + S_4)^2}{S_4^2}.$$

Appelons maintenant :

M_1 la somme des quantités $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2, \mu_4^2$;

M_2 la somme de leurs produits deux à deux;

M_3 la somme de leurs produits trois à trois;

M_4 leur produit.

Développons le second membre de l'équation précédente et remarquons que

$$\begin{aligned} S_1^2 - 2S_2 &= M_1, \\ S_2^2 - 2S_1S_3 + 2S_4 &= M_2, \\ S_3^2 - 2S_2S_4 &= M_3, \\ S_4^2 &= M_4, \end{aligned}$$

on aura

$$\left(1+\frac{1}{m_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_3^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_4^2}\right)=\frac{1+M_1+M_2+M_3+M_4}{M_4}$$
$$=\left(1+\frac{1}{\mu_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{\mu_2^2}\right)\left(1+\frac{1}{\mu_3^2}\right)\left(1+\frac{1}{\mu_4^2}\right).$$

Cette égalité indique que si une conique est inscrite dans un quadrilatère et que par ses foyers on mène les quatre tangentes à la parabole (inscrite au même quadrilatère), ces quatre tangentes feront avec la médiane des angles dont le produit des sinus est constant.

On verra encore, après avoir fait la construction précédente, que les quatre tangentes issues des deux foyers d'une conique quelconque inscrite à un quadrilatère rencontrent la tangente au sommet de la parabole en quatre points dont le produit des distances au foyer de la parabole est constant.

Cette même égalité prouve aussi que si une conique est inscrite dans un quadrilatère, le produit des distances de ses foyers à celui de la parabole est constant.

Si l'on fait varier la parabole et le quadrilatère, on obtient des théorèmes intéressants. Ainsi :

Considérant une conique et un système de paraboles de même foyer F *et menant les quatre tangentes communes à la conique et à l'une des paraboles :* 1° *le produit des distances du foyer* F *à deux sommets opposés du quadrilatère déterminé par les tangentes est constant;* 2° *le produit des distances du foyer* F *aux points de contact sur la parabole est constant.*

Le théorème subsiste encore si, au lieu de la conique donnée, on en considère une seconde de même foyer.

III. Puisque les quantités μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 entrent symétriquement dans l'équation (1), on voit que si par les deux foyers a, α d'une conique inscrite dans un quadrilatère on mène des tangentes à la parabole qui lui est inscrite, ces tangentes se coupent en deux autres couples de points qui peuvent être considérés comme les foyers de deux autres coniques inscrites. Sur chaque tangente à la parabole il y a donc trois points et seulement trois qui peuvent être regardés comme appartenant au lieu des foyers des coniques tangentes à un quadrilatère : ce lieu est par conséquent du troisième degré. La courbe dont il s'agit a été étudiée à plusieurs reprises dans les *Nouvelles Annales;* elle passe par les sommets du quadrilatère complet ABCD, et M. Terquem a indiqué une méthode pour lui mener une tangente aux points où elle coupe le quadrilatère (t. IV, p. 373). Ainsi pour mener la tangente au point A, intersection des côtés AB, AD, on mène la diagonale AC et l'on trace une droite AK telle, que l'angle KAB soit égal à l'angle CAD; cette droite est la tangente. Je vais faire voir que l'on peut, par la même construction, mener une tangente en un point quelconque de la courbe.

Soit, en effet, a le point considéré, déterminons l'autre point α de la courbe tel, que

$$Fa.F\alpha = FA.FC,$$

les deux points a et α seront les foyers d'une même conique tangente au quadrilatère. Par ces points, menons des tangentes à la parabole, et soient c, γ les foyers d'une conique inscrite dans le quadrilatère déterminé par ces tangentes, on aura

$$Fc.F\gamma = Fa.F\alpha = FA.FC;$$

donc les points c et γ appartiennent aussi au lieu des foyers des coniques inscrites au quadrilatère ABCD. Les deux lieux sont donc identiques, et la tangente au point a du second lieu, que l'on construit comme précédemment, sera aussi la tangente au même point du premier lieu.

IV. Théorème de M. Steiner (question 272). a, α; b, β; c, γ étant les foyers de trois coniques inscrites au même quadrilatère, on a la relation

$$\frac{ac.\alpha c}{bc.\beta c}=\frac{a\gamma.\alpha\gamma}{b\gamma.\beta\gamma}.$$

Formons le quadrilatère $ab\alpha\beta$ et désignons toujours par F le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère donné ABCD. Les côtés du quadrilatère $ab\alpha\beta$ sont nécessairement tangents à une certaine parabole ayant pour foyer le point F, de sorte que l'on peut considérer c et γ comme les foyers d'une conique inscrite au quadrilatère $ab\alpha\beta$. Or, lorsqu'une conique est inscrite dans un polygone d'un nombre pair de côtés, le produit des distances d'un foyer aux sommets de rang pair, divisé par le produit des distances du même foyer aux sommets de rang impair, donne le même quotient pour l'un et l'autre foyer (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 219).

L'application de ce principe donne le théorème précédent. Dans le cas où le point γ s'éloigne à l'infini, on retrouve un théorème déjà démontré.

V. On démontre encore que si par les points de contact d'une conique inscrite au quadrilatère ABCD, on mène des tangentes à la parabole, elles feront avec la médiane des angles dont le produit des sinus est constant, et cette constante est la même que celle que l'on obtient en menant par les foyers d'une conique inscrite des tangentes à la parabole.

On trouve aussi que le produit des perpendiculaires abaissées du foyer F de la parabole sur les tangentes précédentes est constant, et de là résulte que le produit des distances de ce même foyer aux points de contact d'une conique inscrite est constant et égal au carré du produit des distances de ce foyer à deux sommets opposés du quadrilatère.

J'ajoute encore ici les énoncés de quelques théorèmes analogues aux précédents.

1°. Étant donnés une droite et un point F, décrivons quatre hyperboles équilatères tangentes à la droite et ayant pour centre le point F ; ces hyperboles déterminent un quadrilatère curviligne tel, que le produit des distances du centre à deux sommets opposés est le même pour chaque couple de sommets.

2°. Une cassinoïde et une droite sont données : soient décrites quatre hyperboles équilatères tangentes à la droite ainsi qu'à la cassinoïde et concentriques avec elle. Ces hyperboles déterminent un quadrilatère curviligne tel, que le produit des distances du centre aux points de contact sur la cassinoïde ou sur la droite est constant. La constante reste la même si l'on fait varier la droite et la cassinoïde, pourvu que celle-ci conserve les mêmes foyers.

3°. Soit F le point de rebroussement d'une épicycloïde ordinaire (c'est-à-dire celle qui est engendrée par le point d'une circonférence roulant sur une circonférence égale); menons par ce point quatre cercles tangents à l'épicycloïde ainsi qu'à un cercle donné : le produit des distances du point F aux points de contact sur l'épicycloïde et le cercle est constant et égal au carré du produit des distances du même point à deux sommets opposés du quadrilatère curviligne formé par les cercles tangents.

NOTE SUR LE PRINCIPE DES FORCES VIVES.

Nous croyons utile d'émettre quelques idées sur ce qu'on appelle le principe des forces vives, dont on fait un si fréquent emploi, quoique l'application ne soit pas toujours aussi facile qu'on est tenté de le croire. Remontons à l'origine de ce principe. Toute question sur les quantités, nombres, lignes, forces, etc., se réduisent finalement à des équations qu'il faut résoudre, soit en cherchant les valeurs des inconnues, objet de l'Algèbre ordinaire, soit en cherchant la forme des fonctions des inconnues, objet de l'Analyse infinitésimale. On cherche autant que possible à diminuer le nombre des équations ; ainsi dans l'analyse élémentaire, en élevant au carré toutes les équations (à second membre nul) et égalant la somme à zéro, cette équation unique, avec quelques restrictions, peut tenir lieu de toutes les équations. Il en est de même dans le calcul transcendant ; une intégrale peut souvent tenir lieu de beaucoup d'équations différentielles : ainsi tous les problèmes de mécanique, en dernière analyse, se bornent à obtenir pour les forces égales, mais inconnues, des expressions diverses ; cette diversité d'expressions fournit des équations différentielles dites d'*équilibre*, que l'on remplace autant qu'on peut par des intégrales ; et c'est une de ces intégrales qui a reçu le nom spécial d'équation aux *forces vives*, dénomination, à certains égards, très-vicieuse ; car, si la force est une entité métaphysique dont on pourrait, dont on devrait débarrasser la science, mais dont au moins on croit avoir une idée précise, à la portée de nos sens matériels, la force vive est un surcroît d'entité, une double entité à laquelle rien de réel ne correspond dans la nature. On a *matérialisé* un résultat de calcul ; et de même que dans le langage ordinaire, les expressions métaphoriques donnent naissance à tant de conclusions fausses ou boiteuses, la création d'êtres de raison dans les sciences amène souvent de fausses appréciations, des jugements équivoques ; toutefois, n'importe le nom, l'équation des forces vives est précieuse, en tant qu'elle représente le double de la quantité de travail, quantité qu'il est souvent plus facile de reconnaître dans le jeu des machines que les forces motrices dont cette quantité tire sa source : c'est à l'invasion de plus en plus considérable des machines dans le monde industriel qu'il faut attribuer le rôle important que les forces vives ont pris dans la pratique et dont ne s'occupaient naguère que les philosophes, et les géomètres quand ils étaient philosophes.

Dans ce nombre brille au premier rang le célèbre Boscowich, membre d'une Société fameuse par sa puissante organisation, par son indestructible vitalité. L'idée lumineuse et profonde d'assimiler les forces instantanées dites percussions, chocs, etc., à des sommations instantanées de forces continues, émise par l'illustre jésuite, est aujourd'hui *implicitement* la base de la mécanique industrielle. Le principe de la continuité ainsi introduit dans la phoronomie, la pesanteur qui est une force continue agissant sous nos yeux à chaque instant, se présentait naturellement comme l'unité dynamique indiquée par la nature; aussi aujourd'hui toute pression, compression, dilatation, élasticité, tension, etc., est évaluée par des poids en équilibre, et toute percussion, impulsion, choc, etc., par des poids en mouvement. Mais cette évaluation des forces vives est souvent sujette à de grandes difficultés et peut occasionner de singuliers mécomptes; car alors il n'est pas permis de négliger les mouvements mêmes moléculaires : toute manifestation de mouvement, n'importe sa nature, se fait aux dépens de la force et ne peut être négligée. Ainsi lorsque Laplace compare la quantité de mouvement à un fluide qui se transmet d'un vase dans un autre, la comparaison n'est pas seulement poétique, elle est d'une grande justesse; le fluide qui pénètre partout et qui va d'un côté est enlevé à l'autre. Prenons, pour éclaircir ceci, l'exemple très-simple de deux corps mus qui se choquent; outre l'impulsion, il y a déformation, et cet effet de déformation absorbe une partie de la force qui est ainsi dérobée à l'impulsion, tellement que, quelque considérable que soit l'impulsion, si la mollesse du corps choqué est extrême, le choc ressenti sera faible, tout étant employé à déformer le corps: la composition physique du corps influe sur les résultats mécaniques, de sorte que la quantité de travail n'est pas toujours une mesure précise de la totalité de la force vive réellement développée.

Écoutons ce que disait Lambert sur les forces vives en 1770.

« Il y a environ un siècle, ou, pour mieux dire, avant
» le temps de Galilée et de Descartes, il était à peine né-
» cessaire de s'arrêter longtemps, dans les Traités de sta-
» tique, sur l'*idée* de la force. Aujourd'hui cela est de-
» venu d'autant plus nécessaire, qu'en parcourant ce qui a
» été écrit dans la discussion Leibnitz et dans la discussion
» Maupertuis, on ne sait plus à quoi s'en tenir sur cette
» idée par elle-même si simple. Depuis on a fait de
» toutes les modifications de la force des forces particu-
» lières; on a mis ainsi sur la scène des forces *vives,*
» *mortes, intrinsèques, accélératrices, etc.* Bilfinger y a
» même ajouté ses *vires indifferentes, consentientes,*
» *coincidentes, dissentientes, repugnantes, disjunctas,*
» *parallelas, mixtas, puras, etc.;* à celles-ci viennent
» encore se joindre: *actio, potentia, pressio, sollicitatio,*
» *impetus, conatus, impactus, etc.*, idées pour lesquelles
» la langue fournit des mots qui, à cause de leur signi-
» fication *indéterminée*, sont difficiles à *déterminer* et
» sont d'autant plus propres, à l'aide d'arbitraires défi-
» nitions, à fournir des théorèmes qu'on croît avoir dé-
» montrés, tout embrouillés qu'ils sont. J'avoue volon-
» tiers que je n'ai jamais pu bien comprendre la plupart
» de ces *mots,* nonobstant leurs *définitions.* En effet, j'ai
» toujours pensé que les premiers principes de la méca-
» nique devaient être plus simples et n'avaient pas besoin

» de cet étalage de mots et de définitions. Ainsi je com-
» prenais très-bien, par exemple, que si le produit de la
» masse par le carré de la vitesse avait quelque emploi
» fréquent en mécanique, il était bon, pour abréger, de
» donner un nom à ce produit; et comme les mots sont
» les signes arbitraires des idées, je compris encore qu'on
» nommât ce produit *force* et, si l'on veut, *force vive*.
» Mais par là le mot force et même *force vive* ne devient-
» il pas équivoque? C'est une tout autre question à la-
» quelle, après mûres réflexions, il faudrait répondre affir-
» mativement, et, s'il en est ainsi, Leibnitz aurait à tout
» égard mieux fait de choisir, pour désigner ce *produit*,
» tout autre mot que le mot *force*. Par là du moins la
» logomachie qui s'est introduite dans la dispute aurait
» été évitée, et la question si ce produit reste constant
» dans tous les cas et peut être admis comme cause
» finale se serait présentée sous une autre face. On peut
» dire la même chose de la *moindre action* de Mauper-
» tuis : le mot *action* est depuis longtemps équivoque
» dans la langue; par exemple, dans les expressions
» *action des rayons solaires*, *action du feu, etc.*, qui
» désignent des idées compliquées; on se sert même de
» ce mot pour désigner les actes des hommes, qui sont
» composés de beaucoup d'actions plus simples. » (*Beitrage zum Gebrauche der Mathematik*. Documents pour l'usage des mathématiques et leurs applications; 2e partie, 2e section, p. 370; Berlin, 1770.)

C'est donc une idée malheureuse d'avoir donné la notion obscure de la force vive pour base à l'enseignement élémentaire de la mécanique, et, par contre, d'avoir retranché de l'enseignement la notion si claire des couples, la plus belle conception phoronomique du XIXe siècle, conception française. C'est plus qu'une faute : c'est un crime contre le pays et contre la science.

Mais citons deux autorités qui pèsent dans la balance.

« Quelles que soient, en réalité, les qualités fondamentales de la conception de M. Poinsot par rapport » à la statique, on doit néanmoins reconnaître, ce me » semble, que c'est surtout au perfectionnement de la » dynamique qu'elle se trouve par sa nature essentiellement destinée, et je crois pouvoir assurer à cet égard que » cette conception n'a point encore exercé son influence » la plus capitale. Il faut la regarder, en effet, comme » directement propre à perfectionner sous un rapport » très-important les éléments mêmes de la dynamique » générale. »

Voilà comment s'exprimait, en 1830, un géomètre, philosophe éminent (*Philosophie positive*, t. I, p. 615). Depuis, deux Mémoires de M. Poinsot, chefs-d'œuvre de sagacité et de pénétration, ont réalisé les vœux de M. A. Comte et ont perfectionné considérablement les éléments de la dynamique.

La seconde autorité est celle du célèbre auteur de la *Géométrie supérieure*. « Nous pouvons regarder cette » élégante théorie des couples comme une conception » éminemment heureuse. » (*Histoire des Méthodes*, p. 415; 1837.)

C'est donc, comme disent les Anglais, un *ungeometrical spirit* qui a dicté la radiation de cette théorie; le même esprit qui a proscrit la *Statique* de Poinsot, a prescrit la *Géométrie* de Clairaut, que l'illustre mathématicien paraît avoir écrite pour la célèbre marquise du Châtelet; mollement raisonné, cet ouvrage, *per le donne*, n'est propre qu'à faire des non-géomètres.

On vient de recommander l'*Algèbre* de Lacroix. A la bonne heure! Cet ouvrage conserve son mérite intrinsèque d'être une œuvre mathématique.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES, DES SURFACES ET DES LIGNES.

1. Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, n fonctions algébriques entières, chacune de degré m, entre n variables : le système d'équations

$$(1) \qquad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots, \quad A_n = 0,$$

est satisfait par n^m systèmes de n valeurs des variables.

Posons

$$(2) \qquad S = \sum_0^n a_p A_p = 0,$$

l'indice sommatoire se rapportant à p; et les a sont des constantes; les n^m systèmes de valeurs des équations (1) satisfont aussi au système de degré m relatives à n valeurs différentes de n équations S', S'', etc., aussi de degré m.

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ d'autres n fonctions algébriques entières, chacune de degré m, entre les mêmes variables que les A; le système d'équations

$$(3) \qquad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \ldots, \quad B_n = 0$$

admet n^m systèmes des valeurs des variables.

Posons

$$(4) \qquad T = \sum_1^n b_p B_p;$$

les b sont des constantes; les mêmes n^m systèmes des valeurs satisfont à n équations de degré m, pour n valeurs différentes de b, savoir T', T'', T'''.

Supposons de plus qu'on ait l'*identité*

$$(5)\qquad \sum_1^n c_p A_p = \sum_1^n d_p B_p = V.$$

Considérant les A et les B comme des inconnues du premier degré, on peut les éliminer de l'identité (5) à l'aide des systèmes (2) et (4), et l'on obtient

$$(6)\qquad V = \sum_1^n (e_p S + f_p T).$$

Les systèmes des valeurs qui satisfont aux équations

$$S', S'', \ldots, T', T'' \ldots,$$

satisfont au système $V = 0$.

2. Soit $n = 3$; A_1, A_2, A_3 représentent trois surfaces qui se coupent en m^3 points; de même B_1, B_2, B_3, etc. : l'identité (5) exprime que les m^3 points du système A et les m^3 points du système B sont sur une même surface V du degré m. Les intersections des trois surfaces S', S'', S''' sont les mêmes que celles du système A, et les intersections des trois surfaces T', T'', T''' sont les mêmes que celles du système B; et l'équation (6) montre que les intersections des surfaces S', T'', T'''; S'', T', T'''; S''', T', T'' sont une même surface V de degré m.

3. Soit $n = 2$; les A, B, S, T représentant des lignes; les m^2 points intersection des A sont les mêmes que les m^2 points intersection des S', S''; les m^2 points intersection de B sont les mêmes que les m^2 points intersection de T', T''; ces $2m^2$ points sont sur une même ligne V de degré m, les m^2 points intersection de S', T'' et les m^2 points intersection de S'', T' sont sur une même ligne de degré m.

Si $m = 2$, on a un théorème énoncé par M. Chasles (*Comptes rendus*, séance du 16 août 1853), qu'il a démontré dans son cours en Sorbonne et dont on peut tirer une foule de corollaires. Voici les énoncés de nouveaux théorèmes qu'on doit à M. Wœpcke (*Journal de M. Liouville*, t. XIX, p. 345; 1854).

THÉORÈME. *Sur une conique donnée, on prend trois systèmes de quatre points; par chacun de ces systèmes on fait passer respectivement deux coniques, savoir* A_1, C_1; A_2, C_2; A_3, C_3; *les trois systèmes des huit points d'intersection de*

$$\begin{array}{llll} A_1, & A_2; & C_1, & C_2, \\ A_1, & A_3; & C_1, & C_3, \\ A_2, & A_3; & C_2, & C_3, \end{array}$$

sont respectivement sur trois coniques qui ont les mêmes quatre points d'intersection.

Les polaires réciproques fournissent un théorème corrélatif.

Les coniques devenant des cercles, ou un système de deux droites, ou bien devenant homofocales, sont des cas particuliers.

Depuis, M. Wœpcke a étendu les mêmes théorèmes aux surfaces. (Liouville, décembre 1854).

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS CRAMERIENS;

PAR M. LE DOCTEUR CANTOR,
Professeur à Heidelberg.

Soit un déterminant cramérien de m éléments, formé d'après le procédé combinatoire; soit I le nombre d'inversions du terme de quantième n. Ordonnant n d'après les produits continuels, 1, 1.2, 1.2.3, etc., on aura

$$n = a_1[\alpha] + a_2[\alpha - 1] + a_3[\alpha - 2] + \ldots + a_p[\alpha - p],$$

les crochets représentent des produits continuels; on a

$$I = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots - 1 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2};.$$

I est indépendant de m.

Exemple :

$$n = 356 = 2[5] + 4[4] + 3[3] + 1[2],$$

$$I = 2 + 4 + 3 + 1 - 1 + \frac{2.1}{2} = 10;$$

soit $m = 6$; le 356ᵉ terme est 365142, qui a en effet dix inversions.

On peut donc connaître à priori le signe d'un terme d'un quantième donné. (Communiqué sans démonstration.)

Note du Rédacteur. L'auteur de cet article m'a écrit depuis que le même résultat a déjà été donné par M. Reiss (*Correspondance mathématique de Quetelet,* tome V).

M. Cantor vient de publier : *Grundzüge einer elementar Arithmetik, etc.* Principes fondamentaux d'une arithmétique élémentaire, à l'usage des cours universitaires; Heidelberg, 1855; in-8, 175 pages; ouvrage qui renferme des notions philosophiques et des renseignements historiques curieux; aussi peut-on le lire sans répugnance, même avec intérêt : chose rare quand il s'agit d'un Traité élémentaire d'Arithmétique. Je ne connais de ce côté-ci du Rhin aucun traité de ce genre.

L'opuscule est terminé par la *syntactique* ou théorie combinatoire. La première trace de cette doctrine se trouve dans l'ouvrage de Jean Buteo, *Logistica*, 1559, qui résout le problème de trouver tous les coups différents qu'on peut amener avec quatre dés.

SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES;

D'APRÈS M. W. LOOF,

Directeur du Gymnase ducal à Gotha.

(*Archives de Grunert*, p. 54, 1851.)

Si la fraction $\frac{1}{n}$ donne la période P de k chiffres, on a

$$10^k - 1 = nP;$$

donc pour trouver le nombre ou les nombres n qui donnent une période de k chiffres, il faut chercher tous les diviseurs de $10^k - 1$ ou de $\frac{10^k - 1}{9} = 111\ldots$ (k fois le chiffre 1).

Dans le tableau suivant, n indique le dénominateur de la fraction $\frac{1}{n}$ et k le nombre correspondant de chiffres de la période.

k	n
1	3 9.
2	11.
3	37.
4	101.
5	41.271.
6	7.13.
7	239.4649.
8	73.137.
9	333667.
10	9091.
11	21649.513239.
12	9901.
13	53.79.265.371653.
14	909091.
15	31.2906161.
16	17.5882353.

k	*n*
17	inconnu (*).
18	19.52579.
19	inconnu (**).
20	3541.27961.
21	43.1933.10838689.
22	23.4093.8779.
23	11111.111111 (?).
24	99990001.
25	1000010000100001000001 (?).
26	859.1058313049.
27	757.440334654777631 (?).
28	29.281.121499449.
29	3191.*x*.
30	211.241.2161.
31	2791.398105020104303515267327521 (?).
32	353.449.641.1409.69857.
33	67.1344628210113298373 (?).
34	103.4013.21993833369 (?).
35	71.12676184367477604353521 (?).
36	999999000001 (?).
37-40	inconnus.
41	83.1231.*x*.
42	127.2689.459691.
43	173.*x*.
44	89.11124707979641561909 (?).
45	2997000002997002999997030 (?).
46	47.139.2531.549797184491 (?).
47	inconnu.
48	9999999900000001 (?).
49	inconnu.
50	251.5051.7170612021057779291 (?).
51	613.1469658892171127096100994959O7 (?).

(*) Tous les nombres premiers de 1 à 230000 ont été essayés sans succès.

(**) Les nombres premiers de 1 à 100000 essayés sans succès.

k	n
52	521.1900381976777332243781 (?).
53	107.x.
54	99999999990000000001 (?).
55	1321.x.
56	7841.127522001020150503761 (?).
57	inconnu.
58	59.154083204930662557781201849 (?).
59	inconnu.
60	61.1655736049181983604901641.

Les (?) indiquent qu'on ignore si le nombre est premier ou non.

QUESTIONS.

297. Construire un triangle, connaissant une hauteur, une bissextrice et une médiane : chacune de ces trois droites partant d'un sommet différent. (E. Coupy.)

298. Étant donnés dans le même plan, de grandeur et de position, cinq segments, construire une conique qui coupe chaque segment harmoniquement (*). (Chasles.)

ARITHMOLOGIE.

Théorèmes empiriques.

Définition. Avec Euler nous donnons ce nom à des théorèmes non démontrés, mais dont l'existence est vérifiée depuis l'unité jusqu'à de très-grands nombres.

1°. Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers. (Goldbach.)

(*) Soient ab un de ces segments, α, β les points d'intersection avec la conique ; les quatre points a, α, b, β doivent être placés harmoniquement.

2°. Tout nombre pair est la différence de deux nombres premiers (*). (POLIGNAC.)

3°. Tout nombre est la somme de neuf cubes entiers positifs *au plus* vérifié de 1 à 12000. (ÉDOUARD WARING, *Meditationes algebricæ*, p. 349, 3ᵉ édition; Cambridge, 1782; CRELLE, t. XLII, p. 41.)

4°. Tout nombre est la somme de dix-neuf bicarrés entiers positifs *au plus*. (Ibid.)

NOTE SUR LA DIVISIBILITÉ DES NOMBRES.

p étant le nombre des chiffres d'une période décimale provenant de la fraction $\frac{1}{m}$, on a

$$10^p - 1 = \dot{m}, \quad \text{et} \quad 10^{kp} - 1 = \dot{m};$$

k est un nombre entier positif quelconque.

Corollaire I. N étant un nombre entier positif quelconque, on a

$$\mathrm{N}.10^{pk} - \mathrm{N} = \dot{m}.$$

Corollaire II. p, m, N conservant même signification, si l'on divise N en tranches de p chiffres de droite à gauche, la dernière tranche à gauche peut renfermer moins de p chiffres. Soit n la somme de toutes ces tranches, on aura

$$\mathrm{N} - n = \dot{m}.$$

En effet, soient t_1, t_2, t_3,... ces tranches, on a

$$\mathrm{N} = t_1 + t_2 . 10^p + t_3 10^{2p} + \ldots,$$

ou

$$t_1 - t_1 = \dot{m}, \quad t_2 . 10^p - t_2 = \dot{m}, \quad t_3 10^{2p} - t_3 = \dot{m}, \ldots;$$

(*) Les travaux de MM. de Polignac et Tchetbichef sont les premiers pas vers la démonstration de ces inaccessibles théorèmes.

ajoutant, on a

$$N - n = \dot{m}.$$

Corollaire III. Faisant $p = 2r$, et soit m un nombre premier

$$10^{2r} - 1 = \dot{m} = (10^r + 1)(10^r - 1);$$

$10^r - 1$ n'est pas divisible par m, puisque la période a $2r$ chiffres. Donc

$$10^r + 1 = \dot{m}, \quad \text{et} \quad 10^{(2k+1)r} + 1 = \dot{m}.$$

Supposons qu'on partage N en tranches de r chiffres de droite à gauche, on aura

$$N = t_1 + t_2 . 10^r + t_3 . 10^{2r} + t_3 . 10^{3r} + \ldots,$$

$$t_1 - t_1 = \dot{m}, \quad t_2 . 10^r + t_2 = \dot{m},$$

$$t_3 . 10^{2r} - t_3 = \dot{m}, \quad t_4 . 10^{3r} + t_4 = \dot{m} \ldots$$

Soient

$$t + t_3 + t_5 + \ldots = u,$$

$$t_2 + t_4 + t_6 + \ldots = v,$$

on aura

$$N - (u - v) = \dot{m}.$$

Application.

$m = 3$, alors $p = 1$; il faut partager N en tranches chacune de 1 chiffre.

$m = 9$, alors $p = 1$; il faut partager N en tranches chacune de 1 chiffre.

$m = 7$, alors $p = 6$; il faut partager N en tranches de 3 chiffres, et faire la somme des tranches de rang pair et de rang impair.

$m = 11$, alors $p = 2$; il faut partager N en tranches de 1 chiffre.

$m = 13$, alors $p = 6$; il faut partager N comme pour le cas de $m = 7$.

$m = 17$, alors $p = 16$; il faut partager N en tranches de 8 chiffres.

$m = 19$, alors $p = 18$; il faut partager N en tranches de 9 chiffres.

$m = 23$, alors $p = 22$; il faut partager N en tranches de 11 chiffres.

$m = 37$, alors $p = 3$; il faut partager N en tranches de 3 chiffres.

$m = 101$, alors $p = 4$; il faut partager N en tranches de 2 chiffres.

Ces théorèmes sont indiqués dans le *Journal de Cambridge*, et se trouvent dans l'*Algèbre* de Mayer et Choquet, 5e édition, page 232.

THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET SUR UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. VOLPICELLI,
Professeur à l'école d'artillerie de Rome (*).

1. Soit l'équation

$$x^n - \sum_2^n \frac{n!}{\overline{n-r}!\,r!}\left[(p+q)^r - (p^r + q^r)\right] x^{n-r} = 0,$$

p et q nombres entiers positifs; l'indice sommatoire se rapporte à r; cette équation n'a qu'une seule racine positive réelle, et elle est toujours irrationnelle lorsque $n > 2$.

2. La puissance n^a, n et a étant des nombres entiers positifs, est égale à la somme d'une progression arithmé-

(*) Connu par ses belles observations sur la diversité des rayons solaires calorifiques, confirmant celles de Melloni.

tique dont : 1° la raison d est quelconque; 2° le premier terme est $n^{a-1} - \frac{d(n-1)}{2}$; 3° le nombre de termes est n. Propriété énoncée par M. Wheatstone dans la Société royale de Londres.

3. Il est facile de généraliser cet énoncé.

Soit

$$S_1 = \sum_0^n \varphi_1(a, b, c \ldots + r),$$

φ est une fonction quelconque donnée a, b, c, ..., r des quantités quelconques; l'indice se rapporte à r.

Si l'on veut que $S_1 = f(n)$, où f est une fonction donnée, on peut déterminer les quantités, a, b, c, ..., de manière à satisfaire à l'équation pour toute valeur de n.

Si l'on avait encore d'autres équations semblables, par exemple

$$S_2 = \sum_0^n \varphi_2(a, b, \ldots r) \ldots, \quad \text{et} \quad S_2 = f_2(n),$$

on pourrait déterminer les inconnues de manière que $S_1 = S_2, \ldots$.

Note du Rédacteur. M. Coupy, professeur au Prytanée de la Flèche, nous a aussi adressé une démonstration de cette propriété et de ses diverses applications numériques. La même propriété a été insérée dans le *Cosmos*, tome V, page 645, 1854, en ces termes : « Voyez ce que peut le » génie! Il a fait de M. Wheatstone, petit fabricant d'in- » struments de musique, un des plus illustres physi- » ciens de l'Angleterre et du monde, le créateur de la » télégraphie électrique. M. Wheatstone quitte un instant » la physique pour aborder la science si difficile des nom- » bres et arrive d'un seul coup à constater une foule de » propriétés merveilleuses qui avaient échappé aux plus » habiles mathématiciens. »

Comment cette assertion finale est-elle échappée au savant disciple de l'illustre M. Cauchy?

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

D'une relation linéaire entre les coefficients de l'équation du second degré;

D'APRÈS M. OTTO HESSE,
Professeur à l'Université de Kœnigsberg.

(CRELLE, t. XLV, p. 82; 1852.)

1. *Notation.* v est une fonction *algébrique entière, homogène, du second degré* de n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; v_k est un coefficient différentiel de v pris par rapport à la variable x_k: ces coefficients au nombre de n sont des fonctions homogènes du premier degré des n variables; $v_{k\lambda}$ est un coefficient différentiel de v_k pris par rapport à la variable x_λ: il y a n^2 de ces coefficients différentiels du second ordre, qui sont des quantités constantes, et l'on a

$$v_{k\lambda} = v_{\lambda k},$$

à cause de l'homogénéité.

2. Cette homogénéité donne l'identité connue

$$v_k = v_{1k} x_1 + v_{2k} x_2 + \ldots v_{nk} x_n,$$

ce qui équivaut aux n identités

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_{11} x_1 + v_{21} x_2 + \ldots v_{n1} x_n, \\ v_2 = v_{12} x_1 + v_{22} x_2 + \ldots v_{n2} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = v_{1n} x_1 + v_{2n} x_2 + \ldots v_{nn} x_n, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta . x_1 = V_{11} v_1 + V_{21} v_2 + \ldots V_{n1} v_n, \\ \Delta . x_2 = V_{12} v_1 + V_{22} v_2 + \ldots V_{n2} v_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta . x_n = V_{1n} v_1 + V_{2n} v_2 + \ldots V_{nn} v_n, \end{array} \right.$$

Δ est le déterminant formé avec les n^2 coefficients

$$v_{11},\ v_{12},\ldots,\ v_{nn};$$

et, par conséquent, Δ est une constante ne renfermant que les coefficients de la fonction v; V_{rs} est la dérivée de Δ prise par rapport à v_{rs}; et l'on a

$$V_{rs} = V_{sr}, \quad \text{car} \quad v_{rs} = v_{sr}.$$

Multipliant la première des équations (1) par Δ et remplaçant $\Delta.x_1$, $\Delta.x_2$, etc., par leurs valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta.v_1 = {} & v_1\,[v_{11}V_{11} + v_{21}V_{21} + \ldots\ v_{n1}V_{n1}],\\ & v_2\,[v_{11}V_{12} + v_{21}V_{22} + \ldots\ v_{n1}V_{n2}],\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & v_n\,[v_{11}V_{1n} + v_{21}V_{2n} + \ldots\ v_{n1}V_{nn}],\end{aligned}$$

ce qui multiplie v_1 dans le second membre, est égal à Δ: les multiplications de $v_2, v_3,\ldots, v_n$ sont donc nulles. On trouve des résultats analogues, en multipliant les autres équations du système (1) par Δ; on a donc en général

$$(3) \qquad 0 = v_{1k}V_{1\lambda} + v_{2k}V_{2\lambda} + \ldots + v_{nk}V_{n\lambda},$$

$$(4) \qquad \Delta = v_{1k}V_{1k} + v_{2k}V_{2k} + \ldots\ v_{nk}V_{nk},$$

k et λ étant deux nombres de la suite $1, 2, 3,\ldots, n$.

3. On a

$$v_k x_\lambda = v_{1k}x_1x_\lambda + v_{2k}x_2x_\lambda + \ldots\ v_{nk}x_nx_\lambda.$$

Si l'on remplace les produits $x_1\,x_\lambda$, $x_2\,x_\lambda$, etc., par $V_{1\lambda}$, $V_{2\lambda}$, etc., l'expression $v_k\,x_\lambda$ s'annule, tandis que l'expression $v_k\,x_k$ prend la valeur de Δ.

Soit w une autre fonction algébrique *entière homogène* du second degré des mêmes variables $x_1, x_2,\ldots, x_n$; l'expression du second degré $v_k w_\lambda - v_\lambda w_k$ s'annule lorsqu'on y met $V_{11}, V_{12},\ldots, V_{22},\ldots$ à la place des produits x_1x_1, $x_1x_2,\ldots, x_2x_2,\ldots$: c'est une conséquence du § 3.

5. *Lemme.* $v = 0$ étant l'équation d'une conique, les coordonnées $\dfrac{x_1}{x_3}$, $\dfrac{x_2}{x_3}$, du centre sont données par les deux

équations

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0;$$

si le centre est sur la courbe, la conique se réduit à deux droites. Outre ces deux équations, on a

$$v = 0:$$

or

$$2v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3;$$

donc

$$v_3 = 0.$$

Ainsi si l'on élimine x_1, x_2, x_3 entre les trois équations

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0,$$

l'équation finale donne la relation entre les coefficients de l'équation qui exprime que l'équation $v = 0$ se décompose en deux facteurs linéaires : cette relation est $L = 0$, où L est le déterminant des coefficients de l'équation.

6. Soient $v = 0$, $w = 0$ les équations de deux coniques; et alors $n = 3$, $v + \lambda w = 0$ est l'équation d'une conique quelconque passant par les quatre points d'intersection des deux premières coniques. Pour que cette dernière équation se décompose en deux facteurs linéaires, il faut avoir les trois équations

$$v_1 + \lambda w_1 = 0, \quad v_2 + \lambda w_2 = 0, \quad v_3 + \lambda w_3 = 0.$$

L'élimination de x_1, x_2, x_3 donne une équation du troisième degré en λ dont les trois racines λ', λ'', λ''' sont les valeurs qu'il faut mettre pour λ dans l'expression $v + \lambda w$ pour qu'elle se décompose en deux facteurs linéaires. Désignons par x'_1, x'_2, x'_3 les trois coordonnées du point d'intersection 1 des deux droites qui correspondent à λ'; de même, par x''_1, x''_2, x''_3 les coordonnées du point d'intersection 2 des deux droites qui correspondent à la valeur λ'', etc., on obtient ces trois systèmes d'équations :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} v'_1 + \lambda' w'_1 = 0, & v''_1 + \lambda'' w''_1 = 0, & v'''_1 + \lambda''' w'''_1 = 0, \\ v'_2 + \lambda' w'_2 = 0, & v''_2 + \lambda'' w''_2 = 0, & v'''_2 + \lambda''' w'''_2 = 0, \\ v'_3 + \lambda' w'_3 = 0, & v''_3 + \lambda'' w''_3 = 0, & v'''_3 + \lambda''' w'''_3 = 0, \end{array} \right.$$

v'_1 est la valeur que prend v_1 en y remplaçant x_1, x_2, x_3 par x' , x'_2, x'_3 et ainsi des autres ; de là, on déduit facilement ces deux systèmes d'équations :

$$(6)\left\{\begin{array}{l} x''_1 v'''_1 + x''_2 v'''_2 + x''_3 v'''_3 = 0, \quad x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3 = 0, \\ x'''_1 v'_1 + x'''_2 v'_2 + x'''_3 v'_3 = 0, \quad x'''_1 w'_1 + x'''_2 w'_2 + x'''_3 w'_3 = 0, \\ x'_1 v''_1 + x'_2 v''_2 + x'_3 v''_3 = 0, \quad x'_1 w''_1 + x'_2 w''_2 + x'_3 w''_3 = 0. \end{array}\right.$$

En effet, on a

$$x''_1 v'''_1 + x''_2 v'''_2 + x''_3 v'''_3 + \lambda'''(x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3) = 0,$$
$$x'''_1 v''_1 + x'''_2 v''_2 + x'''_3 v''_3 + \lambda''(x'''_1 w''_1 + x'''_2 w''_2 + x'''_3 w''_3) = 0.$$

Or on a les deux identités

$$x''_1 v'''_1 + x''_2 v'''_2 + x''_3 v'''_3 = x'''_1 v''_1 + x'''_2 v''_2 + x'''_3 v''_3,$$
$$x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3 = x''_1 w'''_1 + x''_2 w'''_2 + x''_3 w'''_3.$$

On obtient ainsi les premières équations des deux systèmes (6). Ces équations expriment que les points 2 et 3 sont des pôles réciproques de la conique $v = 0$ et $w = 0$; ainsi les deux systèmes (6) expriment que les points 1, 2, 3 pris deux à deux sont des pôles harmoniques (*) simultanés des deux coniques $v = 0$ et $w = 0$.

7. *Définition.* On nomme système de *pôles harmoniques* trois points tels, que, pris deux à deux, ils sont pôles harmoniques d'une conique.

8. Deux coniques ont donc toujours un système de pôles harmoniques en commun et ce sont les intersections des diagonales du quadrilatère complet qui a pour sommet les quatre points d'intersection ; ce qui est d'ailleurs évident à priori.

En considérant la conique $v = 0$ comme donnée et faisant varier la conique $w = 0$, on obtient de cette manière

---

(*) Deux pôles sont harmoniques, quand la polaire de l'un de ces points passe par l'autre point.

tous les systèmes possibles des pôles harmoniques de l'équation donnée.

9. *Lemme.* L'équation de la polaire réciproque de la conique $v = 0$, par rapport à la conique directrice

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

est

$$\begin{aligned} V_{11} x_1 x_1 + V_{22} x_2 x_2 + V_{33} x_3 x_3 + 2 V_{23} x_2 x_3 \\ + 2 V_{31} x_3 x_1 + V_{12} x_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

(voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 411); les V ont la même signification que ci-dessus (§ 2).

10. Reprenons les trois équations

$$v_1 + \lambda w_1 = 0, \quad v_2 + \lambda w_2 = 0, \quad v_3 + \lambda w_3 = 0;$$

si l'on élimine λ, on obtient

$$v_2 w_3 - v_3 w_2 = 0, \quad v_3 w_1 - v_1 w_3 = 0, \quad v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0;$$

équations de trois coniques qui passent par les points 1, 2, 3; ainsi l'équation

$$u = b_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + b_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + b_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) = 0,$$

où les b sont des constantes arbitraires, représente toute conique qui passe par les points 1, 2, 3, et si l'on fait varier w, cette équation représentera toute conique passant par un système quelconque de pôles harmoniques de la conique $v = 0$. Mais la fonction a s'annule lorsqu'on y remplace $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, etc., par V_{11}, V_{12}, etc. (§ 4). Si donc

$$\begin{aligned} u = a_{11} x_1 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{33} x_3 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 \\ + 2 x_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

est l'équation d'une conique passant par un système de pôles harmoniques de la conique $v = 0$, on a la relation

$$a_{11} V_{11} + a_{22} V_{22} + a_{33} V_{33} + 2 a_{23} V_{23} + 2 a_{31} V_{31} + 2 a_{12} V_{12} = 0.$$

C'est une équation générale linéaire de condition entre les coefficients de l'équation d'une conique $u = 0$, on a donc :

Théorème. *Lorsqu'il existe une équation linéaire de condition entre les coefficients de l'équation d'une conique, cette conique passe par le système de pôles harmoniques d'une autre conique déterminée par l'équation de condition.*

Pour trouver cette conique, il suffit de remplacer, dans l'équation de condition, a_{11}, a_{12}, etc., par $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, etc., on a

$$\begin{aligned} V_{11} x_1 x_1 + V_{22} x_2 x_2 + V_{33} x_3 x_3 + 2 V_{23} x_2 x_3 \\ + 2 V_{31} x_3 x_1 + 2 V_{12} x_1 x_2 = 0. \end{aligned}$$

La polaire réciproque, par rapport à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, est $v = 0$ (*Lemme* 9) ; c'est la conique cherchée.

11. *Lemme.* Les six points des deux systèmes de pôles harmoniques d'une conique sont sur une seconde conique.

12. En combinant ce lemme avec le théorème précédent, on a :

Théorème. *Lorsque par trois points d'un système de pôles harmoniques d'une conique donnée on fait passer une conique, le périmètre de cette conique renferme une infinité de systèmes de pôles harmoniques de la conique donnée.*

13. Soient $n = 4$, $v = 0$, $w = 0$, équations de deux surfaces du second degré; $v + \lambda w = 0$ est l'équation d'une surface du second degré passant par les courbes d'intersection des deux surfaces données. Pour que cette équation devienne celle d'un cône (surface dont le centre est sur la surface), on doit avoir, en raisonnant comme ci-dessus,

$$v_1 + \lambda w_1 = 0, \quad v_2 + \lambda w_2 = 0, \quad v_3 + \lambda w_3 = 0, \quad v_4 + \lambda w_4 = 0;$$

l'élimination de x donne une équation du quatrième degré en λ, dont les racines correspondent aux cônes. Les sommets de deux quelconques de ces cônes sont des pôles harmoniques simultanés par rapport aux deux surfaces, c'est ce qu'on démontre comme au § 6.

On nomme *système de pôles harmoniques* d'une surface du second ordre *quatre points* dont deux quelconques sont des pôles harmoniques. Ainsi les quatre sommets 1, 2, 3, 4 des quatre cônes forment un système de pôles harmoniques simultanés pour les deux surfaces, théorème déjà démontré par M. Poncelet.

Si l'on considère la surface $v = 0$ comme donnée et qu'on fasse varier la surface $w = 0$, on obtient, en déterminant chaque fois les sommets des quatre cônes, tous les systèmes de pôles harmoniques possibles de la surface donnée.

14. En éliminant λ de deux quelconques des quatre dernières équations, on obtient six équations de surfaces du second ordre dont chacune passe par les quatre sommets 1, 2, 3, 4 des quatre cônes. Ainsi l'équation suivante

$$\begin{aligned} u = {} & b_{12}[v_1 w_2 - v_2 w_1] + b_{13}[v_1 w_3 - v_3 w_1] + b_{14}[v_1 w_4 - v_4 w_1] \\ & + b_{23}[v_2 w_3 - v_3 w_2] + b_{24}[v_2 w_4 - v_4 w_2] + b_{34}[v_3 w_4 - v_4 w_3] \end{aligned}$$

avec les constantes arbitraires b, représente toute surface du second ordre qui passe par les *quatre* points; mais cette équation représentera toutes les surfaces possibles du second ordre qui passent par un système de pôles harmoniques quelconque de la surface donnée $v = 0$. Si l'on fait varier la fonction w, aussi bien que les constantes b, l'expression a disparaît lorsqu'on y change $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, etc., en V_{11}, V_{12}, etc. Si donc

$$\begin{aligned} u = {} & a_{11} x_1 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{33} x_3 x_3 + a_{44} x_4 x_4 \\ & + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 \\ & + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4 = 0 \end{aligned}$$

est l'équation d'une surface du second ordre, qui passe par un système de pôles harmoniques de la surface donnée $\nu = 0$, on a toujours l'équation

$$a_{11}V_{11} + a_{22}V_{22} + a_{33}V_{33} + a_{44}V_{44} + 2a_{13}V_{13} + \ldots = 0,$$

d'où l'on conclut :

THÉORÈME. *S'il existe une relation linéaire entre les coefficients d'une équation d'une surface du second degré, la surface passe par un système de pôles harmoniques d'une autre surface du second degré déterminée par la relation donnée.*

Pour obtenir cette surface, on remplace dans la relation a_{11}, a_{12}, etc., par x_{11}, x_{12}, etc.; la polaire réciproque de cette surface par rapport à la directrice

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

est la surface cherchée $\nu = 0$.

15. *Lemme*. Deux systèmes de pôles harmoniques par rapport à la même surface du second ordre peuvent être considérés comme les points d'intersection de trois surfaces du second ordre.

16. A l'aide de ce lemme, on démontre :

THÉORÈME. *Si une surface du deuxième ordre passe par un système de pôles harmoniques d'une surface donnée du deuxième ordre, elle passe par une infinité de ces systèmes.*

DIVISION ABRÉGÉE;

PAR M. HOUSEL.

Pour établir d'une manière précise la théorie et le procédé de la division abrégée, nous la considérerons comme l'inverse de la multiplication abrégée.

314160
42612
628320
31416
18849
628
125
67,9338

On sait que, pour multiplier 21,624 par 3,1416 en s'arrêtant aux dix millièmes (sauf à effacer le dernier chiffre du produit si l'on craint qu'il ne soit pas exact), on écrit 21,624 sous 31416 en renversant les chiffres du multiplicateur de manière que le chiffre des unités soit sous le chiffre que l'on veut conserver, et qu'on néglige à chaque produit partiel les chiffres du multiplicande restés à droite, en tenant compte cependant des retenues qui donneront aussi des dix-millièmes et que nous appellerons *retenues supplémentaires*.

(On peut être tenté de prendre comme retenues supplémentaires 4 au lieu de 3 pour le produit de 6 par 6, et 2 au lieu de 1 pour celui de 4 par 4 : en effet, on cherche en général à compenser les retenues en plus par des retenues en moins ; mais ici, comme $3,1416 > \pi$ est un peu trop grand, on a pris les retenues en moins.)

679338	31 41$\cancel{6}$
62832	21,624
51018	
31416	
19602	
18849	
753	
628	
125	
125	
0	

Réciproquement, si l'on divise 67,9338 par 3,1416, on commencera par voir que le quotient a des dizaines ; ensuite on obtient comme à l'ordinaire les deux premiers chiffres ; mais après cela, au lieu d'ajouter un zéro au dividende partiel, nous remarquerons que, dans la multiplication ci-dessus, le 6 du nombre 31416 ne compte pour son produit avec le 6 de l'autre facteur que par sa retenue supplémentaire ; donc ici nous effacerons ce chiffre 6 au diviseur : mais après avoir obtenu 6 pour quotient partiel de 19602 par 341, nous ajouterons au produit de 3141 par 6 la retenue supplémentaire 3 due au 6 effacé, etc.

On a écrit dans la division tous les produits partiels pour montrer la correspondance des deux opérations.

D'après cela, on peut conclure la règle suivante pour la division abrégée.

Déterminez avant tout la nature des unités du quotient, ce qui sera toujours facile : cela fait, on n'aura plus à s'inquiéter de la position des virgules. Soit alors p le nombre *total* de chiffres que l'on doit avoir au quotient, et soit n le nombre de chiffres que l'on veut prendre au diviseur. Séparez à la gauche du dividende un nombre capable de contenir ce diviseur modifié, vous aurez le premier chiffre du quotient et il en reste $p-1$ à obtenir; il faut voir combien on doit encore prendre de chiffres au dividende pour les abaisser. Remarquez que vous pourrez tout au plus effacer successivement les $n-1$ derniers chiffres du diviseur modifié, et même il est plus sûr de n'en effacer que $n-2$ pour en garder deux à la fin: il faut donc en prendre $(p-1)-(n-2)=p-n+1$, et supprimer les autres. En général, on choisit n de manière que $p-n+1$ soit petit ou même nul.

Supposons qu'il s'agisse de diviser 67,9337994636 par 3,14159266 et d'avoir trois décimales au quotient, sauf à supprimer la dernière si l'on doute de son exactitude. Quand on a vu qu'il y avait des dizaines au quotient, tout se passe comme s'il s'agissait de nombres entiers : alors $p=5$ et l'on prend $n=5$, de sorte que

$$p-n+1=1;$$

en effet, on n'abaisse qu'un chiffre du dividende.

Nous avons pris un exemple qui montre que, si dans une multiplication abrégée le multiplicande est terminé par un ou plusieurs zéros, on est conduit dans la division abrégée correspondante à abaisser un ou plusieurs chiffres du dividende; mais en général on n'en abaisse pas.

SOLUTION DE LA QUESTION 292

[voir tome XIII, page 192 (*)];

Par M. PAQUE, Professeur à Liége,

et

M. DEVYLDER, Professeur à Namur.

Question. n étant un nombre positif entier, prouver que l'on a

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Démonstration. On a

$$(1)\qquad e^n = 1 + n + \frac{n^2}{[2]} + \frac{n^3}{[3]} + \ldots + \frac{n^{n-1}}{[n-1]} + \frac{n^n e^{\theta n}}{[n]};$$

θ est compris entre 0 et 1.

Écrivons la série

$$\frac{1}{[n]},\ \frac{1}{[n-1]},\ \frac{1}{[n-2]},\ \frac{1}{[n-3]},\ldots,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{e^{\theta n}},$$

tous les termes sont moindres que l'unité, à l'exception d'un seul terme égal à l'unité. Multipliant les termes du second membre de l'équation (1), respectivement par les termes de la dernière série et mettant $\frac{1}{[n]}$ en facteur commun, on obtient

$$e^n > \frac{1}{[n]}\left[\begin{array}{l} 1 + n.n + \dfrac{n.n-1}{2}n^2 \\ + \dfrac{n.n-1.n-2}{1.2.3}n^3 + \ldots + n.n^{n-1} + n^n \end{array}\right],$$

ou bien

$$e^n > \frac{(1+n)^n}{[n]}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*) J'ai réuni ces deux solutions qui ne diffèrent pas essentiellement.

Note. M. Cauchy dans ses *Exercices d'Analyse*, tome IV, page 106, démontre l'inégalité

$$n^{\frac{n}{2}} < [n] < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n;$$

d'après ce qui précède, on peut remplacer la limite supérieure par $\left(\frac{1+n}{c}\right)^n$.

Stirling donne la formule

$$e^n > \frac{n^n \sqrt{2n\pi}}{[n]}$$ (A. Genocchi).

THÉORÈMES D'EISENSTEIN.

(Crelle, tome XLIV, page 261; 1852.)

1. *Lemme.* Soit

$$S = \left| \begin{array}{llll} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & c_{n+1}, & \ldots, \end{array} \right|$$

les barres désignent un *déterminant* entre $(n+1)$ quantités, et l'on suppose que S n'est pas nul.

Soit un système d'équations

$$\begin{array}{l} a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + \ldots = \gamma_1, \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 + \ldots = \gamma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1} u_1 + b_{n+1} u_2 + c_{n+1} u_3 + \ldots = \gamma_{n+1}, \end{array}$$

on en déduit

$$\begin{array}{l} u_1 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 + \ldots, \\ u_2 = \beta_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Soit

$$S_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \ldots, \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, \ldots, \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, \ldots, \end{vmatrix}$$

on a

$$S_1 S = 1,$$

et

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots = 1, \\ b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 + \ldots = 1, \\ c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 + \ldots = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \ldots = 0, \\ a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 + \ldots = 0, \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

ou bien symboliquement

$$\sum a\alpha = 1, \quad \sum a\beta = 0,$$

c'est-à-dire lorsque les lettres latines sont jointes aux lettres grecques correspondantes, la somme est égale à 1, et si les lettres ne sont pas correspondantes, la somme est nulle.

2. Théorème. *Soit*

$$p_\mu = a_\mu + A_1 b_\mu x + A_2 c_\mu x^2 + A_3 d_\mu x^3 + \ldots,$$
$$\omega_\mu = \alpha_\mu + A_1 \beta_\mu \xi + A_2 \gamma_\mu \xi^2 + A_3 \delta_\mu \xi^3 + \ldots;$$

si l'on donne à μ les valeurs successives de la suite 1, 2, 3,..., n + 1, *les* a, b, c,..., α, β, γ *ayant même signification que ci-dessus, et les* A *étant des quantités quelconques, on a*

$$\sum p\mu = p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots p_{n+1}\mu_{n+1} = \text{fonction de } x\xi.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du système d'équations (1).

Corollaire. Si A_μ^2 est le coefficient binominal de z^μ dans $(1+z)^n$, on a

$$\sum p\mu = (1 + x\xi)^n.$$

Ainsi le produit de $n+1$ fonctions, chacune de degré n, se réduit ici à une fonction de degré $2n$ et de degré n par rapport à chaque variable.

Application. Si l'on a $n = 2$,

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3 = (1 + x\xi)^2;$$

posant

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0,$$

alors

$$p_3\omega_3 = (1 + x\xi)^2.$$

x et ξ ne sont plus des variables *indépendantes*, et l'on a

$$p_2 = \frac{-\omega_1 p_1}{\omega_2},$$

$$p_2 p_3 = \frac{-\omega_1 p_1 p_3 \omega_3}{\omega_2\omega_3},$$

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{-\omega_1 p_1^2 p_3 \omega_3}{\omega_2\omega_3} = \frac{-\omega_1\omega_2\omega_3 p_1^2 (1 + x\xi)^2}{\omega_2^2\omega_3^2};$$

d'où

$$\sqrt{p_1 p_2 p_3} = \sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}\,.\,\frac{p_1(1 + x\xi)}{\omega_2\omega_3}.$$

De là ce théorème :

La racine carrée d'une fonction rationnelle en x *du sixième degré peut être transformée rationnellement dans la racine carrée d'une fonction similaire d'une autre variable.*

Eisenstein applique ce théorème à la transformation des intégrales abéliennes de première classe; travail qui vient d'être considérablement perfectionné et étendu par

M. Hermite dans une suite de Mémoires insérés dans les *Comptes rendus*, et qui renferment de précieuses et profondes recherches sur les déterminants, dont nous espérons pouvoir entretenir nos lecteurs. (*Comptes rendus*, 1855, 1er semestre, pages 246, 304, 365, 427, 485 et 536.)

Voici la marche d'Eisenstein :

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = \mathrm{F}(x,\xi) = (1 + x\xi)^2 - p_3\omega_3 = \theta^2 - p_3\omega_3,$$
$$\theta = 1 + x\xi;$$
$$d_\xi \mathrm{F} = 2\theta\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) - p_3\frac{d\omega}{d\xi} = 2\theta\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) - \frac{\theta^2}{\omega_3}\frac{d\omega}{d\xi},$$
$$d_\xi \mathrm{F} = \frac{\theta}{\omega_3}\left[2\omega_3\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) - \theta\frac{d\omega_3}{d\xi}\right] = -\frac{\theta}{\omega_3}\Theta;$$
$$\Theta = -2\omega_3\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta\frac{d\omega_3}{d\xi},$$

or

$$dx = \frac{-d_\xi\mathrm{F}.d\xi}{d_x\mathrm{F}} = \frac{\theta\Theta}{\omega_3 d_x\mathrm{F}}d\xi;$$

mais

$$\sqrt{p_1p_2p_3} = \sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}\,\frac{p_1\theta}{\omega_2\omega_3}:$$

donc

$$\frac{dx}{\sqrt{p_1p_2p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}}\,\frac{\Theta\omega_2}{d_x\mathrm{F}.p_1}.$$

Faisons

$$p_1 = (x-r)(x-s),$$

r et s sont des quantités connues; il vient

$$\frac{(x-s)\,dx}{\sqrt{p_1p_2p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}}\,\omega_2.\,\frac{\Theta}{d_x\mathrm{F}.(x-s)}.$$

Entre x et ξ existe la relation quadratique

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{F}(x,\xi) = 0.$$

Ainsi x est une fonction de ξ, et x a deux valeurs en ξ. Mettant successivement ces deux valeurs et sommant, on a

$$\sum \frac{(x-s)\,dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}}\,\omega_2 \sum \frac{\Theta}{d_x \mathrm{F}(x-s)}.$$

Mais Θ est du premier degré en x, et F est du second degré; on a donc, d'après la théorie de la décomposition en fractions partielles,

$$\sum \frac{\Theta}{d_x \mathrm{F}(x-r)} = \frac{\Theta(r,\xi)}{\mathrm{F}(r,\xi)}.$$

Dans Θ et F on a remplacé x par r; mais

$$\mathrm{F}(r,\xi) = \omega_2 p_2(r),$$

où $p_2(r)$ est la valeur de p_2 dans laquelle x est remplacé par r; par conséquent $p_2(r)$ est une constante. On a donc

$$\sum \frac{(x-s)\,dx}{\sqrt{p_1\ p_2\ p_3}} = \frac{\Theta(r,\xi)\,d\xi}{p_2(r)\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}},$$

et de même

$$\sum \frac{(x-r)\,dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{\Theta(r,\xi)\,d\xi}{p_2(s)\sqrt{-\omega_1\omega_2\omega_3}};$$

mais

$$\theta(x,\xi) = \beta_3\sqrt{2}(1-x\xi) + 2\gamma_3\xi - 2\alpha_3 x.$$

Ainsi $\theta(r,\xi)$ est du premier degré en ξ, donc les membres à droite de ces équations sont des différentielles d'intégrales abéliennes.

QUESTIONS.

299. Soient p un nombre premier plus grand que 3, et r un nombre quelconque de la suite $2, 3, 4, \ldots, p-2$.

Écrivons de gauche à droite sur une ligne horizontale la progression $1, 2, 3, 4, \ldots, p$; et au-dessous une deuxième ligne horizontale $1+r$, $2+r$, $3+r, \ldots, p+r$; puis une troisième ligne $1+2r$, $2+2r$, $3+2r, \ldots, p+2r$, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne $1+(p-1)r$, $2+(p-1)r, \ldots, p+(p-1)r$, et toutes les fois qu'on aura un nombre plus grand que p, on n'écrit que le résidu de ce nombre divisé par p. Démontrer qu'on ne rencontre aucun nombre répété dans aucune ligne horizontale, dans aucune ligne verticale, dans aucune des deux lignes diagonales. (CRELLE.)

300. Trouver une fonction de a, b, c, d telle, qu'en y faisant $b=a$, elle devienne $\frac{c-d}{2(c+d)}$, et en y faisant $c=d$, elle devienne $\frac{a-b}{2(a+b)}$. (LEIBNITZ.)

301. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ neuf points d'intersection de deux courbes du troisième degré; par les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4, et successivement par chacun des points a_5, a_6, a_7, a_8, faisons passer une conique, on aura quatre coniques. Les quatre polaires d'un point quelconque du plan, par rapport à ces coniques, forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant (*), ce rapport est égal au rapport anharmonique du faisceau que l'on obtient en joignant par des droites le point a_9 aux points a_5, a_6, a_7, a_8. (CHASLES.)

302. *Problème.* Toutes les courbes planes du troisième degré qui passent par huit points donnés se croisent en un seul et même neuvième point; construire ce point au moyen du théorème énoncé dans la question précédente. (CHASLES.)

(*) *Nouvelles Annales*, tome XII, page 361.

THÉORÈME DE M. MINDING SUR LA SURFACE D'AIRE MINIMA.

1. *Définitions.* Soit une surface quelconque, hormis les surfaces développables.

Section *axiale* est une section faite dans la surface par un plan passant par une droite considérée comme axe.

Ligne méridionale correspondante à une section axiale; par un point quelconque de cette ligne menant une normale à la surface, elle est parallèle à la section axiale.

Il y a autant de lignes méridiennes que de sections axiales; et toutes se croisent aux points où la normale à la surface est parallèle à l'axe.

Lignes parallèles. A chaque point de cette ligne, la normale à la surface fait un angle donné avec l'axe.

Ainsi, à chaque axe correspond un système de lignes méridiennes et de lignes parallèles à angle donné.

2. *Théorème.* Soit une ligne fermée quelconque par laquelle passe la surface d'aire minima; les lignes méridiennes et parallèles correspondant à un axe quelconque se coupent à angle droit.

3. *Théorème.* Dans un plan tangent à un cylindre, soit tracée une courbe quelconque. Si l'on développe le plan sur le cylindre, la courbe engendre une surface telle, que si l'on prend pour axe celui du cylindre, les lignes méridiennes et parallèles se coupent à angle droit; elles sont aussi les lignes de courbure de la surface.

Note. M. O. Bonnet a eu la bonté de nous promettre prochainement une démonstration intuitive de ces théorèmes.

SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES DITES CIRCULAIRES;

D'APRÈS M. W. STAMMER (DE LUXEMBOURG).

(CRELLE, tome XLIV, page 295; 1852.)

1. Soient un cercle donné de centre C, et M un point extérieur au cercle et dans son plan. Menons par M deux tangentes MA, MB au cercle; A et B sont les points de contact. Soit F un point fixe de la circonférence pris entre A et B; et désignons l'arc à droite FA par ξ et l'arc à gauche FB par η. Connaissant les arcs ξ et η, le point M est déterminé; ξ et η sont dites coordonnées *circulaires* du point M; les points intérieurs à la circonférence n'ont pas de coordonnées circulaires *réelles*. ξ peut aussi exprimer l'arc FBA et η l'arc FAB; on peut aussi augmenter ξ et η de plusieurs circonférences entières. L'auteur indique les formules faciles à trouver pour passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées circulaires et *vice versâ*, et discute ensuite la courbe donnée par l'équation

$$\eta = a\xi,$$

où a est un nombre réel qu'on peut toujours supposer plus grand que l'unité. La courbe est formée par un certain nombre de branches infinies qui touchent toutes le cercle. On distingue les deux cas où a est positif et a négatif.

Observation. L'idée des coordonnées circulaires appartient à M. Plucker, qui l'a exposée dans son cours à l'Université de Bonn pendant l'été de 1847. C'est le sujet de la thèse doctorale de M. Stammer.

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES;

PAR M. STEINER.

(CRELLE, tome XLIV, page 275; 1854.)

1. *Théorème.* En inscrivant dans un quadrilatère complet deux coniques, les huit points de contact sont sur une même conique.

2. *Théorème.* Une conique étant inscrite dans un quadrilatère, si, par les quatre points de contact, on fait passer une seconde conique, elle coupera les côtés en quatre nouveaux points de contact d'une conique inscrite.

3. *Théorème.* Les huit points de contact de deux coniques inscrites dans un quadrilatère complet donnent soixante-dix groupes de quatre points; douze de ces groupes sont avec deux des quatre sommets opposés sur une même conique; ces douze coniques se partagent en six couples de coniques tels, que dans chaque couple les coniques ont un double contact.

Ce théorème subsiste aussi pour le quadrilatère complet.

4. *Théorème.* Dans un quadrilatère complet inscrit au cercle, le produit des deux perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence sur les côtés opposés est constant.

Note. On déduit facilement le théorème général suivant pour un polygone inscrit d'un nombre pair de côtés; le produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés de rang pair est égal au produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés de rang impair (*Géométrie supérieure*).

5. *Théorème.* Quatre coniques étant inscrites dans un triangle, ces coniques prises deux à deux ont encore en

commun, outre les côtés du triangle, une quatrième tangente T; il y a six de ces tangentes T et elles coupent chaque côté du triangle en six points en involution.

6. *Théorème*. Si quatre coniques ont en commun un foyer et une tangente A, elles ont encore en commun prises deux à deux six tangentes T telles, qu'elles coupent la tangente A en six points en involution.

7. *Théorème*. Si quatre paraboles ont le même foyer, prises deux à deux, elles ont une tangente commune T; si par un point p on abaisse des perpendiculaires sur ces six tangentes, on a un faisceau en involution.

8. *Théorème*. Une parabole P et un système de coniques confocales C sont donnés dans un même plan. Menons les quatre tangentes communes à la parabole P et à l'une quelconque des coniques du système C; soient a, b, c, d les quatre points de contact sur la parabole, f étant le foyer de la parabole, le produit $fa.fb.fc.fd$ est constant.

Pour toute autre parabole qui a le même foyer f, le produit $fa.fb.fc.fd$ reste constant.

SOLUTION DE LA QUESTION 296

(voir p. 50);

PAR M. ABADIE,
Capitaine d'artillerie.

La question peut s'énoncer ainsi : Étant donnés deux systèmes chacun de sept points dans un même plan, trouver deux nouveaux points P et P′ tels, que si l'on joint le point P aux points du premier système et le point P′ aux points correspondants du second système, les faisceaux résultants soient homographiques. Le caractère de deux droites correspondantes dans deux faisceaux homographiques étant qu'à l'une d'elles dans le premier faisceau n'en correspond qu'une seule dans le second, il s'ensuit que m et m' étant les coefficients angulaires de ces deux droites, on aura la relation

$$(1)\qquad A mm' + B m + C m' + D = 0,$$

A, B, C, D étant des constantes inconnues, les mêmes pour deux droites correspondantes quelconques. Comme de plus, si l'on désigne par x, y et x', y' les coordonnées des points P et P', et par a_n, b_n et a'_n, b'_n les coordonnées de deux points quelconques donnés correspondants dans les deux systèmes, on aura

$$m = \frac{y - b_n}{x - a_n}, \qquad m' = \frac{y' - b'_n}{x' - a'_n},$$

l'équation se changera en

$$(2)\quad \begin{cases} (y - b_n)[A(y' - b'_n) + B(x' - a'_n)] \\ + (x - a_n)[C(y' - b'_n) + D(x' - a'_n)] = 0; \end{cases}$$

en faisant successivement

$$n = 1, 2, 3 \ldots 7,$$

on aura les sept équations entre les sept inconnues x, y, x', y', $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$.

Des six premières équations éliminons les cinq dernières inconnues; à cet effet, multiplions les six premières équations par les six coefficients indéterminés λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 et en posant

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \;(y - b_1) + \lambda_2 \;(y - b_2) + \ldots + \lambda_6 \;(y - b_6) = 0,\\
&\lambda_1 \;(x - a_1) + \lambda_2 \;(x - a_2) + \ldots + \lambda_6 \;(x - b_6) = 0,\\
&\lambda_1 b'_1 (y - b_1) + \lambda_2 b'_2 (y - b_2) + \ldots + \lambda_6 b'_6 (y - b_6) = 0,\\
&\lambda_1 a'_1 (y - b_1) + \lambda_2 a'_2 (y - b_2) + \ldots + \lambda_6 a'_6 (y - b_6) = 0,\\
&\lambda_1 b'_1 (x - a_1) + \lambda_2 b'_2 (x - a_2) + \ldots + \lambda_6 b'_6 (x - b_6) = 0,\\
&\lambda_1 a'_1 (x - a_1) + \lambda_2 a'_2 (x - a_2) + \ldots + \lambda_6 a'_6 (x - b_6) = 0,
\end{aligned}$$

on aura pour l'équation cherchée entre x et y,

$$(3)\ 0 = \text{déter.} \left\{ \begin{array}{llllll} (y-b_1), & (y-b_2), & (y-b_3), & (y-b_4), & (y-b_5), & (y-b_6), \\ b'_1\,(y-b_1), & b'_2\,(y-b_2), & b'_3\,(y-b_3), & b'_4\,(y-b_4), & b'_5\,(y-b_5), & b'_6\,(y-b_6), \\ a'_1\,(y-b_1), & a'_2\,(y-b_2), & a'_3\,(y-b_3), & a'_4\,(y-b_4), & a'_5\,(y-b_5), & a'_6\,(y-b_6), \\ (x-a_1), & (x-a_2), & (x-a_3), & (x-a_4), & (x-a_5), & (x-a_6), \\ b'_1\,(x-a_1), & b'_2\,(x-a_2), & b'_3\,(x-a_3), & b'_4\,(x-a_4), & b'_5\,(x-a_5), & b'_6\,(x-a_6), \\ a'_1\,(x-a_1), & a'_2\,(x-a_2), & a'_3\,(x-a_3), & a'_4\,(x-a_4), & a'_5\,(x-a_5), & a'_6\,(x-a_6); \end{array} \right.$$

équation du sixième degré, mais dans laquelle x et y ne dépassent pas le troisième degré.

Si l'on examine l'équation (3) avec attention et qu'on se rappelle qu'un déterminant est nul quand deux lignes horizontales sont les mêmes, on verra facilement que les coefficients des termes du sixième, cinquième et quatrième degré sont nuls; de sorte que l'équation n'est plus que du troisième degré.

Si dans le déterminant on pose

$$x = a_n, \quad y = b_n,$$

n étant un quelconque des six premiers nombres, ce déterminant devient identiquement nul; ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'équation (2): il s'ensuit que la courbe passe par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 du premier système P.

Si dans l'équation de la courbe, on échange respectivement a_6, b_6, a'_6, b'_6 en a_7, b_7, a'_7, b'_7, on aura une seconde courbe du troisième degré passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_7, P.

Éliminant y entre ces deux équations, on obtiendra une équation en x du neuvième degré; mais comme les deux courbes ont en commun les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, l'équation en x sera divisible par $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, $(x-a_3)$, $(x-a_4)$, $(x-a_5)$ et pourra être réduite à une équation du quatrième degré. Connaissant les valeurs de x, on sait par la méthode d'Abel, soit plus facilement par celle de M. Richelot, ou même par le procédé de M. Sylvester, en tirer linéairement les valeurs correspondantes de y.

Quant à la réduction de l'équation en x au troisième degré, je n'ai jusqu'ici trouvé rien de satisfaisant (*).

NOTE SUR LES ERREURS RELATIVES ET ABSOLUES;

PAR M. E. GAUCHEREL,
Capitaine,
Sous-directeur des études à l'École impériale spéciale Militaire.

M. Vieille dit (*Théorie générale des approximations*, Avertissement) : « Il m'a semblé que dans les Traités » d'Arithmétique on s'était attaché trop exclusivement à » l'*erreur absolue*, sans tenir compte de l'*erreur relative*.... » Il est bien certain qu'on a tort de s'attacher trop exclusivement à l'erreur absolue, mais je crains que M. Vieille n'ait quelquefois le tort contraire de chercher l'erreur relative, lorsque l'erreur absolue serait plus importante à étudier.

Je ne citerai ici pour exemple que la question relative à la recherche des triangles les plus avantageux pour la mesure des hauteurs. Je traiterai plus tard la même question sur les triangles géodésiques.

Si j'avais à déterminer les hauteurs de divers édifices, je m'imposerais une même limite d'erreur absolue pour tous ces édifices, plutôt que d'adopter une limite d'er-

(*) Les quatre solutions pouvant devenir imaginaires, cette réduction ne me semble pas possible, à moins qu'il n'y ait deux racines égales, ce qui est invraisemblable. TM.

reur relative. Ainsi je chercherais à obtenir les hauteurs à un centimètre près, par exemple, et non à $\frac{1}{5000}$ ou à $\frac{1}{10000}$ près de la hauteur.

Le développement de cette question est intéressant au point de vue de la pratique et instructif comme discussion; les applications numériques sont des exercices de calcul d'une grande utilité, dans lesquels les approximations jouent un grand rôle: essayons de donner une solution plus complète que celle de M. Vieille.

1°. Pour obtenir la hauteur AB d'un édifice, on mesure sur un terrain horizontal une base $AC = b$ et l'angle

$$ACB = C.$$

On a

$$AB = AC \tang C.$$

Mais, si l'angle C comporte une erreur $BCD = \alpha$, quelle est l'erreur $e = BD$ que comporte la mesure de la hauteur $h = AB$?

On a dans le triangle BCD,

$$e = \frac{BC.\sin\alpha}{\sin(B - \alpha)} = \frac{BC.\sin\alpha}{\cos(C + \alpha)};$$

dans le triangle ABC, on a

$$BC = \frac{h}{\sin C};$$

donc

$$e = \frac{h\sin\alpha}{\sin C\cos(C + \alpha)}.$$

L'erreur α pouvant être négligée devant C, on a

$$e = \frac{h\sin\alpha}{\sin C\cos C} = \frac{2h\sin\alpha}{\sin 2C}\ (*).$$

(*) Ce résultat a déjà été obtenu par M. Lecointe (t. IV, p. 581).

Application. Soient

$$h = 50^{\mathrm{m}}, \quad \alpha = 1' \text{ (division centésimale)}, \quad C = 30^{\mathrm{g}},$$

on a

$$\sin 1' = \frac{\pi}{20000} = 0,000157,$$

d'où

$$e = 0^{\mathrm{m}},019.$$

La hauteur h est obtenue à 2 centimètres près.

2°. Pour une même valeur de h et de α, le minimum de l'expression

$$e = \frac{2h \sin \alpha}{\sin 2C}$$

a évidemment lieu pour $C = 50^{\mathrm{g}}$. Donc, pour mesurer le plus exactement possible une hauteur h, il faut prendre une base à peu près égale à la hauteur à mesurer.

3°. Posant

$$C = 50^{\mathrm{g}},$$

il vient

$$e = 2h \sin \alpha,$$

relation qui indique qu'à des limites de e et de α correspondent des limites pour la valeur de h.

Application. Si les hauteurs doivent être obtenues à un centimètre près avec un éclimètre donnant une approximation d'une minute, la limite de h est

$$h = \frac{e}{2 \sin \alpha} = \frac{0^{\mathrm{m}},01}{0,000314} = 32^{\mathrm{m}}.$$

Donc, avec un tel goniomètre, on peut obtenir les hauteurs plus petites que 30 mètres avec une approximation d'un centimètre, en les observant sous un angle de 50 grades.

4°. On peut demander quelle approximation on doit obtenir dans la mesure de l'angle, pour avoir la hauteur à un centimètre près. On pose

$$\sin \alpha = \frac{e}{2h}.$$

Application. Soient

$$e = 0^{m},01, \quad h = 50^{m}, \quad \sin \alpha = \frac{0,01}{100}, \quad \alpha = 0',63''.$$

L'approximation angulaire doit donc être d'une demi-minute environ.

5°. On ne peut pas toujours se placer de manière à voir la hauteur à mesurer sous un angle à peu près égal à 50 grades. Il faut alors trouver la limite des valeurs de C pour lesquelles l'erreur sur la valeur de h est plus petite que la limite imposée. Cette limite est donnée par l'expression

$$\sin 2C > \frac{2h \sin \alpha}{e}.$$

Application. Soient

$$h = 25^{m}, \quad \alpha = 1', \quad e = 0^{m},01;$$

on a

$$\sin 2C > 0,785,$$

d'où l'on conclut que l'angle 2C doit être compris entre 60 et 140 grades, et l'angle C entre 30 et 70 grades.

Il n'est pas sans intérêt d'ajouter quelques considérations géométriques d'une grande simplicité sur la même question.

L'erreur linéaire qui résulte de l'erreur angulaire BCD étant BD, les trois points B, D, C sont sur une circonférence tangente à la ligne BM, faisant l'angle MBD = BCD. Cette circonférence coupe généralement l'horizontale AC en un autre point C'. Tout autre point C'' situé sur AC, en dehors des points C et C', donne une erreur plus grande que BD. En effet, la ligne $C'' D''$, parallèle à FD, donne évidemment $BD'' > BD$.

Il suit de là que, si l'on conçoit une circonférence tangente en B à la ligne MB, et tangente à AC, le point de contact C sur cette dernière ligne est le point pour lequel l'erreur angulaire MBD donne la plus petite erreur linéaire. Si cette erreur linéaire est très-petite, on peut considérer la circonférence comme tangente aux deux lignes AC, AB; on a alors $AC = AB$, ce qui conduit au principe énoncé ci-dessus (*).

Enfin, je ferai ressortir en terminant combien il est évident que l'erreur relative n'aurait aucune signification, s'il s'agissait de déterminer les cotes de hauteur de différents points d'un terrain.

Dans les opérations de nivellement, je ne considérerai donc que l'erreur absolue.

On a

$$e = \frac{BC \sin\alpha}{\cos(C + \alpha)}:$$

mais

$$BC = \frac{AC}{\cos C};$$

donc

$$e = \frac{b \sin\alpha}{\cos C \cos(C + \alpha)};$$

et, en négligeant α devant C,

$$e = \frac{b \sin\alpha}{\cos^2 C}.$$

(*) On ne peut faire intervenir, dans cette question, la considération de l'erreur relative que pour faire comprendre que, toutes choses égales d'ailleurs, il faut apporter plus de soin dans les opérations quand on veut que la mesure d'une grande ligne comporte la même erreur absolue que celle d'une petite.

On peut répéter sur cette expression une discussion analogue à celle qui a été faite ci-dessus, mais je me contenterai d'établir ici que, dans les nivellements *topographiques*, on se contente généralement de déterminer les différences de niveau à un décimètre près; que les éclimètres donnent les angles à 2 minutes près, au moins, et que les angles à l'horizon sont rarement plus grands que 15 grades.

Si l'on veut chercher la limite de b qui correspond à ces nombres, on a

$$b = \frac{e \cos^2 C}{\sin \alpha};$$

substituant, il vient

$$b = 301^{\text{m}},02.$$

Enfin, le tableau suivant donne les valeurs de e correspondantes à

$$\alpha = 1', \quad b = 100^{\text{m}},$$

et à différentes valeurs de C,

$$C = 5^{\text{g}} \ldots e = 0^{\text{m}},0158,$$
$$C = 10^{\text{g}} \ldots e = 0^{\text{m}},0161,$$
$$C = 15^{\text{g}} \ldots e = 0^{\text{m}},0166,$$
$$C = 20^{\text{g}} \ldots e = 0^{\text{m}},0173.$$

La valeur de e étant proportionnelle à α et à b, on déduit facilement de ce tableau les erreurs que comportent les opérations faites dans des circonstances différentes.

Application. Soient

$$\alpha = 2', \quad b = 450^{\text{m}}, \quad C = 12^{\text{g}};$$

on a

$$e = 2 \times 45 \times 0^{\text{m}},0163 = 0^{\text{m}},148.$$

RELATIONS
Entre les lignes trigonométriques circulaires et les lignes analogues hyperboliques.

1. $y^2 - x^2 = -1$ est l'équation d'une hyperbole équilatère à axes rectangulaires; O le centre; A le sommet; M un point quelconque; $\mathrm{MP} = y$, $\mathrm{OAP} = x$ coordonnées du point M; R le point où une parallèle à l'axe OA, menée par M, rencontre la tangente en A; S le point où cette même tangente est coupée par le demi-diamètre OM; $\mathrm{OA} = 1$. Faisons l'angle $\mathrm{ROA} = z$; l'aire du secteur extérieur $\mathrm{MOAM} = \frac{1}{2}\omega$, $\mathrm{MOP} = \varphi$.

2. La quadrature connue de l'hyperbole donne (*voir* tome V, page 388)

$$e^{\omega} = x + y, \quad e^{-\omega} = x - y;$$

d'où

$$x = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}, \quad y = \frac{e^{\omega} - e^{\omega}}{2},$$

x et y sont des transcendantes auxquelles on a respectivement donné les noms de *cosinus hyperbolique* et de *sinus hyperbolique* de la variable ω et que l'on désigne ainsi,

$$x = \cos h.\omega, \quad y = \sin h.\omega.$$

Gudermann, comme nous avons vu, désigne ces lignes par les lettres de l'alphabet gothique; on a évidemment

$$\sin h.\omega = \operatorname{tang} z, \quad \cos h.\omega = \operatorname{séc} z,$$
$$\operatorname{tang} a.\omega = \sin z, \quad \sin z = \operatorname{tang} \varphi.$$

D'après ces relations,

$$\omega = \log(\tang z + \sec z) = \log \tang\left(45^{\circ} + \frac{1}{2}z\right);$$

ainsi faisant croître z de 0 à 45 degrés, on pourra, au moyen des Tables des lignes trigonométriques circulaires, construire des Tables des lignes hyperboliques dites *trigonométriques* et des secteurs ω correspondants. Quoique, en toute rigueur, on puisse se passer de ces dernières lignes, il y a des cas où il est utile d'avoir ces Tables calculées d'avance. En effet, lorsque, dans la solution d'un problème, on a supposé qu'une certaine quantité était égale au cosinus d'un arc dès que cette quantité n'est plus renfermée entre les limites $+1$ et -1, les limites comprises, la solution devient impossible; mais on peut alors égaler la quantité à un cosinus hyperbolique qui prend toutes les valeurs comprises entre $+\infty$ et $-\infty$, excepté celles qui sont renfermées entre $+1$ et -1.

Exemple. Soit l'équation

$$x^3 - ax - b = 0;$$

faisant

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}a}, \quad \cos 3\omega = \frac{4b}{r^3},$$

on a

$$x = r\cos\omega:$$

solution impossible lorsque $\frac{4b}{r^3} > 1$. Dans ce cas, on fait

$$\cos h.3\omega = \frac{4b}{r^3},$$

et alors

$$x = r\cos h.\omega.$$

Supposons

$$a = 3, \quad b = 4;$$

alors

$$r = 2, \quad \frac{4b}{r^3} = 2 = \cos h.3\omega.$$

Consultant les Tables, on trouve qu'à ce cosinus correspond le secteur

$$3\omega = 0{,}5719475,$$

d'où secteur

$$\omega = 0{,}1906492\,;$$

et à ce dernier secteur correspond

$$\cos h.\omega = 1{,}0979133.$$

Donc

$$x = r\cos h.\omega = 2{,}1958266.$$

3. Nous avons pris cet exemple dans l'ouvrage de Lambert (J.-H.), intitulé : *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen tabellen, etc.* Additions aux Tables logarithmiques et trigonométriques pour faciliter et abréger les calculs qui se présentent dans les applications des mathématiques. Berlin, 1770; in-8 de 210 pages. (*Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*; t. I^er^, p. 28.)

La 32^e^ Table (page 178) est consacrée aux fonctions hyperboliques, et chaque double page est divisée en neuf colonnes.

Colonnes.		
1^re^	Valeurs de z (angle transcendant de Lambert) croissant par degré de zéro à 90 degrés,	
2^e^	Valeurs correspondantes du secteur $\frac{1}{2}\omega$,	
3^e^	—	des sinus hyperboliques,
4^e^	—	des cosinus hyperboliques,
5^e^	—	log sinus hyperboliques,
6^e^	—	log cosinus hyperboliques,
7^e^	—	tang φ,
8^e^	—	log tang φ,
9^e^	—	φ évaluée jusqu'à la tierce,

le tout avec 7 décimales.

Les Tables bien plus étendues de Gudermann ont été éditées en Allemagne. Celles de M. Yvon Villarceau, encore meilleures, ne trouvent point d'éditeur en France (*voir* tome XI, page 412).

4. Les noms de sinus, cosinus, etc., donnés à ces fonctions hyperboliques sont justifiés par les relations suivantes, Table 38e de Lambert (page 136) :

$$\sin h\,(y+z) = \sin hy \cos hz + \cos hy \sin hz,$$
$$\sin h\,(y-z) = \sin hy \cos hz - \cos hy \sin hz,$$
$$\cos h\,(y+z) = \cos hy \cos hz + \sin hy \sin hz,$$
$$\cos h\,(y-z) = \cos hy \cos hz - \sin hy \sin hz.$$

En effet, pour vérifier ces formules, il suffit de remplacer les sinus et cosinus par leurs évaluations exponentielles. Une manière plus simple est de remplacer y et z par

$$iy \text{ et } iz \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1},$$
$$\sin hiy = i \sin y.$$
$$\cos hiy = \cos y,$$
$$\sin hiz = i \sin z,$$
$$\cos hiz = \cos z;$$

d'où

$$\sin hiy \cos hiz + \sin hiz \cos hiy = i \sin (y+z) = \sin h\,(iz + iy).$$

Faisons y égal à $-iy$ et z égal à $-iz$, on trouve la première formule.

Ces formules servent à la multiplication et à la multisection de ces transcendantes

5. Nous voyons encore ici l'immense puissance qu'exerce sur nous l'habitude, même en mathématiques. Accoutumés que nous sommes à manier les Tables des logarithmes et des sinus, ces transcendantes nous semblent aussi simples que des quantités algébriques ordinaires, et dès qu'une question est ramenée à ces transcendantes, nous la considérons comme étant résolue, tandis que

d'autres transcendantes, telles que celles dont nous venons de parler, les transcendantes elliptiques, les *gamma*, etc., pour lesquelles les Tables n'existent pas ou sont peu connues, nous apparaissent sous un aspect effrayant, comme quelque chose d'éminemment difficile, et ces quantités très-utiles dans les applications sont repoussées de l'enseignement. A ce propos, nous jugeons opportun de traduire ici *en entier* le § 55 (page 48) de l'ouvrage cité de Lambert.

« Avant les temps de Neper, ceux qui faisaient de » l'arithmétique leur étude favorite trouvaient un passe- » temps agréable dans la comparaison des progressions » arithmétiques et géométriques, et fournissaient ainsi » à ceux qui aiment mieux injurier les mathématiques » que de les apprendre, un motif désiré de compter ces » *comparaisons* au nombre des plus *inutiles spéculations*. » Car alors aussi le *virtus post nummos*, s'opposait aux » progrès de la science. Toutefois Neper n'y fit pas at- » tention. Il compara les deux progressions pour voir si, » parmi les propriétés remarquables de cette théorie, on » n'en trouverait pas plusieurs autres. Les propriétés re- » marquables sont rarement isolées. C'est ainsi que » Neper parvint à en tirer les *logarithmes*, et par là la » chose cessa d'être une pure *spéculation*. »

Si Neper n'avait pas fait son invention, le calcul intégral n'en aurait pas moins mené à la transcendante $\int \frac{dx}{x}$, à laquelle on n'aurait certainement pas donné le nom de *logarithme*, et il se serait écoulé peut-être un temps très-long, avant de faire l'observation simple que $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{d(xy)}{xy}$ est une propriété fondamentale pour faciliter les calculs arithmétiques; c'est alors seulement qu'on se serait mis à construire des Tables pour cette transcendante. Nous devons à Neper d'avoir cette construction probablement un siècle plus tôt. Ceux qui préconisent tant les logarithmes, ne savent pas qu'ils doivent cet admirable instrument à un arithmologue, à un homme aux spéculations abstraites et qui a même débuté par un écrit sur la théologie. Il en est de même partout. Que saurions-nous dans la mécanique pratique sans les méditations théoriques des Archimède, des Kepler, des Descartes, des Newton, des Leibnitz et autres illustres *rêveurs*, que saurions-nous? Rien, rien, rien. Sans les travaux de ces hommes illustres nous n'existerions pas.

SUR LES FOYERS DES MIROIRS SPHÉRIQUES;

PAR M. EUGÈNE ROUCHER,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur de Physique au Lycée de Nantes.

La marche suivie dans tous les cours de Physique pour démontrer la formule *exacte* des foyers conjugués des miroirs sphériques repose sur des considérations assez longues de calcul infinitésimal. Voici une méthode, à la fois simple et courte, qui permet d'introduire cette formule, et, par suite, les valeurs des aberrations de sphéricité dans les cours élémentaires.

Soient S et C le sommet et le centre d'un miroir sphérique de rayon R; P un point lumineux situé sur l'axe SC et défini par sa distance au centre $PC = p$; P' son foyer conjugué, dont la distance au centre $P'C = p'$ est inconnue. PI étant un rayon incident quelconque, défini par l'angle $SCI = C$, les triangles PIC, $P'IC$ donnent

$$P = C - i,$$
$$P' = C + r,$$

ou

$$P = C - i,$$
$$P' = C + i,$$

à cause de l'égalité des angles i et r d'incidence et de réflexion. On en déduit

$$\sin P' - \sin P = 2 \sin i \cos C,$$
$$\frac{\sin P'}{\sin i} - \frac{\sin P}{\sin i} = 2 C \cos C,$$

ou

$$\frac{R}{p'} - \frac{R}{p} = 2 \cos C,$$

et enfin

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{2}{R} \cos C,$$

qui est la formule demandée.

THE TRANSACTIONS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY. Volume XVII; Dublin, 1837; in-4. Printed by Dixon Hardy, 3, Cecilia street, printer to the Royal Irish Academy.

GEOMETRICAL PROPOSITIONS APPLIED TO THE WAVE THEORY OF LIGHT; by James Mac Cullagh F. T. C. D. Read june 24, 1833; p. 241.

Surfaces réciproques.

1. THÉORÈME I. *Soient une surface* A, *un point* O *fixe,* Q *un point de la surface* A, P *plan tangent en* Q, OP *perpendiculaire sur* P; *sur* OP *on prend un point* R *tel, que*

$$OP . OR = K^2 = \text{const.},$$

les points R *et* Q *sont dits* réciproques, *et* B, *surface du lieu de* R, *est surface* réciproque *de* A; *c'est-à-dire si l'on mène un plan tangent à la surface* B *en* R, *et si de* O *on abaisse sur ce plan la perpendiculaire* ON, *elle passe par le point* Q, *et l'on a*

$$ON.OQ = K^2,$$

et le plan tangent en R *coupe* OQ *perpendiculairement. Les rayons* OQ *et* OR *sont réciproques.*

2. *Corollaire.* Si le point Q est un point singulier par lequel on peut mener une infinité de plans tangents, au même point Q correspondent une infinité de points R formant une courbe, et le plan tangent en R à la surface B touche cette surface le long de cette courbe et est perpendiculaire à OQ.

3. Soient abc, $a'b'c'$ deux ellipsoïdes dont les demi-axes a, b, c et a', b', c' coïncident respectivement et ont la relation

$$aa' = bb' = cc' = K^2.$$

On prend pour le point fixe O le centre commun des deux ellipsoïdes; ces deux ellipsoïdes sont des surfaces réciproques: a grand axe, b moyen, c petit axe; alors a' est petit axe, b' moyen axe et c' grand axe. Les sections circulaires des deux ellipsoïdes passent par le même axe moyen b, b'.

Soient Q et R deux points réciproques des deux ellipsoïdes; OQR un plan passant par OQ, OR; Oqr une perpendiculaire au plan OQR coupant l'ellipsoïde abc en q et l'ellipsoïde $a'b'c'$ en r; les lignes OQ, Oq sont les demi-axes de l'ellipse, intersection de la surface abc par le plan QOq; et de même OR, Or sont les demi-axes des intersections de la surface $a'b'c'$ avec le plan ROr.

Si la droite OQ reste dans le même plan, il en sera de même du rayon réciproque OR. Ces deux plans sont dits *réciproques*.

Si deux rayons réciproques sont dans le même plan principal et, par conséquent, perpendiculaire à un demi-axe de l'ellipsoïde, les plans passant par ce demi-axe et par les rayons réciproques sont évidemment réciproques.

4. Théorème II. *Si, par un point* O *de l'intersection de deux plans donnés, on mène une droite dans chaque plan, et perpendiculaires l'une à l'autre, le plan de ces droites enveloppe un cône dont les sections, par des plans parallèles aux plans donnés, sont des paraboles; la droite perpendiculaire au plan mobile décrit aussi un cône dont les sections parallèles aux plans donnés sont des cercles.*

5. Théorème III. O *le centre d'un ellipsoïde;* OQ *et* Oq *les demi-axes d'une ellipse, section diamétrale; en* O *on élève une perpendiculaire à ce plan diamétral. Sur cette perpendiculaire on prend* OT=OQ, OV=Oq; *on aura une double surface, lieu des points* T *et* V. *Soient* OS *la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan tangent en* T *à la double surface, et* OP *la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan tangent en* Q *à l'ellipsoïde, on aura :* 1° OP=OS; 2° *les droites* OP *et* OS *sont à angle droit;* 3° *les quatre droites* OP, OQ, OS, OT *sont dans un même plan perpendiculaire à* Oq.

La double surface est la surface des ondes de Fresnel; on peut la nommer *surface biaxiale*, à raison de sa génération et du rôle qu'elle joue dans la théorie des cristaux à deux axes.

La surface biaxiale d'un ellipsoïde *abc* est désignée sous le nom de la biaxiale *abc*.

6. Théorème IV. *Les surfaces biaxiales de deux ellipsoïdes* réciproques *sont des surfaces réciproques.*

7. Premier cas particulier. *La section* QOq *est un*

cercle dans l'ellipsoïde abc. Alors les points T et V coïncident en un seul point n; à ce point il y a une infinité de plans tangents, puisqu'il y a une infinité de diamètres conjugués rectangulaires dans le cercle; n est le point où les deux nappes de ses surfaces biaxiales se coupent: on peut l'appeler *point nodal* ou nœud. OQ décrivant même plan circulaire, le rayon réciproque OR décrit un plan réciproque au cercle (*voir* ci-dessus), et comme Oq est dans le plan du cercle, nous avons trois droites OR, Oq, OS à angles droits, et dont deux, OR, Oq, sont assujettis à rester dans les mêmes plans; par conséquent OS décrit un cône dont les sections parallèles aux plans donnés sont des cercles. Or TS, maintenant nS, est parallèle au plan fixe qui contient OR; ainsi le point S décrit un cercle passant par n, c'est-à-dire la polaire du point O sur le cône nodal est un cercle. Par le point nodal menons deux plans respectivement parallèles au cercle QOq et à son plan réciproque; nommons ces plans, plans tangents principaux, alors chaque plan tangent nodal coupe ces deux plans principaux suivant deux droites qui sont à angles droits.

Par conséquent les sections du cône nodal par des plans parallèles aux plans tangents principaux sont des paraboles.

Second cas particulier. ROr *est une section circulaire dans l'ellipsoïde* a'b'c'; OR, Or deux diamètres rectangulaires, et par conséquent

$$OR = b'.$$

Mais

$$OR \cdot OP = K^2 = bb';$$

donc

$$OP = b = OS.$$

(*Voir* ci-dessus.) Ainsi OS est donné de grandeur et de position; car il est perpendiculaire au plan ROr. Un plan mené par S perpendiculaire à OS est tangent au biaxial *abc* du point T, et ce plan tangent, parallèle à ROr, reste le même, quelle que soit la position du système OR, Or dans son plan circulaire; mais le point T varie : car le plan ROS, dans lequel se trouve T, change avec OR. Donc le point T décrit une courbe de contact sur le plan tangent, et cette courbe est un cercle passant par S.

En rapportant la même considération au biaxial $a'b'c'$, on trouve l'inverse : le point nodal se change en cercle et le cercle en point nodal.

8. La section faite dans une surface biaxiale par un plan principal de l'ellipsoïde est généralement un cercle et une ellipse. Si la section est faite par le plan *bc*, le cercle est dans l'intérieur de l'ellipse; si la section est faite par *ab*, le cercle est hors de l'ellipse; et par le plan *ac*, le cercle coupe l'ellipse.

Surfaces apsidales.

Les surfaces biaxiales sont un cas particulier des surfaces apsidales.

9. G est une surface, O point fixe origine; par O menons un plan coupant la surface G suivant une courbe, et par ce même point élevons une perpendiculaire au plan coupant; sur cette perpendiculaire prenons des longueurs g à partir de O, égales aux normales menées de O sur la courbe. Le lieu des points ainsi déterminé est une *surface apsidale* dont O est le centre, car les longueurs se portent en deux sens.

Théorème. *Si l'on mène des plans tangents à deux points correspondants* A *et* a *sur la surface* G *et sur la* surface apsidale correspondante, *ces plans tangents sont perpendiculaires l'un sur l'autre et au plan* AOa.

Théorème. *Les surfaces apsidales engendrées par deux surfaces réciproques sont des surfaces réciproques.*

Exemple. Si G est une sphère, la surface apsidale est une surface de révolution.

SOLUTION D'UN PROBLÈME SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE;

PAR M. JULES VIEILLE.

Étant donnés de position le centre A du cercle circonscrit à un triangle, le centre B du cercle inscrit, le centre de gravité G de l'aire et le point de rencontre C des trois hauteurs, on peut se proposer de résoudre le triangle. On sait que trois de ces quatre points A, G et C sont toujours en ligne droite et que la distance GC est double de AG. Il en résulte que la connaissance des distances mutuelles des quatre points n'équivaut qu'à trois conditions distinctes.

Euler a montré (*Mémoires de Saint-Pétersbourg*, 1776) comment le calcul des côtés du triangle, en fonction des distances mutuelles de ces points, se ramenait à la résolution d'une équation du troisième degré. L'analyse d'Euler a été reprise avec d'utiles développements par le savant directeur des *Nouvelles Annales* (t. I, p. 79).

Le but que nous nous proposons ici est plus restreint. Nous supposons que le centre B du cercle inscrit soit placé sur la ligne droite qui contient déjà les trois autres points, et, dans ce cas particulier, des considérations très-simples nous fournissent pour les côtés des longueurs constructibles avec la règle et le compas.

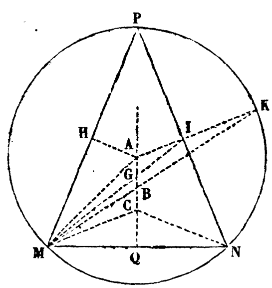
Voici donc l'énoncé de notre problème :

On suppose que le centre B du cercle inscrit à un triangle MNP soit situé sur la droite AGC qui joint le centre A du cercle circonscrit, le centre de gravité G, et le point

d'intersection C des trois hauteurs. On donne de plus les distances $AB = f$, $BG = h$.

On propose de calculer les longueurs des côtés du triangle, et de construire les valeurs fournies par le calcul.

Fig 1.



Solution. Démontrons en premier lieu que *le triangle* MNP *est isocèle*. Il est visible que la bissectrice MB passe par le milieu K de l'arc PN, et que la droite AK rencontre le côté PN en son milieu I, situé sur le prolongement de MG. De plus MC et AI étant parallèles comme perpendiculaires à PN, on a la proportion

$$\frac{MC}{AI} = \frac{GC}{AG},$$

et comme on sait que GC est double de AG, on en tire

$$MC = 2\,AI.$$

De même

$$NC = 2\,AH,$$

H désignant le milieu du côté PM.

Ceci ne suppose pas que le centre B du cercle inscrit soit sur la droite AGC. Si maintenant nous avons égard à cette condition, les triangles semblables MBC, ABK nous donneront la proportion

$$\frac{MC}{AK}=\frac{BC}{AB},$$

d'où

$$MC=\frac{AK.BC}{AB};$$

mais si l'on avait considéré, au lieu de la perpendiculaire MC qui répond au côté PN, la perpendiculaire NC qui répond au côté PM, on aurait eu une proportion qui n'eût différé de la précédente que par le changement de MC en NC. On conclut de là

$$MC=NC,$$

et, par suite,

$$AI=AH.$$

Mais AI et AH sont les distances du centre A aux deux cordes PN et PM. Donc ces cordes sont égales et le triangle MNP est isocèle.

La droite des centres AGBC, ayant deux points A et C équidistants des sommets M et N, se confond donc avec la perpendiculaire élevée sur le milieu de MN; et, par conséquent, elle passe par le sommet P du triangle isocèle.

Il faut bien remarquer que le raisonnement par lequel on vient de prouver que $MC=NC$, ne s'appliquerait pas à la troisième hauteur PC. Car les points A, G, B étant situés sur cette droite, les triangles semblables, analogues à ceux dont on vient de faire usage, s'évanouiraient.

Maintenant, connaissant f *et* h, *proposons-nous de calculer les côtés* $PN=a$, $MN=b$.

Soit R le rayon du cercle circonscrit; on a

$$MC=2\,AI=2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}},$$
$$AK=R,$$
$$AB=f,$$
$$BC=3\,AG-AB=3(f-h)-f=2f-3h.$$

Ces valeurs, substituées dans la proportion

$$\frac{MC}{AK} = \frac{BC}{AB},$$

donnent

$$\frac{4R^2 - a^2}{R^2} = \frac{(2f - 3h)^2}{f^2};$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad a^2 = \frac{3h(4f - 3h)}{f^2} R^2.$$

D'ailleurs on a

$$PG = R + f - h,$$

$$PG = \frac{2}{3} PQ = \frac{2}{3} \frac{a^2}{2R} = \frac{a^2}{3R};$$

égalant ces deux expressions de PG, il vient

$$(2) \qquad a^2 = 3R(R + f - h).$$

L'élimination de R entre les équations (1) et (2) fait connaître a :

$$a = \frac{f\sqrt{3h(4f - 3h)}}{3h - f};$$

les mêmes équations donnent aussi cette valeur remarquable de R :

$$R = \frac{f^2}{3h - f}.$$

Pour achever de déterminer le triangle, il faut calculer le côté b. A cet effet, remarquons que la bissectrice MB divise aussi en deux parties égales l'angle AMC, puisque les angles BMC, BKA sont égaux comme alternes-internes, et que BKA est égal à AMB à cause de l'isocélisme du triangle MAK. On conclut de là que les angles CMQ, AMP sont égaux. Les triangles isocèles MCN, MAP sont donc semblables, et l'on a entre les côtés homologues,

$$\frac{b}{a} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}}.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}} = \frac{2f - 3h}{f};$$

donc

$$\frac{b}{a} = \frac{2f - 3h}{f},$$

d'où

$$b = a\,\frac{2f - 3h}{f},$$

enfin

$$b = \frac{(2f - 3h)\sqrt{3h(4f - 3h)}}{3h - f}.$$

Ces formules se construisent sans difficulté par moyennes et quatrièmes proportionnelles. Elles supposent $f < 3h$, autrement les valeurs de a, b, R, seraient négatives. La condition $f < 3h$ équivaut à celle-ci:

$$2f - 3h < f,$$

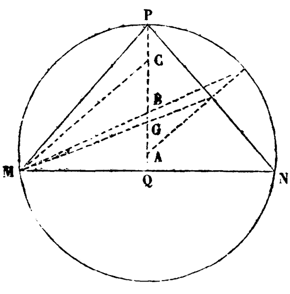
ou encore

$$b < a,$$

d'après la proportion établie plus haut. Ainsi les formules précédentes répondent au *cas où les côtés égaux du triangle isocèle* MNP *sont plus grands que la base*, ce qui a lieu dans la *fig.* 1.

Dans le cas contraire (*fig.* 2), les quatre points A, G,

Fig. 2.



B, C, quoique *se succédant toujours dans le même ordre,* sont disposés inversement par rapport à la base. L'équation (1) ne change pas; mais l'équation (2) devient

$$a^2 = 3R(R + h - f).$$

Il en résulte un simple changement de signe dans le dénominateur commun des valeurs trouvées plus haut pour a, b, R : il faut écrire $(f - 3h)$ au lieu de $(3h - f)$; et, en effet, on a dans ce cas $f > 3h$.

Si l'on supposait $f = 3h$, les formules précédentes se présenteraient sous la forme $\frac{A}{0}$; cependant la proportion

$$\frac{b}{a} = \frac{2f - 3h}{f}$$

donne alors

$$a = b.$$

Pour interpréter ces résultats, remontons aux équations (1) et (2). Elles se réduisent, dans l'hypothèse $f = 3h$, à

$$a^2 = 3R^2, \quad a^2 = 3R(R + 2h):$$

équations contradictoires, à moins que l'on n'ait

$$h = 0,$$

et, par suite,

$$f = 0.$$

S'il en est ainsi, les deux équations s'accordent à donner

$$a = R\sqrt{3},$$

valeur qui appartient au triangle équilatéral, et le rayon R reste indéterminé.

En effet, on sait que dans tout triangle équilatéral, les quatre points A, B, G, C sont confondus en un seul.

En résumé, selon qu'on aura

$$f < 3h \quad \text{ou} \quad f > 3h,$$

le triangle isocèle aura son côté plus grand ou plus petit que sa base : on ne saurait avoir $f = 3h$, à moins que les distances f et h ne soient nulles, auquel cas le triangle est équilatéral, et son côté reste indéterminé.

QUESTION SUR UN JEU DE CARTES.

(Crelle, t. XLIV, p. 318; 1852.)

1. Soient m et n deux nombres impairs,

$$m = 2p + 1, \quad n = 2q + 1;$$

et soient mn objets différents, des cartes par exemple, désignées par $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{mn}$ réunies dans un paquet et où c_k occupe la $k^{\text{ième}}$ place; allant de gauche à droite, mettons les n premières cartes à côté les unes des autres, $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$; ensuite plaçons la $n+1^{\text{ième}}$ carte sur c_1, la $n+2^{\text{ième}}$ carte sur c_2, etc.; continuant de même, on aura n paquets de m cartes chacun. Considérons une certaine carte c_k où k est un nombre donné; cette carte est dans un paquet de rang que nous désignons par r_1 et y occupe la place s_1; on réunit de nouveau tous les paquets, sans mêler les cartes, mais en plaçant le paquet r_1 au milieu, de manière qu'il y ait q paquets au-dessus et q paquets au-dessous. On recommence la même distribution; alors c_k sera dans le paquet de rang r_2 et y occupe la place s_2; on réunit de nouveau les cartes en un seul paquet, mais en plaçant le paquet r_2 au milieu, et ainsi de suite : de sorte qu'après la $t^{\text{ième}}$ distribution, c_k est dans un paquet désigné par r_t et y occupe une place s_t. On demande quelle valeur il faut donner à t pour que s_t soit égal à p, c'est-à-dire pour que la carte c_k soit au milieu du paquet.

Lorsque t est connu, on a un moyen de deviner une carte pensée. Ordinairement on fait $m = 7$, $n = 3$; alors $t = 3$.

NOTE

Sur les cercles des rapports tangentiels et leurs relations avec les axes radicaux et les cercles tangentiels;

D'après M. I.-I. WILKINSON, F. R. A. S.

Nous ne rapportons que les énoncés :

Étant donnés deux cercles de grandeur et de position et de rayons r *et* R, *si d'un point* P *on mène aux cercles* r *et* R *les tangentes* PI, PV, *telles que* $\frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{PV}} = \mathrm{p} = \text{const.}$, *le lieu du point* P *est un cercle* M : *c'est celui des* rapports tangentiels; si $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}$, *le lieu est le* cercle de similitude O *des deux cercles* r *et* R; *lorsque* $\mathrm{p} = 1$, *le cercle des rapports tangentiels devient l'axe radical des cercles* r *et* R; *les trois cercles* r, R *et* M *ont le même axe radical.*

Quant aux propriétés résultant de cette relation, M. Wilkinson dit qu'on peut consulter le chapitre XXX *of M. Chasles's admirable Traité de Géométrie supérieure,* pages 518-532.

Dans cet opuscule de huit pages, on cite les ouvrages périodiques suivants, nullement connus sur le continent : *Gentelmen's Diary, Mathematical Companion, Boston Enquirer, Library of Useful Knowledge.* Les géomètres cités sont : John Gough, mathématicien aveugle de Kenlalf, Richard Nicholson de Liverpool, M. Lowry, James Cunliffe de Balton, Butterwerth, Harvey, Eyres, Davies (mort), Morton, J.-H. Swale (mort). Tous ces géomètres se sont occupés des axes radicaux, des cercles de similitude, etc.; on cite aussi les *Loci plani* et *de Porismatibus* de Simson, et *Geometrical analysis* de Leslie.

SOLUTION DE LA QUESTION 278 (JACOBI)

(voir t. XII, p. 260);

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

En posant

$$R = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{dR}{da}, \quad \beta = \frac{dR}{db}, \quad \gamma = \frac{dR}{dc}, \ldots,$$

on a, par un théorème connu,

$$R^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Si de plus on pose

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= A, & \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= D, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= B, & \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 &= E, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= C, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= F, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= A_1, & \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= D_1, \\ \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 &= B_1, & \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 &= E_1, \\ \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= C_1, & \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= F_1, \end{aligned}$$

les équations des deux ellipsoïdes, à cause des notations ci-dessus, reçoivent la forme

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + 2D\,xy + 2E\,xz + 2F\,yz = k^2,$$

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 z^2 + 2D_1 xy + 2E_1 xz + 2F_1 yz = k^2.$$

Ces deux ellipsoïdes sont égaux lorsque les coefficients des mêmes puissances de θ dans les deux équations suivantes sont égaux :

$$\begin{vmatrix} A-\theta & D & E \\ D & B-\theta & F \\ E & F & C-\theta \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1-\theta & D_1 & E_1 \\ D_1 & B_1-\theta & F_1 \\ E_1 & F_1 & C_1-\theta \end{vmatrix} = 0,$$

ou lorsqu'on aura

$$(1) \qquad A + B + C = A_1 + B_1 + C_1,$$

$$(2) \begin{vmatrix} A & D \\ D & B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & E \\ E & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & F \\ F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ D_1 & B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & E_1 \\ E_1 & C_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & F_1 \\ F_1 & C_1 \end{vmatrix},$$

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & E_1 \\ D_1 & B_1 & F_1 \\ E_1 & F_1 & C_1 \end{vmatrix}.$$

La première de ces équations est évidente. Pour vérifier la seconde, j'observe que, par un théorème connu, on a

$$\begin{vmatrix} A & D \\ D & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2,$$

et que, par un autre théorème, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = R\frac{d^2R}{dadb_1} = Rc_2,$$

par conséquent,

$$\begin{vmatrix} A & D \\ D & B \end{vmatrix} = R^2(c^2 + c_1^2 + c_2^2).$$

On trouve de même

$$\begin{vmatrix} A & E \\ E & C \end{vmatrix} = R^2(b^2 + b_1^2 + b_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} B & F \\ F & C \end{vmatrix} = R^2(a^2 + a_1^2 + a_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ D_1 & B_1 \end{vmatrix} = R^2(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & E_1 \\ E_1 & C_1 \end{vmatrix} = R^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & F_1 \\ F_1 & C_1 \end{vmatrix} = R^2(a^2 + b^2 + c^2);$$

expressions qui vérifient la seconde équation. La troisième est vérifiée tout de suite en carrant l'équation (1), et, en exécutant le carré par ligne et par colonne (*), on aura ainsi

$$R^4 = \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & E_1 \\ D_1 & B_1 & F_1 \\ E_1 & F_1 & C_1 \end{vmatrix}.$$

RELATIONS DE DISTANCE ENTRE DES POINTS;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

Notation. Désignons par $a_{r,s}$ le carré de la distance des deux points désignés par a_r, a_s, de sorte que

$$a_{rs} = a_{sr} \quad \text{et} \quad a_{rr} = 0.$$

1°. *Trois points en ligne droite.*

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & 1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & 1 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0.$$

a_{44} est mis pour la symétrie.

(*) $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \ldots = (\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \ldots$

2°. *Quatre points dans un plan.*

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & 1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & 1 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & 1 \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & a_{55} \end{vmatrix} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{55} = 0.$$

3°. *Cinq points dans l'espace.*

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & a_{15}, & 1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & a_{25}, & 1 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & a_{35}, & 1 \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & a_{45}, & 1 \\ a_{51}, & a_{52}, & a_{53}, & a_{54}, & a_{55}, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & a_{66} \end{vmatrix} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{66} = 0.$$

Les barres désignent des déterminants. Ces valeurs ne sont pas nouvelles (Carnot); la nouveauté est dans la forme.

Note du Rédacteur. Les *déterminants* forment aujourd'hui une théorie importante, féconde, indispensable dans l'Algèbre, la Géométrie et la Mécanique élémentaires et supérieure. De toutes parts, les professeurs demandent un ouvrage qui donne cette théorie et ses principales applications. L'Angleterre possède depuis quelques années un tel ouvrage, et M. Brioschi a publié l'an dernier un *Traité sur les Déterminants* qui renferme tout ce qu'on peut désirer. Cet ouvrage étant de niveau avec tous ceux qu'on a écrits sur cet objet et les dépassant même en quelques points, M. le professeur Combescure en a fait une traduction qu'il a bien voulu me communiquer. Fidélité, élégance, éclaircissements, rien ne manque à ce beau travail, dont la publication très-prochaine satisfera à un devoir universitaire.

TABLE DES VALEURS RELATIVES AU CERCLE.

(voir tome XII, page 302).

	Log.	Colog.
π = 3.14159 26535 89793	0.49714 98726 9413	9.50285 01273 0587
$\frac{1}{4}\pi$ = 0.78589 81633 97448	6.89508 98813 6617	0.10491 01186 3383
$\frac{1}{6}\pi$ = 0.52359 87755 98299	9.71899 86223 1049	0.28100 13776 8951
$\frac{4}{3}\pi$ = 4.18879 02047 86391	0.62208 86093 0243	9.37791 13906 9757

	Log.	Colog.
$\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ = 1.24070 09817 99700	0 09366 71258 9650	9.90633 28741 0350
$\sqrt[3]{\pi}$ = 1.46459 18814 91298	0.16571 66242 3138	9.83428 33757 6862
$\sqrt{\pi}$ = 1.77245 38509 05516	0.24857 49363 4707	9.75142 50636 5293
π^2 = 9.86960 44010 89359	0.99429 97453 8827	9.00570 02446 1173
π^3 = 31.00627 66802 93493	1.49144 96180 8240	8.50855 03819 1760
Log. nép. de π = 1.14472 98858 49400	0.05870 30212 3982	9.94129 69787 6018

		Log.	Colog.
1° = 01745 32925 19934 29577	R° = 57°. 29577	1.75812 26324 0917	8.24187 73695 9083
1′ = 00029 08882 08665 72166	R′ = 3437′ 74677	3.53627 38827 9282	6.46372 61172 0718
1″ = 00000 48481 36881 09536	R″ = 206264″.80624	5.31442 51331 7646	4.68577 48668 2354
1ˢ = 00007 27220 52166 43041	Rˢ = 13750. 98708	4.13833 38741 2078	5.86166 61258 7922
1ˢ = 15″.			

	Log.	Colog.
sin 1° = 0.01745 24062 17275 54	8.24185 53184 1831	1.75814 46815 8169
sin 1′ = 0.00029 08882 04563 4246	6.46372 61110 8248	3 53627 38889 1752
sin 1″ = 0.00000 48481 36811 07636 68	4.68577 48668 2184	5.31442 51331 7816
tang 1″ = 0.00000 48481 36811 15233 63	4.68577 48668 2694	5.31442 51331 7306

	Log.	Colog.
sin 1ˢ = 0.01570 73173 11820 67675 4	8.19610 20172 3855	1.80389 79827 6145
sin 1′ = 0.00015 70732 03352 56521 5	6.19611 98752 4419	3.80388 01247 5581
sin 1″ = 0.00000 15707 96326 79425 07	4.19611 98770 2997	5.80388 01229 7003
360° = 129600″	6.11260 50015 3457	3.88739 49984 6543

NOTE SUR LE SENS DES HÉLICES.

1. Nous supposons que l'hélice est décrite par un point qui se meut sur une droite parallèle à un axe fixe vertical autour duquel elle tourne. Si un spectateur est placé dans l'axe, la tête vers le zénith, il voit passer la droite mobile devant sa face, ou de gauche à droite (GD), ou de droite à gauche (DG); le mouvement de progression du point mobile peut avoir lieu du zénith vers le nadir (ZN) ou du nadir vers le zénith (NZ); de là quatre sortes de mouvement: GD, ZN; GD, NZ; DG, NZ; DG, ZN. Il est évident que les deux mouvements GD, NZ et DG, ZN désignent la même hélice; de même GD, ZN et DG, NZ.

L'hélice GD, ZN est dite *dextrorsum* et l'hélice GD, NZ est dite *sinistrorsum*. A vitesses égales les deux hélices sont symétriques, douées de propriétés d'égalité et non de superposition.

On ne construit que des vis *dextrorsum* pour faciliter le mouvement naturel de la main droite. En donnant à ces vis le mouvement de rotation GD, elles prennent le mouvement de translation NZ, c'est-à-dire de *haut en bas*, ou *en avant*. En imprimant à ces vis le mouvement de rotation DG, elles prennent le mouvement de translation NZ, c'est-à-dire de *bas en haut* ou *en arrière*. Car les deux hélices GD, ZN et DG, NZ sont identiques. Dans les plantes grimpantes, chaque espèce décrit une hélice déterminée, par exemple l'hélice du houblon est dextrorsum et celle du haricot est sinistrorsum (*).

L'hélice apparente annuelle que décrit le Soleil est dex-

(*) Les bouts d'essieux sont taraudés pour recevoir des écrous qui, pressant contre les moyeux, maintiennent la roue. Le bout de droite a une vis *dextrorsum* et le bout de gauche *sinistrorsum*, afin que dans la marche en avant les moyeux frottant contre les écrous ne les dévissent pas.

trorsum depuis le solstice d'été jusqu'au solstice d'hiver, et sinistrorsum du solstice d'hiver au solstice d'été, le spectateur étant l'axe de l'hélice, la tête vers le pôle boréal.

2. Lorsque l'hélice est plane, elle est ou une courbe fermée ou une spirale. Soient un point A situé dans l'intérieur et ZAN une perpendiculaire élevée en A sur le plan. Un spectateur placé en AZ, ayant la tête en Z, verra le point décrivant passer devant lui de G en D ou de D en G, et le mouvement sera désigné par GD, *dextrorsum*, ou par DG, *sinistrorsum*. Si un second spectateur est placé en AN, la tête en N, il y a inversion; le mouvement GD du premier devient DG pour le second. Ainsi placé au pôle boréal, la Terre tourne pour lui dans le sens DG et au pôle austral dans le sens GD. Dans la théorie des couples, on convient de porter sur l'axe AZ la valeur du couple qui, pour le spectateur AZ, tourne dans le sens GD ou dextrorsum, et sur AN la valeur du couple DG; il en est de même pour un spectateur AN; le couple GD est porté sur AN. En effet, le GD du spectateur AN est DG pour le spectateur AZ, on doit le porter sur AN. On voit donc que de quelque manière que le spectateur soit placé relativement au plan du couple, en dessus ou en dessous, le sens du couple est toujours représenté par la même portion de l'axe. Il n'y a jamais ambiguïté.

3. Un spectateur placé dans l'intérieur de l'orbite de la Terre, à un foyer par exemple, la tête vers le pôle boréal du monde, voit cette planète tourner autour de lui dans le sens GD, ce qui est le sens inverse des signes. La parallèle à l'axe terrestre menée par ce foyer décrit un cône *bouclé* autour de l'axe, position du spectateur, par rapport auquel ce mouvement s'exécute dans le sens DG; c'est aussi celui de l'intersection de l'équateur avec l'écliptique, ou le sens de la précession des équinoxes. Sur un cadran horizontal la marche de l'ombre est GD. On sait d'ail-

leurs que cette ombre est la ligne d'intersection de la surface du cadran avec le cône qui a pour sommet l'extrémité du style et pour directrice l'hélice annuelle du Soleil. Chaque spire de cette hélice étant sensiblement un cercle, la partie diurne de l'ombre est, dans nos latitudes et sur un cadran plan, sensiblement une portion d'hyperbole.

4. *Coquilles gastéropodes*. On sait que ces coquilles sont des surfaces hélicoïdales. Supposons la coquille dans sa position normale, celle qui a lieu dans le sens de la progression. Le sens de l'hélice est généralement dextrorsum et de même l'*ouverture*. Il y a une exception qui fournit un caractère générique.

On connaît l'importance du sens des hélices dans les courants électromagnétiques et des déviations *dextrorsum* ou *sinistrorsum* des plans de polarisation.

5. Le mouvement hélicoïdal est le seul qu'on rencontre dans la nature, parce qu'il est le résultat de l'action de couples. Toute force qui ne passe pas par le centre de gravité d'un corps engendre un couple; or le nombre des points d'un corps est infini et le centre de gravité est un seul de ces points: par conséquent, il y a à parier l'infini contre l'unité que la force ne passe pas par le centre de gravité et qu'il y a couple et hélice; ainsi le mouvement de tout corps céleste, sans excepter les soleils, est nécessairement hélicoïdal, formé de progression et de rotation. Ce mouvement est décrit avec clarté et précision dans l'excellente *Cosmographie* de M. Faye, production d'un savant compétent, astronome pratique et dont l'ouvrage, d'une étude attrayante, ne saurait être trop recommandé. On y a adopté (il n'y aurait pas eu d'inconvénient à le dire) la méthode de Lacaille, qui consiste à partir des mouvements réels pour venir aux mouvements apparents, marche rationnelle et qui facilite tout. Car le système du Polonais Copernic, qui répugnait encore à Pascal comme jansé-

niste, est aujourd'hui du domaine public, et le système de Ptolémée est repoussé même par le vulgaire. Toutefois, il règne encore dans l'histoire, c'est-à-dire que nous nous persuadons toujours que le genre humain est le pivot, le centre de tous les événements passés et à venir et que le sort de l'univers est lié à celui de l'homme; inspiration de l'orgueil, mauvais logicien, qui sur mille nous trompe neuf cent quatre-vingt-dix-neuf fois, dans les appréciations individuelles et générales.

THÉORÈMES

Sur la disparition des rectangles dans les fonctions homogènes entières quadratiques à n variables, applications géométriques aux lignes et surfaces du second degré;

D'APRÈS M. O. HESSE,
Professeur à l'Université de Königsberg.

(CRELLE, t. XX, p. 285; 1840.)

1. *Notation.* Étant données les n variables x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$, le symbole $\sum a_{\varkappa,\lambda} . x_\varkappa . x_\lambda$ signifie qu'il faut donner à $\varkappa$ et à λ toutes les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$, et poser

$$a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}.$$

D'après cette convention, un rectangle aura pour coefficient 2; ainsi le symbole renferme $\frac{n(n+1)}{2}$ termes, savoir n carrés et $\frac{n(n-1)}{2}$ rectangles. Prenons, par exemple, $n=3$; alors le symbole désigne la fonction

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3;$$

car

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}.$$

Soient n autres variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, écrivons

$$(1) \qquad x_\lambda = x_\lambda^{(1)} y_1 + x_\lambda^{(2)} y_2 + \ldots + x_\lambda^{n} y_n,$$

et donnant à λ les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$, on obtient n équations de relation entre les variables x et les n variables y, dans lesquelles entrent n^2 coefficients, et où $x_\lambda^{(p)}$ est le coefficient de la variable y_p. Si $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(1)} y_1 + x_1^{(2)} y_2 + x_1^{(3)} y_3, \\ x_2 &= x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 + x_2^{(3)} y_3, \\ x_3 &= x_3^{(1)} y_1 + x_3^{(2)} y_2 + x_3^{(3)} y_3. \end{aligned}$$

2. Substituant les valeurs de x_λ tirées des n équations (1) dans la fonction

$$\sum a_{\varkappa, \lambda} . x_\varkappa . x_\lambda,$$

on obtient une fonction quadratique entière homogène en y. Si l'on donne aux n^2 coefficients indéterminés $x_\lambda^{(p)}$ des valeurs telles, que les rectangles disparaissent, on aura

$$(2) \qquad \sum a_{\varkappa, \lambda} . x_\varkappa . x_\lambda = G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \ldots + G_n y_n^2,$$

et ces équations de condition

$$(3) \left\{ \begin{aligned} 0 = x_1^{(p)} \frac{d \sum a_{\varkappa, \lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{d x_1^{(q)}} &+ x_2^{(p)} \frac{d \sum a_{\varkappa, \lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{d x_2^{(q)}} + \ldots \\ &+ x_n^{(p)} \frac{d \sum a_{\varkappa, \lambda} x_\varkappa^{(q)} x_\lambda^{(q)}}{d . x_n^{(q)}}, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \qquad G_p = \sum a_{\varkappa, \lambda} x_\varkappa^{(p)} x_\lambda^{(p)};$$

en donnant dans (3) à p et q les valeurs *diverses* de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$, on obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ équations entre les n^2 coefficients $x_\lambda^{(p)}$ qui expriment que les rectangles ont disparu. En effet, la substitution faite, ordonnons ce qui multiplie le rectangle $y_p y_q$, d'après les coefficients $x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}$, alors $x^{(p)}$ sera multiplié par

$$2a_{11}x_1^{(q)} + a_{12}x_2^{(q)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(q)};$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\sum a_{1\varkappa}\, x_1^{(q)} x_\varkappa^{(q)}}{dx_1^{(q)}},$$

en donnant à $\varkappa$ toutes les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n. De même, pour ce qui multiplie $x_2^{(p)}$, etc., on est ainsi amené au système (3). Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} &x_1^{(1)}\left[a_{11}x_1^{(2)} + a_{12}x_2^{(2)} + a_{13}x_3^{(2)}\right] \\ +\, &x_2^{(1)}\left[a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} + a_{23}x_3^{(2)}\right] \\ +\, &x_3^{(1)}\left[a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} + a_{23}x_3^{(2)}\right] = 0, \end{aligned}$$

et une seconde équation en changeant les indices supérieurs 1 en 2 et 2 en 3, et laissant les indices inférieurs, on déduit de même une troisième équation de la seconde.

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations (3) renferment n^2 indéterminées; par conséquent on peut donner des valeurs arbitraires à $\frac{n(n+1)}{2}$ de ces indéterminées; les n équations (4) donnent les n valeurs de G_p.

Il est évident que les équations (3) ne changent pas en remplaçant p par q, et *vice versâ*.

Prenons n nouvelles variables $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n}$, et établissons la relation suivante entre les x et ces variables

$$(5) \qquad x_\lambda = x_\lambda^{(n+1)} y_{n+1} + x_\lambda^{(n+2)} y_{n+2} + \ldots + x_\lambda^{(2n)} y_{2n},$$

et λ prenant toutes les valeurs de la suite $1, 2, \ldots, n$; substituant ces valeurs dans la fonctions $\sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa . x_\lambda$, et faisant disparaître les rectangles, la fonction se réduit à

$$-G_{n+1} y^2_{n+1} - G_{n+2} y^2_{n+2} - \ldots - G_{2n} y^2_{2n},$$

et l'on a comme ci-dessus:

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} o = {} & x_1^{(n+p)} \frac{d \sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{dx_1^{(n+q)}} \\ & + x_2^{(n+p)} \frac{d \sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{dx_2^{(n+q)}} + \ldots \\ & + x_n^{(n+p)} \frac{d \sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)}}{dx_n^{(n+q)}}, \end{aligned} \right.$$

$$(7)\qquad -G_{n+p} = \sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa^{(n+q)} x_\lambda^{(n+q)};$$

mettant à la place de p et q les *diverses* valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$, on obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition.

Or les $n(n-1)$ équations (3) et (6) renferment les $\frac{n(n-1)}{2}$ constantes $a_{\varkappa,\lambda}$, ou plutôt les $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ rapports entre ces constantes et l'une d'entre elles; éliminant ces constantes, on obtient $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations entre les $2n^2$ coefficients $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{2n}^{(2n)}$; mais nous allons voir que ces équations peuvent être remplacées par d'autres plus symétriques et n'exigeant pas autant d'éliminations.

3. A cet effet, si des équations (1) nous déduisons *vice versâ*,

$$(8) \qquad y_\lambda = X_1^{(\lambda)} x_1 + X_2^{(\lambda)} x_2 + \ldots + X_n^{(\lambda)} x_n;$$

on a

$$(9) \quad \begin{cases} 1 = x_1^{(\lambda)} X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\lambda)} X_2^{(\lambda)} + \ldots + x_n^{(\lambda)} X_n^{(\lambda)}, \\ 0 = x_1^{(\varkappa)} X_1^{(\lambda)} + x_2^{(\varkappa)} X_2^{(\lambda)} + \ldots + x_n^{(\varkappa)} X_n^{(\lambda)}, \\ 1 = x_\lambda^{(1)} X_\lambda^{(1)} + x_\lambda^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots + x_\lambda^{(n)} X_\lambda^{(n)}, \\ 0 = x_\varkappa^{(1)} X_\lambda^{(1)} + x_\varkappa^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots + x_\varkappa^{(n)} X_\lambda^{(n)}. \end{cases}$$

On obtient les deux premières équations en plaçant les valeurs des x déduites de (1) dans l'équation (8), et les deux dernières en plaçant les y déduites de (8) dans l'équation (1).

Mettant la valeur de y_λ dans l'équation (2), on obtient

$$(10) \quad a_{\varkappa,\lambda} = G_1 X_\varkappa^{(1)} X_\lambda^{(1)} + G_2 X_\varkappa^{(2)} X_\lambda^{(2)} + \ldots + G_n X_\varkappa^{(n)} X_\lambda^{(n)};$$

ayant égard aux équations (9), on trouve les n équations suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} a_{11} x_1^{(p)} + a_{12} x_2^{(p)} + \ldots + a_{1n} x_n^{(p)} = G_p X_1^{(p)}, \\ a_{21} x_1^{(p)} + a_{22} x_2^{(p)} + \ldots + a_{2n} x_n^{(p)} = G_p X_2^{(p)}, \\ a_{n1} x_1^{(p)} + a_{n2} x_2^{(p)} + \ldots + a_{nn} x_n^{(p)} = G_p X_n^{(p)}. \end{cases}$$

On tire de ces équations :

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{x_1^{(p)}}{G_p} = A_{1,1} X_1^{(p)} + A_{1,2} X_2^{(p)} + \ldots + A_{1,n} X_n^{(p)}, \\ \dfrac{x_2^{(p)}}{G_p} = A_{2,1} X_1^{(p)} + A_{2,2} X_2^{(p)} + \ldots + A_{2,n} X_n^{(p)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_n^{(p)}}{G_p} = A_{n,1} X_1^{(p)} + A_{n,2} X_2^{(p)} + \ldots + A_{n,n} X_n^{(p)}, \end{cases}$$

où les A sont des fonctions des a et l'on a aussi $A_{\varkappa,\lambda} = A_{\lambda,\varkappa}$; ces équations sont représentées par celle-ci,

$$\frac{x_\varkappa^{(p)}}{G_p} = A_{\varkappa,1}\, X_1^{(p)} + A_{\varkappa,2}\, X_2^{(p)} + \ldots + A_{\varkappa,n}\, X_n^{(p)},$$

en donnant à $\varkappa$ les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n.

Si nous multiplions cette équation par $x_\lambda^{(p)}$, et donnant à p les valeurs 1, 2, 3,..., n, on obtient n équations, dont l'addition donne

$$(13) \quad \Big\{ A_{\varkappa,\lambda} = \frac{x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots + \frac{x_\varkappa^{(n)} x_\lambda^{(n)}}{G_n};$$

la formule (5) fournit de même

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} - A_{\varkappa,\lambda} = {} & \frac{x_\varkappa^{(n+1)} x_\lambda^{(n+1)}}{G_{n+1}} + \frac{x_\varkappa^{(n+2)} x_\lambda^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \ldots \\ & + \frac{x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}}, \end{aligned} \right.$$

ajoutant, on a

$$(15) \quad \Big\{ 0 = \frac{x_\varkappa^{(1)} x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)} x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots + \frac{x_\varkappa^{(2n)} x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}}.$$

En donnant à $\varkappa$ et à λ toutes les valeurs égales et diverses de la suite 1, 2, 3,..., n, on obtient $\frac{n(n+1)}{2}$ équations symétriques, entre les coefficients $x_\lambda^{(\varkappa)} x_\lambda^{(n+\varkappa)}$ et les quantités G_1, G_2,..., G_{2n}; éliminant ces $2n$ quantités, qui tiennent lieu de $2n - 1$ rapports, on parvient à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations entre les coefficients $x_\lambda^{(\varkappa)}$, etc; qu'on obtient également comme on a vu ci-dessus par l'élimination des constantes entre les équations (3) et (6).

Il est facile de voir que des équations (15), on peut revenir aux équations (3) et (6); il suffit de décomposer l'équation (15) en deux autres de la forme (13) et (14); et il y a $\frac{1.2.3\ldots 2n}{2(1.2.3\ldots n)^2}$ de ces décompositions. Posant ensuite les équations (9), on dérive de l'équation (13) les équations (12), lesquelles résolues suivant $X_1^{(p)}$, $X_2^{(r)}$, etc., donnent les équations (11); d'où l'on déduit facilement les équations (3) et (4). On dérive de même les équations (6) et (7) de l'équation (14) et les constantes de la fonction $\sum a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda$ sont tellement disposées dans les équations (3, 4), (6, 7), qu'on peut facilement a leur aide rétablir la fonction $\sum a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda$. Il existe donc $\frac{1.2.3\ldots 2n}{2(1.2.3\ldots n)^2}$ fonctions, d'où dérivent deux systèmes d'équations (3), (6) qui peuvent remplacer l'équation (15); par exemple, on peut prendre

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} A'_{\varkappa\lambda} &= \frac{x_\varkappa^{(1)}\, x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{x_\varkappa^{(2)}\, x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots \\ &\quad + \frac{x_\varkappa^{(n-1)}\, x_\lambda^{(n-1)}}{G_{n-1}} + \frac{x_\varkappa^{(n+1)}\, x_\lambda^{(n+1)}}{G_{n+1}}, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} -A'_{\varkappa\lambda} &= \frac{x_\varkappa^{(n)}\, x_\lambda^{(n)}}{G_n} + \frac{x_\varkappa^{(n+2)}\, x_\lambda^{(n+2)}}{G_{n+2}} + \ldots \\ &\quad + \frac{x_\varkappa^{(2n-1)}\, x_\lambda^{(2n-1)}}{G_{2n-1}} + \frac{x_\varkappa^{(2n)}\, x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}}. \end{aligned}\right.$$

4. Si l'on multiplie les équations (15) par la constante $b_{\varkappa,\lambda}$ et donnant à $\varkappa$ et λ les valeurs égales et diverses de la suite 1, 2, 3,..., n, on obtient $\frac{n(n+1)}{2}$ équations, dont la

somme peut être représentée ainsi :

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sum b_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(1)}\, x_\lambda^{(1)}}{G_1} + \frac{\sum b_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(2)}\, x_\lambda^{(2)}}{G_2} + \ldots \\ & + \frac{\sum b_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa^{(2n)}\, x_\lambda^{(2n)}}{G_{2n}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Il est facile de voir qu'on peut déterminer les $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients $b_{\varkappa,\lambda}$ de telle sorte que $2n - 1$ de ces $\sum$ s'évanouissent, et alors le $\sum$ restant s'annule de lui-même; et comme entre les $2n^2$ coefficients $x_\varkappa^\lambda$ il n'existe que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relations, il s'ensuit que

$$2n^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{3n^2 + 3n - 2}{2}$$

de ces coefficients peuvent être pris arbitrairement. On a donc ce théorème.

THÉORÈME I. *Soient les* $2n$ *systèmes de valeurs*

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)};\quad x_1^{(2)},\ x_2^{(2)} \ldots x_n^{(2)};\quad x_1^{(2n)},\ x_2^{(2n)} \ldots x_n^{(2n)}$$

Si ces $2n$ *systèmes satisfont aux* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *équations résultant de l'élimination des* $\frac{n(n+1)}{2}$ *constantes* $a_{\varkappa,\lambda}$ *entre les* $n(n-1)$ *équations* (3) *et* (6); *si de plus* $2n - 1$ *de ces systèmes satisfont respectivement à une équation homogène du second degré entre* n *variables, le système restant y satisfera aussi.*

5. *Applications géométriques.* Soit l'équation du second

degré $n = 3$ entre les deux rapports variables $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$,

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{32}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_2x_3 + 2a_{23}x_{33} = 0.$$

Prenons dans le plan de cette conique six points

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)};\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)} \ldots x_1^{(6)},\ x_2^{(6)},\ x_3^{(6)}.$$

Supposons que les équations (3) sont satisfaites par les coordonnées des trois premiers points et les équations (6) par les coordonnées des trois derniers points. Alors dans le triangle formé par les trois premiers points chaque sommet est le pôle du côté opposé, autrement les trois points sont polairement conjugués ; il en est de même des trois autres points. Or, par cinq de ces points, on peut faire passer une conique, c'est-à-dire que les coordonnées de ces points satisfont à une certaine fonction homogène du second degré ; donc d'après le théorème I, les coordonnées du sixième point y satisfont aussi. On a donc ce théorème de Géométrie :

THÉORÈME II. *Étant donnés une courbe du second degré et deux systèmes de trois points chacun conjugués relativement à cette courbe, les six points se trouvent sur une autre courbe du second degré.*

Observation. Si l'on convient de donner à ce triangle le nom de *triangle polaire*, le théorème s'énonce ainsi : *les six sommets de deux triangles polaires relatifs à une même conique sont sur une seconde conique* (*).

Ce théorème est dû à M. Chasles.

THÉORÈME III. *Six points étant situés sur la même conique, si l'on partage ces points d'une manière quelconque en deux systèmes de trois points, les deux sys-*

(*) Cette observation n'est pas de M. Hesse.

tèmes sont des triangles polaires relativement à une certaine courbe du second degré.

Le partage peut se faire de dix manières.

Étant données cinq paires de points conjuguées à la même conique, celle-ci est donnée.

Théorème IV. *Les six côtés de deux triangles polaires touchent une ligne du second ordre.*

Théorème. V. *Les six côtés de deux triangles circonscrits à la même conique sont deux systèmes de triangles polaires relativement à une autre conique.*

Étant données cinq paires de droites *conjuguées*, la conique est déterminée.

Théorème VI. *Deux triangles étant inscrits dans une conique, ils sont circonscriptibles à une autre conique, et* vice versâ; *deux triangles étant circonscrits à une conique, sont inscriptibles dans une autre conique.*

Ces divers théorèmes se démontrent à l'aide des polaires réciproques.

6. Soit

$$\sum a_{\kappa,\lambda}\, x_\kappa\, x_\lambda = 0$$

l'équation d'une surface du second degré; alors $n = 4$. Les coordonnées des deux points p, q sont désignées par

$$\frac{x_1^{(p)}}{x_4^{(p)}},\quad \frac{x_2^{(p)}}{x_4^{(p)}},\quad \frac{x_3^{(p)}}{x_4^{(p)}};\quad \frac{x_1^{(q)}}{x_4^{(q)}},\quad \frac{x_2^{(q)}}{x_4^{(q)}},\quad \frac{x_3^{(q)}}{x_4^{(q)}};$$

mettant pour p, q les valeurs diverses de la suite 1, 2, 3, 4, les six équations (3) expriment que le plan polaire de chacun de ces points passe par les trois autres, de sorte que les quatre points sont polairement conjugués par rapport à la surface et sont les sommets d'un *tétraèdre polaire* (*). De même les six équations (6) expriment que les points

(*) Cette dénomination n'est pas de M. Hesse.

5, 6, 7, 8 sont les quatre sommets d'un second tétraèdre polaire. Appliquant le théorème I, on obtient: .

Théorème VII. *Toute surface du second degré qui passe par sept sommets de deux tétraèdres polaires passe aussi par le huitième sommet.*

Par sept points, on peut mener une infinité de surfaces du second degré, n'ayant pas la même courbe d'intersection, de sorte que le théorème précédent peut aussi s'énoncer ainsi. Les huit sommets de deux tétraèdres polaires peuvent être considérés comme les huit points d'intersection de trois autres surfaces du second degré n'ayant pas les mêmes courbes d'intersection.

Nous donnons plus loin le moyen de construire ce huitième point géométriquement.

L'élimination des coefficients $a_{\varkappa,\lambda}$ des équations (3) et (6) donne trois équations de conditions auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des huit points 1, 2,.... 8 pour être les sommets de deux tétraèdres polaires (n° 2). Ainsi, prenant arbitrairement sept de ces points le huitième est déterminé. Or les douze équations (3), (6) renferment neuf équations où manquent les coordonnées du huitième point et trois équations linéaires relatives aux coordonnées du huitième point; ainsi les neuf équations suffisent pour déterminer les coefficients $a_{\lambda,\varkappa}$; et les trois autres équations donnent linéairement les coordonnées du huitième point. Donc si dans deux tétraèdres polaires sept sommets sont donnés, les coefficients $a_{\varkappa,\lambda}$ sont donnés et la surface est déterminée ainsi que les coordonnées du huitième point. On a donc ce théorème connu :

Théorème VIII. *Toute surface du second degré qui passe par sept points pris arbitrairement passe également par un huitième point déterminé.* (Voir Crelle, tome III, pages 199, 100 et 205.)

Théorème IX. *Trois surfaces du second degré* *n'ayant pas la même courbe d'intersection se rencontrent en huit points qui peuvent être considérés comme les huit sommets de deux tétraèdres polaires relativement à une autre surface du second degré.*

Ces huit points fournissent trente-cinq systèmes de deux tétraèdres polaires.

Théorème X. *Toute surface du second degré qui touche sept faces de deux tétraèdres polaires touche aussi la huitième face.*

Théorème XI. *Toute surface du second ordre qui touche sept plans touche aussi un huitième plan déterminé.*

Théorème XII. *Huit plans tangents communs à trois surfaces du second ordre n'ayant que ces huit plans tangents en commun peuvent être considérés comme les huit faces de deux tétraèdres polaires relativement à une surface du second ordre.*

Théorème XIII. *Deux tétraèdres étant inscrits dans trois surfaces du second ordre, n'ayant pas une même courbe d'intersection, sont circonscriptibles à trois autres surfaces du second degré n'ayant pas plus de huit plans tangents en commun.*

Solutions géométriques de quelques problèmes mentionnés ci-dessus.

7. *Lemme.* Étant données une conique et une droite dans le plan de la conique, on peut projeter la figure de manière que la droite aille à l'infini et que la conique devienne un cercle. (Poncelet, *Propriétés projectives*, page 54.)

8. *Lemme.* Si dans un quadrilatère complet dont les trois diagonales sont aa', bb', cc', les points aa' et bb' sont deux paires de points conjugués relativement à une conique, les points cc' sont aussi conjugués relativement à cette conique.

Démonstration.

A, A′ points d'intersection de la diagonale aa' avec la conique.
B, B′ — bb' —
C, C′ — cc' —

Par hypothèse les quatre points a' A a A′ sont harmoniques et de même les quatre points b' B b B′; il faut démontrer que les quatre points c' C c C′ sont aussi harmoniques. Projetons la figure de manière que la droite a' b' c' aille à l'infini et que la conique devienne un cercle (n° 7, lemme); dans la figure projetée le point a' étant à l'infini, le point a sera au milieu de AA′ et de même le point b au milieu de BB′; il faut prouver que c est aussi au milieu de CC′; or la perpendiculaire élevée en a sur la corde AA′ passe par le centre du cercle et est perpendiculaire sur bc parallèle à AA′; la perpendiculaire élevée en b sur la corde BB′ passe aussi par le centre et est perpendiculaire à ac parallèle à BB′; la perpendiculaire élevée en c sur CC′ est perpendiculaire sur ab parallèle à CC′; donc les trois perpendiculaires passent par le centre du cercle; donc c est le milieu de la corde C. C. Q. F. D.

9. Ce lemme, l'hexagramme de Pascal, et les théorèmes (II), (III) ci-dessus sont des propositions liées entre elles; de sorte que deux d'entre elles étant données, on peut en conclure facilement les autres. Par exemple, soient abc, a' b' c' deux triangles polaires relativement à la même conique et p' l'intersection des côtés ac et b' c'; p l'intersection de bc et a' c', p' et b sont des points conjugués, car ac polaire de b passe par p' et a' b polaire de p' passe par b; on prouve de même que p et b sont conjugués. Donc, en vertu du lemme (n° 8), le point P intersection de bp et de b' p' et le point P′ intersection de bb' et pp' sont conjugués; donc la polaire de P passe par P′. Mais la polaire de P est aa'; donc les trois droites aa', bb', pp' passent

par le même point P'. Ainsi les côtés opposés de l'hexagone $aa'\,c'\,b'\,bc$ se rencontrent en trois points en ligne droite, savoir aa' et bb' (le point P'), bc et $a'\,c'$ (le point p), ac et $b'\,c'$ (le point p') ; donc l'hexagone est inscriptible dans une conique (théorème VI).

10. *Problème.* Étant donnés le triangle polaire abc et le couple de points conjugués a'' A, b'' B, construire les polaires de a'' et de b''.

Solution. Écrivons

$$\left.\begin{matrix} aa'' \\ bb'' \end{matrix}\right| p; \quad \left.\begin{matrix} p\mathrm{A} \\ bc \end{matrix}\right| \alpha; \quad \left.\begin{matrix} p\mathrm{B} \\ ac \end{matrix}\right| \beta; \quad \left.\begin{matrix} \beta b'' \\ b\mathrm{B} \end{matrix}\right| \beta';$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha a'' \\ a\mathrm{A} \end{matrix}\right| \alpha'; \quad \left.\begin{matrix} \alpha'\beta' \\ ac \end{matrix}\right| \beta''; \quad \left.\begin{matrix} \alpha'\beta' \\ bc \end{matrix}\right| \alpha'';$$

cela veut dire que p est le point d'intersection des droites $aa''\,bb''$; que α est le point d'intersection des droites pA et bc, et ainsi de suite ; la droite Bβ'' est la polaire du point b'' et la droite Aα'' est la polaire de a''. En effet, la droite $ac\beta$ est la polaire du point b ; donc b et β sont des points conjugués. Dans le quadrilatère $bb''\beta$B, les deux sommets opposés $b\beta$ et b''B sont un couple de points conjugués ; donc en vertu du lemme (n° 8) les points β' et p, extrémités de la troisième diagonale (car l'intersection de bb'' et βB est la même que celle de aa'' et bb''), sont conjugués. On demontre de la même manière, en considérant les lignes $a\alpha$, a''A, $p\alpha'$ comme les trois diagonales d'un quadrilatère complet, que les points p et α' sont conjugués ; ainsi $\alpha'\beta'$ est la polaire du point p', donc bp ou bb'' est la polaire de β'' ; ainsi les polaires de B et de β'' passent par b'', donc Bβ'' est la polaire de b'' ; on prouve de même que Aα'' est la polaire de a''. C. Q. F. D.

11. Soient a, b, c, d et a', b', c', d' les huit sommets de deux tétraèdres polaires et soit $\left.\begin{matrix} dbb' \\ aa' \end{matrix}\right| p$: c'est-à-dire

que p est l'intersection du plan dbb' et de la droite aa'. p étant sur la droite aa', le plan polaire de p passe par l'intersection des plans $bcd.b'c'd'$; et étant aussi sur le plan dbb' le plan polaire par le point d'intersection $ac.a'c'd'$; ainsi ce plan polaire passe par les trois points $bcd.b'c'$, $b'c'd'.bc$, $a'c'd'.ac$. Il est facile de trouver encore un quatrième point de ce plan. En effet, menons les droites pa' et pb'. La droite pa' passe par a, et soit $\left.\begin{matrix} pb' \\ db \end{matrix}\right| q$; le plan polaire de q passant par a et le plan polaire de b' passant par a'; en vertu du lemme (n° 8), le plan polaire de p passera par l'intersection des droites qa', ab', c'est-à-dire par l'intersection $dba'.ab'$. Ainsi les quatre points $d'b'c'.bc$, $d'c'a'.ca$, $dbc.b'c'$, $da'b.ab'$ sont dans le même plan. Donc les deux droites $(d'b'c'.bc)$ $(d'c'a'.ca)$ et $(dbc.b'c')$ $(da'b.ab')$ se rencontrent.

Remplaçons les lettres $cab'c'a'bdd'$ respectivement par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, alors les deux droites (734.61) (745.12), (856.23) (861.34) se rencontrent.

Mais les huit sommets des tétraèdres polaires peuvent être divisés de diverses manières en quatre systèmes de points conjugués. Pour trouver les diverses droites qui correspondent à ces systèmes, formons l'hexagone 123456, et désignons-le par H; par le point 7 et un côté du polygone, soit 34, menons un plan qui coupera le côté opposé 61 en un point : c'est le point désigné par 734.61. On aura ainsi un point sur chaque côté de l'hexagone. Désignons par A le second hexagone dont ces points sont les sommets; opérant de même avec le point 8 sur le polygone H, on obtient un troisième hexagone B. Ces trois hexagones jouissent de propriétés remarquables; les trois droites qui joignent les sommets des angles opposés de l'hexagone A passent par le point 7; car les points (734.61) et (761.34) sont des deux sommets opposés dans le polygone A; cette droite étant dans les deux plans 734 et 761 passe par le point 7, etc. On démontre de même que les droites qui joignent les sommets opposés dans le polygone B passent par le point 8.

Désignons par A_1 le côté (734.61) (745.21); dans l'hexagone A nous avons vu que ce côté rencontre le côté (856.23) (861.34), ou B_1 de l'hexagone B; le côté A_1 rencontre encore le côté B_2 (834.61) (845.12) : car les deux côtés sont situés dans le plan 612; de plus le même côté A_1 rencontre le côté B_3 (812.48) (823.56) de l'hexagone B, car si nous remplaçons l'ordre 12345678 par 56123487, A_1 se change en B_3 et B_1 en A_1. Or A_1 et B_1 se coupent : donc le côté A_1 de l'hexagone A rencontre trois côtés B_1, B_2, B_3, et *vice versâ;* par conséquent les douze côtés des deux hexagones sont situés sur le même hyperboloïde. De là :

THÉORÈME XIV. *Si parmi les huit points d'intersection de trois surfaces du second degré (n'ayant pas une courbe commune d'intersection), on en choisit six qui forment les sommets d'un hexagone* H; *et si l'on coupe chaque côté par un plan passant par le côté opposé et le septième point, on obtient ainsi les sommets d'un second hexagone* A; *opérant de même dans l'hexagone* H *avec le huitième point, on obtient les sommets d'un hexagone* B; *les deux hexagones* A *et* B *sont sur le même hyperboloïde.*

12. Deux des trois hexagones étant donnés, on peut construire le troisième.

D'abord connaissant A, B, on trouve H; en effet, en joignant le sommet (745.12) de l'hexagone A avec le sommet (845.12) de l'hexagone B, on obtient le côté 12 de l'hexagone H, et ainsi des autres côtés.

Connaissant les hexagones H, A, on détermine B. En effet, le côté (834.61) (845.12) de l'hexagone B, en joignant les points d'intersection du plan conduit par le point 1 et la droite (734.61) (745.12) avec les côtés (756.23) (761.34) et (712.45) (723.56), et ainsi des autres. On voit donc que, pour construire l'hexagone B, il suffit de connaître seulement les sept points 1234567 des deux hexagones H et A; l'intersection des trois plans qui passent par les côtés opposés de l'hexagone B donne le huitième point 8. Ainsi est résolu le problème mentionné ci-dessus.

NOTE

Sur les valeurs que prennent les racines des équations du 3ᵉ et 4ᵉ degré lorsque le coefficient du premier terme est nul

(voir tome IV, p. 382);

PAR M. FAURE,
Officier d'artillerie.

La méthode que j'indique ici est celle que l'on suit ordinairement pour le second degré. Je suppose que le lecteur a sous les yeux l'article d'Eisenstein où il traite de la résolution générale des équations des quatre premiers degrés (tome VIII, page 110).

1. L'équation générale du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

donne

$$x = \frac{1}{a}[-b + \psi(\alpha) + \psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho\psi(\alpha) + \rho^2\psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho^2\psi(\alpha) + \rho\psi(\beta)].$$

On a d'ailleurs, d'après l'article cité,

$$\alpha = -b^3 + \frac{1}{2}a[\varphi(c) - ad + 3bc];$$

nous écrirons simplement

$$\alpha = - b^3 + k;$$

k contient ainsi a en facteur. On aura alors

$$\psi(\alpha) = - b + \frac{k}{3b^2} + \ldots,$$

en ne prenant que les deux premiers termes de la racine cubique de α, tous les autres termes contenant au moins le facteur a^2.

On a de même

$$\psi(\beta) = - b + \frac{k'}{3b^2} + \ldots.$$

Remplaçant dans les expressions de x, on trouve

$$x = \frac{1}{a}\left[- 3b + \frac{k + k'}{3b^2} + \ldots\right],$$

$$x = \frac{1}{a}\left[- b(1 + \rho + \rho^2) + \frac{1}{3b^2}(k\rho + k'\rho^2) + \ldots\right],$$

$$x = \frac{1}{a}\left[- b(1 + \rho + \rho^2) + \frac{1}{3b^2}(k\rho^2 + k'\rho) + \ldots\right]:$$

ayant égard à la valeur de ρ, qui est l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, supprimant le facteur a et faisant ensuite $a = 0$, on trouve facilement que les valeurs précédentes se réduisent à

$$x = \infty,$$

$$x = \frac{1}{6b}[- 3c + \varphi(9c^2 - 12bd)],$$

$$x = \frac{1}{6b}[- 3c - \varphi(9c^2 - 12bd)];$$

les deux dernières sont les racines de l'équation du second degré,

$$3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

2. Je prends maintenant l'équation générale du qua-

trième degré

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

elle donne

$$x = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b - \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b - \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

avec

$$\gamma = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\ \varphi(\zeta) + \ \psi(\eta)] = b^2 - ac + k,$$

$$\delta = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\ \rho\varphi(\zeta) + \rho^2\psi(\eta)] = b^2 - ac + k',$$

$$\varepsilon = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\rho^2\varphi(\zeta) + \ \rho\varphi(\eta)] = b^2 - ac + k''.$$

Je prends les racines carrées de ces quantités et je remarque que le produit $\varphi(\gamma)\,\varphi(\delta)\,\varphi(\varepsilon)$ devant être égal à

$$-b^3 - \frac{1}{2}a^2 d + \frac{3}{2}abc,$$

il est nécessaire de prendre pour deux des radicaux $\varphi(\gamma)$ et $\varphi(\varepsilon)$, par exemple, le signe $+$ et le signe contraire pour $\varphi(\varepsilon)$. De là

$$\varphi(\gamma) = \quad b + \frac{1}{2b}(k - ac + \ldots),$$

$$\varphi(\delta) = \quad b + \frac{1}{2b}(k' - ac + \ldots),$$

$$\varphi(\varepsilon) = -b - \frac{1}{2b}(k'' - ac + \ldots).$$

Les termes omis contiennent au moins le facteur a^2. On a donc, pour la première des valeurs de x,

$$x = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2b}(k + k' - k'' - ac) + \ldots\right];$$

mais

$$k + k' - k'' = \frac{1}{2}a[\psi(\zeta)(1 + \rho - \rho^2) + \psi(\eta)(1 - \rho + \rho^2)]$$
$$= -a\,[\rho^2\psi(\zeta) + \rho\psi(\eta)],$$

d'où, en supprimant un facteur a et faisant ensuite $a = 0$,

$$x = \frac{1}{2b} - c - \rho^2\psi(\zeta_0) - \rho\psi(\eta_0),$$

en indiquant par ζ_0 et η_0 ce que deviennent ζ et η lorsqu'on y fait $a = 0$.

On trouve de même, pour les trois autres valeurs,

$$x = \frac{1}{2b}[-c - \rho\varphi(\zeta_0) - \rho^2\varphi(\eta_0)],$$

$$x = \frac{1}{2b}[-c - \psi(\zeta_0) - \psi(\eta_0)],$$

$$x = \infty.$$

Les trois premières valeurs sont les racines de l'équation du troisième degré

$$4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

car, d'après l'article d'Eisenstein, on a

$$\zeta_0 = \frac{9E_0 + \varphi(3F_0)}{9}, \quad \eta_0 = \frac{9E_0 - \varphi(3F_0)}{9},$$
$$E_0 = b^2e - 2bcd + c^3,$$
$$F_0 = 9b^2(3b^2e^2 - 4c^2d^2 - 12bcde + 6c^3e^3) + 64b^3d^3.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 290;

PAR M. FAURE,
Officier d'artillerie.

Trouver le coefficient de x^{n-1} dans l'équation en x de degré $n+1$ qui a pour racines les $n+1$ coefficients binomiaux de $(a+b)^n$.

Ce coefficient, que je désigne par A, est égal à la somme des produits deux à deux des coefficients du développement de $(a+b)^n$.

Or, si l'on multiplie entre eux deux binômes tels que $(1+\alpha)^n$ et $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)^n$, on aura (en faisant $\alpha=1$) dans le produit la somme cherchée, et en outre la somme des carrés des coefficients binomiaux, somme que j'appelle B. Donc

$$2^{2n}=2A+B.$$

Or, d'après les deux développements

$$(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2+\ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^n=1+n\frac{1}{\alpha}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{\alpha^2}+\ldots,$$

B s'obtient en multipliant terme à terme ces deux séries; de sorte que l'on peut aussi regarder cette quantité comme étant le terme indépendant de α dans le développement de

$$(1+\alpha)^n\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^n=\frac{1}{\alpha^n}(1+\alpha)^{2n}.$$

On a donc

$$B=\frac{2n(2n-1)\ldots n+1}{1.2\ 3\ldots n};$$

de là

$$A = 2^{2n-1} - \frac{(2n-1)(2n-2)\ldots n+1}{1.2.3\ldots n-1}.$$

SUR LES RACINES IMAGINAIRES.

(Extrait d'une Lettre de M. E. Prouhet.)

La lettre de M. Vallès, insérée dans le numéro de décembre dernier (1854), m'a suggéré plusieurs réflexions, que je crois devoir vous communiquer, quoiqu'elles ne soient, en partie, que le développement d'une note fort judicieuse placée en bas de la page 461. Peut-être ne regarderez-vous pas comme inutiles quelques considérations qui me paraissent propres à mettre dans un plus grand jour un point de doctrine fort important.

A mon avis, les auteurs qui cherchent à *interpréter* les symboles imaginaires oublient trop souvent de faire, sur l'origine de ces symboles, une distinction capitale, et ils font, par là, le plus grand tort à ce qu'il peut y avoir de bon et de véritablement utile dans leurs recherches.

Cette distinction, la voici : Les inconnues qui entrent dans une question peuvent être ou des *inconnues principales*, c'est-à-dire les quantités mêmes que l'on cherche, ou du moins des quantités sans lesquelles l'objet que l'on veut déterminer ne saurait exister; ou des *inconnues auxiliaires*, introduites dans le calcul en vue de quelque avantage spécial, mais sans lesquelles l'objet en question peut très-bien exister.

Lorsqu'on trouve pour une *inconnue principale* une expression imaginaire, c'est un signe infaillible que la question proposée est impossible. Vous cherchez un point qui remplisse une certaine condition; vous trouvez qu'une de ses coordonnées est imaginaire : donc il n'existe pas de point qui remplisse la condition demandée.

Lorsque le calcul donne une expression imaginaire pour une inconnue auxiliaire, cela indique que cette quantité n'existe pas, mais non pas que le problème est impossible. Exemple : Vous trouvez commode, pour déterminer l'axe radical de deux cercles, de calculer les coordonnées de leurs points d'intersection et d'en déduire l'équation de la droite cherchée; mais ces coordonnées peuvent être imaginaires, c'est-à-dire que les cercles peuvent ne pas se couper, et cependant l'axe radical existe. Il arrive même que ces coordonnées, traitées comme des quantités réelles, donnent encore l'équation de l'axe radical, résultat d'ailleurs confirmé par d'autres méthodes. Ce résultat, singulier au premier abord, tient à ce que les coefficients de la droite cherchée dépendent de la *forme* des expressions *générales* trouvées pour les coordonnées, *forme* qui subsiste alors que l'expression n'a plus de signification propre.

Cela posé, il est facile de voir que les assertions de M. Vallès ne sont vraies qu'à moitié. Lorsqu'il parle de combler l'abîme entre le réel et l'imaginaire, il oublie la distinction que nous venons de faire. Cet abîme existe bien réellement quand il s'agit d'inconnues principales, parce qu'il n'y a pas, je crois, de milieu entre *être* et *ne pas être*. L'approximation n'a rien à faire ici ; mais, dans le cas des inconnues auxiliaires, M. Vallès a raison, et des valeurs approchées de quantités imaginaires peuvent servir à calculer, par approximation, des quantités dont la réalité est d'ailleurs hors de doute.

Je ne puis être d'accord avec M. Vallès lorsqu'il dit : « C'est un fait très-surprenant que celui qui, au moyen de la plus petite altération dans les coefficients d'une équation peut faire passer les racines de cette équation du réel à l'imaginaire, et *vice versâ* » (page 450). Le fait ne me semble pas surprenant du tout, à moins qu'on ne regarde comme un paradoxe cette proposition inoffensive : Quand on est sur la frontière d'un pays, le plus petit déplacement peut vous faire passer du dedans au dehors, et *vice versâ*.

Puisque je suis sur le sujet des interprétations, permettez-moi encore d'ajouter quelques mots sur certaines doctrines assez répandues et qui me semblent être une déviation bien prononcée de la logique du bon sens.

Qu'est-ce qu'interpréter un résultat de calcul? C'est, il me semble, chercher en quoi ce résultat répond à la question proposée, en admettant même parmi les réponses possibles celle-ci : Ce que vous demandez n'existe pas.

Cela paraît très-simple et très-naturel ; mais il y a des esprits auxquels le simple et le naturel ne suffisent pas. Quand ils ont trouvé un symbole d'impossibilité, ils le torturent de toutes les manières pour y trouver, au lieu de la réponse qui saute aux yeux, une réponse à une question nouvelle, peu différente, à ce qu'ils disent, de la première, et à laquelle ils ne songeaient pas d'abord. Ces modifications légères consistent à changer une perte en gain, à faire aller un courrier de droite à gauche, au lieu qu'il allait d'abord de gauche à droite, etc. A cela près, c'est toujours la même question.

D'autres auteurs prétendent qu'un résultat de calcul sert quelquefois à *rectifier* un énoncé. Singulière assertion! Le calculateur ne savait donc pas ce qu'il demandait? Et s'il ne le savait pas, comment le calcul peut-il le lui apprendre!

Je conclus de tout cela que, lorsqu'on fait de l'algèbre, il ne faut pas se défaire du sens commun, don rare et précieux auquel $a + b$ ne suppléera jamais.

Cette Lettre étant déjà bien longue, je remets à une autre occasion pour vous entretenir de quelques tentatives faites pour résoudre la question laissée intacte par M. Vallès, savoir, celle des caractères auxquels on peut reconnaître l'existence des racines en faisant varier les coefficients approchés dans les limites de l'approximation supposée.

31 décembre 1854.

SUR LES OVALES DE DESCARTES

(voir t. IX, p. 183);

PAR M. A. GENOCCHI.

M. W. Roberts a trouvé, en employant les coordonnées elliptiques, que l'arc d'un ovale de Descartes s'exprime par une fonction ultra-elliptique dans laquelle la quantité soumise au signe radical monte jusqu'au septième degré (Journal de M. Liouville, tome XV, page 196). On obtient un résultat plus simple par les coordonnées polaires : si l'on prend pour variable indépendante l'angle polaire, le polynôme soumis au radical ne monte qu'au cinquième degré.

Soient c la distance des deux foyers de la courbe, ρ et ρ' les deux rayons vecteurs de l'un quelconque de ses points, ω l'angle formé par le rayon vecteur ρ avec la ligne des foyers prise pour axe : on aura, m et n étant deux constantes,

$$\rho' = m\rho + n$$

et

$$\rho'^2 = c^2 + \rho^2 - 2c\rho\cos\omega;$$

d'où, en posant

$$\frac{c}{1-m^2} = a, \quad \frac{mn}{1-m^2} = b, \quad \frac{n^2-c^2}{1-m^2} = k,$$

on tire l'équation des ovales

$$\rho^2 - 2\rho(a \cos\omega + b) = k,$$

et, en différentiant,

$$d\rho\,(\rho - a\cos\omega - b) + a\rho\, d\omega \sin\omega = 0.$$

Or, si de ces deux équations on déduit les valeurs de $\cos\omega$, $\sin\omega$, $d\omega$ en fonction de ρ et $d\rho$, et qu'on substitue celle de $d\omega$ dans la formule

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2},$$

on trouve

$$ds = 2\,\frac{\sqrt{a^2\rho^2 + \rho(\rho - b)(b\rho + k)}}{\sqrt{4a^2\rho^2 - (\rho^2 - 2b\rho - k)^2}}\,d\rho,$$

de manière que la différentielle ds de l'arc de la courbe renfermera deux radicaux, et, en les réduisant à un seul par la multiplication, on obtiendra sous le signe un polynôme en ρ du septième degré. Mais si, au contraire, on résout l'équation de la courbe par rapport à ρ, il vient

$$\rho - a\cos\omega - b = \pm\sqrt{k + (a\cos\omega + b)^2},$$

et comme on a d'un autre côté

$$d\rho = -\frac{a\rho\, d\omega \sin\omega}{\rho - a\cos\omega - b},$$

et, par suite,

$$ds = \frac{\sqrt{a^2\sin^2\omega + (\rho - a\cos\omega - b)^2}}{\rho - a\cos\omega - b}\,\rho\, d\omega,$$

on en conclut

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2 + k + 2ab\cos\omega}\left(d\omega \pm \frac{(a\cos\omega + b)\,d\omega}{\sqrt{k + (a\cos\omega + b)^2}}\right),$$

d'où

$$s = \int d\omega \sqrt{a^2 + b^2 + k + 2ab\cos\omega}$$
$$\pm \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + k + 2ab\cos\omega}}{\sqrt{k + (a\cos\omega + b)^2}} (a\cos\omega + b)d\omega.$$

L'expression de l'arc s sera donc la somme de deux intégrales : la première se ramène immédiatement à un arc d'ellipse, car, en faisant

$$\omega = 2\varphi, \quad (a + b)^2 + k = p, \quad 4ab = q,$$

on la met sous la forme

$$2\int d\varphi \sqrt{(p - q\sin^2\varphi)};$$

la deuxième intégrale, en posant

$$\cos\omega = x, \quad a^2 + b^2 + k = r,$$

deviendra

$$\mp \int \frac{(ax + b)(r + 2abx)dx}{\sqrt{(1 - x^2)(r + 2abx)(k + b^2 + 2abx + a^2x^2)}},$$

transcendante abélienne, dans laquelle la quantité soumise au radical est une fonction entière de x du cinquième degré.

Cette seconde intégrale se réduit elle-même à un arc d'ellipse, si $k = 0$, puisque alors elle est égale à la première. Dans ce cas l'équation de la courbe se décompose en

$$\rho = 0, \quad \text{et} \quad \rho = 2(a\cos\omega + b),$$

et représente ainsi un point isolé qui est le pôle, et une ligne courbe. Cette courbe est en même temps une conchoïde circulaire et une épicycloïde, et a été étudiée par M. Quetelet comme la *caustique secondaire* par réflexion dans le cercle (*Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles*, tome III, page 131) : elle est connue sous le nom de *limaçon de Pascal* (*).

(*) Cette dénomination a été introduite par Roberval. (*Voir* un Mémoire de Lahire dans le volume de l'Académie des Sciences de Paris pour 1708, Si l'on fait

$$h = -(a-b)^2,$$

on trouve, en réduisant,

$$s = 2\sqrt{ab}\int d\omega \cos\frac{1}{2}\omega \pm \sqrt{2b}\int \frac{(a\cos\omega + b)\,d\omega}{\sqrt{a\cos\omega - a + 2b}}:$$

cette expression se ramène aussi aux fonctions elliptiques; car on a

$$\int d\omega \cos\frac{1}{2}\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega + \text{const.},$$

et, en posant

$$\omega = 2\varphi,$$

on partage l'intégrale

$$\int \frac{(a\cos\omega + b)\,d\omega}{\sqrt{a\cos\omega - a + 2b}},$$

en deux intégrales elliptiques

$$(a-b)\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{b - a\sin^2\varphi}} + \sqrt{2}\int d\varphi\sqrt{b - a\sin^2\varphi},$$

l'une de première, l'autre de seconde espèce.

Mais il faut remarquer que la courbe correspondante est encore un limaçon de Pascal. Prenons en effet, sans changer d'axe polaire, un nouveau pôle à la distance $a-b$ du premier, et nommons ρ', ω' les nouvelles coordonnées : nous aurons

$$\rho^2 = \rho'^2 + (a-b)^2 + 2\rho'(a-b)\cos\omega',$$
$$\rho'^2 = \rho^2 + (a-b)^2 - 2\rho(a-b)\cos\omega,$$

et l'équation de la courbe donnera

$$[\rho^2 - 2a\rho\cos\omega + (a-b)^2]^2 = 4b^2\rho^2,$$

page 46. M. Quetelet appelle *limaçon de Pascal* la courbe qui répond au cas particulier $a = 2b$. (Voir *loco cit.*, p. 98 et 101.)

d'où, éliminant ρ^2 et $\rho \cos \omega$, on déduit sans peine

$$(\rho'^2 - 2b\rho' \cos \omega')^2 = 4ab\rho'^2,$$

c'est-à-dire

$$\rho' = 0 \quad \text{et} \quad \rho' = 2\left(b \cos\omega' + \sqrt{ab}\right).$$

On a ainsi deux expressions de l'arc du limaçon, et l'on voit que leur rapprochement nous conduit à ce théorème connu, qu'une fonction elliptique de première espèce s'exprime par deux arcs d'ellipse. On peut aussi en conclure la transformation analytique propre à opérer cette réduction.

Si les coefficients a et b étaient affectés de signes contraires, il faudrait supposer $k = -(a+b)^2$, et prendre le nouveau pôle à la distance $a + b$ de l'ancien.

En remplaçant ρ par $\frac{1}{m}\rho^2$, et ω par 2ω dans l'équation

$$\rho^2 - 2\rho(a\cos\omega + b) + (a-b)^2 = 0,$$

il vient

$$\left(\frac{1}{m}\rho^2 + a - b\right)^2 = 4\frac{a}{m}\rho^2\cos^2\omega,$$

d'où

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega\sqrt{am} + m(a-b) = 0,$$

équation d'un cercle. On transforme donc par cette substitution les limaçons en cercles : réciproquement, on transformera les cercles en limaçons, en remplaçant ρ et ω par $\sqrt{m\rho}$ et $\frac{1}{2}\omega$. Ainsi il est visible que ce moyen, employé par MM. Chasles et W. Roberts pour obtenir les ovales de Descartes, fournit seulement le limaçon de Pascal, comme l'a remarqué M. Cayley (Journal de M. Liouville, tome XV, page 354). Il s'ensuit, en particulier, que l'ovale mentionné dans le théorème, dont M. P. Serret a indiqué la démonstration dans les *Nouvelles Annales*, tome IX, page 321, n'est aussi qu'un limaçon.

L'équation des ovales donne deux valeurs de ρ pour chaque valeur de ω : ces valeurs seront toujours réelles, si la quantité k est positive, mais seront de signes contraires; elles seront toujours imaginaires, si k est négative et $\sqrt{-k}$ surpasse la différence entre les valeurs numériques de a et b; enfin, il y en aura des imaginaires et des réelles, lorsque, k étant négative, cette valeur est comprise entre a et b.

NOTE

Sur la conformité, l'homogénéité, la ressemblance, la similitude, la symétrie et l'identité.

Nous ne sommes mis en relation avec les choses extérieures que par l'action qu'exerce le *non-moi* sur le *moi*, action nommée *impression* et transmise au cerveau par divers systèmes nerveux; l'effet de cette impression se nomme *perception*. Lorsque ce viscère, par l'intermédiaire d'un autre système nerveux, renvoie cette perception au dehors, l'effet produit se nomme *sensation*. Ainsi la sensation est toujours le résultat d'un double courant du dehors au dedans et du dedans au dehors. *Nihil est in sensu quod non prius fuerit in intellectu.* C'est le contraire de l'assertion attribuée d'une manière trop absolue à Aristote qui est vrai, car le *non-moi* n'existe que par le *moi*, mais existence purement de relation, constituant une *modalité* et nullement une *réalité* (*). La chose en elle-même, *ens per se*, ce qui occasionne l'impression,

(*) Le cerveau agit comme *pile;* les nerfs sont les fils. Les tendons, muscles, os sont les aiguilles de cet instrument télégraphique; les papilles nerveuses, les ganglions sont peut-être des piles secondaires; les agents anesthésiques neutralisant les fils, la sensation disparaît.

ce qui est dessous, la *substance,* nous est entièrement inconnue. Nous donnons un nom à ce qui semble envelopper cette substance, à ce qui est *dessus,* et nous l'appelons *surface.* Lorsque cette surface engendre une impression nommée *résistance,* la substance qu'elle entoure prend le nom de *corps,* et, abstraction faite de cette résistance, la substance n'est qu'une *image.* La géométrie ne considère que des *images;* la mécanique considère les *corps.*

Lorsque les concavités, les convexités, les saillies, les rentrants, les pleins, les vides, sont en même nombre et également disposés, homologues les uns par rapport aux autres dans deux surfaces, on dit que l'une est *conforme* à l'autre; c'est ainsi qu'il y a conformité entre deux individus de même *espèce.* Le même mode de génération constitue l'*homogénéité.* Les volumes sont homogènes entre eux, parce qu'ils sont tous engendrés par des surfaces; les surfaces étant engendrées par des lignes, sont homogènes entre elles, etc.; mais les volumes et les surfaces comparés les uns aux autres sont hétérogènes. Ceci est applicable aux corps organiques.

Si deux surfaces *conformes* présentent les angles égaux ou sensiblement égaux, et dans le même ordre, on dit qu'elles se *ressemblent,* c'est l'égalité des angles qui constitue la *ressemblance.*

Les rectangles sont des images qui se *ressemblent,* de même les parallélipipèdes rectangles; c'est ainsi que les enfants ressemblent aux parents.

Lorsque deux surfaces se ressemblent et qu'en outre les diverses dimensions homologues sont *proportionnelles*, sont en même rapport, elles sont *semblables.* Lorsque ce rapport est l'unité, on obtient l'*identité;* la *symétrie* est une similitude *inverse* et il y a aussi une identité inverse. Ainsi la *similitude* suppose trois conditions : l'homologie des parties constituantes, l'égalité des angles homologues et la proportionnalité des dimensions homologues. On ne peut démontrer la possibilité de la similitude que par la géométrie. Ce n'est que parvenu au VI[e] livre qu'Euclide établit la similitude de quelques figures planes, et dans le XI[e] livre, de quelques volumes semblables, mais imparfaitement. Le vulgaire ne connaît que la ressemblance; le géomètre seul connaît la similitude. On a voulu rattacher la définition de la similitude aux systèmes d'*échelles* et dire que deux corps sont semblables lorsque leur construction ne diffère que par la grandeur de l'échelle; mais la possibilité d'une telle construction exige la connaissance des théorèmes des onze livres, et encore ne suffisent-ils pas.

Les définitions sont *libres*, dit Pascal, bien entendu lorsque la chose définie est possible; possibilité qu'il faut d'abord prouver : ainsi, par exemple, avant de définir les polygones réguliers, il est nécessaire de démontrer que de tels polygones existent. Il est vrai que ces définitions par *échelles* peuvent convenir à la géométrie poétique de nos industriels, mais hors de là elles n'ont aucune valeur logique.

CALCUL DE π AVEC 530 DÉCIMALES

(voir t. IX, p. 12; t. XIII, p. 419).

M. Rutherford a calculé de nouveau π jusqu'à 440 décimales (*) et M. W. Shanks, de Houghton-le-Spring, stimulé par M. Rutherford, a porté ce nombre à 530 décimales. Les 330 premières décimales sont, chez les deux calculateurs, les mêmes que chez M. Richter (t. XIII,

(*) *Voir* tome X, page 198.

p. 419); mais les trois dernières décimales de M. Richter, savoir 098, sont remplacées chez les calculateurs anglais par 962; ainsi 330 décimales sont vérifiées par trois calculateurs, Richter, Rutherfort et Shanks, et 440 par les deux derniers calculateurs. Nous donnons ici les 40 quines à ajouter aux 66 de M. Richter; ainsi en tout 106 quines ou 530 chiffres:

96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305
48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036
57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381
83011 94912 98336 73362 44065 66430 86021 39488

M. Shanks s'est servi de la formule de Machin.

M. Rutherford a présenté ce travail à la Société royale de Londres en janvier 1853.

π a été déterminé par :

	Décimales exactes.
Archimède avec	2
Les astronomes indiens	3
J. Rheticus	8
Pierre Metius	8
Viète	11
Adrien Romanus	16
Ludolf van Ceulen	35
A. Sharp	73
Machin	100
Lagny	127
Vega	140
Manuscrit de la Bibliothèque Radcliffe, à Oxford	156
Dahse	200
Clausen	256
Richter	333
Rutherford	440
Shanks	530

(*Cosmos*, t. VII, p. 335; 23 mars 1855.)

QUESTIONS.

303. Quelles conditions doit remplir un quadrilatère pour que tous les rectangles circonscrits soient semblables à un rectangle donné? Quel est le lieu géométrique des centres de ces rectangles?

304. Soient donnés dans un même plan : 1° cinq points sur une droite A; 2° cinq droites. Mener une transversale qui coupe les cinq droites en cinq points qui soient homographiques aux cinq points de la droite A; démontrer qu'il n'existe qu'une seule transversale qui remplisse cette condition. (CHASLES.)

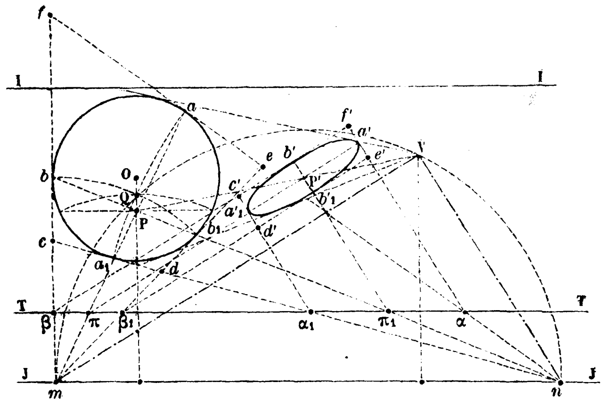
305. Soient donnés : 1° sept points sur une droite A; 2° sept plans dans l'espace. Mener une transversale qui rencontre les sept plans en sept points qui soient homographiques aux sept points de la droite A. (CHASLES.)

306. Soient donnés dans un même plan : 1° un quadrilatère ABCD et un point fixe S sur le côté AB. 2° deux faisceaux homographiques ayant le point S pour centre commun. Menons une droite quelconque, elle coupera les deux faisceaux en deux systèmes de points homographiques; soient a_p, b_p deux de ces points homographiques. Dans le pentagone formé par le quadrilatère et le rayon Sa_p, inscrivons une conique; par le point b_p menons deux tangentes à cette conique. Le lieu géométrique de l'intersection de ces deux tangentes par le rayon Sa_p est une ligne du troisième ordre passant par le point S et par les trois sommets du triangle formé par le côté CD opposé à AB et par les côtés CA, DB suffisamment prolongés.

(CHASLES.)

CONSTRUCTION NOUVELLE
Des sections coniques par la perspective d'un cercle, donnant de suite le centre, les diamètres conjugués, les axes de la courbe ;

PAR M. POUDRA,
Officier supérieur d'état-major en retraite.



Pour obtenir la perspective d'une figure plane il faut distinguer :

1°. Le plan de la figure donnée, d'un cercle, par exemple (ce sera le plan horizontal de projection) ;

2°. Le plan vertical du tableau (soit TT sa trace horizontale) ;

3°. Le point de vue que nous désignerons par V.

Par le point V menons un plan parallèle à celui du tableau. Sa trace horizontale sera une droite JJ parallèle à TT.

Rabattons ce dernier plan et celui du tableau sur le plan horizontal, en les faisant tourner autour de leurs traces respectives JJ et TT ; nous obtiendrons la figure ci-dessus dans laquelle le cercle, sa perspective et le point de vue seront ramenés dans un même plan.

Remarquons que tous les points du plan du cercle qui sont sur JJ passent dans la perspective à l'infini, de sorte que les droites de ce plan, qui concourent en un point de JJ, deviennent en perspective des droites parallèles.

Sur JJ prenons arbitrairement deux points m et n, joignons-les par des droites au point de vue V. Ces droites Vm, Vn seront les directrices de la construction.

Des points m et n tirons des droites à un point quelconque de la figure donnée, tel que b. La droite mb rencontrera TT en β, par lequel nous menons $\beta b'$ parallèle à la directrice Vm. La droite nb rencontre TT en π_1, par lequel nous menons $\pi_1 b'$ parallèle à l'autre directrice Vn. Les deux droites $\beta b'$, $\pi_1 b'$ se rencontrent en b' sur le rayon visuel V$b'b$. Ce point b' est la perspective de b. Quels que soient les points m et n sur JJ, on obtiendra toujours le même et unique point b' pour la perspective de b.

En répétant cette opération pour divers points de la figure donnée, on obtiendra sa perspective.

Cette nouvelle méthode de perspective peut se résumer en disant que la perspective d'une figure plane quelconque est la résultante de deux perspectives sur une droite TT prises de deux points arbitraires m et n sur JJ parallèle à TT.

D'après cette construction, on voit de suite que si le cercle est tangent à JJ sa perspective sera une parabole. S'il coupe cette droite, on aura une hyperbole. Dans le cas de la figure, ce sera une ellipse.

La droite JJ a pour pôle dans le cercle le point P. C'est-à-dire que si, d'un point quelconque de cette droite, on mène deux tangentes au cercle, la corde qui joint les deux points de contact passe toujours par P. Pour un point m quelconque, la corde de contact bb_1 ira rencontrer JJ en un point n tel, que si l'on mène deux tangentes, la corde de contact aa_1 ira passer par le premier point m. Les trois points m, n, P sont dits *conjugués ;* ils jouissent de cette propriété, que la polaire de l'un quelconque passe par les deux autres.

Le point P, pôle de JJ par rapport au cercle, est très-connu. Il jouit de propriétés importantes ; mais il existe un point Q aussi remarquable et dont on n'a pas fait usage jusqu'ici.

Si d'un point m de JJ comme centre, avec un rayon égal à la partie mb comprise entre le point m et celui b de tangence, on décrit une circonférence, elle passera toujours par un même point Q situé entre le centre O et le pôle P, et cela quelle que soit la position de ce point m sur JJ. En outre, si, sur la droite mn qui joint deux points conjugués, comme diamètre, on décrit une circonférence, elle passera aussi par ce point Q, quels que soient les deux points conjugués m et n sur JJ. Comme ce point Q est important et qu'il a de l'analogie avec celui P, je propose de le nommer *pôle circulaire* de JJ par rapport au cercle, tandis que P serait le *pôle linéaire.*

La connaissance de ce point Q va nous permettre de déterminer de suite le centre et les axes de la section conique sans en chercher un seul point.

Décrivons une circonférence passant par Q et V et dont le centre soit sur JJ. Par son intersection avec cette droite, elle déterminera deux points conjugués m et n tels, que les deux directrices correspondantes Vm, Vn seront rectangulaires. Prenons ces deux points m et n pour les points de vue auxiliaires. Il est évident : 1° qu'au point P correspondra celui P′ qui sera le centre de la courbe ; 2° aux deux droites ma_1Pa, nb_1Pb correspondront les deux cordes rectangulaires conjuguées $\pi' a'_1$ $P' a'$ et $\pi_1 b'_1 P' b$ qui, passant par le centre, seront les axes de la courbe; 3° au quadrilatère circonscrit *cdef* dont les côtés opposés concourent sur JJ aux points m et n, correspondra le rectangle $c' d' e' f'$ circonscrit à l'ellipse et dont les côtés parallèles aux axes détermineront les sommets a', a'_1, b', b'_1 de la courbe.

Toute autre circonférence qui aurait son centre sur JJ et qui passerait par Q, déterminerait sur JJ deux autres points conjugués m_1, n_1 auxquels correspondraient, dans la section conique, deux diamètres conjugués dont l'angle serait égal à celui $m_1 V n_1$ formé par les nouvelles directrices $V m_1$, $V n_1$.

Toutes ces circonférences qui ont leur centre sur JJ et passent par Q, se coupent encore en un deuxième point Q_1 situé symétriquement par rapport à JJ.

La connaissance du point Q nous a donné le moyen de trouver de suite le centre et les axes de la section conique qui doit résulter de la perspective d'un cercle donné. Nous ferons voir, dans un prochain article, qu'on peut, avec son secours, résoudre, dans tous les cas, le problème suivant : *Connaissant les cinq conditions auxquelles doit satisfaire une section conique cherchée, trouver de suite le centre et les axes de cette courbe sans être obligé d'en déterminer aucun autre point;* problème dont la solution générale peut avoir des applications pratiques utiles.

Dans la position V du point de vue, on trouve facilement par la construction que

$$\frac{P' a'}{P' b} = \frac{n Q}{m Q} : \frac{n V}{m V};$$

pour toute autre position V_1 on aurait une autre ellipse dont le rapport des axes serait $\frac{nQ}{mQ} : \frac{nV_1}{mV_1}$; donc il en résulte que le rapport des axes de la première sera à celui de la deuxième comme $\frac{mV}{nV} : \frac{mV_1}{nV_1}$.

Deux ellipses quelconques qu'on peut obtenir ainsi pour deux points de vue V et V_1 sont perspectives réciproques l'une de l'autre, les droites homologues se coupent toujours sur TT, mais le point de vue pour deux de ces courbes sera à l'infini ; elles seront projection l'une de l'autre, et la direction qui joint les points homologues sera celle VV_1 des deux points de vue.

En faisant varier la position du point V, on peut obtenir des ellipses dont le rapport des axes ait toutes les valeurs possibles. Ainsi, lorsque V sera sur JJ, par exemple en n, la courbe sera une droite $\alpha\alpha_1$. S'il est en Q ou Q_1, la courbe sera un cercle. Si le point V reste sur la circonférence mQn, les ellipses seront rapportées à leurs axes qui seront des droites homologues, et dans toutes ces courbes les points homologues seront sur une même circonférence dont le centre serait sur TT.

Rappelons en terminant que toutes ces courbes, parmi lesquelles il y a des droites, des cercles, des ellipses dont le rapport des axes est indéfini, deux quelconques sont projection l'une de l'autre; d'où résulte qu'à des droites parallèles dans l'une correspondront des droites parallèles dans l'autre, et que les segments sur les premières seront proportionnels aux segments sur les deuxièmes.

Il serait trop long d'exposer ici toutes les conséquences qu'on peut tirer de ces observations. Nous nous proposons, d'ailleurs, de donner, dans un autre article, toutes les propriétés de l'ellipse qui se déduisent, presque à vue, de celles du cercle.

SOLUTION UNIQUE ET GÉNÉRALE DES QUESTIONS FONDAMENTALES SUR LES CONIQUES

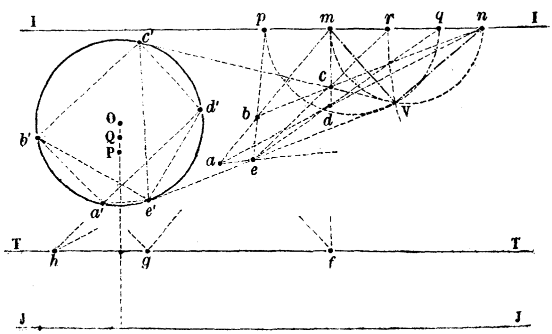
(voir tome XIII, page 394);

PAR M. POUDRA,
Officier supérieur d'état-major en retraite.

Il s'agit de trouver le centre et les axes d'une section conique non tracée et qui doit satisfaire à cinq conditions.

Nous désignerons par a, b, c, d, e des points de la courbe et par A, B, C, D, E les tangentes respectives en ces points. Cinq quelconques de ces dix quantités étant connues, la courbe est déterminée; il en résulte douze cas différents. Ne pouvant dans ce court article donner les douze solutions, nous exposerons les plus remarquables qui font connaître l'esprit de la méthode.

Dans un précédent article, nous avons fait voir comment on peut trouver, à priori, le centre et les axes d'une section conique qui résulte de la perspective d'un cercle donné. La méthode générale que nous allons employer consiste à retrouver, avec les conditions données, le cercle qui serait la perspective de la section conique.



1er Cas. *Étant donnés les cinq points* a, b, c, d, e, *trouver le centre et les axes de la section conique qui passe par ces cinq points, et cela sans avoir besoin de déterminer un autre point de la courbe.*

Il y a plusieurs solutions, nous n'en donnerons qu'une seule. Quatre des points donnés, tels que a, b, c, d, forment un quadrilatère. Soient m et n les points de concours des côtés opposés; la droite mn qui joint ces deux points sera désignée par II.

Si l'on joint le cinquième point e avec les quatre points a, b, c, d et avec m et n, on aura un faisceau de six droites en involution. Ce faisceau est coupé par la droite II aux points m et n, p et q, r et......... s qui sont alors en involution; il en résulte que si sur mn, pq, rs, comme diamètres, on décrit trois demi-circonférences, elles se couperont en un même point V. Ce sera le point de vue de la perspective.

Prenons arbitrairement une droite TT parallèle à II pour la base du tableau; alors la droite II pourra être regardée comme celle qui, dans le plan de la section conique, correspond aux points situés à l'infini dans le plan du cercle. De sorte que la perspective du quadrilatère a, b, c, d, dont les points de concours sont sur II, sera nécessairement un parallélogramme, et comme les deux directrices Vm, Vn sont rectangulaires, la figure a', b', c', d' sera un rectangle. Mais, de plus, comme les angles pVq, rVs sont aussi droits, il en résultera que le point e', perspective du cinquième point e, sera tel, que les angles $a'e'c'$, $b'e'd'$ seront droits; donc il faut que les cinq points a', b', c', d', e' soient sur une même circonférence qui sera, par conséquent, la perspective de la section conique passant par les points donnés a, b, c, d, e.

Nous avons la droite II qui, dans le plan de la section conique, correspond aux points qui, dans le plan du cercle, sont à l'infini. Mais nous avons besoin de connaître celle qui, réciproquement dans le plan du cercle, correspond aux points à l'infini dans le plan de l'ellipse. Or il suffit de mener la droite JJ parallèle TT à une distance de V égale à celle qui sépare les droites TT et II. Cela devient évident en observant que, de même que JJ représente la trace horizontale d'un plan parallèle à celui du tableau mené par V, réciproquement la droite II représente sur le plan du tableau la trace d'un plan mené par V parallèle à celui du cercle. Ce serait pour les peintres la ligne d'horizon.

En se reportant à notre premier article, on voit que le problème est résolu, car on connaît le cercle, le point V, les droites TT, JJ; par suite, on peut déterminer les pôles linéaires et circulaires P et Q, et, par conséquent, le centre et les axes de la section conique qui serait perspective du cercle et qui passerait par les cinq points donnés.

2e Cas. *Connaissant trois points* a, b, c, *et deux tangentes* C *et* E, *on demande de trouver le centre et les axes de la section conique.*

On trace un cercle tangent aux deux tangentes données. Ce cercle, de rayon arbitraire, pourra être considéré comme étant la perspective de la section conique. V, le point de rencontre des deux tangentes, sera nécessairement le point de vue.

Les trois rayons visuels V*a*, V*b*, V*d* détermineront sur le cercle les trois points *a'*, *b'*, *d'*, perspectives de ceux *a*, *b*, *c*. Les droites homologues *ab* et *a' b'*, *ad* et *a' d'*, *bd* et *b' d'* se couperont deux à deux sur la droite TT qui sera ainsi déterminée. Pour trouver la droite JJ, on trace à volonté, dans le plan de la section conique, deux systèmes de deux droites parallèles; ces droites coupent celles connues *ab*, *bc*, *cd*, *de*, etc., en des points dont les perspectives seront: 1° sur les droites homologues *a' b'*, *b' c'*, *c' d'*, *d' e'*, etc., et 2° sur les rayons visuels menés de V à chacun de ces points. Donc, les droites homologues à ces deux systèmes de deux droites parallèles seront déterminées, mais elles seront concourantes en deux points de JJ qui sera donc ainsi déterminée.

La méthode employée pour ce deuxième cas peut convenir toutes les fois que parmi les données il y aura deux tangentes. Mais on sait que lorsque l'on connaît cinq points d'une section conique, on peut tracer de suite les cinq tangentes et réciproquement, et que, dans beaucoup d'autres cas, on peut encore déterminer des tangentes : nous ne donnerons donc pas les solutions directes des dix cas qui resteraient à examiner et qui peuvent se ramener la plupart à ces deux-ci.

Lorsqu'on a déterminé le cercle qui est la perspective de la section conique non tracée, on peut résoudre très-simplement divers problèmes sur cette courbe.

1°. *Par un point* a *donné sur la courbe non tracée, lui mener une tangente.*

Le point a' du cercle sur le rayon visuel V$a'a$ est la perspective de celui a. On mène la tangente en ce point a' au cercle, elle rencontre TT en un point qui, joint à celui a, donne la tangente cherchée,

2°. *Par un point* K *extérieur à la courbe non tracée, lui mener une tangente.*

Au point K correspond dans le cercle le point K$'$ qui en est la perspective. Par ce point K$'$, on mène deux tangentes au cercle, elles rencontrent TT en des points qui, joints à K, donnent les tangentes cherchées.

3°. *Mener à la section conique non tracée des tangentes parallèles à une droite donnée.*

La droite donnée K rencontre TT en un point α. Par V, on mène une parallèle à K qui coupe JJ en un point β ; la droite $\alpha\beta$ est la perspective de la droite K. On mène au cercle deux tangentes parallèles à cette droite $\alpha\beta$; elles rencontrent TT en deux points par lesquels, menant deux parallèles à K, on aura les deux tangentes cherchées. Si l'on veut les points de tangence, il suffira de joindre V avec les points de contact des deux tangentes ci-dessus au cercle.

4°. *Trouver les points d'intersection de la droite* K *avec la section conique non tracée.*

A la droite K correspond, comme ci-dessus, la droite $\alpha\delta$ qui coupe le cercle en deux points. Joignant ces points à V, l'intersection de ces droites et de celle de K donnera les deux points cherchés.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE DÉDUITS DU CALCUL DES SYMBOLES.

(voir BULLETIN, t. I^er, p. 83).

1. Les deux courbes données par les équations

$$F(x, y) = 0, \quad F(x + a, y + b) = 0$$

se coupent en des points qui sont sur une troisième courbe donnée par l'équation symbolique

$$e^{a D_x + b D_y} F(x, y) = 0.$$

Lorsque $F(x, y)$ est algébrique et de degré n, la troisième courbe est de degré $n - 1$.

2. Les deux surfaces données par les équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F(x + a, y + b, z + c) = 0$$

se coupent en une ligne qui est sur une troisième surface donnée par l'équation symbolique

$$e^{a D_x + b D_y + c D_z} F(x, y, z) = 0,$$

et cette surface est de degré inférieur d'une unité au degré des surfaces données.

3. $$F(x, y) = 0$$

étant l'équation d'une courbe plane, si elle tourne d'une quantité infiniment petite autour d'un axe passant par l'origine perpendiculairement à son plan, les points d'intersection des deux courbes sont sur la courbe donnée par l'équation symbolique

$$(x D_y - y) D_x . F(x, y) = 0$$

de même degré que les courbes données et passant par l'origine. Pour les coniques, c'est une hyperbole équilatère.

4. $$F(x, y, z) = 0,$$

étant l'équation d'une surface, si elle tourne infiniment peu autour d'un axe passant par l'origine et faisant avec les axes x, y, z supposés rectangulaires les angles l, m, n, les points d'intersection sont sur une troisième surface donnée par l'équation symbolique

$$\begin{bmatrix} \cos l (z D_y - y D_z) + \cos m (x D_z - z D_x) \\ + \cos n (y D_x - x D_z) \end{bmatrix} . F(x, y, z) = 0.$$

5. $$\begin{bmatrix} (y \cos n - z \cos m) D_x + (z \cos l - x \cos m) D_y \\ + (x \cos m - y \cos l) D_z \end{bmatrix} . u = 0,$$

où u est une fonction de x, y, z. Telle est l'équation différentielle d'une surface de révolution; cette équation exprime que la perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation et un rayon vecteur, fait un angle droit avec la normale à la surface.

6. Soit

$$U = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_1 + u_0 = 0$$

l'équation d'une courbe plane; u_p est une fonction homogène en x, y et de degré p. Les tangentes distantes de l'origine d'une quantité constante k, ont leurs points de contact sur une courbe de degré $2(n-1)$ et donnée par l'équation

$$k^2 [(D_x U)^2 + (D_y U)^2] \\ = (u_{n-1} + 2 u_{n-2} + 3 u_{n-3} + \ldots + n u_0)^2.$$

7. Soit

$$U = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_1 + u_0 = 0$$

l'équation d'une surface de degré n. Les plans tangents, distants de l'origine d'une quantité constante k, ont leurs points de contact sur une surface de degré $2(n-1)$, donnée par l'équation

$$k^2[(D_x U)^2 + (D_y U)^2 + (D_z U)^2]$$
$$= (u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \ldots + nu_0)^2.$$

8. α, β, γ étant les coordonnées d'un point, l'équation de la surface polaire relative à ce point est

$$\alpha D_x U + \beta D_y U + \gamma D_z U + (U) = 0,$$

où

$$(U) = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \ldots + nu_0.$$

Si le point (α, β, γ) est une surface de degré m donnée par l'équation

$$V = v_m + v_{m-1} + \ldots + v_0 = 0,$$

la surface enveloppe des surfaces polaires comporte les équations

$$D_x U . d\alpha + D_y U . d\beta + D_z U . d\gamma = 0,$$
$$D_\alpha V . d\alpha + D_\beta V . d\beta + D_\gamma V . d\gamma = 0,$$

d'où l'on tire les trois équations

$$D_\alpha V + \lambda D_x U = 0,$$
$$D_\beta V + \lambda D_y U = 0,$$
$$D_\gamma V + \lambda D_z U = 0.$$

Or on a

$$\alpha D^\alpha V + \beta D_\beta V + \gamma D_\gamma V = -(v_{m-1} + 2v_{m-2} + \ldots + mv_0) = (V),$$
$$\alpha D_x U + \beta D_y U + \gamma D_z U = -(u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + nu_0) = (U);$$

donc

$$\lambda = -\frac{(V)}{(U)}.$$

Pour avoir la surface enveloppe, il faut éliminer α, β, γ

entre les quatre équations

$$V = 0, \quad \frac{1}{(V)} D_\alpha V = \frac{1}{(U)} D_x U,$$

$$\frac{1}{V} D\ V = \frac{1}{(U)} D_y U, \quad \frac{1}{V} D_\gamma V = \frac{1}{(U)} D_z U,$$

élimination que généralement on n'est pas parvenu à effectuer; elle est possible dans quelques cas particuliers.

Soit

$$V = \frac{\alpha^m}{a^m} + \frac{\beta^m}{b^m} + \frac{\gamma^m}{c^m} - 1 = 0.$$

Les trois dernières équations deviennent

$$\frac{\alpha^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_x U = 0,$$

$$\frac{\beta^{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_y U = 0,$$

$$\frac{\gamma^{m-1}}{c^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_z U = 0.$$

Éliminant α, β, γ entre ces trois équations et la quatrième $V = 0$, on obtient

$$(a D_x U)^{\frac{m}{m-1}} + (b D_y U)^{\frac{m}{m-1}} + (c D_z U)^{\frac{m}{m-1}} = [-(U)]^{\frac{m}{m-1}}.$$

Lorsque $m = 2$, cette équation est de degré $2(n-1)$; si $m = n = 2$, l'équation est du second degré et de la forme

$$a^2 (D_x U)^2 + b^2 (D_y U)^2 + c^2 (D_z U)^2 = (u_1 + u_0)^2.$$

Si le pôle est sur une courbe centrale du second degré et que la polaire soit prise par rapport à une ligne du troisième degré, l'enveloppe de cette polaire est une courbe du quatrième degré donné par l'équation

$$a^2 (D_x U)^2 + b^2 (D_y U) = (u_2 + 2u_1 + u_0)^2.$$

Note. Ces théorèmes sont extraits du *Calculus of operations* du Rév. Carmichael (voir le *Bulletin*, t. I^{er}, p. 83).

NOTE SUR LA BASE DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS;

PAR M. LECLERC,
Conducteur des Ponts et Chaussées,
à Neufchâtel-en-Bray.

On trouve dans la Note IV de la *Géométrie* de Legendre la formule suivante :

$$(1)\qquad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \ldots}}}.$$

Je remplace d'abord x par $\frac{1}{x}$, ce qui me donne

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \cfrac{1}{x + \cfrac{x}{3x^2 + \cfrac{x^2}{5x^2 + \cfrac{x^2}{7x^2 + \ldots}}}},$$

ou

$$\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1} = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{3x + \cfrac{1}{5x + \ldots}}}.$$

On tire de cette équation la formule générale

$$(2)\qquad e^{\frac{2}{x}} = \frac{x + 1 + \cfrac{1}{3x + \cfrac{1}{5x + \ldots}}}{x - 1 + \cfrac{1}{3x + \cfrac{1}{5x + \ldots}}}.$$

En y faisant $x = 2$, on a donc

$$e = \cfrac{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}};$$

puis, successivement,

$$e = 2 + \frac{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \ldots}} - 2\left(1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}\right)}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}}$$

$$= 2 + \frac{1 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}}{1 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}};$$

et enfin

$$(3) \qquad e = 2 + \frac{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}.$$

Les réduites de même rang, dans les deux fractions continues qui entrent dans cette formule, ayant mêmes dénominateurs, il suffira, pour obtenir des valeurs e_1, e_2, e_3, etc., de plus en plus approchées du nombre e, de calculer les numérateurs de ces réduites. On trouve ainsi

$$e_1 = 2 + \frac{5}{7} = 2,71\ldots,$$

$$e_2 = 2 + \frac{51}{71} = 2,718\ldots,$$

$$e_3 = 2 + \frac{51.14+5}{71.14+7} = 2 + \frac{719}{1001} = 2,7182817\ldots$$

Remarque sur la Note précédente.

Si l'on prend la première valeur de e, on peut l'écrire ainsi :

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}};$$

en sorte que l'irrationnelle e se trouve développée en une fraction continue très-simple et très-rapidement convergente.

Il est facile ensuite de transformer en série la fraction continue (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 170), et l'on trouve

$$e = 1 + 2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1} - \frac{1}{1.7} + \frac{1}{7.71} - \frac{1}{71.1001} \\ + \frac{1}{1001.18089} - \ldots\end{array}\right\}.$$

E. C.

Note du Rédacteur. M. Leclerc indique la formule générale

$$a^{\frac{2}{x}} = 1 + \cfrac{2}{\left(\frac{x}{la}\right) - 1 + \cfrac{1}{3\left(\frac{x}{la}\right) + \cfrac{1}{5\left(\frac{x}{la}\right) + \ldots}}},$$

extraite de la *Science* du 4 et du 19 avril 1855, journal scientifique *quotidien*, le premier de ce genre et auquel les noms des collaborateurs promettent un grand succès, pourvu que ces noms soient autre chose que des noms.

CONSIDÉRATIONS SUR LES DROITES DANS L'ESPACE;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

1. Nous appellerons *distance* de deux droites leur plus courte distance. Lorsque deux droites se rencontrent, leur distance est nulle.

2. Étant données deux droites, la direction du plan parallèle à ces deux droites est donnée.

3. Une droite parallèle à un plan est également distante de toutes les droites menées dans le plan et qui ne sont pas parallèles à la droite.

4. On peut appliquer, et d'une seule manière seulement, sur deux droites, une troisième droite donnée de direction et non comprise dans un plan parallèle aux deux droites.

Ainsi, généralement parlant, on ne peut pas appliquer sur trois droites une droite donnée de direction. Les éléments d'un hyperboloïde à une nappe n'ont pas toutes les directions possibles.

5. PROBLÈME. *Trouver sur une droite un point tel, qu'en abaissant de ce point une perpendiculaire sur une seconde droite, cette perpendiculaire ait une longueur donnée.*

Solution. Autour de la seconde droite comme axe, imaginons un cylindre de révolution de rayon égal en longueur à la perpendiculaire; les deux points d'intersection de ce cylindre avec la premiere droite satisfont à la question.

6. Si d'un point a pris sur la droite A, on abaisse la perpendiculaire aa_1 sur la droite B, et qu'ensuite on prenne sur la droite B un point b tel, que la perpendiculaire bb_1 abaissée sur A soit égale à aa_1, la droite a_1b_1

est également inclinée sur les droites A et B. Quelle est l'enveloppe de toutes les droites également inclinées sur A et B?

7. Un calcul facile fait voir que le lieu d'un point également distant de deux droites données est un paraboloïde hyperbolique; donc le lieu du point également distant de trois droites est une ligne du quatrième ordre, intersection de deux hyperboloïdes; les trois paraboloïdes passent par la même courbe. Lorsque les droites données sont le même hyperboloïde de révolution, les trois paraboloïdes se coupent suivant l'axe de l'hyperboloïde.

SUR LE THÉORÈME DE M. WHEATSTONE

(voir page 121);

PAR M. CANTOR,
Professeur à Heidelberg.

Ce théorème a déjà été énoncé et démontré par M. Frégier (GERGONNE, *Annales de Math.*, t. IX, p. 211). En effet, n^a y est posé comme somme d'une progression arithmétique de n termes dont le premier est l'unité et dont la raison est $2 \cdot \dfrac{n^{a-1}-1}{n-1}$.

Il existe d'ailleurs un très-grand nombre de propositions trop peu connues sur les progressions. En voici une de Jacques Bernoulli :

« Les deux premiers termes d'une progression géomé-
» trique a, ae, ae^2, etc., étant positifs et égaux aux deux
» premiers termes d'une progression arithmétique a,
» $a+d$, $a+2d$, etc., chaque terme de cette dernière
» progression sera plus petit que le terme de même quan-
» tième de la progression géométrique. » (*De Seriebus infinitis*, propositio IV.)

$$a+d=ae,\quad d=a(e-1),\quad a+nd=a[1+n(e-1)],$$
$$ae^n-a-nd=a(e-1)[(e^{n-1}+e^{n-2}+\ldots+1)-n].$$

Le membre à droite est toujours positif, soit que l'on prenne e supérieur ou inférieur à l'unité; donc on a toujours

$$a+nd<ae$$

THÉORIE DES PARALLÈLES.

M. Cabot, conseiller général, nous a adressé une démonstration de cette théorie, dont nous extrayons les réflexions suivantes.

« L'évidence est cette propriété qu'ont certaines vérités d'être saisies et admises par le sentiment, avant qu'aucune opération de l'entendement ait pu les faire admettre par l'esprit. C'est pour cela, sans doute, qu'il est difficile, quelquefois même à peu près impossible, de démontrer ces vérités; car, quelque simple que soit le raisonnement que l'on produit, il ne sera jamais aussi satisfaisant et aussi clair, pour former notre conviction, que le sentiment même de ces vérités. Il est donc inutile de chercher à démontrer l'évidence, puisque le sentiment supplée, dans ce cas, avec avantage à la démonstration. Je dis en outre qu'il est nuisible de l'entreprendre, parce qu'en donnant une conviction moins facile à établir, cela fait naître des difficultés plus ou moins considérables. Ainsi, je crois que Legendre a eu tort de démontrer que tous les angles droits sont égaux entre eux, car cette démonstration n'était pas nécessaire. Ce fait de l'égalité de tous les angles droits, se présentant à chaque instant dans les démonstrations de la géométrie, est nécessairement assez important pour que les prédécesseurs de Legendre eussent cherché sa démonstration, s'ils avaient pu croire que cette vérité pût être raisonnablement contestée. »

Ces réflexions très-justes s'accordent avec celles de Pascal sur le même sujet. La démonstration de Legendre, non-seulement n'est pas nécessaire (c'est le 10^e axiome d'Euclide), mais manque même de rigueur.

Pour démontrer les parallèles, M. Cabot admet que lorsqu'une droite a deux de ses points A et B inégalement éloignés d'une autre droite, la droite AB, suffisamment prolongée, rencontre la seconde droite du côté où est le moindre éloignement, et cela d'après le *sentiment* qu'on a de la *rectitude;* autant vaudrait admettre le 11^e axiome d'Euclide. D'ailleurs il vaut mieux s'en tenir à cet axiome de M. Gergonne : Par le même point ne passe qu'une seule parallèle à une droite. C'est ce qu'il y a de plus simple en fait de *sentiments*.

THÉORÈME DE M. STEINER SUR UN CERCLE TANGENT A UNE COURBE

(voir t. XII, p. 119);

PAR M. FAURE,
Officier d'artillerie.

Si un cercle doit passer par deux points donnés et toucher une courbe de degré n, le nombre des solutions est en général $n(n+1)$.

Prenons pour origine le milieu de la distance des points donnés, pour axe des x la droite qui joint les points. L'équation du cercle sera de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\beta y = \alpha^2; \tag{1}$$

β ordonnée du centre, 2α distance des points fixes.

Appelant x, y les coordonnées du point de contact de ce cercle avec la courbe $f(x, y) = 0$ de degré n, la normale en ce point à la courbe sera

$$Y - y = \frac{f'_y}{f'_x}(X - x),$$

X, Y étant les coordonnées courantes. Cette normale doit passer par le centre de notre cercle; donc

$$\beta f'_x - x f'_y - y f'_x = 0.$$

J'élimine β entre cette équation et l'équation (1), il en résulte l'équation

$$(x^2 + y^2 - a^2) f'_x + 2y(x f'_y - y f'_x) = 0,$$

laquelle combinée avec l'équation

$$f(x, y) = 0$$

fait connaître les coordonnées des points de contact. Or la première est de degré $n+1$, la seconde de degré n, donc le nombre de leurs points d'intersection est $n(n+1)$ en général.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES PLANES.

D'APRÈS M. STEINER.

1. P_1, P_2 étant deux points *quelconques* situés dans le plan d'une courbe de degré n, les pieds des normales abaissées de ces deux points sur la courbe sont distribués respectivement sur deux courbes, chacune de degré n, ayant en commun $n^2 - n + 1$ points *fixes*, savoir les $(n-1)^2$ pôles de la droite située à l'infini, pôles pris relativement à la courbe donnée, et n points situés à l'infini.

2. Le lieu des sommets de tous les angles droits circonscrits à une courbe de la classe n est une courbe de degré n^2 (*).

(*) Dans les coniques, c'est un cercle double.

3. La développée d'une courbe de degré n est : 1° de degré $3n(n-1)$; 2° de la classe n^2; 3° parmi ses $3n(n-1)$ asymptotes, il y en a $3n$ situées à l'infini; 4° elle a $n(2n-3)$ points de rebroussement, $2n(3n-5)$ sommets (*), $\frac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-3)$ tangentes doubles parmi lesquelles $\frac{1}{2}n(n-1)$ sont à l'infini.

NOTE SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES

(voir page 115);

PAR M. COUPY,
Professeur au Prytanée de la Flèche.

C'est par erreur que l'on a inscrit le nombre non premier 265 vis-à-vis de 13 (p. 115). A cette occasion, nous rappelons un travail très-remarquable, très-complet de M. Thibault sur le même sujet (*Nouvelles Annales*, t. II, p. 80); il s'y est glissé une légère erreur. $\frac{1}{71}$ donne 35 chiffres à la période et non 71, ainsi qu'on le dit p. 87 où, ligne 5 en descendant, il faut lire *neuf* au lieu de *dix*.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

D'une ligne plane du troisième degré passant par neuf points donnés;

D'APRÈS M. CHASLES.

(*Comptes rendus*, 30 mai 1853, page 943.)

1. *Lemme*. Étant donnés cinq points d'une conique et une droite dans le plan de la conique, on peut construire

(*) Le sommet est le point où le cercle de courbure a quatre points en commun avec la courbe.

géométriquement les intersections de la droite et de la conique sans décrire la conique.

2. *Lemme.* Étant donnés quatre points dans un plan et le rapport anharmonique d'un faisceau passant par ces points, on peut construire *géométriquement* les sommets des faisceaux homographiques passant par ces points, sommets situés sur une conique passant par les quatre points donnés.

3. *Lemme.* Étant données deux coniques dans le même plan, chacune par cinq points, si, de plus, trois de ces points sont communs aux deux coniques, on peut construire *géométriquement* le quatrième point d'intersection des deux coniques sans décrire ces coniques, et ce point est unique et toujours réel.

4. Problème. *Étant donnés neuf points d'une courbe plane du troisième degré, trouver deux faisceaux homographiques* F^1 *et* F^2, *dont les intersections donnent la ligne du troisième degré passant par les neuf points* (t. XII, p. 360).

Solution. Soient a_1, a_2, a_3,..., a_9 les neuf points donnés et A, B, C les trois coniques déterminées,

A	par les points	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,
B	—	a_1, a_2, a_3, a_4, a_6,
C	—	a_1, a_2, a_3, a_4, a_7,

et une conique indéterminée D passant par les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4, Les quatre coniques ayant quatre points en commun appartiennent à un faisceau F^2 (t. XII, p. 358 et 359).

Les quatre polaires d'un point quelconque pris dans le plan par rapport aux quatre coniques sont un faisceau F^1 homographique au faisceau F^2, et dont le rapport anharmonique est constant, quelque part qu'on prenne le pôle. Si l'on cherche un point P fixe tel, que les quatre rayons

Pa_5, Pa_6, Pa_7, PK forment un faisceau Q′ homographique au faisceau des polaires, ce faisceau Q′ sera aussi homographique au faisceau F^2.

Le quatrième rayon PK coupe la conique variable D correspondante en deux points; la suite de ces points est sur une courbe du troisième degré passant par les sept points $a_1, a_2, \ldots, a_7$ et par le point P (t. XII, p. 360). Le point P est arbitraire, mais si l'on prend le point P sur la conique M passant par les points a_5, a_6, a_7, a_8 et tel, que le faisceau Pa_5, Pa_6, Pa_7, Pa_8 soit homographique au faisceau des quatre polaires, il est évident que la courbe du troisième degré passera alors par les huit points $a_1, a_2, \ldots, a_8$ et encore par le point P. Construisons de même une conique N passant par les points a_5, a_6, a_7, a_9 et telle, que le faisceau Pa_5, Pa_6, Pa_7, Pa_9 soit homographique au faisceau des quatre polaires; les coniques M et N ont en commun les points a_5, a_6, a_7 et encore un quatrième point (lemme 3); prenant ce quatrième point pour P, la courbe du troisième degré, donnée par l'intersection du faisceau F^2 et F^1 ayant pour sommet P, passera par les neuf points a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_9$; ce qu'il fallait faire.

SOLUTION DE LA QUESTION 301

(voir page 138);

PAR M. WOEPCKE.

Soient huit points quelconques arrangés en deux groupes a, b, c, d et e, f, g, h. Désignons par C_e, C_f, C_g, C_h des coniques ayant en commun les quatre points a, b, c, d et passant respectivement par e, f, g, h. On construit facilement la conique Σ, lieu d'un point p tel, que le rapport anharmonique des rayons pe, pf, pg, ph

soit égal à celui des coniques C_e, C_f, C_g, C_h. Prenons sur la circonférence de Σ un point p_1 et construisons, d'après le mode de description dû à M. Chasles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 30 mai 1853), une courbe du troisième degré passant par les huit points a, b, c, d, e, f, g, h, en prenant p_1 pour centre du faisceau de droites. Cette courbe passe par p_1 et rencontre la conique Σ en e, f, g, h, p_1 et en un sixième point n. Prenons ensuite pour centre du faisceau de droites un second point p_2 de la circonférence de Σ, et construisons pareillement une courbe du troisième degré passant par a, b, c, d, e, f, g, h. Je dis que cette courbe passe aussi par n. En effet, les rayons p_2e, p_2f, p_2g, p_2h, p_2n correspondent anharmoniquement aux rayons p_1e, p_1f, p_1g, p_1h, p_1n, étant issus de deux points de la circonférence d'une même conique, et, en vertu de la construction de la première courbe du troisième degré, p_1e, p_1f, p_1g, p_1h, p_1n correspondent anharmoniquement aux coniques C_e, C_f, C_g, C_h, C_n. Par suite, le rayon p_2n et la conique C_n, qui l'un et l'autre passent par n, se correspondent anharmoniquement; donc n est aussi un point de la seconde courbe du troisième degré, c'est-à-dire n est le neuvième point en lequel se coupent toutes les courbes du troisième degré qu'on peut faire passer par les huit points a, b, c, d, e, f, g, h. Mais n est situé sur la conique Σ, donc le rapport anharmonique des quatre rayons ne, nf, ng, nh est égal à celui des quatre coniques C_e, C_f, C_g, C_h. C. Q. F. D.

La solution de la question 302 est une conséquence immédiate de la précédente.

INTERSECTION DE CONIQUES;

PAR M. WOEPCKE.

Étant donnés cinq points a, b, c, p, q *d'une conique et cinq points* a, b, c, r, s *d'une seconde conique, ces coniques ayant en commun les trois points* a, b, c; *trouver le quatrième point d'intersection sans décrire les coniques.*

Solution. On mène une droite quelconque L coupant la première conique en m et m_1 et la seconde conique en n et n_1, points qu'on sait construire sans que les coniques soient décrites, et soit o l'intersection des deux droites L et ab; soit o_1 le sixième point de l'involution m, m_1, n, n_1, o, o_1; l'intersection de la droite co_1 avec l'une ou l'autre conique donne le quatrième point cherché.

SUR LES CONIQUES POLAIRES ET LES SECTIONS CYCLIQUES;

D'APRÈS M. R. RUBINI,
Professeur à Naples.

1. Soient les trois équations

$$r^2 = \frac{4a}{\alpha^2}(\alpha u - u^2), \quad r^2 = \frac{4a}{\alpha^2}(\alpha u - u^2), \quad r^2 = 2mu.$$

r est un rayon vecteur et u l'arc correspondant; a, α, m des constantes données. Les trois courbes passent évidemment par le pôle. La première courbe (ellipse polaire) est une courbe fermée; la seconde courbe (hyperbole polaire) a deux branches infinies en hélice; la troisième courbe (parabole polaire) a une branche infinie en hélice. Les constructions offrent un exercice et des lieux géométriques instructifs.

La quadrature se ramène à des arcs de cercle, et la rectification, comme on s'y attend, à des fonctions elliptiques. La discussion des constantes présente quelques difficultés que le savant calculateur surmonte avec habileté.

2. Sur une section cyclique faite dans une surface du second degré prenons un point fixe O et un point quelconque M sur la surface; la projection de OM sur le plan de la section rencontre le cercle en un second point O′. Soit m le point de rencontre des trois hauteurs du triangle MOO′; appelons M et m points *correspondants*. Soient trois autres points N, P, Q situés aussi sur la surface, et n, p, q les points correspondants; on a ce théorème :

Le volume du tétraèdre MNPQ, *divisé par le volume du tétraèdre* mnpq, *est constant quels que soient les points* M, N, P, Q.

3. Si les points M, N, P, Q restent fixes et que le plan cyclique se meuve parallèlement à lui-même, le volume du tétraèdre *mnpq* reste constant.

4. Par le point O menons dans le plan cyclique deux droites OO′, OO″, perpendiculaires entre elles, et élevons en O une perpendiculaire OR au plan cyclique.

Si les axes de la section faite par le plan ROO′ font des angles de 45 degrés avec OO′, et de même les axes de la section faite par le plan ROO″, avec la droite OO″, alors le tétraèdre MNPQ est équivalent au tétraèdre *mnpq*.

5. Dans un paraboloïde de révolution les quatre points m, n, p, q sont dans un plan normal à l'axe; plan distant du plan cyclique considéré d'une longueur égale au paramètre de la parabole génératrice. Ces théorèmes, ainsi que les suivants, sont démontrés analytiquement.

6. L'axe d'un cône du second degré est l'intersection

des deux sections principales, majeure et mineure, qui passent par le sommet. Par un point *quelconque* de cet axe, menons un plan A variable, mais toujours perpendiculaire à cet axe; ce plan coupe le cône suivant une ellipse, et les deux plans *cycliques* qui passent par le sommet suivant deux droites. Les lieux géométriques des pôles de ces droites, pris par rapport à l'ellipse, sont deux droites passant par le sommet. Désignons ces droites par le nom de *rayons polaires* des plans cycliques.

Le même plan A coupe les deux droites focales en deux points; les lieux géométriques des polaires de ces points, pris par rapport à l'ellipse considérée, sont deux plans passant par les sommets; nous les désignons par *plans polaires* des lignes focales. Ce sont les plans directeurs de MM. Briot et Bouquet (*Leçons nouvelles de Géométrie analytique*, page 416). Ces définitions posées, on a ces théorèmes.

Théorème. *Dans tout cône du second degré dont la section principale mineure est égale à un angle droit, le produit du cosinus des angles que forme une génératrice avec les deux rayons polaires des plans cycliques est égal à la moitié du carré de la cotangente de la moitié de l'angle de la section principale majeure. La somme des angles que fait un plan tangent quelconque avec les deux rayons polaires est égale à un angle droit; la tangente de l'angle que fait un rayon polaire et un plan tangent, multipliée par le carré du cosinus de l'angle que fait le même rayon avec la génératrice de contact, donne un produit constant.*

Observation. On entend par angle d'une section l'angle que font les deux génératrices situées dans cette section.

7. Théorème. *Dans tout cône du second degré les distances d'un point du cône à une focale et au plan polaire de cette focale sont dans un rapport constant.*

8. Pour démontrer le théorème du § 1, l'auteur part de l'équation

$$(1)\quad x(a-x)+y(b-y)+Az^2+Byz+Cxz+Dz=0,$$

axes rectangulaires; les coordonnées du point M étant x', y', z', celles du point m sont x', y', $\frac{x'(a-x')+y'(b-y')}{z'}=Z'$; ce qui donne, vu l'équation (1),

$$Az'+By'+Cx'+D=-Z';$$

et, par la méthode des déterminants, on déduit facilement les théorèmes énoncés.

Les théorèmes sur le cône s'établissent à l'aide de l'équation suivante du cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0,$$

axes rectangulaires; a est la tangente du demi-angle de la section majeure et b la tangente du demi-angle de la section mineure. Alors

Équations des focales .... $y=\pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+1}}\,z$,

— des plans cycliques. $y=\pm b\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-b^2}}\,z$,

— de l'ellipse........ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2$,

— des rayons polaires. $y=\pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+1}}\,z$,

— des plans polaires.. $x=\pm a^2\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2-b^2}}\,z$.

Ces élégants résultats sont l'objet de deux Mémoires insérés, le premier en janvier 1853 et le second en juin 1854, dans les *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, publiées à Rome par le célèbre géomètre Barnaba Tortollini, recueil qui entretient le feu sacré dans la patrie de Galilée. C'est l'Italie.

SOLUTION DE LA QUESTION 293 (J.-A. SERRET)

(voir t. XIII, p. 314);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Je m'appuierai sur la proposition suivante :

Lemme. Soient n nombres entiers $a, b, \ldots, k$; m leur somme; p un nombre premier, et faisons

$$M = \frac{1.2\ldots m}{(1.2\ldots a)(1.2\ldots b)\ldots(1.2\ldots k)};$$

je dis que si tous les nombres $a, b, \ldots, k$ sont divisibles par $p-1$ et forment une somme $m < p^n - 1$, M sera divisible par p.

Pour le démontrer, j'observe : 1° que l'exposant de p, dans tout produit continuel $1.2\ldots N$, est la somme des quotients entiers q_1, q_2, q_3, etc., obtenus en divisant successivement N par p, p^2, p^3, etc., ou, ce qui revient au même, en divisant N, puis q_1, puis q_2, etc., par p (LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. I, p. 10); 2° que si plusieurs nombres étant divisés par p donnent les quotients q, q', q'', etc., et les restes r, r', r'', etc., leur somme, divisée également par p, donnera pour quotient $q+q'+q''+\ldots$ et pour reste $r+r'+r''+\ldots$ lorsqu'on aura

$$r+r'+r''+\ldots < p,$$

et, dans le cas contraire, donnera un quotient supérieur à $q+q'+q''+\ldots$. Il s'ensuit que pour obtenir une valeur de M non divisible par p, p devant alors monter à la même puissance dans le numérateur et dans le dénominateur de M, on aura à considérer les équations

$$\begin{aligned}
m &= \mu_0 p + m_0, & \mu_0 &= \mu_1 p + m_1, & \mu_1 &= \mu_2 p + m_2, \ldots,\\
a &= \alpha_0 p + a_0, & \alpha_0 &= \alpha_1 p + a_1, \ldots,\\
b &= \beta_0 p + b_0, & \beta_0 &= \beta_1 p + b_1, \ldots,\\
k &= \chi_0 p + k_0, & \chi_0 &= \chi_1 p + k_1, \ldots,
\end{aligned}$$

formées avec les quotients et les restes positifs ou nuls qu'on trouve en divisant par p, et il faudra supposer

$$\mu_0 = \alpha_0 + \beta_0 + \ldots + \chi_0, \quad m_0 = a_0 + b_0 + \ldots + k_0,$$

puis

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \chi_1, & m_1 &= a_1 + b_1 + \ldots + k_1,\\
\mu_2 &= \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \chi_2, & m_2 &= a_2 + b_2 + \ldots + k_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

d'où

$$m_0 + m_1 + m_2 + \ldots = \sum a_i + \sum b_i + \ldots + \sum k_i.$$

Mais on aura en même temps

$$\begin{aligned}
m &= m_0 + m_1 p + m_2 p^2 + \ldots,\\
a &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

D'ailleurs, si a est divisible par $p - 1$, il en sera de même de la somme $\sum a_i$, puisqu'on trouve

$$\begin{aligned}
a - a_1(p-1) - a_2(p^2-1) - a_3(p^3-1) - \ldots\\
= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots;
\end{aligned}$$

cette remarque s'applique aussi à $\sum b_i, \ldots, \sum k_i$. Donc, en vertu de l'équation précédente, la somme

$$m_0 + m_1 + m_2 + \ldots$$

ne sera pas inférieure à $n(p-1)$. Or les restes m_i sont tous inférieurs à p; donc le nombre de ceux qui ne sont pas nuls sera au moins égal à n : d'où l'on conclut que la valeur de m doit contenir des puissances de p supérieures à p^{n-2}. Si elle contient seulement p^{n-1}, les coefficients m_i seront tous égaux à $p-1$, sans quoi leur somme serait $< n(p-1)$, et l'on aura

$$m=(p-1)(1+p+p^2+\ldots+p^{n-1})=p^n-1;$$

si la valeur de m contient p^n ou des puissances supérieures, m sera plus grand que p^n-1. Donc enfin, si M n'est pas divisible par p, le nombre m ne sera pas inférieur à p^n-1. C. Q. F. D.

Remarque. Si m était égal à p^n-1, on pourrait prendre, par exemple,

$$a=p-1,\quad b=p(p-1),\quad c=p^2(p-1),\ldots,$$
$$k=p^{n-1}(p-1),$$

et alors M ne serait pas divisible par p (*).

Cela posé, soit un polynôme

$$X=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1},$$

qui acquerra p^n valeurs distinctes en donnant à chaque

(*) En représentant M par $(a, b,\ldots, k)$, on a identiquement

$$a(a,b,\ldots k)=m(a-1,b,\ldots,k),$$

et, par suite, aM est divisible par m. Il en sera de même de bM, cM,..., kM, en sorte que si ω désigne le plus grand commun diviseur des nombres $a, b,\ldots k$, alors m divisera le produit ωM. Ce théorème a été donné par M. Cauchy (*Comptes rendus*, t. XII, p. 707). On en déduit que si m est une puissance du nombre premier p, toutes les valeurs de M, c'est-à-dire tous les coefficients du développement de la $m^{ième}$ puissance d'un polynôme, autres que 1, sont multiples de p: d'où résulte immédiatement un *lemme* employé souvent dans la théorie des *congruences irréductibles*, savoir que, $f(x)$ étant un polynôme à coefficients entiers, on a

$$[f(x)]^{p^n}\equiv f\left(x^{p^n}\right)\ (\text{mod. } p).$$

(Serret, *Algèbre supérieure*, 2e édition, p. 357.)

coefficient a_i toutes les valeurs o, 1, 2, 3,..., $p-1$. Élevons ce polynôme à la puissance m et considérons un terme quelconque du résultat ordonné suivant les puissances de x. Si tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n'entrent pas dans ce terme, s'il y manque par exemple a_1, alors, en ajoutant les p valeurs de X^m qui correspondent aux p valeurs de a_1 et à une combinaison déterminée des autres coefficients, on trouvera p fois ce même terme. Si dans ce terme l'un, a_i, des coefficients est élevé à un exposant r, qui ne soit pas divisible par $p-1$, dans la somme des mêmes valeurs de X^m ce terme acquerra pour facteur la somme $0^r + 1^r + 2^r + \ldots + (p-1)^r$, qui est, comme on sait, divisible par p. Enfin, si le terme qu'on considère renferme tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ élevés à des exposants divisibles par $p-1$, il sera affecté d'un coefficient numérique M, qui, en vertu du lemme, sera divisible par p tant qu'on aura $m < p^n - 1$. On conclut de là que, si m est plus petit que $p^n - 1$, la somme de toutes les valeurs de X^m ne renferme que des termes ayant p pour facteur. Ainsi, dans ce cas, $\sum X^m$ égale un multiple de p.

On voit immédiatement pour $n = 1$ et pour $n = 2$ que cette égalité n'a plus lieu lorsque $m = p^n - 1$, et, pour s'en assurer, en général, on peut avoir recours à la théorie des *congruences irréductibles* exposées dans la nouvelle édition de l'*Algèbre supérieure*, 25e leçon. En effet, on démontre qu'il existe toujours une fonction entière $F(x)$ du degré n à coefficients entiers, pour laquelle on ne saurait avoir *identiquement*

$$\varphi(x)\psi(x) = F(x) + p\chi(x),$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ désignant trois polynômes à coefficients entiers; et qu'alors, pour chaque valeur de x, zéro excepté, on peut poser

$$f(x)F(x) = X^m - 1 + p\chi(x);$$

f et χ désignant des polynômes à coefficients entiers, m étant égal à $p^n - 1$, et en supposant que le coefficient de x^n dans $F(x)$ soit réduit à l'unité. Il s'ensuit que, si l'on prend pour x une racine de l'équation $F(x) = 0$, on aura, pour ces $p^n - 1$ valeurs de X, la congruence

$$X^m \equiv 1 \pmod{p},$$

et, par conséquent,

$$\sum X^m \equiv p^n - 1 \equiv -1 \pmod{p},$$

et qu'ainsi $\sum M^m$ ne sera pas multiple de p.

Si l'on suppose que x représente un nombre entier quelconque, on verra aisément que $\sum X^m$ sera toujours multiple de p, excepté dans le cas de $n = 1$ et $m = p - 1$.

SOLUTION DE LA QUESTION 239

(voir tome X, page 357);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

En remplaçant la variable y par la nouvelle variable t, au moyen de la supposition

$$t^2 = \frac{(x^2 - a^2)y^2}{x^2 - y^2},$$

il vient

$$e^{-a^2}\int_0^a e^{\frac{-x^4 + a^2x^2}{x^2 - y^2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$= e^{-x^2} . x\sqrt{x^2 - a^2}\int_0^a \frac{e^{-t^2}dt}{(x^2 - a^2 + t^2)\sqrt{a^2 - t^2}},$$

et cette expression fait coïncider la formule proposée avec une autre que M. W. Roberts a obtenue en transformant une intégrale double par la méthode des coordonnées elliptiques (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVII, p. 120).

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. BRIOSCHI

(voir t. XIII, p. 352, et t. XIV, p. 96);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Soit l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

et nommons S_r la somme des $r^{\text{ièmes}}$ puissances de ses racines. Les formules connues de Newton montrent que S_r est une fonction entière des coefficients a_i, et que la puissance a_1^r s'y trouve multipliée par $(-1)^r$, car on trouve

$$S_1 = -a_1, \quad S_2 = a_1^2 - 2a_2, \quad S_3 = -a_1^3 + \ldots,$$

et l'on reconnaît sans peine la généralité de cette loi. Mais si l'on fait

$$x_0 = \frac{1}{S_r}, \quad x_1 = \frac{S_1}{S_r}, \quad x_2 = \frac{S_2}{S_r}, \ldots,$$

on transforme les formules de Newton dans les suivantes :

$$\begin{gathered}
a_1 x_0 + x_1 = 0, \\
2a_2 x_0 + a_1 x_1 + x_2 = 0, \\
3a_3 x_0 + a_2 x_1 + a_1 x_2 + x_3 = 0, \ldots \\
(r-1)a_{r-1} x_0 + a_{r-2} x_1 + a_{r-3} x_2 + \ldots + x_{r-1} = 0, \\
r a_r x_0 + a_{r-1} x_1 + a_{r-2} x_2 + \ldots + a_1 x_{r-1} = -1,
\end{gathered}$$

où a_i est censé égal à zéro lorsque $i > n$. On voit donc que S_r sera égal, abstraction faite du signe, au déterminant Δ_r, dénominateur des valeurs des r inconnues x_0, $x_1, \ldots, x_{r-1}$ dans ces r équations, et comme, suivant une convention reçue, le terme a^r sera positif dans le déterminant Δ_r, on conclut de là

$$S_r = (-1)^r \Delta_r.$$

Remarque. M. Cauchy a démontré d'une manière fort simple dans les *Comptes rendus*, t. XII, p. 701, la formule de Waring qui donne les sommes S_r en fonction des coefficients a_i et celle qui, réciproquement, exprime ces coefficients en fonction des sommes S_r. Lagrange déduit l'expression de S_r d'une série dans laquelle on ne doit retenir que les puissances négatives de u, l'équation proposée étant mise sous la forme

$$x = u + f(x).$$

On peut demander ce qu'il faut substituer au théorème de Lagrange lorsqu'on suppose le paramètre $u = 0$ et l'équation réduite à

$$x = f(x);$$

on trouvera aisément qu'alors, en laissant u indéterminé dans la série, il faut retenir seulement les termes indépendants de u.

Je profite aussi de cette occasion pour renouveler une observation que j'ai déjà faite. Le théorème sur la réduction des fonctions rationnelles *non entières* d'une ou de plusieurs racines à des fonctions entières des mêmes racines a été démontré par M. Gauss dans un Mémoire de 1814 qui fait partie du tome III des *Commentationes Societatis Gottengensis recentiores* (voyez les *Mémoires de Mathématiques*, page 53, n° 11. Le Mémoire de M. Gauss est intitulé : *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*). Il est vrai qu'on n'y parle que des fonctions d'une seule racine, mais on sait que les autres cas se réduisent à celui-ci. C'est pourquoi il me semble que le théorème en question n'est pas dû à Wantzel.

SUR LA QUESTION 81

(voir t. XIII, p. 132);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

L'exemple des paraboles et hyperboles cité dans la note de la page 135 montre que la spirale logarithmique n'est pas la seule courbe qui puisse être égale à sa polaire. Ayant obtenu

$$\frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} = \frac{F'(\alpha - \omega)}{F(\alpha - \omega)},$$

on a conclu que, lorsque les fonctions f et F sont identiques, le rapport $\dfrac{f'(\varphi)}{f(\varphi)}$ est constant, et cette conclusion serait juste si l'angle α était arbitraire ou si les angles φ et ω étaient indépendants ; mais ces conditions ne sont rien moins que nécessaires. Ainsi, pour la parabole

$$\rho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi},$$

on trouvera

$$\cot\varphi = -2\tang\omega,$$

équation qui lie entre eux les angles φ et ω, et, de plus,

$$R = 4r^2 \frac{\sin(2\pi - \omega)}{\cos^2(2\pi - \omega)};$$

donc, en prenant

$$r = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 2\pi,$$

les fonctions f et F seront identiques, mais le rapport

$$\frac{\rho'}{\rho} = \cot\varphi + 2\operatorname{tang}\varphi$$

ne sera pas constant. Cela étant, la question 81 est encore à résoudre, car il ne suffit plus de remarquer que la courbe $\rho = \operatorname{tang}\varphi$ n'est pas une spirale logarithmique, pour en déduire qu'elle est différente de sa polaire.

Je chercherai la polaire de cette courbe par rapport à une conique quelconque

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0.$$

L'équation de la polaire d'un point (x_1, y_1) sera

$$axx_1 + byy_1 + c(xy_1 + x_1y) + d(x + x_1) + e(y + y_1) + f = 0,$$

et, en posant

$$t = -\frac{ax + cy + d}{dx + ey + f}, \quad u = -\frac{by + cx + e}{dx + ey + f},$$

on la mettra sous la forme

$$tx_1 + uy_1 = 1.$$

Soient

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad y_1 = \rho\sin\varphi,$$

il viendra

$$\rho(t\cos\varphi + u\sin\varphi) = 1$$

Si donc le point (x_1, y_1) est pris sur la courbe proposée, cette équation, jointe à $\rho = \operatorname{tang}\varphi$ et à leurs dérivées relatives à ρ et φ, donnera l'enveloppe des polaires, c'est-à-dire la courbe polaire demandée. On trouvera

$$\frac{d\rho}{d\varphi}(t\cos\varphi + u\sin\varphi) = \rho(t\sin\varphi - u\cos\varphi), \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = 1 + \rho^2,$$

et, par suite,

$$(1 + \rho^2)(t + u\rho) = \rho(t\rho - u),$$

ou

$$t + 2u\rho + u\rho^3 = 0;$$

d'ailleurs

$$\rho(t + u\rho) = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \rho^2};$$

ainsi il s'agira d'éliminer ρ entre les deux dernières équations. On a

$$t + 2u\rho = -u\rho^3, \quad u\rho(1 + \rho^2) = -(t + u\rho),$$
$$\rho^2(t + u\rho)^2 = 1 + \rho^2,$$

et, en multipliant membre à membre,

$$(t + u\rho)(t + 2u\rho) = 1,$$

d'où

$$2u^2\rho^2 = 1 - t^2 - 3tu\rho,$$

et successivement

$$4u^3\rho^3 = u\rho(7t^2 + 2) - 3t(1 - t^2) = -4u^2(t + 2u\rho).$$

Résolvant cette équation par rapport à ρ, on formera les valeurs de $t + u\rho$ et $t + 2u\rho$, qu'on substituera dans

$$(t + u\rho)(t + 2u\rho) = 1,$$

et il viendra

$$t^2(t^2 + 8)(4u^2 + 4t^2 + 5) = (8u^2 + 7t^2 + 2)^2;$$

enfin on remettra dans celle-ci les expressions de t et u, ce qui donnera une équation du sixième degré représentant la courbe cherchée. Or la courbe $\rho = \tang\varphi$ ne monte qu'au quatrième degré; on trouve, en effet,

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2}, \quad \text{ou} \quad x_1^4 = y_1^2(1 - x_1^2).$$

Voyons si l'équation de la polaire admet un diviseur rationnel du quatrième degré.

On peut représenter les expressions de t et u par

$$t = \frac{z_1}{z}, \quad u = \frac{z_2}{z},$$

où z, z_1, z_2 désignent trois fonctions linéaires de x et y (p. 249).

En faisant

$$T = t^2(t^2+8)(4u^2+4t^2+5) - (8u^2+7t^2+2)^2,$$
$$X = z_1^2(z_1^2+8z^2)(4z_2^2+4z_1^2+5z^2) - (8z_2^2+7z_1^2+2z^2)^2z^2,$$

on aura

$$T = z^{-6}X,$$

et $X = 0$ sera l'équation de la polaire. Si donc X a un diviseur rationnel de X′ du quatrième degré, on fera

$$X = X'X'',$$

et l'on aura

$$T = z^{-6}X'X''.$$

Mais il est facile de s'assurer que les expressions de t et u donnent

$$x = \frac{v_1}{v}, \quad y = \frac{v_2}{v},$$

où v, v_1, v_2 désignent trois fonctions linéaires de t et u, et il s'ensuit

$$X' = v^{-4}T', \quad X'' = v^{-2}T'',$$

T′ et T″ étant deux fonctions entières de t et u, la première du quatrième et la seconde du deuxième degré; on aura donc

$$T = (vz)^{-6}T'T'',$$

où vz sera égal à

$$ae^2 + bd^2 - 2cde - f(ab - c^2),$$

comme on peut le vérifier, et T admettra un diviseur rationnel T″ du deuxième degré. Ce diviseur ne sera pas indépendant de t, puisque dans T le coefficient de t^6 est 4, ni de u puisque le coefficient de u^4 est -64. Soit

$$T'' = kt^2 + Pt + Q,$$

et remarquons que si P n'est pas nul, T admettra aussi pour diviseur $kt^2 - Pt + Q$, car T ne change pas lorsqu'on change le signe de t; par conséquent, T aura pour diviseur le produit

$$(kt^2 + Pt + Q)(kt^2 - Pt + Q) = (kt^2 + Q)^2 - P^2t^2,$$

puisque ces deux facteurs ne peuvent pas avoir de diviseur commun, leur différence étant $2Pt$ qui n'a pas de diviseur commun avec T. Or si la fonction

$$(kt^2 + Q)^2 - P^2t^2$$

ne se réduit point d'elle-même au deuxième degré, en divisant T par cette fonction, on trouvera un quotient du deuxième degré et de la forme $kt^2 + Q$, qui sera aussi un diviseur de T. On peut donc supposer

$$P = 0 \quad \text{et} \quad T'' = kt^2 + Q,$$

et il faudra que l'équation $T = 0$ devienne identique en faisant

$$t^2 = -\frac{Q}{k} = q,$$

où q sera une fonction de u ne dépassant pas le deuxième degré; on trouvera, par cette substitution,

$$4\frac{(1+4u^2)^2}{q} = (q+8)(4u^2+4q+5) - 28(1+4u^2) - 49q,$$

et, par suite, q étant un diviseur de $(1+4u^2)^2$ ne pourra être que de la forme $k(1+4u^2)$; mais cette valeur ne rendra pas l'équation identique (*). Donc l'équation de

(*) Les théorèmes sur la divisibilité des polynômes sont démontrés, d'après M. Lefébure de Fourcy, dans l'*Algèbre* de MM. Choquet et Meyer. On peut suivre, pour le même objet, la marche que j'ai indiquée pour des théorèmes d'arithmétique (t. XIII, p. 426), et qui est applicable aussi pour démontrer les propositions fondamentales des *congruences irréductibles* (*Algèbre supérieure*, p. 345, 2^e^ édition).

la polaire n'a aucun diviseur rationnel du quatrième degré et la courbe proposée n'est jamais égale à sa polaire (*).

En réduisant la conique directrice au cercle

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

on aura

$$t = \frac{x}{r^2}, \quad u = \frac{y}{r^2},$$

et l'on pourra transformer l'équation $t = 0$ en

$$(16r^2y)^2 = \left(3x - \sqrt{x^2 + 8r^4}\right)^3 \left(x + \sqrt{x^2 + 8r^4}\right),$$

équation assez simple de la polaire. La discussion de la polaire peut être ramenée à cette équation, même dans le cas général; d'ailleurs, en faisant

$$t^2 = t', \quad t^2 + u^2 = u',$$

on rabaisse T au deuxième degré par rapport à chacune des variables t' et u'.

On confirme les résultats précédents en cherchant combien de tangentes on peut mener d'un point (x, y) a la courbe donnée; en effet, pour déterminer l'abscisse x_1 du point de contact, on trouvera l'équation du sixième degré

$$x_1^2 (xx_1^2 - x_1 + 2x)^2 - y^2 (1 - x_1^2)^3 = 0.$$

Je remarquerai qu'en général on obtient facilement l'équation différentielle de la polaire réciproque d'une courbe donnée. Soit

$$mx^2 + ny^2 = 1$$

la conique directrice, on n'aura qu'à remplacer, dans l'équation de la courbe donnée, x par $\dfrac{dy}{m(xdy - ydx)}$ et

(*) Nous avons donné cette longue discussion comme exemple très-utile, d'un fréquent emploi dans la discussion des courbes, lorsqu'il s'agit de reconnaître si une équation représente une courbe ou le système de plusieurs. TM.

y par $-\frac{dx}{n(xdy - ydx)}$. En employant les coordonnées de M. Hesse $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, soit $F = 0$ l'équation homogène de la courbe donnée et $\varphi = 0$ celle de la conique directrice; soit (F) ce que devient F par les substitutions

$$x = sx' + tx'', \quad y = sy' + ty'', \quad z = sz' + tz''.$$

En éliminant s, t entre les dérivées

$$\frac{d(F)}{ds} = 0, \quad \frac{d(F)}{dt} = 0,$$

on trouvera une équation de degré $n(n-1)$ (n étant le degré de F) entre les binômes alternés $[x'y'']$, $[y'z'']$, $[z'x'']$, qui deviendra celle de la polaire si l'on remplace ces binômes par les valeurs des dérivées $\frac{d\varphi}{dz}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ (*voyez* t. VIII, p. 120).

SOLUTION DE LA QUESTION 300

(voir page 137);

PAR M. PAINVIN,

Docteur ès Sciences mathématiques.

Trouver une fonction de a, b, c, d, telle, qu'en y faisant $b = a$, elle devienne $\frac{c-d}{2(c+d)}$, et en y faisant $c = d$, elle devienne $\frac{a-b}{2(a+b)}$.

Soit $f(a, b, c, d)$ la fonction cherchée; posons

$$x = \frac{a-b}{2(a+b)}, \quad y = \frac{c-d}{2(c+d)},$$

d'où

$$a = b\frac{1+2x}{1-2x}, \quad c = d\frac{1+2y}{1-2y},$$

alors

$$f(a, b, c, d) = f\left(b\,\frac{1+2x}{1-2x},\ b,\ d\,\frac{1+2y}{1-2x},\ d\right)$$
$$= \mathrm{F}(x, y, b, d).$$

Il s'agit de déterminer F par la condition que pour $x = 0$ elle devienne y et pour $y = 0$ elle devienne x.

$$(1)\quad \mathrm{F}(x, y, b, d) = \left\{ \begin{aligned} & x\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\right)_0 \\ & + xy\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}\right)_0 + \frac{y^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}\right)_0 + \ldots \\ & + (\mathrm{F})_0 + b\left(\frac{d\mathrm{F}}{db}\right)_0 + d\left(\frac{d\mathrm{F}}{dd}\right)_0 \\ & + \frac{b^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{db^2}\right)_0 + bd\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{db\,dd}\right)_0 \\ & + \frac{d^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dd^2}\right)_0 + \ldots; \end{aligned} \right.$$

$(\ )_0$ indiquant qu'on a fait, dans la fonction renfermée entre parenthèses,

$$x = 0,\quad y = 0,\quad b = 0,\quad d = 0,$$

Pour $y = 0$, $\mathrm{F}(x, y, b, d)$ doit devenir x; introduisons cette hypothèse dans l'identité (1), on devra avoir encore une identité en y, ce qui fournira les conditions :

$$(2)\quad (\mathrm{F}_0) + b\left(\frac{d\mathrm{F}}{db}\right)_0 + d\left(\frac{d\mathrm{F}}{dd}\right)_0 + \frac{b^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{db^2}\right)_0 + \ldots = 0,$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)_0 = 1, \qquad \left(\frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\right)_0 = 0, \\ & \left(\frac{d^3\mathrm{F}}{dx^3}\right)_0 = 0, \ldots, \quad \left(\frac{d^p\mathrm{F}}{dx^p}\right)_0 = 0, \ldots \end{aligned} \right.$$

Pour $x = 0$, $\mathrm{F}(x, y, b, d)$ doit se réduire à y, ce qui fournira les nouvelles conditions

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dF}{dy}\right)_0 = 1, & \left(\dfrac{d^2F}{dy^2}\right)_0 = 0, \\ \left(\dfrac{d^3F}{dy_3}\right)_0 = 0, \ldots, & \left(\dfrac{d^pF}{dy^p}\right)_0 = 0, \ldots \end{cases}$$

Remarquons que l'équation (2) exprime que

$$F(0, 0, b, d) = 0,$$

c'est-à-dire que $F(x, y, b, d)$ se réduit à zéro lorsqu'on y fait à la fois $x = 0$ et $y = 0$, ou bien que $F(a, b, c, d)$ se réduit à zéro lorsqu'on y fait à la fois $a = b$ et $c = d$.

En vertu de ces relations $F(x, y, b, d)$ prendra la forme

$$(5)\quad \begin{cases} F(x, y, b, d) = x + y \\ + xy\left[\left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0 + \dfrac{x}{1.2}\left(\dfrac{d^3F}{dx^2\,dy}\right)_0 + \dfrac{y}{1.2}\left(\dfrac{d^3F}{dx\,dy^2}\right)_0 + \ldots\right]. \end{cases}$$

Or, dans tous les termes renfermés dans cette parenthèse, on a

$$b = 0, \quad d = 0,$$

et, par suite,

$$a = 0, \quad c = 0,$$

puisque x et y sont quelconques. De plus, les coefficients des différentes puissances de x et y ne sont assujettis à aucune condition, et sont, par conséquent, entièrement arbitraires; donc l'expression entre parenthèses est une fonction arbitraire des seules variables x et y qui se réduit à $\left(\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0$ pour $x = 0$ et $y = 0$.

$$F(x, y, b, d) = x + y + xy\varphi(x, y),$$

φ étant une fonction arbitraire de x et y, satisfait donc à toutes les conditions de la condition; il est d'ailleurs facile de le vérifier.

Par conséquent,

$$f(a, b, c, d) = \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{c-d}{2(c+d)} + \frac{(a-b)(c-d)}{4(a+b)(c+d)}\varphi$$

est la fonction la plus générale qui satisfasse à la question. Il est bien évident que nous pouvons prendre pour φ une fonction arbitraire de a, b, c, d en l'assujettissant à la seule condition de ne pas devenir infinie lorsqu'on y fait $a = b$ ou $c = d$; condition nécessaire pour pouvoir employer le développement (1) et qui d'ailleurs était imposée par l'énoncé même de la question.

On a donc définitivement

$$f = \frac{ac - bd + (a-b)(c-d)\mathrm{M}}{(a+b)(c+d)},$$

M étant une fonction quelconque de a, b, c, d.

Note du Rédacteur. Dans une lettre à Huyghens, Leibnitz pose la question et donne pour solution

$$\frac{ac - bd}{(a+b)(c+d)};$$

cas particulier (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 299

(voir page 137);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques.

Pour démontrer la proposition, il suffit de faire voir qu'on obtient des restes, tous différents, en divisant par p les nombres, soit d'une même ligne horizontale, soit d'une même ligne verticale, soit d'une même diago-

(*) Prochainement une autre solution très-simple par M. Murent.

nale. En effet, deux termes quelconques d'une même ligne sont de la forme

$$k + qr, \quad k' + q'r,$$

où

$$k \text{ ou } k' \leqq p, \quad q \text{ ou } q' \leqq p - 1, \quad r \leqq p - 2,$$

et où

1°. k' est différent de k et $q' = q$, pour les lignes horizontales;

2°. $k' = k$ et q' est différent de q, pour les lignes verticales;

3°. $q = k - 1$ et $q' = k' - 1$, pour la diagonale partant du sommet supérieur à gauche;

4°. $q = p - k$ et $q' = p - k'$, pour la diagonale partant du sommet inférieur à gauche.

Or, si Q et Q', R et R' sont les quotients et les restes respectifs de la division de $k + qr$ et $k' + q'r$ par p, on aura

$$k + qr = Qp + R, \quad k' + q'r = Q'p + R';$$

si l'on supposait $R = R'$, on déduirait de ces égalités

$$k' - k + (q' - q) r = (Q' - Q) p.$$

Or cette équation est impossible dans les quatre cas précités, puisque p, nombre premier, diviserait le second membre sans pouvoir diviser le second.

Le raisonnement est en défaut pour l'hypothèse particulière

$$Q = Q' = 0;$$

mais alors les restes sont respectivement égaux aux nombres eux-mêmes $k + qr$, $k' + q'r$, lesquels sont inégaux, comme il est facile de s'en assurer dans chacune des hypothèses précédemment énoncées.

SUR L'ÉLIMINATION

(voir t. XIII, p. 357);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Lorsqu'on dit qu'une équation dont les q premiers termes disparaissent a q racines infinies, il me semble qu'on ne veut pas dire que l'équation réduite admet ces q racines, car une équation n'a pas plus de racines que n'en comporte son degré, et autant vaudrait dire qu'une équation du premier degré a deux, trois, etc., racines parce qu'on peut la faire naître d'une équation supérieure par l'annulation de ces premiers termes, mais on veut dire seulement qu'il y a q racines de l'*équation primitive* qui vont croissant au delà de toute limite, lorsque les q premiers termes tendent à s'évanouir. Pareillement, si deux équations incomplètes, l'une du sixième degré et l'autre du treizième, ont une résultante du cinquante-huitième degré, ce n'est pas qu'elles admettent vingt solutions *infinies* en sus de ces cinquante-huit *finies*, mais ce sont les équations générales et complètes des mêmes degrés, dont vingt solutions convergent vers des valeurs infinies, tandis que ces équations générales convergent vers les équations particulières incomplètes (*voir* page 356). Cela posé, l'*absurde* sur lequel serait fondée la démonstration de la page 357 s'évanouit. En admettant que l'équation finale *générale* ait q racines de plus que l'équation finale *particulière*, il ne s'ensuivrait pas qu'il y eût q valeurs infinies vérifiant le système particulier formé d'équations décomposables en facteurs linéaires, mais seulement que le système général d'équations non décomposables a q racines dont les valeurs tendent à devenir infinies, tandis que ce système converge vers le système particulier. A la limite, où les équations générales sont remplacées par les équations particulières, ces q racines disparaissent et n'appartiennent plus aux équations réduites (comme je le répète) des deux racines d'une équation du second degré, l'une disparaît en devenant infinie lorsque, par l'annulation du premier terme, l'équation est réduite au premier degré et n'est susceptible, en conséquence, que d'une seule racine.

Note du Rédacteur. Si l'on trouve de prime abord une équation de degré m et qu'on veuille, sans rime ni raison, supposer qu'elle provienne d'une équation de degré $m+n$, qui a n racines infinies, cela répugne au bon sens. Mais il en est autrement si l'on trouve de prime abord une équation de degré $m+n$ et qu'ensuite, par certaines considérations sur les données de la question, on parvienne à une équation de degré m; on est autorisé à dire que n racines du cas général sont devenues infinies dans ce cas particulier. Donc, à ce qu'il me semble, la difficulté subsiste toujours.

SUR LES OVALES DE DESCARTES

(voir page 202);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

On peut mettre $r-a^2$ au lieu de $k+b^2$; puis en posant

$$x=\frac{1-y}{1+y},$$

$$r+2ab=g,\quad r-2ab=h,\quad r-2a^2=k,$$

la quantité soumise au radical dans l'intégrale transformée sera

$$y(1+y)(q+hy)(g+ky+hy^2);$$

on fera ensuite

$$y = z^2\sqrt{\frac{g}{h}},$$

ce qui donnera sous le radical un polynôme de la forme

$$\beta + \gamma z^2 + \delta z^4 + \gamma z^6 + \beta z^8,$$

et, par conséquent, la nouvelle intégrale transformée sera réductible aux fonctions elliptiques à l'aide d'une substitution connue (*voir* le *Traité* de M. Verhulst, page 290).

M. Bertrand a remarqué (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 31 (qu'un théorème démontré dans l'*Algèbre supérieure* appartient à M. Gauss; j'avais déjà fait la même remarque (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 268). Vous avez bien voulu me citer, Monsieur, au même endroit (p. 32) à propos d'un théorème de la 25^e^ leçon (*Cours d'Algèbre supérieure*). Cette observation se rapporte à la première édition; dans la seconde, la 25^e^ leçon a été entièrement refondue et le théorème dont il s'agit a été supprimé.

THÉORÈME DE FERMAT GÉNÉRALISÉ;

PAR M. SERRET,

Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Le théorème de Fermat d'après lequel la formule $x^n - x$ est divisible par n, quand n est premier, est susceptible d'une généralisation assez remarquable.

J'ai trouvé effectivement le théorème suivant :

Si a, b, c,..., k *désignent les nombres premiers iné-*

gaux qui divisent un entier quelconque n , *la formule*

$$x^n - \sum x^{\frac{n}{a}} + \sum x^{\frac{n}{ab}} - \sum x^{\frac{n}{abc}} + \ldots \pm x^{\frac{n}{abc\ldots k}} \quad (*)$$

est divisible par n, *quel que soit* x.

Je vous envoie cet énoncé, pensant qu'il pourra intéresser quelques-uns des lecteurs de votre estimable recueil; la démonstration est aisée à trouver.

J'ai été conduit au théorème dont il s'agit en cherchant à déterminer le nombre N des congruences irréductibles de degré n, suivant un module premier p, question qui se rattache à la théorie que j'ai développée dans la 25e leçon de mon *Cours d'Algèbre supérieure*. On trouve

$$N = \frac{p^n - \sum p^{\frac{n}{a}} + \sum p^{\frac{n}{ab}} - \ldots \pm p^{\frac{n}{abc\ldots k}}}{n}.$$

On a ainsi une démonstration indirecte du théorème énoncé plus haut pour le cas particulier où x est égal à un nombre premier p; mais ce théorème est vrai, je le répète, quel que soit l'entier x.

QUESTIONS.

307. Un dé est un cube portant sur chaque face des trous nommés *points*; les faces opposées sont 1 et 6, 2 et 5, 3 et 4. Les points sont placés de manière que le centre de gravité de chaque face est à son centre de figure, mais le centre de gravité du dé n'est pas à son centre de figure. Trouver la distance de ce centre de gravité à chaque face,

(*) $\sum x^{\frac{n}{a}} = x^{\frac{n}{a}} + x^{\frac{n}{b}} + \ldots + x^{\frac{n}{k}}$ et ainsi des autres $\sum$.

prenant pour unité le côté du cube et supposant que chaque trou enlève une portion de volume représentée par $\frac{1}{p}$ et $p > 21$.

308. Inscrire dans un arc de section conique trois cordes consécutives formant trois segments équivalents.

(CHASLES.)

309. r, p, n étant trois nombres entiers positifs, p et n deux nombres premiers entre eux, $\frac{(r-1)(r^{pn}-1)}{(r^n-1)(r^p-1)}$ sera un nombre entier.

310. Quels sont les divers aspects de la lune pour un spectateur placé au pôle?

SUR LE PROBLÈME DE HALLEY

(voir tome XI, p. 363);

(Extrait d'une Lettre de M. PROUHET).

Le problème consiste à tracer une conique dont on connaît un foyer et trois points. La Hire résout le problème à l'aide de la directrice; mais lorsque l'excentricité est très-petite, comme dans les orbites planétaires, la directrice est infiniment éloignée de la conique et la solution devient impraticable.

Pour remédier à cet inconvénient, Nicollic donne la construction suivante (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1746, p. 291).

Soient F le foyer; A', A'', A''' trois points de la conique. De F comme centre et avec un rayon quelconque, on décrit une circonférence; désignons par a', a'', a''' les intersections respectives des rayons vecteurs FA', FA'', FA''' avec la circonférence; sur les trois cordes $a'a''$, $a''a'''$, $a'''a'$, prenons respectivement des points B''', B', B'' tels, que l'on ait

$$\frac{a'B'''}{a''B'''}=\frac{FA''}{FA'},\quad \frac{a''B'}{a'''B'}=\frac{FA'''}{FA''},\quad \frac{a'''B''}{a'B''}=\frac{FA'}{FA'''}.$$

De B''', B', B'' ainsi déterminés, on abaisse des perpendiculaires respectivement sur $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A'$, elles se rencontrent en un même point P; FP est la direction de l'axe focal. On voit que les points B divisent les trois cordes du cercle en segments inversement proportionnels aux rayons vecteurs de la conique, qui aboutissent aux extrémités de ces cordes. FB', FB'', FB''' divisent respectivement en parties égales $A''A'''$, $A'A'''$, $A'A''$ et l'on a

$$\frac{PF}{a'F}=\frac{\text{excentricité}}{\text{demi-axe focal}}.$$

Si l'on joint a et P par une droite et si l'on désigne par α la seconde intersection de cette droite avec la circonférence de centre F, on aura

$$\frac{a'P}{\alpha P}=\frac{Af}{AF},$$

Af étant la distance du second foyer à A; la conique est donc complétement déterminée. On demande la démonstration, d'après les méthodes modernes, de ces belles et utiles propriétés. Nicollic s'en sert pour calculer les distances au périhélie des comètes et des planètes dont on connaît trois observations. Membre correspondant de l'Académie, nommé astronome-adjoint le 3 septembre 1746, il est mort le 4 mars 1761.

NOTE

Sur le genre des noms terminés en *oïde* et sur le paramètre de la parabole.

1. La terminaison de certains noms en *oïde* vient de εἶδος (apparence), qui est en grec du genre neutre, auquel

correspond en français le genre masculin. Ainsi il faut dire *un* sphéroïde, *un* paraboloïde, *un* hyperboloïde ; c'est donc à tort que dans le Programme d'admission à l'École Polytechnique, inséré au *Moniteur* (17 avril 1855), on a mis *une* paraboloïde, *une* hyperboloïde. Ce grave journal devrait se distinguer par une grande correction orthographique et grammaticale. On y trouve pourtant fréquemment des expressions telles que : *Dans ce but*, *Les contributions foncière et mobilière*, *Celui nommé ci-dessus* ; expressions vicieuses, condamnées par tous les grammairiens (*).

2. Une proprieté caractéristique du paramètre proprement dit dans les coniques est d'être respectivement inférieur, égal, supérieur à quatre fois la distance focale, dans l'ellipse, la parabole, l'hyperbole; propriété sur laquelle est peut-être fondé le nom de ces lignes. Les équations de ces courbes, rapportées au sommet de l'axe focal, sont

$$y^2 = px - \frac{b^2x^2}{a^2}, \quad y^2 = px, \quad y^2 = px + \frac{b^2x^2}{a^2},$$

où p est le paramètre. Quelques auteurs écrivent pour équation de la parabole

$$y^2 = 2px;$$

alors c'est $2p$ qui est le paramètre et non p, ainsi qu'on le dit erronément dans les *Leçons de Géométrie analytique* de MM. Bouquet et Briot, traité si justement estimé.

(*) Notre titre : *aux Écoles Polytechnique et Normale* est incorrect.

La cycloïde, la conchoïde, sous-entendez *courbe*. La cassinoïde, dénomination ridicule ; *cassinienne* est le vrai nom. Il existe un ouvrage *Della curva Casseniana*, par le célèbre Malfatti ; in-8, 1781 ; belle synthèse géométrique.

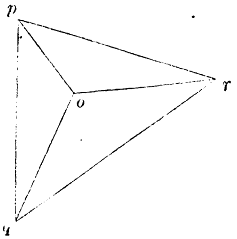
THÉORÈME;

PAR M. DE LAFFITTE,
Officier d'artillerie.

Si un triangle circonscrit à un autre se meut en restant semblable à lui-même, tous les points homologues décrivent une même circonférence.

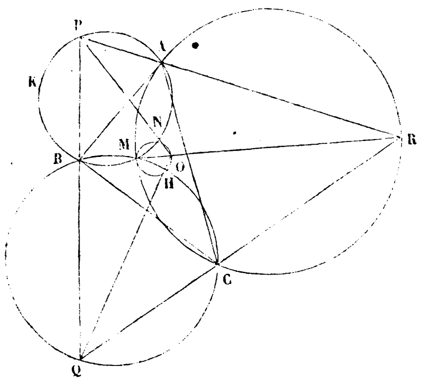
Soit o (*fig.* 1) un point quelconque intérieur au triangle

FIG. 1.



pqr donné d'*espèce*. Je détermine ce point au moyen des angles que font op, or, oq avec les côtés du triangle pqr. Ces angles sont invariables, ainsi que ceux des lignes op, oq, or entre elles. Soit ABC (*fig.* 2) le triangle inscrit

FIG. 2.



fixe; sur les trois côtés je décris des segments capables des angles P, Q, R égaux respectivement à p, q, r. Soit PQR une position du triangle, O la position du point o; les angles ORP, ORQ étant constants, le point M, intersection de OR avec le cercle décrit sur AC, est invariable; il en est de même des points N et H. Donc, l'angle NOH étant invariable, le point O est sur le segment capable de cet angle décrit sur NH. C'est évidemment le cercle qui passe par les trois points M, N, H.

Corollaire I. Si un polygone se meut en restant semblable à lui-même, et que trois côtés déterminés passent chacun par un point fixe, un point quelconque du plan du polygone décrit un cercle.

Corollaire II. Si un quadrilatère est tel, que tous les rectangles circonscrits soient semblables entre eux, un point quelconque du rectangle circonscrit décrit un cercle et, partant, son centre.

Quel est le lieu géométrique des points du plan pour lesquels ce cercle a un rayon donné?

Nous avons décrit sur les côtés du triangle inscrit des segments capables des angles du triangle circonscrit; le point d'intersection M de deux de ces segments appartient évidemment au troisième. C'est là un *point fixe* pendant le mouvement du triangle, parce que les lignes qui le joindront aux trois sommets feront toujours avec les côtés les mêmes angles. Ce point est celui duquel les trois côtés du triangle inscrit sont vus sous des angles qui sont les suppléments de ceux du triangle circonscrit. Le diamètre du cercle que décrit un point quelconque sera la différence entre sa plus grande et sa plus petite distance au point fixe pendant le mouvement du triangle. Mais tous les points qui, dans une position particulière, seront à égale distance du point fixe, y seront encore dans toute autre position du triangle, car tous ces points reliés au triangle circonscrit donnent des figures semblables, et ce seront les seuls. Donc *les points qui décrivent des cercles égaux sont ceux qui sont également éloignés du point fixe.*

La plus grande distance d'un point au point fixe correspond au plus grand triangle. Par un principe connu, c'est celui dont les côtés sont parallèles aux lignes des centres des segments capables. La plus petite distance correspond au plus petit triangle qui est nul, se réduisant au point fixe M.

Donc

1°. Les points également éloignés du point fixe décrivent des circonférences égales;

2°. Le diamètre de cette circonférence est, pour chaque point, la distance au point fixe dans le triangle maximum;

3°. La circonférence décrite par un point quelconque passe au point fixe;

4°. L'enveloppe des cercles inscrits ou circonscrits au triangle passe au point fixe, car un de ces cercles est le point lui-même.

NOTE

Sur quelques applications de la théorie des surfaces;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Une surface développable circonscrite à l'ellipsoïde

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a pour équations aux différences partielles (en adoptant les notations habituelles)

$$\text{(II)} \qquad z-px-qy=\sqrt{a^2p^2+b^2q^2+c^2},$$

et l'arête de rebroussement de cette dernière aura pour équation aux différences ordinaires

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} & a^2 (ydz - zdy)^2 + b^2 (zdx - xdz)^2 + c^2 (xdy - ydx)^2 \\ & \qquad = b^2 c^2 dx^2 + a^2 c^2 dy^2 + a^2 b^2 dz^2. \end{aligned} \right.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$\left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2}\right)$$
$$= \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right),$$

ce qui fait bien voir comment la surface (I) y satisfait; elle appartient aussi à une caractéristique quelconque des surfaces comprises sous l'équation (II).

Supposons maintenant que l'arête de rebroussement d'une surface développable circonscrite à la surface dont voici l'équation

$$\text{(IV)} \qquad \frac{x^2}{a^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2} + \frac{z^2}{c^2 - k^2} = 1$$

se trouve sur la surface (I), il faut donc combiner avec l'équation (III) la suivante

$$\begin{aligned} & (a^2 - k^2)(ydz - zdy)^2 + (b^2 - k^2)(zdx - xdz)^2 \\ & \qquad + (c^2 - k^2)(ydy - ydx)^2 \\ = & (b^2 - k^2)(c^2 - k^2)\, dx^2 + (a^2 - k^2)(c^2 - k^2)\, dy^2 \\ & \qquad + (a^2 - k^2)(b^2 - k^2)\, dz^2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\text{(V)} \left\{ \begin{aligned} & (xdy - ydx)^2 + (zdx - xdz)^2 + (ydz - zdy)^2 \\ & = (b^2 + c^2 - k^2)\, dx^2 + (a^2 + c^2 - k^2)\, dy^2 \\ & \qquad + (a^2 + b^2 - k^2)\, dz^2. \end{aligned} \right.$$

Or les surfaces (I), (IV) peuvent être regardées comme les deux nappes d'une surface, lieu des centres de courbure d'une autre surface; par conséquent, l'équation (V) appartient à une ligne géodésique tracée sur la surface (I) (*). Cette nouvelle forme de l'équation d'une ligne géodésique sur une surface à centre du second degré diffère de celle qui a été donnée par M. Joachimsthal, et présente une analogie remarquable avec l'équation des lignes les plus courtes sur une surface conique quelconque. On peut énoncer ici le théorème suivant :

Si l'on prolonge les droites tangentes à une ligne géodésique sur une surface à centre du second degré jusqu'à ce qu'elles aillent rencontrer les plans tangents à la surface perpendiculaires à leur direction, les points de rencontre seront situés sur une sphère concentrique avec la surface, et cette sphère sera la même pour toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure.

Considérons maintenant l'hyperboloïde cubique ou bien la surface représentée par l'équation

$$(\text{VI}) \qquad xyz = 1.$$

La surface développable circonscrite à cette surface a

(*) Cette relation remarquable qui existe entre deux surfaces homofocales du second degré, montre clairement l'origine de la belle propriété, découverte par M. Chasles, que toutes les tangentes à une ligne géodésique sur une surface du second degré sont tangentes à une seconde surface homofocale à la première. Sous ce point de vue, ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème général donné par Monge, qui fournit aussi une autre interprétation géométrique de notre équation (III). Soit (S) une surface, telle que l'ensemble de (S) et de (I) est une surface, lieu des centres de courbure d'une autre surface ; l'équation (III) appartient aux lignes géodésiques tracées sur (S) et qui sont tangentes à la courbe d'intersection de (S) et (I). Toutes les surfaces (S) ont pour équation aux différences partielles la suivante :

$$\begin{aligned} a^2[(b^2-c^2)q+\text{P}(y+qz)]^2 &+ b^2[(a^2-c^2)p+\text{P}(x+pz)]^2 \\ &+ c^2[(a^2-b^2)pq-\text{P}(py-qx)]^2 \\ &= [(b^2-c^2)qx-(a^2-b^2)pqz-(a^2-c^2)py]^2 \end{aligned}$$

où

$$\text{P} = 2 - px - qy.$$

pour équation aux différences partielles la suivante :

$$z - px - qy = 3(pq)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons maintenant

$$xdy - ydx = \mathrm{Z}, \quad zdx - xdz = \mathrm{Y}, \quad ydz - zdy = \mathrm{X},$$

et nous trouvons, pour l'arête de rebroussement de cette dernière, l'équation suivante

$$\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2\mathrm{Z}^2 + 18\begin{bmatrix} \mathrm{X}^2 dx^2(\mathrm{Y}\,dy - \mathrm{Z}\,dz) \\ + \mathrm{Y}^2 dy^2(\mathrm{Z}\,dz - \mathrm{X}\,dx) \\ + \mathrm{Z}^2 dz\ (\mathrm{X}\,dx - \mathrm{Y}\,dx) \end{bmatrix} = 243\,dx^2\,dy^2\,dz^2,$$

dont l'intégrale est le système suivant

$$\begin{aligned} z - \alpha x - \varphi(\alpha) y &= 3[\alpha\varphi(\alpha)]^{\frac{1}{3}}, \\ -x - \varphi'(\alpha) y &= 3\frac{d}{d\alpha}[\alpha\varphi(\alpha)]^{\frac{1}{3}}, \\ -\varphi''(\alpha) y &= 3\frac{d^2}{d\alpha^2}[\alpha\varphi(\alpha)]^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Pour évaluer l'aire de la surface (VI), nous emploierons les angles qui déterminent la position de la normale. L'expression pour la surface (S) devient donc

$$\mathrm{S} = \tfrac{1}{3}\int\!\!\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{(\cos\theta \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi)^{\frac{1}{3}}},$$

et si les angles θ et φ sont indépendants, l'intégration se ramène aux fonctions elliptiques.

Je terminerai ces remarques en faisant observer que les surfaces (I) et (VI) sont comprises sous la même équation aux différences partielles, savoir

$$(z - px - qy)^4 = k^6(rt - s^2).$$

Le théorème énoncé se rattache à celui-ci : *Le sommet d'un angle trirectangle circonscrit à une surface à centre du second degré décrit une sphère concentrique.* Tm.

BIBLIOGRAPHIE.

(voir t. XIII, p. 358).

ALGÈBRE SUPÉRIEURE; par M. *Serret.*

Lemme. $F(y) = 0$ étant une équation de degré n et $\psi(y)$ un polynôme quelconque de degré $n-1$, la somme $\sum \frac{F(y)}{\psi(y)}$, étendue aux racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation

$$F(y) = 0,$$

(sans racines égales) a pour valeur le coefficient de y^{n-1} dans $\psi(y)$.

Démonstration. (Voir *Nouvelles Annales*, tome IX, p. 82; ABEL TRANSON.)

PROBLÈME. *Soient les deux équations*

$$(1)\quad f(y) = y^m + p_1 y^{m-2} + p_2 y^{m-3} + \ldots + p_m = 0,$$

$$(2)\quad F(y) = y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

qui ont une même racine commune, savoir y_1. *Il s'agit de calculer* $\varphi(y_1)$ φ *étant une fonction rationnelle entière.*

Représentons par $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les n produits qu'on obtient en combinant $n-1$ à $n-1$ les quantités

$$f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n);$$

$f(y_1)$ étant zéro par hypothèse, il s'ensuit que R_1 n'est pas nul, et les autres R sont tous nuls comme renfermant le facteur $f(y_1)$. Donc on a les identités

$$R_1 = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum R,$$

$$R_1 \varphi(y_1) = R_1 \varphi(y_1) + R_2 \varphi(y_2) + \ldots + R_n \varphi(y_n) = \sum R \varphi(y),$$

et

$$\varphi(y_1) = \frac{\sum R\varphi(y)}{\sum R}$$

Ces deux sommes, étant des fonctions symétriques des racines de l'équation (2), sont des fonctions rationnelles connues des coefficients de cette équation ; mais on peut abréger considérablement le calcul par cette considération.

Soit $\theta(y)$ une fonction rationnelle quelconque, on voit qu'on a

$$R_1 \theta(y_1) = \sum R\theta(y),$$

$$R_1 \theta(y_1) \varphi(y_1) = \sum R\theta(y)\varphi(y),$$

donc

$$\varphi(y_1) = \frac{\sum R\theta(y)\varphi(y)}{\sum R\theta(y)};$$

faisons

$$\theta(y) = \frac{1}{F'(y)},$$

alors

$$\varphi(y_1) = \frac{\sum \frac{R\varphi(y)}{F'(y)}}{\sum \frac{R}{F'(y)}}.$$

R_μ est une fonction symétrique des racines de l'équation

$$\frac{F(y)}{y - y_\mu} = 0,$$

et, par conséquent, fonction rationnelle connue des coefficients q_1, q_2,..., q_n et de y_μ; on a donc

$$R_\mu = \rho_0 + \rho_1 y_\mu + \rho_2 y_\mu^2 + \ldots + \rho_{n-1} y_\mu^{n-1};$$

les ρ sont des fonctions connues de q_1, q_2,..., q_n et l'on peut faire disparaître les puissances de y_μ supérieures à $n-1$, au moyen de l'équation

$$y_\mu^n = -q_1 y_\mu^{n-1} - q_2 y_n^{-2} \ldots,$$

et, par le même raisonnement,

$$R_\mu \varphi(y_\mu) = t_1 + t_0 y_\mu + t_2 y_\mu^2 + \ldots + t_{n-1} y_\mu^{n-1}.$$

Donnant à μ toutes les valeurs 1, 2, 3,... n, les ρ et les t ne changent pas, et, d'après le lemme,

$$\sum \frac{R\varphi(y)}{F'(y)} = t_{n-1}, \quad \sum \frac{R}{F'(y)} = \rho_{n-1},$$

par conséquent,

$$\varphi(y_1) = \frac{t_{n-1}}{\rho_{n-1}}.$$

Si l'on voulait calculer la fonction rationnelle non entière $\frac{\varphi(y_1)}{\Phi(y_1)}$, on fera

$$\Phi(y_\mu) = T_0 + T_1(y_\mu) + \ldots + T_{n-1}(y_\mu^{n-1}),$$

et l'on aura

$$\frac{\varphi(y_1)}{\Phi(y_1)} = \frac{t_{n-1}}{T_{n-1}}.$$

Faisons

$$\varphi(y_1) = y_1,$$

on a

$$\begin{aligned} R_\mu y_m &= \rho_0 y_\mu + \rho_1 y_\mu^2 + \ldots + \rho_{n-1} y^n \\ &= \rho_0 y_\mu + \ldots + (\rho_{n-2} - q\rho_{n-1} \ldots) y_\mu^{n-1}, \end{aligned}$$

donc

$$y_1 = \frac{\rho_{n-2} - q\rho_{n-1}}{\rho_{n-1}} \cdots;$$

il suffit donc de calculer les coefficients de y_μ^{n-1} et y_μ^{n-2} dans R_μ.

Cinquième Leçon (68-76). Pour démontrer le lemme cité, l'auteur a besoin de la décomposition en fractions simples d'une fonction rationnelle non entière; c'est l'objet de la présente Leçon. Il fait usage de la méthode des coefficients indéterminés et ensuite de la méthode de M. Liouville (*Nouvelles Annales*, tome VI, p. 127).

Sixième Leçon (77-87). Même sujet; théorie générale (*voir* Finck, *Nouvelles Annales*, t. IV, p. 295). L'on démontre qu'une fraction rationnelle n'est décomposable que d'une seule manière en parties entières et en fractions simples (p. 80).

Septième Leçon (88-100). Même sujet; facteurs trinômes avec ses deux applications; conditions pour que l'intégrale d'une différentielle rationnelle soit algébrique; détermination d'un terme général d'une série récurrente.

Les facteurs simples $x - a$, $x - b$, etc., peuvent représenter des distances de points situés sur une même droite à un point fixe pris sur cette droite (points-racines de Gauss), de sorte que la décomposition en fractions rationnelles donne certaines relations géométriques entre ces distances, et *vice versâ*. Ces relations étant établies à priori, on en déduit réciproquement les formules de la décomposition (*Géométrie supérieure*, page 235) (*).

(*) Il est peut-être à regretter qu'on n'ait pas adopté dans cet ouvrage les *points-racines* qui auraient considérablement abrégé les raisonnements, mnémonisé les riches résultats de cette admirable synthèse quasi-algébrique, où l'on fait un emploi continuel si ingénieux des signes $+$, $-$, $=$, $\sqrt{-1}$, ∞, explicitement ou implicitement.

Maclaurin en fournit aussi un exemple (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 443). La théorie de la décomposition en fractions rationnelles est le sujet d'une belle thèse doctorale de Jacobi; nous en avons fait la traduction que nous donnerons bientôt. C'est un premier pas, mais c'est le pas d'un lionceau.

Huitième Leçon (101-117). L'auteur revient aux fonctions symétriques relatives à un système d'équations et donne cette ingénieuse méthode de Poisson :

Soient p équations entre p inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$; supposons que ce système admet n solutions, savoir :

$$\begin{array}{l} x'_1,\ x'_2,\ x'_3, \ldots,\ x'_p, \\ x''_1,\ x''_2,\ x''_3, \ldots,\ x''_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)}, \ldots,\ x_p^{(n)}; \end{array}$$

il s'agit de trouver la valeur de la fonction symétrique qui a pour type

$$(x'_1)^{r_1}\ (x'_2)^{r_2} \ldots\ (x'_n)^{r_n};$$

les r sont des nombres entiers positifs donnés sans exclure zéro. Joignons au système une équation linéaire

$$t = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

où t est une nouvelle inconnue et les α sont des constantes indéterminées. Éliminant les p inconnues entre les $p+1$ équations, on obtient une équation de la forme

$$\psi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

équation de degré n, car elle a n racines ayant pour type

$$\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_n x'_n.$$

Le développement de

$$\begin{array}{l} (\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_n x'_n)^\mu \\ + (\alpha_1 x''_1 + \alpha_2 x''_2 + \ldots + \alpha_n x''_n)^\mu + \ldots \\ + (\alpha_1 x_1^{(n)} + \alpha_2 x_2^{(n)} + \ldots + \alpha_n x_n^{(n)})^\mu, \end{array}$$

où μ est un nombre entier positif, égal à

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

donne les termes de la forme

$$\frac{r_1!\, r_2!\, r_3! \ldots r_n!}{\mu!} \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_n^{r_n} \sum x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n};$$

le signe $\sum$ indique qu'on doit remplacer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ successivement par $x'_1, x'_2, \ldots, x^n_1$, $x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$. Mais la somme des puissances semblables des racines de l'équation en t donne

$$\mathrm{A}\, \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_n^{r_n},$$

où A désigne une quantité connue, et à cause de l'identité, on a donc

$$\sum x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n} = \frac{\mathrm{A}\,\mu!}{\mathrm{A}.r_1!\, r_2! \ldots r_n!}.$$

Connaissant les fonctions géométriques simples, on en déduit, par voie de multiplication, les fonctions symétriques composées.

Ce procédé donne aussi le moyen d'éliminer $p-1$ inconnues entre p équations lorsque l'on sait éliminer $p-2$ inconnues entre $p-1$ équations et sert aussi à démontrer le théorème général de Bezout (p. 107).

On regrette de ne pas trouver ici ni la méthode d'élimination si ingénieuse de M. Sylvester, ni le théorème si important d'Euler, sur le degré auquel montent les coefficients des équations dans l'équation finale et qui est un corollaire de l'élimination par fonctions symétriques (voir *Nouvelles Annales*, tome IX, p. 228). Cette Leçon est terminée par la belle méthode de Tschirnhaus (pas Tschirnaüs) qui sert à faire disparaître d'une équation autant de termes que l'on veut et qui démontre que la résolution de l'équation de degré m dépend d'une résolvante de degré $m - 1!$, résultat donné aussi par Lagrange.

Soit
$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$
posons
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$
$n < m$; les a sont des constantes indéterminées. Éliminant x, l'équation en y sera aussi de degré m, car on a, en général,
$$y^p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1},$$
où p est un nombre entier positif; les b sont des fonctions entières homogènes du degré p des indéterminées a_1, $a_2, \ldots, a_n$, et, au moyen de l'équation donnée, on peut ramener y^p à ne renfermer que des puissances de x inférieures à m. Donnant à p successivement les valeurs 1, 2, 3,..., m, on a m équations du premier degré entre les $m - 1$ quantités x, $x^2, \ldots, x^{m-1}$. L'élimination, par la méthode de Cramer, donne donc l'équation en y de la forme
$$y^m + q_1 y^{m-1} + q_2 y^{m-2} + \ldots + q_m = 0.$$

Nommons S_p la somme des puissances p des racines de cette équation et s_p la somme analogue de l'équation donnée en x, on a
$$S_p = mb_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + \ldots + b_{m-1} s_{m-1};$$
donc S_p est une fonction entière homogène des a de degré p. On a
$$S_1 + q = 0, \quad S_2 + q_1 S_1 + 2q_2 = 0, \ldots;$$
donc q_n est une fonction entière homogène des a et de degré n; donc, pour faire disparaître n termes consécutifs, il faut poser
$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \ldots, \quad q_n = 0;$$

ce sont n équations homogènes entre $n+1$ indéterminées $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et, à cause de l'homogénéité, on peut poser $a_0 = 1$. On a n équations entre $n-1$ inconnues, et son élimination, d'après le théorème de Bezout, a une équation de degré $n!$. Faisant

$$n = m - 1,$$

on obtient

$$y^m + q_m = 0.$$

Ainsi la résolvante est du degré $m-1!$.

On voit facilement que ce procédé donne la solution des équations du premier, deuxième, troisième et quatrième degré.

Pour faire disparaître le deuxième, troisième et quatrième terme de l'équation en y, on est donc amené à une équation du sixième degré; mais un géomètre anglais, nommé Jerrard, a réduit cette équation au troisième degré de la manière suivante. C'est l'objet de la *Note V* (p. 462).

Lemme. Une fonction homogène et entière du second degré de n quantités est la somme des carrés de n fonctions linéaires.

Démonstration. Soit

$$V = \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}),$$

où φ désigne une fonction homogène entière du second degré; on peut écrire

$$V = P a_{n-1}^2 + Q a_{n-1} + R,$$

où P est une constante, Q une fonction linéaire homogène des $n-1$ quantités, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, et R une fonction homogène du deuxième degré des mêmes $n-1$ quantités; on a aussi

$$V = \left(a_{n-1}\sqrt{P} + \frac{Q}{2\sqrt{P}}\right)^2 + R - \frac{Q^2}{4P},$$

la première partie est le carré d'une fonction linéaire de

n quantités $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, et la deuxième partie est une fonction entière homogène du deuxième degré de $n-1$ quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Traitant la seconde partie comme on a fait pour la fonction V, on voit qu'on pourra décomposer V en n carrés de fonctions linéaires respectivement de n, $n-1$, $n-2$, quantités.

Ceci étant démontré, prenons les équations

$$x^m + p_1 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$

et l'équation

$$y^m + q_1 y^{m-1} + q_2 y^{m-2} + \ldots + q_m = 0;$$

pour faire disparaître les deuxième, troisième et quatrième termes, il faut poser

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0,$$

q_1 est fonction linéaire des cinq quantités a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Éliminant a_0 des deux dernières équations au moyen de la première, on a

$$q'_2 = 0, \quad q'_3 = 0,$$

où q'_2 est une fonction du deuxième degré des quatre quantités a_1, a_2, a_3, a_4, et, d'après le lemme, l'équation

$$q'_2 = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = 0,$$

f, g, h, k étant des fonctions linéaires. Posons

$$f = g\sqrt{-1}, \quad h = k\sqrt{-1},$$

l'équation sera satisfaite. On a ainsi deux équations binaires. Au moyen de ces deux équations, éliminant a_1, a_2 de $q' = 0$, on a une équation homogène du troisième degré entre a_3 et a_4. Posant $a_3 = 1$, on a une équation du troisième degré en a_4, et a_4 étant connue, on trouve immédiatement a_0, a_1, a_2 en raisonnant de la même manière. La disparition simultanée du deuxième, troisième et cinquième terme amène à une équation du quatrième degré. On peut aussi faire usage de l'équation aux racines inverses.

La résolution de l'équation du cinquième degré dépend donc de la résolution d'équations d'une de ces quatre formes

$$x^5 + px + q = 0,$$
$$x^5 + px^2 + q = 0,$$
$$x^5 + px^3 + q = 0,$$
$$x^5 + px^4 + q = 0.$$

Ainsi la question 41 est résolue (*Nouvelles Annales*, tome I, pages 396 et 447, note) si l'on peut choisir a_3 de manière que $p = 1$.

La fin prochainement.

SUR UN THÉORÈME DE LEGENDRE
et son application à la recherche de limites qui comprennent entre elles des nombres premiers ;

Par M. DESBOVES,
Professeur au Lycée Bonaparte.

Dans l'un des chapitres de l'*Essai sur la Théorie des nombres*, Legendre s'est proposé de démontrer que toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux, contient une infinité de nombres premiers, et, subsidiairement, de trouver des limites qui comprennent nécessairement des nombres premiers. La solution des deux problèmes serait aussi simple qu'on peut le désirer, si malheureusement elle ne s'appuyait pas sur une proposition que Legendre croyait avoir démontrée, mais à laquelle, à vrai dire, il n'est arrivé que par une heureuse induction, comme l'a déjà remarqué depuis longtemps M. Lejeune-Dirichlet.

Je me propose dans le présent article 1° de discuter la prétendue démonstration de Legendre, c'est-à-dire de faire voir en quoi elle pèche et quelle est, au fond, la vraie difficulté; 2° en admettant le théorème de l'illustre géomètre comme un postulatum, d'en faire découler immédiatement de beaux théorèmes sur les limites des nombres premiers. Puissé-je, par là, car je n'ai pas d'autre but, engager les géomètres à faire de nouveaux efforts pour trouver une démonstration qui jusqu'ici a échappé aux plus habiles.

Première Partie. — *Discussion*.

Avant d'énoncer le théorème de Legendre, quelques explications préliminaires sont indispensables.

Si, dans la progression arithmétique formée par la suite naturelle des nombres impairs, on se propose de trouver plusieurs termes consécutifs qui soient divisibles par quelqu'un des nombres premiers depuis 3 jusqu'à un nombre premier désigné γ, on voit que le nombre de ces termes est variable et dépend, en général, de l'ordre dans lequel sont placés les multiples des différents nombres premiers. Ainsi, par exemple, dans la suite des nombres impairs, on pourra obtenir des suites partielles dont les termes seront des multiples des nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13 et seront rangés suivant les différents ordres indiqués ci-dessous (*) :

$$\dot{3},\ \dot{7},\ \dot{5},\ \dot{3},\ \dot{11},\ \dot{13},\ \dot{3},\ \dot{5},\ \dot{7},\ \dot{3},$$
$$\dot{3},\ \dot{7},\ \dot{5},\ \dot{3},\ \dot{13},\ \dot{11},\ \dot{3},\ \dot{5},\ \dot{7},\ \dot{3},$$
$$\dot{5},\ \dot{3},\ \dot{11},\ \dot{7},\ \dot{3},\ \dot{5},\ \dot{13},\ \dot{3},$$
$$\dot{3},\ \dot{5},\ \dot{7},\ \dot{3},\ \dot{11},\ \dot{13},\ \dot{3},\ldots$$

(*) J'adopte la notation de M. Terquem, $\dot{m}$, pour désigner un multiple d'un nombre m.

Chaque nombre impair est ici considéré comme multiple du plus petit nombre premier qui le divise. La seule condition à remplir, c'est que les multiples de 3 viennent de trois en trois rangs, les multiples de 5 de cinq en cinq rangs, etc., et ce sera d'ailleurs un problème d'analyse indéterminée de la nature la plus simple que celui de trouver, dans la suite indéfinie des nombres impairs, des suites analogues aux précédentes. Si, par exemple, on se propose de trouver les nombres consécutifs impairs les plus petits possibles qui soient divisibles par quelqu'un des nombres 3, 5, 7, 11, 13 et qui, de plus, soient rangés comme dans la première des suites données plus haut, il suffit de remarquer que le nombre pair compris entre 11 et 13 est nécessairement de la forme

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \gamma,$$

et que ce même nombre divisé par 11 et 13 donne pour reste $+ 1$ et $- 1$. On trouve ainsi la suite des dix nombres

$$\begin{array}{ccccc} 9441, & 9443, & 9445, & 9447, & 9449, \\ 9451, & 9453, & 9455, & 9457, & 9459, \end{array}$$

On aura, d'ailleurs, une infinité d'autres suites pareilles, en ajoutant aux nombres précédents un multiple quelconque des nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13.

On peut se demander maintenant quel est le nombre maximum des termes d'une suite de nombres impairs consécutifs qui sont divisibles par quelqu'un des nombres premiers 3, 5, 7,..., α, β, γ; α, β, γ étant les trois derniers nombres premiers considérés. Or le théorème de Legendre sur lequel nous appelons l'attention, a précisément pour but de répondre à la question. En voici l'énoncé :

Une suite de nombres impairs consécutifs, qui sont divisibles par quelqu'un des nombres premiers 3, 5, 7, 11,..., α, β, γ, *a pour maximum du nombre de ses* *termes $\beta - 1$. Le nombre maximum des termes reste d'ailleurs toujours égal à $\beta - 1$,* lorsque l'on remplace les deux derniers nombres β et γ de la suite naturelle des nombres impairs par deux nombres premiers plus grands.

D'après le théorème précédent, il y aura, par exemple, au plus dix nombres impairs consécutifs qui seront divisibles par quelqu'un des nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, et nous avons vu comment on peut obtenir effectivement une telle suite.

Pour établir son théorème, Legendre écrit la suite

$$(1)\quad (\beta - 2), \ldots, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, \ldots, (\beta - 2),$$

qui est composée évidemment de $\beta - 1$ termes et qu'il obtient en écrivant la suite des nombres impairs dans l'ordre direct et dans l'ordre inverse depuis 1 jusqu'au nombre impair $\beta - 2$ qui précède le nombre premier β. Il remplace ensuite les termes 1 et 1 par $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et les autres nombres premiers par des multiples de ces nombres, ce qui donne la suite

$$(2)\quad (\beta - 2), \ldots, \dot{3}, \dot{7}, \dot{5}, \dot{3}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{3}, \dot{5}, \dot{7}, \dot{3}, \ldots, (\beta - 2),$$

qu'on peut écrire aussi dans l'ordre inverse et qui contient, comme la précédente, $(\beta - 1)$ termes. L'illustre géomètre prétend ensuite démontrer que la suite (2) a le nombre maximum de termes par les raisons suivantes :

« Le moyen d'obtenir le plus grand nombre de termes » consécutifs de la suite des nombres impairs qui soit di- » visible par quelqu'un des nombres premiers 3, 5, 7, 11 » est de considérer la suite des nombres impairs dans » ses moindres termes, c'est-à-dire dès l'origine de cette » suite, car, à une distance plus grande, on ne manque- » rait pas d'être arrêté par des nombres premiers plus » grands que les nombres premiers donnés et qui empê- » cheraient la continuité des termes qu'on veut former. Il

» faut donc tout simplement considérer la suite des nom-
» bres impairs 1, 3, 5, 7, 9,..., qu'on peut également
» prolonger dans l'autre sens, ce qui donnera

$$\ldots\ -9,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ldots,$$

» ou, parce que les signes des nombres sont indifférents
» ici,

$$9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ \dot{1},\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ldots,$$

» etc. »

Legendre est ainsi conduit à écrire les suites (1) et (3) que nous avons données plus haut.

En admettant, pour un moment, l'exactitude du raisonnement par lequel notre auteur essaye d'établir que l'on doit considérer la suite des nombres premiers à l'origine, il semble que la conclusion devrait être que la suite maximum dérive de la suite naturelle des nombres

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ldots,\ \alpha,\ldots,\ \beta,\ldots,\ \gamma,\ldots,\ (\delta-2)$$

(δ est le nombre premier qui suit immédiatement γ), comme la suite (2) dérive de la suite (1). En un mot, malgré un habile artifice de langage, il est certain que Legendre ne donne aucune raison pour préférer la suite (2) à la suite

$$(3)\qquad \dot{3},\ \dot{5},\ \dot{7},\ \dot{3},\ldots,\ \dot{\alpha},\ldots,\ \dot{\beta},\ldots,\ \dot{\gamma},\ldots,\ (\delta-2).$$

S'il la préfère cependant, c'est qu'il admet tacitement que la dernière suite contient moins de termes que la suite (2) ou bien que l'on a

$$\frac{\delta-3}{2}<\beta-1 \quad \text{ou} \quad \delta<2\beta+1,$$

c'est-à-dire qu'entre β et 2β il y a au moins deux nombres premiers. Lorsque les nombres premiers considérés sont 3, 5 et 7, les suites (2) et (3) sont identiques, de sorte qu'en fait Legendre n'admet le théorème que pour les valeurs de β plus grandes que 5. On peut d'ailleurs évidemment écarter ici l'hypothèse de β nombre premier; le théorème supposé vrai peut donc s'énoncer ainsi : *Entre un nombre plus grand que 6 et son double il y a toujours au moins deux nombres premiers.*

Le théorème connu de M. Bertrand est un corollaire évident du précédent. Il est curieux de retrouver ici le premier théorème relatif aux limites des nombres premiers que l'on a rencontré dans les recherches mathématiques et le premier aussi dont on a pu trouver la démonstration rigoureuse. Je ferai observer du reste que M. Tchebichef, qui a donné la démonstration du théorème de M. Bertrand, aurait pu, sans plus de difficulté, démontrer par sa méthode le théorème plus général précédemment cité.

Si maintenant nous considérons en elle-même cette raison donnée par Legendre : qu'on doit considérer la suite des nombres impairs dans ses moindres termes, nous voyons bien qu'il est vrai qu'à mesure que l'on prend dans la suite des nombres impairs des nombres plus élevés, on a la chance de rencontrer des nombres premiers plus grands que γ; mais ces nombres premiers peuvent entrer dans la suite non pas par eux-mêmes, mais comme facteurs de certains termes simultanément avec quelqu'un des nombres premiers $3, 5, 7, \ldots, \alpha, \beta, \gamma$, et peut-être, en faisant un choix convenable, aura-t-on une suite dont le nombre de termes surpassera $\beta - 1$. Rien dans le raisonnement de Legendre n'établit le contraire.

Essayons maintenant de ramener le théorème de Legendre à quelque autre proposition plus simple, ou, si l'on aime mieux, de voir où gît principalement la difficulté.

On peut voir qu'un des caractères distinctifs des deux suites

$$3,\ 5,\ 7,\ldots,\ \alpha,\ldots,\ \beta,\ldots,\ \gamma,\ldots,\ (\delta-2),$$

$$(\beta-2),\ldots,\ \alpha,\ldots,\ 5,\ 3,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ldots,\ \alpha,\ldots,\ (\beta-2),$$

c'est que la première ne contient qu'un seul multiple de l'antépénultième nombre premier α (supposé plus grand que 3), tandis que la seconde en contient deux; car $\delta-2$ est plus petit que 3α, ou, en d'autres termes, il y a toujours trois nombres premiers β, γ, δ entre α et 3α. On démontre effectivement, par la méthode de M. Tchebichef, qu'entre un nombre supposé plus grand que 3 et son triple il y a toujours trois nombres premiers.

En rapprochant ce qui précède des remarques faites plus haut, on peut admettre maintenant comme démontré qu'à l'origine des nombres, pour parler le langage de Legendre, la suite des nombres impairs qui ne contient qu'un seul multiple de α, a moins de termes que la suite des nombres impairs qui en renferme deux. Je dis maintenant, et c'est par là que je terminerai la présente discussion, que si l'on admettait que le même théorème a lieu quelque part que ce soit dans la suite naturelle des nombres impairs, le théorème de Legendre serait démontré.

En effet, admettons que le théorème de Legendre soit vrai lorsque l'on considère tous les nombres premiers $3, 5,\ldots, \alpha, \beta, \gamma$, les deux derniers β et γ pouvant être remplacés par des nombres premiers plus grands, c'est-à-dire admettons qu'alors la suite du nombre maximum de termes soit nécessairement la suite (2) qui contient $\beta-1$ termes; je dis que lorsqu'on prendra un nombre premier de plus δ, le nombre maximum deviendra $\gamma-1$.

On peut remarquer d'abord que la nouvelle suite ne pourra contenir ni deux multiples de γ ni deux multiples de δ. Car si la nouvelle suite contenait deux multiples de γ, entre ces deux multiples il y aurait $\gamma-1$ termes intermédiaires divisibles par quelqu'un des nombres 3, 5, 7,..., α, β, δ, ce qui est impossible, puisque le nombre des termes divisibles par quelqu'un des nombres 3, 5, 7,..., α, β, δ est, par hypothèse, au plus égal à $\beta - 1$. Par la même raison, on n'aura pas deux multiples de δ, mais on pourra former une suite contenant deux multiples de β; il suffira, pour cela, de remplacer au milieu de la suite (2) β par $\dot{\delta}$, de mettre $\dot{\beta}$ au commencement et à la fin de la même suite et de continuer d'écrire des termes autant que faire se pourra vers la droite et vers la gauche : on aura ainsi une suite contenant $\gamma - 1$ termes. Comme d'ailleurs cette suite est la seule qui, d'après l'hypothèse faite, puisse contenir deux multiples de β, elle sera, d'après le principe que nous avons admis, la suite du nombre de termes maximum. Le théorème de Legendre, se vérifiant directement pour les nombres premiers 3, 5, 7, 11, peut être considéré maintenant comme vrai en général.

Quand les nombres premiers sont 3, 5 et 7, les suites (2) et (3) sont identiques et contiennent chacune deux multiples de α, mais le théorème de Legendre n'en subsiste pas moins, puisque le nombre des termes de la suite est égal à 4.

En résumé, on voit qu'il résulte de la discussion précédente que les travaux de M. Tchebichef ont, en quelque sorte avancé la démonstration du théorème de Legendre, mais qu'il reste toujours à démontrer la proposition suivante :

Une suite de nombres impairs consécutifs divisibles par quelqu'un des nombres premiers 3, 5,..., α, β, γ *étant prolongée autant que possible, aura plus de termes lorsqu'elle contiendra deux multiples de l'antépénultième nombre premier* α *que lorsqu'elle n'en contiendra qu'un seul.*

Seconde Partie.

Nous allons maintenant déduire, comme conséquences du théorème de Legendre, divers théorèmes relatifs aux limites qui comprennent entre elles des nombres premiers.

Théorème I. *Si l'on désigne par* n *un nombre entier plus grand que* 24, *par* a *sa racine par défaut à moins d'une unité près, par* α *et* β *les nombres premiers qui précèdent immédiatement* a (β *peut être égal à* a), *toutes les fois que* $a+1$ *ne sera pas un nombre premier, on pourra assurer qu'entre* n *et* $n+2\alpha+1$ *il y a au moins un nombre premier, et qu'entre* n *et* $n+2\beta+1$ *il y en a au moins deux. Si* $a+1$ *est premier, on sera seulement certain qu'il existe un nombre premier entre* n *et* $n+2\beta+1$.

Nous remarquons d'abord que $n+2\alpha$, qui peut être plus grand que $(a+1)^2$, est nécessairement plus petit que $(a+2)^2$. Car n étant compris entre a^2 et $(a+1)^2$, est au plus égal à a^2+2a, et $n+2\alpha$ est inférieur à a^2+4a et, à plus forte raison, à $(a+2)^2$. Il en résulte que chacun des α nombres impairs consécutifs qui suivent n et sont compris dans tous les cas entre n et $n+2\alpha+1$, devra, s'il n'est pas premier, être divisible par quelqu'un des nombres premiers $3, 5, 7, \ldots, \alpha, \beta$. Le terme $(a+1)^2$, le seul des termes de la suite qui pourrait n'admettre aucun facteur premier égal à β ou plus petit, n'échappera pas lui-même à cette loi, puisque $a+1$ est d'abord supposé non premier. Mais, d'après le théorème de Legendre, il y a au plus $\alpha-1$ nombres impairs consécutifs, divisibles par quelqu'un des nombres premiers précédemment cités; donc, entre n et $n+2\alpha+1$, il y a au moins un nombre premier lorsque $a+1$ n'est pas lui-même premier.

Les limites n et $n+2\beta+1$ comprendront aussi, à plus forte raison, un nombre premier; mais je dis de plus maintenant qu'elles en contiendront au moins deux. En effet, s'il n'y avait qu'un nombre premier ω entre les limites indiquées, on aurait au moins β nombres impairs consécutifs, divisibles par $3, 5, \ldots, \alpha, \beta, \omega$, tandis qu'il y a au plus $\beta-1$.

Si $a+1$ était un nombre premier, il devrait être joint à la suite $3, 5, \ldots, \alpha, \beta$, et dès lors on voit, en recommençant les raisonnements précédents, qu'on pourra seulement affirmer qu'il existe un nombre premier entre les limites n et $n+2\beta+1$.

Corollaire I. Il y a toujours un nombre premier entre n et $n+2\sqrt{n}+1$. La démonstration suppose n plus grand que 8, mais, pour les valeurs de n plus petites que 9, le corollaire se vérifie directement.

Corollaire II. Les carrés de deux nombres entiers consécutifs, comprennent toujours entre eux au moins un nombre premier.

Remarque. Le seul théorème relatif aux limites des nombres premiers que Legendre a déduit de son principe a de l'analogie avec le théorème I. Legendre donne aussi le premier corollaire.

THÉORÈME II. *Les carrés de deux nombres entiers consécutifs comprennent toujours entre eux au moins deux nombres premiers.*

Nous venons de voir que les carrés de deux nombres entiers consécutifs comprennent toujours entre eux au moins un nombre premier. Désignons ce nombre premier par ω. Si, parmi les a nombres impairs compris entre a^2 et $(a+1)^2$, il n'y avait qu'un seul nombre premier ω, on aurait a nombres impairs consécutifs divisibles par quelqu'un des nombres premiers $3, 5, 7, \ldots, \alpha, \beta, \omega$, tandis que, d'après le théorème de Legendre, il peut y en avoir au plus $\beta - 1$. Il y a donc au moins deux nombres premiers entre les limites indiquées.

La démonstration précédente suppose a au moins égal à 5, mais, pour les valeurs de a plus petites que 5, le théorème se vérifie directement.

Ici se présente naturellement la question de savoir si, à partir d'une valeur suffisamment grande, les carrés de deux nombres entiers consécutifs comprennent toujours un nombre déterminé de nombres premiers aussi grand que l'on veut, mais le théorème de Legendre ne paraît pas pouvoir fournir une réponse à la question. Nous allons, du reste, donner maintenant un théorème qui fera connaître des limites entre lesquelles on pourra comprendre autant de nombres premiers qu'on voudra.

THÉORÈME III. *Si l'on désigne par* n *une variable qui peut prendre toutes les valeurs entières possibles, par* p *et* k *deux nombres entiers donnés, entre* 2n *et* 2n — k *il y aura toujours au moins* p *nombres premiers à partir d'une valeur de* n *suffisamment grande qu'on pourra déterminer en fonction de* p *et* k.

Soient a^2 et $(a+1)^2$ les carrés de deux nombres entiers consécutifs qui comprennent n, et supposons qu'à partir d'une valeur de n suffisamment grande on puisse toujours satisfaire à l'inégalité

$$2n - k > (a + l)^2,$$

l étant un nombre donné quelconque. Les nombres

$$(a+1)^2,\ (a+2)^2, \ldots,\ (a+l)^2$$

seront supérieurs à n et inférieurs à $2n - k$; d'après le théorème précédent, il y aura entre n et $2n - k$ au moins $2(l-1)$ nombres premiers. Si donc on pose

$$2(l-1) = p \quad \text{ou} \quad 2(l-1) = p + 1,$$

suivant que p est pair ou impair, on sera assuré qu'entre n et $2n-k$ il y a au moins p nombres premiers. On peut d'ailleurs, dans tous les cas, remplacer dans l'inégalité précédente l par sa valeur $1+\frac{p+1}{2}$ tirée de l'équation

$$2(l-1)=p+1,$$

puisque, dans le cas de p nombre pair, on ne ferait que remplacer, dans l'inégalité, l par une valeur trop grande: nous aurons ainsi

$$2n-k > \left(a+1+\frac{p+1}{2}\right)^2.$$

Cette inégalité sera évidemment satisfaite si nous pouvons déterminer n par la condition

$$2n-k > \left(\sqrt{n}+1+\frac{p+1}{2}\right)^2;$$

or cette dernière égalité ayant lieu pour toute valeur de n plus grande que

$$\frac{3(p+3)^2+4k+2(p+3)\sqrt{2(p+3)^2+4k}}{4},$$

le théorème est démontré.

En faisant

$$k=2,\quad p=1$$

dans la formule, nous trouvons que pour n plus grand que 27 il existe toujours un nombre premier compris entre n et $2n-2$. La même propriété se vérifiant directement pour tous les nombres plus grands que 3, on voit que l'on retombe sur le théorème de M. Bertrand, comme on devait d'ailleurs s'y attendre.

Corollaire. Entre n et pn, il y a toujours p nombres premiers à partir d'une valeur de n suffisamment grande. Je n'aurais pas donné ce corollaire si dans la discussion du théorème de Legendre, on n'avait pas rencontré les applications particulières $p=1$, $p=2$.

Le théorème de M. Bertrand a été seul démontré par M. Tchebichef; mais je me suis assuré que, par la discussion d'une équation transcendante, fournie par la méthode de l'habile géomètre, on pouvait démontrer le théorème III sans difficulté. C'est là, je crois, un utile exercice à recommander aux jeunes lecteurs des *Nouvelles Annales*.

THÉORÈME IV. *Entre un nombre et son carré il y aura toujours un nombre donné* p *de nombres premiers à partir d'une valeur suffisamment grande.*

Ce théorème est une conséquence évidente du théorème III. Comme cas particulier, on retrouve le théorème de M. de Polignac : *Entre un nombre et son carré il y a toujours un nombre premier.*

En terminant, je crois devoir faire observer que si la démonstration du théorème de Legendre ou du postulatum auquel je l'ai ramené doit encore résister aux investigations des géomètres, le théorème II, par son énoncé si simple, mérite d'appeler leurs efforts. MM. Tchebichef et de Polignac, par exemple, pourraient peut-être parvenir à le démontrer par leurs savantes méthodes.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE GOLDBACH.

Tout nombre pair, excepté 2, *est la somme de deux nombres premiers au moins de deux manières, et lorsque le nombre pair est double d'un nombre impair, il est toujours simultanément la somme de deux nombres premiers de la forme* $4n+1$ *et la somme de deux nombres premiers de la forme* $(4n-1)$ (*vérifié jusqu'à* 10000).

L'énoncé ainsi complété permet d'établir un certain lien entre le théorème de Goldbach et d'autres propositions connues.

Remarquons d'abord que la première partie de la proposition exige nécessairement la vérité du théorème que nous avons déjà trouvé au début de la discussion d'un théorème de Legendre, à savoir : qu'*entre un nombre plus grand que* 6 *et son double il y a toujours au moins deux nombres premiers*. En effet, la première partie du théorème, à partir de 14, est vraie, même en ne comptant pas la décomposition en deux nombres premiers égaux.

En second lieu, si l'on admettait la deuxième partie du théorème, en se rappelant que tout nombre premier de la forme $4n+1$ est la somme de deux carrés, on en conclurait qu'un nombre quelconque est la somme de quatre carrés ou d'un nombre moindre de carrés. On peut même ajouter que si l'on voulait obtenir une décomposition d'un nombre en quatre carrés, par exemple, pour construire géométriquement la racine carrée de ce nombre, on aurait peut-être de cette manière le procédé le plus régulier et le plus simple. Je suppose, bien entendu, que l'on ait à sa disposition deux Tables, l'une de nombres premiers, l'autre de carrés.

Soit proposé, par exemple, de décomposer le nombre 327 en quatre carrés; en désignant par x^2, y^2, z^2, u^2 les quatre carrés inconnus, on écrira

$$2(x^2+y^2+z^2+u^2)=654,$$

et, en décomposant 654 en deux nombres premiers de la forme $4n+1$,

$$2(x^2+y^2+z^2+u^2)=397+257.$$

Maintenant si l'on décompose chacun des nombres 397 et 257 en deux carrés, on a

$$2(x^2+y^2+z^2+u^2)=19^2+6^2+1^2+16^2,$$

ou encore

$$(x+y)^2+(x-y)^2+(z+u)^2+(z-u)^2$$
$$=19^2+1^2+16^2+6^2.$$

Or on peut satisfaire à cette équation en égalant chaque terme du premier membre au terme correspondant du second, ce qui détermine x, y, z et u.

On a ainsi finalement

$$327=10^2+9^2+11^2+5^2.$$

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

1. Dans tout ce que nous allons dire, nous supposerons que l'équation ne renferme qu'une inconnue à coefficients réels, et qu'un des deux membres est nul, de sorte que l'autre membre est une fonction de l'inconnue.

2. *Premier principe général.* Lorsque deux nombres réels substitués dans une fonction à une variable, à la place de la variable, donnent deux résultats de signes contraires et si, en outre, la fonction ni aucune de ses dérivées ne deviennent ni infinies ni imaginaires, par la substitution de nombres compris entre les deux nombres réels, alors il existe entre ces mêmes nombres au moins un nombre qui, substitué à la place de la variable, annule la fonction.

3. *Second principe général.* Lorsque les substitutions de deux nombres réels ont donné des résultats de signes contraires, on peut, en prenant indéfiniment des moyennes entre ces nombres, parvenir à des limites dont la différence soit moindre qu'une quantité donnée; ces limites

comprennent un nombre qui, substitué dans la fonction, l'annule.

4. La longueur et la complication des calculs rend le plus souvent ce second principe impraticable, et l'on doit recourir à d'autres moyens d'approximation.

Méthode des séries.

Soit l'équation

$$y = x^x - 10 = 0.$$

Substitution.	Résultats.
x	y
1	-9
2	-6
3	$+17$

il y a au moins une racine entre 2 et 3.

$$x = 2,5, \quad y = -0,118,$$
$$x = 2,6, \quad y = +0,993.$$

On a x à $\frac{1}{10}$ près; faisons

$$x = x_1 + 2,5,$$

x_1 est plus petit que $\frac{1}{10}$.

$$(x_1 + 2,5)^{x_1+2,5} - 10 = 0,$$
$$(2,5 + x_1) \log (x_1 + 2,5) = \log 10 \text{ (log. hyp.)},$$

développant

$$(2,5 + x_1) \left[\begin{array}{c} \log 2,5 + \dfrac{x_1}{2,5} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{2,5}\right)^2 \\ + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2,5}\right)^3 - \ldots \end{array} \right] = \log 10;$$

On ne veut conserver que la sixième décimale et il faut se rappeler que x_1 est plus petit que 0,1.

$$(2,5\log 2,5-\log 10)+x_1(1+\log 2,5)+\frac{1}{1.2}\frac{x^2}{2,5}-\frac{1}{2.3}\frac{x^3}{(2,5)^2}+\frac{1}{3.4}\frac{x^4}{(2,5)^3}-\ldots,$$

$$2,5\log 2,5-\log 10=-0,0118584,$$

$$1+\log 2,5=1,916291,$$

$$\frac{1}{2.2,5}=0,20000,$$

$$-\frac{1}{6.(2,5)^2}=-0,0267,$$

$$+\frac{1}{12.(2,5)^3}=0,005.$$

$$0,005x_1^4-0,0267x_1^3+0,20000x_1^2+1,916291x_1-0,0118584=0;$$

équation algébrique. En la traitant par les procédés ordinaires, on trouve

$$x_1=0,006184,$$

et

$$x=2,506184.$$

Si l'on veut continuer, on fera

$$x=x_{\prime}+2,506184,$$

et ainsi de suite.

Soit

$$f(x)^{f(x)}=a,$$

$f(x)$ est une fonction donnée de x, et a une quantité réelle donnée; on pose

$$f(x)=z,\quad z^z=a,$$

on déduit la valeur de z, et la question se réduit à résoudre l'équation

$$f(x) = z.$$

1^er *Exemple :*

$$\log x^{\log x} = 10,$$

on a

$$\log x = 2,506184$$

et

$$x = 320,76, \quad \operatorname{tang} x^{\operatorname{tang} x} = 10, \quad x = 17^{\circ}\, 47'.$$

2^e *Exemple :*

$$y = e^x - 2x - 5 = 0;$$

e est la base du système népérien.

x	y
1	$-4,282$
2	$-1,611$
3	$+9,085$
2,4	$+1,223$
2,3	$+0,374$
2,2	$-0,375$

$$x = x_1 + 2,2,$$
$$y = e^{2,2+x_1} - 2\,(2,2 + x_1) - 5 = 0,$$
$$y = 9,025054\,e^{x_1} - 2x_1 - 9,4 = 0,$$
$$y = 9,025054\left(1 + x_1 + \frac{x_1^2}{1.2} + \frac{x_1^3}{1.2.3} + \ldots\right) - 2x_1 - 9,4 = 0;$$

négligeant les x_1^6, on obtient

$$0,8x_1^5 + 0,038x_1^4 + 1,504x_1^3 + 4,5125x_1^2 + 7,02505\,x_1 - 0,374946 = 0,$$

d'où l'on tire la valeur de x_1.

Pour trouver les racines imaginaires, posons

$$x = u + iv;$$

u et v sont des quantités réelles et

$$i = \sqrt{-1}.$$

On a

$$y = e^{u+vi} - 2(u + vi) - 5 = e^u(\cos v + i \sin v)$$
$$- 2(u + vi) - 5 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

(1) $$y = e^u \cos v - 2u - 5 = 0,$$

$$e^u = \frac{2v}{\sin v}.$$

u étant réel, $\frac{\sin v}{2v}$ est positif; ainsi u est compris entre

$$0 \text{ et } \pi,$$
$$2\pi \text{ et } 3\pi,$$
$$4\pi \text{ et } 5\pi.$$

Désignons une très-petite quantité par ε, on a

$$v = \varepsilon, \quad u = \log \text{hyp. } 2, \quad y = -.$$
$$v = \pi - \varepsilon, \; u = \infty, \quad y = -\infty.$$

L'équation (1) n'a donc pas de racines entre 0 et π.

Faisons

$$v = 2\pi + \varepsilon, \quad u = \infty, \quad z = +, \quad \cos(2\pi + \varepsilon) \text{ positif},$$
$$v = 3\pi - \varepsilon, \quad u = \infty, \quad z = -, \quad \cos(3\pi - \varepsilon) \text{ négatif};$$

il y a donc une valeur de v entre 2π et 3π ou entre 6 et 9.

$$v = 7, \quad u = 3{,}059, \quad z = +\ 4{,}947,$$
$$v = 8, \quad u = 2{,}783, \quad z = -\ 12{,}919,$$
$$v = 7{,}5, \quad u = 2{,}772, \quad z = -\ 5{,}500,$$
$$v = 7{,}2, \quad u = 2{,}898, \quad z = +\ 0{,}241,$$
$$v = 7{,}3, \quad u = 2{,}843, \quad z = -\ 1{,}654;$$

donc l'on a

$$x = 2,8 + 7,2\,i \text{ environ.}$$

Représentons cette valeur par a, posons

$$x = a + x_1;$$

on a l'équation

$$e^{a+x_1} - 2(a + x_1) - 5 = 0,$$

ou

$$e^{2,8}(\cos 7,2 + i \sin 7,2)\, e^{x_1} - 10,6 - 14,4\,i - 2x_1 = 0.$$

Dans un cercle de rayon 1, un arc de longueur 7,2 contient $412^\circ\, 31'\, 46''\, 46'''$; le logarithme du cosinus de cet arc est

$$9,7841561 - 10, \quad \log e^{2,8} = 1,2160246,$$

d'où l'on tire

$$e^{2,8} \cos 7,2 = 10,0042\ (*),$$

$$\log \sin 7,2 = 9,8996378,$$

d'où

$$e^{2,8} \sin 7,2 = 13,051\ (**);$$

$$(10,0042 + i.13,051)\left(1 + x_1 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$
$$- 10,6 - 14,4\,i - 2x_1 = 0,$$

d'où

$$x_1 = 0,092 + 0,010\,i,$$
$$x = 2,892 + 7,210\,i.$$

5. Cette méthode consiste donc à trouver d'abord une valeur de la transcendante à un dixième près. Soit m cette valeur de la variable x, on fait

$$x = m + x_1,$$

(*) M. Spitzer trouve 10,00413.
(**) M. Spitzer trouve 13,051519.

x_1 sera au-dessous d'un dixième. On développe la transcendante en série convergente; on néglige les termes de la série dont les valeurs sont au-dessous de la décimale à laquelle on veut s'arrêter, on obtient une seconde approximation m_1; on fait derechef

$$x = m_1 + x_2,$$

et l'on continue de même.

Équations à deux inconnues.

6. Le premier principe général (n° 2) est encore applicable. Soient

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0$$

les deux équations données. F et f sont des fonctions entières; posons

$$z = f(x, y), \quad F(x, y) = 0;$$

en donnant à x une suite de valeurs, on obtient une suite correspondante de valeurs pour y et z. Si ces suites sont continues et que z change de signe, il existe au moins un intervalle où les valeurs de x et de y auront annulé z et ces valeurs satisfont aux deux équations. On pourra en continuant trouver des valeurs de x et de y à moins d'un dixième près et ensuite procéder comme ci-dessus.

Soient les deux équations

$$x^y = 5, \quad y^x = 4,$$

on aura les suites

x	y	z
1	4	-4
2	2	-1
3	1,587	$+0,719$
2,5	1,741	$-0,0699$
2,6	1,704	$+0,0962$

Ainsi, à moins d'un dixième près,

$$x = 2,5,$$
$$y = 1,7;$$
$$x = 2,5 + x_1, \quad y = 1,7 + y_1;$$
$$(2,5 + x_1)^{1,7+y_1} = 5, \quad (1,7 + y_1)^{2,5+x_1} = 4;$$

Prenant les logarithmes hyperboliques, développant et mettant à la place de log 2,5, log 1,7 leurs valeurs respectives, on obtient

$$(1,7 + y_1)\left[\begin{array}{l} 0,9162907 + \dfrac{x_1}{2,5} \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{2,5}\right)^2 + \ldots \end{array}\right] = 1,6094379,$$

$$(2,5 + x_1)\left[\begin{array}{l} 0,5306282 + \dfrac{y_1}{2,7} \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_1}{1,7}\right)^2 + \ldots \end{array}\right] = 1,3862944;$$

ne conservant que les premières puissances, on obtient

$$0,68x_1 + 0,9162907y_1 = 0,0517437,$$
$$0,530628x_1 + 1,470588y_1 = 0,0597239;$$
$$x_1 = 0,0416, \quad y_1 = 0,0253,$$
$$x = 2,5416, \quad y = 1,7253.$$

Observation. Nous avons copié ces exemples dans l'ouvrage de M. Spitzer (voir *Nouvelles Annales*, t. X, p. 366).

Méthode des Tables.

7. La méthode des séries peut être employée pour toutes les transcendantes susceptibles de se développer en une série convergente; mais lorsque la transcendante est *périodique*, telles sont les lignes trigonométriques, il est souvent plus commode d'en dresser les Tables.

Prenons pour exemple le problème de Képler.

Soit l'équation

$$z = x + e \sin x,$$

z est l'anomalie moyenne, x l'anomalie excentrique et e l'excentricité exprimée en parties circulaires de rayon 1; étant donné z, il s'agit de trouver x.

Soit

$$e = 0,25\ (*)$$

exprimée en parties circulaires

$$e = 14^\circ\, 19'\, 13''.$$

Voici le commencement de la Table :

x	z	Δz
° ′	° ′ ″	′ ″
0.00	0.00.00,000	
		12.30,000
0.10	0.12.30,000	
		12.29,998
0.20	0.24.59,998	
		12.29,996
0.30	0.37.29,994	
		12.29,992
0.40	0.49.59,986	
		12.29,987
0.50	1. 2.29,973	
		12.29,981
1.00	1.14.59,954	

On continue la Table jusqu'à 90 degrés; ensuite les valeurs de $e \sin x$ reviennent. Étant donnée la valeur de z, on trouve celle de x soit dans la Table, soit par les parties proportionnelles ou par interpolation. On calcule ainsi une Table pour chaque planète.

Dans tous les Traités d'astronomie, on donne pour ce problème la méthode par séries (*Mécanique céleste*, I^re partie, livre II).

(*) La plus grande excentricité connue est celle de Junon, 0,256; la moindre est celle de Vénus, 0,0682; et après vient celle de Neptune, 0,00872: la plus grande, parmi les anciennes planètes, est celle de Mercure, 0,20562.

Consultez pour l'origine du problème l'*Histoire de l'Astronomie moderne*, de Delambre, t. I[er], p. 466, 1821. On y lit le développement complet des idées consignées dans la lettre de Képler à Ursus (*Bulletin*, p. 63), idées qui ont absorbé toute la vie de Képler.

On trouve une solution du problème de Képler, par M. Hansen, dans les *Comptes rendus*, t. XXXV, n° 21, 22 novembre 1852, et *Astronomische Nachrichten*, tome XXXV, page 317, 1853.

Cette solution donnée par les séries est d'une simplicité et d'une élégance remarquables ; il me semble qu'on peut la déduire de certains théorèmes de notre illustre géomètre, maintenant le plus grand analyste du siècle, théorèmes que je ne puis retrouver pour le moment.

Le nombre de ces théorèmes est si considérable, leur dispersion si grande, qu'il faudrait une boussole spéciale pour se diriger dans ces sporades analytiques. A un grand architecte, on est en droit de demander un édifice. En accumulant sans cesse matériaux sur matériaux, on rencontre l'inconvénient si pittoresquement exprimé dans ce dicton allemand : *Les arbres empêchent de voir la forêt.* Quand aurons-nous la mécanique moléculaire si souvent, si solennellement promise ! Toutefois, *demain* n'appartient à personne.

La suite prochainement.

QUESTIONS.

311. Trouver l'aire d'une portion d'hyperboloïde de révolution à une nappe renfermée entre deux sections circulaires parallèles. On donne les rayons des cercles, la longueur de la partie de l'axe, la longueur de l'élément rectiligne que ces sections interceptent.

312. Mener par un point donné dans un angle sphérique un arc de grand cercle tel, que le rapport des sinus des deux segments soit égal à une quantité donnée.

313. Construire la surface

$$e^z = \frac{\cos x}{\cos y}\cdot \ (e = \text{base népérienne.})$$

(E. Catalan.)

MODES DE GÉNÉRATION DES CASSINOIDES ET DES LEMNISCATES;

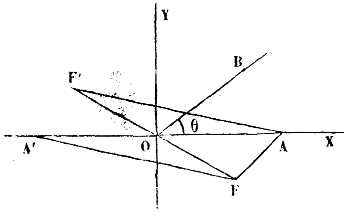
Par M. GARLIN,
Docteur ès Sciences.

La définition géométrique de la cassinoïde ou ellipse de Cassini est que le produit des distances d'un point quelconque de cette courbe à deux points fixes (qu'on nomme foyers ou pôles) est constant. On sait qu'on a comme cas particulier la lemniscate de Bernoulli ou lemniscate hyperbolique. Je vais indiquer ici quelques moyens nouveaux d'obtenir ces courbes remarquables, dont la discussion complète se trouve dans les Traités de géométrie analytique.

Problème I. *Le lieu géométrique des foyers des coniques concentriques ayant un diamètre déterminé de grandeur et de position, le diamètre conjugué étant seulement déterminé de grandeur, est une cassinoïde.*

On peut résoudre cette question en se servant de l'équation aux foyers; mais nous nous contenterons de donner la démonstration géométrique suivante :

Prenons le diamètre fixe OA pour axe des abscisses et la perpendiculaire OY pour axe des ordonnées. Soit OB la position de l'autre diamètre correspondant à une valeur particulière de l'inclinaison variable θ. Si F est un



point du lieu, le point F', symétrique par rapport à l'origine, en est aussi un; donc les coordonnées des points F et F' sont égales et de signe contraire, et l'origine des coordonnées est un centre du lieu cherché. Représentons comme à l'ordinaire par a' et b' les deux demi-diamètres conjugués, par a et b les demi-axes de la conique dont F et F' sont les foyers; x et y étant les coordonnées constantes, on a, pour le carré de la demi-excentricité,

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

Mais, d'après un des théorèmes d'Apollonius sur les diamètres conjugués, on a

$$(2) \qquad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Enfin, le point A appartenant à la conique que nous supposerons être une ellipse, on a la relation

$$\mathrm{AF} + \mathrm{AF'} = 2a.$$

Je dis maintenant que le produit FA.FA' ou FA.F'A (puisque FA' = F'A) est constant. En effet, élevant la dernière relation au carré, il vient

$$(3). \qquad \overline{\mathrm{AF}}^2 + \overline{\mathrm{AF'}}^2 + 2\,\mathrm{AF}.\mathrm{AF'} = 4a^2.$$

Or la figure donne

$$\overline{\mathrm{AF}}^2 = (a' - x)^2 + y^2, \quad \overline{\mathrm{AF'}}^2 = (a' + x)^2 + y^2,$$

d'ailleurs, d'après les équations (1) et (2);

$$2a^2 = a'^2 + b'^2 + x^2 + y^2;$$

par suite, l'équation (3) se réduit à

$$\mathrm{AF}.\mathrm{AF}' = b'^2.$$

Ainsi on a bien une cassinoïde dont les pôles sont les extrémités du diamètre fixe, et dont le produit constant correspondant est le carré du demi-diamètre conjugué.

En écrivant la dernière équation en coordonnées rectangles, on voit immédiatement que quand les deux diamètres conjugués sont égaux, la cassinoïde se transforme dans la lemniscate de Bernoulli.

Remarque. Les triangles tels que AFF′ ont la médiane AO constante de grandeur et de position, et le produit des deux côtés adjacents AF.AF′ est constant. Il résulte de là la génération suivante des cassinoïdes:

Théorème. *Les sommets des angles à la base des triangles dont la médiane correspondante est constante de grandeur et de position, et dont le produit des deux autres côtés est invariable, décrivent des ellipses de Cassini.*

Si la médiane est moyenne proportionnelle entre les côtés adjacents, les courbes décrites sont des lemniscates.

Problème II. *Trouver le lieu géométrique des foyers et des sommets des cassinoïdes concentriques de module donné et assujetties à passer par un même point.*

L'équation de la cassinoïde, dans les deux systèmes de coordonnées le plus fréquemment employés, affecte les deux formes

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = b^4,$$

$$(2) \qquad r^4 - 2a^2 \cos 2\theta . r^2 + a^4 = b^4;$$

$2a$ est la distance des deux points fixes et b^2 est le produit constant des distances d'un point quelconque de la courbe à ces deux points.

On appelle *module* le rapport $\frac{b}{a} = k$; on le suppose ici donné. Remplaçant b par sa valeur ak, l'équation (1) s'écrit

(3) $\qquad (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4(1-k^4) = 0.$

On prend pour OX la ligne joignant le centre commun au point donné, lequel est à une distance d de ce centre, et pour OY la perpendiculaire menée par ce centre. En faisant varier le paramètre a, dans (3), on obtient une infinité de courbes. Soit maintenant OX′ faisant avec OX l'angle α, le grand axe d'une courbe quelconque du système. On a l'équation (3) pour l'équation de cette courbe rapportée à OX′ et OY′, le paramètre a ayant une valeur déterminée. Si l'on voulait dans cette équation remplacer a par α, il suffirait d'exprimer qu'elle est satisfaite par les valeurs

$$x = d\cos\alpha, \quad y = -d\sin\alpha,$$

ce qui donne

(4) $\qquad d^4 - 2a^2d^2\cos 2\alpha + a^4(1-k^4) = 0.$

Si l'on éliminait a entre (3) et (4), on aurait l'équation générale des courbes du système par rapport aux axes mobiles OX′ et OY′.

Pour avoir l'équation du lieu des foyers, il suffit dans (4) de remplacer a par r, ce qui donne pour l'équation polaire du lieu

$$r^4 - \frac{2d^2}{1-k^4}\cos 2\alpha . r^2 + \frac{d^4}{1-k^4} = 0.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (2). Cherchons dans quels cas on peut identifier ces équations; on doit avoir

$$a^2 = \frac{d^2}{1-k^4}, \quad b^2 = \frac{d^2k^2}{1-k^4}.$$

Ces deux conditions déterminent les deux éléments a et b; pour qu'ils soient réels, il faut qu'on ait $k < 1$.

Il est à remarquer que le module du lieu des foyers est le même que pour les courbes du système, car

$$\frac{b^2}{a^2} = k^2.$$

Dans l'hypothèse particulière $k = 1$, auquel cas les courbes du système sont des lemniscates, l'équation du lieu des foyers devient

$$r^2 = \frac{d^2}{2 \cos 2\alpha}$$

ou

$$y^2 - x^2 = -\frac{d^2}{2}.$$

Elle représente des hyperboles équilatères dont les asymptotes sont les bissectrices des angles des axes et dont le demi-axe transverse est $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

L'équation du lieu des sommets se déduit sans peine de celle que nous avons trouvée pour les foyers. En effet, si ρ désigne le rayon vecteur d'un sommet, on a, comme il est aisé de le voir,

$$\rho^2 = a^2 + b^2.$$

Or, a désigne le rayon vecteur r du foyer correspondant, et comme d'ailleurs $b = k$, la relation précédente donne

$$r^2 = \frac{\rho^2}{1 + k^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation des foyers, il vient

$$\rho^4 - \frac{2d^2}{1 - k^2} \cos 2\alpha . \rho^2 + \frac{d^4 (1 + k^2)}{1 - k^2} = 0.$$

En raisonnant comme précédemment, on voit que cette équation représente des cassinoïdes, pourvu que le module k soit moindre que l'unité.

PROBLÈME

Sur un faisceau homographique dans les coniques;

Par M. POUDRA,
Chef d'escadron d'état-major en retraite.

Soient donnés dans un même plan les cinq points a, b, c, d, e, trouver un point m tel, que les cinq droites ma, mb, mc, md, me forment un faisceau homographique avec un autre faisceau Ma_1, Mb_1, Mc_1, Md_1, Me_1 de cinq droites données.

Par un des points b donné, on trace les droites ba, bc, bd, be. On détermine ensuite la droite bf qui est telle, que les quatre droites bc, bd, ba, bf forment un faisceau homographique avec celui qui est déterminé par les quatre droites Mc_1, Md_1, Ma_1, Mb_1. On construit de même la droite bg telle, que le faisceau formé par les quatre droites bc, bd, be, bg soit homographique avec celui des quatre droites Mc_1, Md_1, Me_1, Mb_1.

On détermine ensuite la section conique qui passe par les quatre points a, b, c, d et qui soit tangente à la droite bf; de même, la section conique passant par les quatre points b, c, d, e et qui soit tangente à bg. Ces deux sections coniques se coupent en un quatrième point m qui est le point cherché.

SOLUTION DE LA QUESTION 304

(voir page 211);

PAR M. POUDRA,
Chef d'escadron d'état-major en retraite.

Soient donnés dans un même plan : 1° cinq points 1, 2, 3, 4, 5 sur une droite A ; 2° cinq droites a, b, c, d, e. Mener une transversale mn qui coupe les cinq droites en cinq points 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1 qui soient homographiques aux cinq points de la droite A.

Considérons d'abord les quatre droites a, b, c, e. La droite a coupe les droites b, c, e en trois points. On détermine sur cette droite un quatrième point α tel, que le rapport anharmonique de ces quatre points soit égal à celui des quatre points donnés 1, 4, 2, 5. De même la droite b coupe a, c, e en trois points, et soit β le quatrième point tel, que le rapport anharmonique de ces quatre points soit aussi égal à celui des points 1, 4, 2, 5. On joint les points α et β, et alors on détermine la section conique tangente aux cinq droites a, b, c, e, $(\alpha\beta)$. Elle sera telle, que toute tangente à cette courbe sera coupée par les droites a, b, c, e en quatre points dont le rapport anharmonique sera toujours égal à celui des quatre points 1, 4, 2, 5.

Considérons ensuite les quatre droites a, b, d, e, et déterminons de même une conique tangente à ces quatre droites et telle, qu'une tangente quelconque coupe ces quatre droites a, b, d, e en quatre points dont le rapport anharmonique soit égal à celui des quatre points donnés 1, 2, 3, 5.

La tangente mn commune à ces deux coniques sera la transversale cherchée. Les deux coniques ayant déjà par construction trois tangentes communes, il n'y a qu'une solution au problème.

NOTE SUR LE PRINCIPE DE L'HOMOGÉNÉITÉ;

Par M. Paul SERRET,
Professeur.

1. Théorème. *Si, laissant indéterminée l'unité de longueur, on représente par les nombres* a, b, c, *etc., les longueurs des différentes lignes* A, B, C, *etc., d'une figure et que l'on trouve entre ces nombres la relation*

$$f(a, b, c, \ldots) = 0,$$

le polynôme f (a, b, c,...) *qui forme le premier membre de cette équation sera homogène.*

Dans la démonstration que l'on donne ordinairement de cette importante proposition, on établit, pour le cas où la relation entre les grandeurs considérées peut s'exprimer algébriquement, que *si le polynôme* f (a, b, c,...) *n'est pas homogène, l'équation*

$$f(a, b, c, \ldots) = 0$$

doit du moins se décomposer en une série d'équations homogènes

$$f_1(a, b, c, \ldots) = 0, \quad f_2(a, b, c, \ldots) = 0, \ldots,$$

ayant lieu séparément, et dont chacune exprimerait par conséquent une propriété particulière de la figure considérée.

Il me paraît fâcheux, toutefois, que l'on ne donne jamais à l'appui de cette singulière démonstration un seul exemple présentant aux élèves cette agréable surprise d'une équation recélant dans son apparente unité, non-seulement la relation déterminée que l'on cherchait à mettre en évidence entre les éléments considérés de la figure, mais encore plusieurs autres relations distinctes de la première, auxquelles le calculateur ne songeait nullement, mais que le *calcul,* beaucoup plus intelligent, ne pouvait omettre.

Malheureusement pour le calcul, l'exemple que l'on néglige de donner est encore à trouver, et le principe de l'homogénéité peut sans inconvénient se passer de son concours.

2. Supposons, en effet, qu'ayant pour objet de trouver une certaine relation *déterminée* existant entre les longueurs des lignes A, B, C, etc., d'une figure, nous prenions d'abord l'une de ces lignes, A par exemple, pour unité de longueur.

Soient 1, b', c', etc., les nombres qui expriment les longueurs des lignes A, B, C, etc., et soit

$$f(1, b', c', \ldots) = 0 \qquad (1)$$

la relation trouvée entre ces nombres.

Laissons *en second lieu* l'unité de longueur indéterminée, et soient alors a, b, c, etc., les nombres, indéterminés aussi, qui mesurent les lignes A, B, C, etc.

Le rapport de deux grandeurs étant indépendant de l'unité particulière adoptée pour les mesurer, on aura les relations suivantes :

$$\frac{b'}{1} = \frac{b}{a}, \quad \frac{c'}{1} = \frac{c}{a}, \ldots,$$

ou

$$b' = \frac{b}{a}, \quad c' = \frac{c}{a}, \ldots.$$

Donc, en remplaçant dans l'équation (1) les nombres

b', c', etc., par leurs valeurs, nous aurons la relation générale cherchée

$$(2) \qquad f\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right) = 0;$$

équation homogène de degré zéro, et qui demeurera encore homogène en prenant le degré m si, pour faire disparaître les dénominateurs, on multiplie tous les termes par la plus haute puissance de a, a^m qui entre *algébriquement* en dénominateur.

Remarque. Cette démonstration contient en même temps l'indication de la marche à suivre pour rétablir l'indétermination de l'unité dans une équation quand on a pris d'abord l'une des lignes de la figure pour unité de longeur. Elle s'applique d'ailleurs à toutes les relations possibles entre les éléments de la figure, soit que ces relations puissent s'exprimer algébriquement, soit qu'elles se traduisent par des équations transcendantes, tandis que la démonstration ordinaire, outre les inconvénients signalés plus haut, s'applique seulement au premier cas.

DEUX THÉORÈMES RELATIFS A LA PARTITION DES NOMBRES;

PAR M. PAUL VOLPICELLI.

Lemme. Soit

$$c = 2^\mu h_1^\alpha h_2^\beta \ldots h_k^\tau,$$

où μ, α, β,..., τ représentent des entiers, et h_1, h_2, h_3,..., h_k expriment des nombres premiers. En posant

$$H = (\alpha + 1)(\beta + 1)\ldots(\tau + 1),$$

les nombres ω_1, ω_2 des solutions entières de l'équation

$$x^2 - y^2 = c$$

sont représentés par les équations

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{(-1)^{2^\mu}(\mu - 1)\mathrm{H}}{2}, \\ \omega_2 &= \frac{(-1)^{2^\mu}(\mu - 1)\mathrm{H} - 1}{2}. \end{aligned} \right.$$

La première de ces formules se rapporte au cas dans lequel au moins un des exposants μ, α, β,..., τ est impair, et la seconde n'est applicable que quand les mêmes exposants sont tous pairs. Dans le cas de

$$\alpha = \beta = \ldots = \tau = 0,$$

μ devra être impair dans la première et pair > 2 dans la seconde. En faisant

$$\alpha = \beta = \ldots = \tau = 1,$$

on aura de la première, par corollaire,

$$\omega_3 = 2^{k-1},$$

formule déjà donnée par Legendre (*) et par Poinsot (**). En outre, en supposant que h_1, h_2,..., h_k soient tous nombres premiers de la forme $4m + 1$, le nombre des solutions entières de l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 = c$$

est exprimé par les équations

$$(2)\qquad \gamma = \frac{1}{2}\mathrm{H},\quad \gamma' = \frac{1}{2}(\mathrm{H} + 1),\quad \gamma'' = \frac{1}{2}(\mathrm{H} - 1).$$

(*) *Théorie des nombres*; t. I, p. 8; Paris, 1830.
(**) *Comptes rendus*; t. XXVIII, p. 582; mai 1849.

La première de ces formules est applicable quand, quel que soit μ, un au moins des exposants $\alpha, \beta, \ldots, \tau$, est impair; la deuxième quand, μ étant impair, les mêmes exposants sont tous pairs; la troisième quand, μ étant pair ou zéro, tous les autres exposants sont pairs (*).

THÉORÈME I. *Tout nombre* c, *excepté le double d'un impair, est autant de fois représenté par la somme de* x — y *nombres impairs consécutifs, en commençant par* 2y + 1 *et en terminant par* 2x — 1, *qu'il y a de solutions entières pour l'équation*

$$x^2 - y^2 = c,$$

le nombre desquelles est donné par les équations (1). *Si* c *est carré, il y aura de plus la décomposition suivante :*

$$c = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2\sqrt{c} - 1.$$

Exemple : Qu'on ait

$$x^2 - y^2 = 72 = 2^3 . 3^2,$$

on a

$$\mu = 3, \quad \alpha = 2,$$

et pour cela

$$\omega_1 = 3;$$

donc

$$x = 19, \ 11, \ 9; \quad y = 17, \ 7, \ 3;$$

d'où

$$\begin{aligned} x - y &= 2, \ 4, \ 6, \\ 2y + 1 &= 35, \ 15, \ 7, \\ 2x - 1 &= 37, \ 21, \ 17; \end{aligned}$$

et enfin

$$72 = \begin{cases} 35 + 37, \\ 15 + 17 + 19 + 21, \\ 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17. \end{cases}$$

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. A.-L. Crelle; tome XLIX.

THÉORÈME II. *Tout nombre* c *qui se décompose en deux carrés* x_1^2, y_1^2 *est la somme de deux progressions arithmétiques dont la première se forme de* y_1 *termes, en commençant par* 2 *et en terminant par* $4y_1 - 2$, *et la seconde de* $x_1 - y_1$ *termes, en commençant par* $2y_1 + 1$ *et en terminant par* $2x_1 - 1$. *Il y aura pour* c *autant de ces décompositions qu'il y a des solutions entières pour l'équation*

$$x_1^2 + y_1^2 = c,$$

dont le nombre est donné par les équations (2). *Si* c *est carré, il y aura* de plus *la décomposition*

$$c = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2\sqrt{c} - 1.$$

Exemple : Qu'on ait

$$c = 1105 = 17.13.5,$$

les solutions entières de l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 = 1105$$

seront

$$x_1 = 32,\ 31,\ 24,\ 33;\quad y_1 = 9,\ 12,\ 23,\ 4;$$

d'où

$$4y_1 - 2 = 34,\ 46,\ 90,\ 14;\quad 2y_1 + 1 = 19,\ 25,\ 47,\ 9;$$
$$2x_1 - 1 = 63,\ 61,\ 47,\ 65;\quad x_1 - y_1 = 23,\ 19,\ 1,\ 29;$$

et enfin

$$1105 = \begin{cases} 2 + 6 + 10 \ldots + 34 + 19 + 21 + \ldots + 61 + 63, \\ 2 + 6 + \ldots + 46 + 25 + 27 + \ldots + 59 + 61, \\ 2 + 6 + \ldots + 90 + 47, \\ 2 + 6 + \ldots + 14 + 9 + 11 + \ldots + 63 + 65. \end{cases}$$

SOLUTION DE LA QUESTION 306

(voir page 211);

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Appelons, pour abréger, *rayons pivotants* les rayons tels que Sa_p et *rayons tangentiels* les tangentes issues des points b_p. Soient E le point de concours des côtés AC, BD; i le point où AB rencontre la transversale L; k, l, m les points où L est coupée par les autres côtés AC, DB, CD du quadrilatère ABDC; enfin, soient e, f les points doubles des deux divisions homographiques a_p, etc., b_p, etc.

La courbe passe par le point S; car si l'on regarde le côté SBi comme étant un *rayon tangentiel*, le *rayon pivotant* Si' qui lui correspond, quel qu'il soit, le coupe au point S.

Pour tout autre rayon pivotant Sa_p, on a une origine b_p différente de i, et cette origine donne lieu à deux tangentes (réelles ou imaginaires) qui déterminent toujours deux points de la courbe sur le rayon Sa_p, sans compter le point S qui s'y trouve déjà. La courbe est donc du troisième degré, puisque toute transversale issue du point S la coupe en trois points (*).

Prenons la droite SC pour rayon pivotant. La conique à décrire est assujettie à toucher à la fois les trois droites CA, CS, CD qui concourent au même point C et les deux droites BA, BD. Or, il n'y a que la droite CD, ellipse infiniment aplatie, qui satisfasse à la question. Les rayons tangentiels passent dans ce cas par les extrémités C et D de cette droite. Donc le point C appartient à la courbe.

(*) Il reste à démontrer que le point S n'est pas un point multiple. TM.

Mêmes raisonnements pour les points E et D.

Il est évident que la courbe passe aussi une seule fois par chacun des points doubles e, f. Cherchons le troisième point d'intersection de la courbe et de la transversale L; ce point est unique. Pour le déterminer, inscrivons une conique dans le pentagone formé par le quadrilatère donné et par la transversale; puis menons par le point S (au moyen du théorème de M. Brianchon) la tangente Sa_p à cette conique. Si l'on regarde cette tangente comme étant le rayon pivotant actuel, L sera l'un des rayons tangentiels conjugués. Donc le point a_p où la tangente Sa_p coupe L, est le troisième point cherché.

Nous avons déjà deux points de la courbe sur chacun des côtés ACk, CDm, DBl, savoir : C et E sur AC, C et D sur CD, D et E sur DB. Pour obtenir les troisièmes points d'intersection respectifs, traçons les rayons pivotants conjugués respectivement Sk', Sm', Sl'. Les rayons couperont les côtés correspondants en des points qui sont les points cherchés.

Voilà donc neuf points de la courbe déterminés sans tracer aucune conique. On peut ensuite achever la construction en employant le procédé indiqué par M. Chasles dans les *Comptes rendus* du 30 mai 1853, mais rien n'empêche d'effectuer la construction même de l'énoncé qui n'exige pas davantage le tracé des coniques. En effet, pour chacune d'elles, le problème à résoudre se réduit à mener par un point deux tangentes à une conique déterminée par cinq tangentes données. Prenons quatre de celles-ci; elles forment un quadrilatère et les tangentes cherchées forment un faisceau en involution avec les quatre rayons qui joignent le point donné aux quatre sommets de ce quadrilatère (*Géométrie supér.*, p. 667).

Formons un autre quadrilatère avec quatre autres tangentes prises dans les cinq qui sont données, les tangentes cherchées sont aussi en involution avec les rayons qui aboutissent aux sommets de ce second quadrilatère. Coupant toutes les lignes de la figure par une transversale arbitraire, le problème est ramené à celui du n° 271 de la *Géométrie supérieure*.

Ainsi la question est complétement résolue. Remarquons, chemin faisant, que le faisceau des coniques est homographique avec la division de points que leurs centres déterminent sur la droite qui les contient tous, et, plus généralement, avec la division de points formée par les pôles d'une droite quelconque du plan de la figure pris relativement à ces coniques.

Le théorème 306 donne lieu au suivant :

THÉORÈME. *On donne dans un plan:* 1° *quatre points* 1, 2, 3, 4; 2° *une droite* L *passant par l'un de ces points,* 1 *par exemple, et deux divisions homographiques* m, n, etc., m′, n′, *etc., sur cette droite;* 3° *un point quelconque* O *hors de la droite. Par un point variable* m *de la première division et les quatre points* 1, 2, 3, 4, *on fait passer une conique et l'on joint le point* O *au point* m′, *conjugué de* m, *par un rayon* Om′ *qui coupe la conique en deux points* α, β; *enfin on joint le point* m *à ces deux points. Toutes les droites telles que* mα, mβ *enveloppent une courbe de troisième classe qui touche la droite* L, *les côtés* 2-3, 3-4 *du quadrilatère* 1, 2, 3, 4, *sa diagonale* 2-4 *ainsi que les deux rayons* Oe, Of *qui joignent le point* O *aux points doubles des deux divisions homographiques tracées sur* L.

La loi de *dualité* dispense de prouver ce second théorème. La démonstration est corrélative de la précédente et donne lieu aux mêmes considérations.

NOTE

Sur la forme préférable des triangles géodésiques;

PAR M. E. GAUCHEREL,

Capitaine sous-directeur des études à l'École impériale spéciale Militaire.

La forme préférable des triangles géodésiques est la forme équilatérale, parce que le triangle équilatéral présente l'avantage de conserver les mêmes longueurs aux côtés et d'embrasser la plus grande surface avec le moindre nombre de triangles.

On a voulu prouver que l'analyse confirmait ce principe, et, dans le *Traité de Géodésie* de Puissant, on trouve une démonstration qui a été jusqu'à présent admise dans l'enseignement.

La question est ainsi posée : une base b d'un triangle ABC est mesurée exactement, les deux angles A et B comportent une même erreur dA. Pour quelle forme de triangle l'erreur qui en résulte sur les côtés sera-t-elle un minimum?

On suppose que l'erreur se produit d'abord dans le même sens sur les deux angles, et on est conduit à l'expression

$$da = a\,dA\,(\cot A - \cot B).$$

On en déduit que da est un minimum pour $A = B$, et que le même calcul appliqué au côté c donne le minimum de dc pour $C = B$.

Ces deux conclusions ne sont pas exactes. En effet : 1° ce n'est pas le minimum de l'erreur absolue da qui a lieu pour $A = B$, c'est le minimum de l'erreur relative

$\frac{da}{a}$; 2° en conservant les mêmes hypothèses sur les variations de A et de B, on n'arrive pas à l'expression

$$dc = c \, . \, d\text{A}\,(\cot \text{C} - \cot \text{B}),$$

puisqu'on ne peut pas supposer que la variation des trois angles est de même signe, les trois erreurs angulaires étant assujetties à la relation

$$d\text{A} + d\text{B} + d\,\text{C} = 0.$$

Après avoir supposé que l'erreur $d\text{A}$ est de même signe sur les deux angles A et B, on suppose qu'elle est de signes contraires. On est conduit alors à l'expression

$$da = \pm a \, . \, d\text{A} \frac{2 \sin \text{C}}{\cos(\text{A} - \text{B}) + \cos \text{C}}:$$

d'où l'on conclut que l'erreur *da* est la plus petite possible pour $\text{A} = \text{B}$. Comme précédemment, cette conclusion ne peut pas s'appliquer à l'erreur absolue *da*. De plus, elle n'est vraie que pour une valeur constante de C; elle établit donc seulement une comparaison entre les différents triangles ayant même base *b* et même angle C. J'ai émis la même opinion dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 25 février 1850.

En résumé, cette démonstration ne prouve pas que le triangle équilatéral soit celui de tous les triangles construits sur une même base pour lequel l'erreur absolue ou l'erreur relative sur les côtés est la plus petite possible. Il faut donc regretter qu'une pareille démonstration se soit glissée dans le bel ouvrage de Puissant, et s'étonner qu'elle se soit maintenue aussi longtemps dans l'enseignement.

M. le commandant Salneuve, dont l'ouvrage est adopté pour l'enseignement de la topographie et de la géodésie à l'École impériale d'État-major, se contentait, dans sa première édition, de reproduire à peu de choses près la première partie de la démonstration précédente.

Dans la seconde édition, l'auteur traite la question d'une manière plus complète, mais l'erreur déjà signalée et relative aux signes des variations angulaires se reproduit également dans cette nouvelle démonstration.

La conclusion de l'auteur est celle-ci : *Au point de vue théorique, c'est le triangle équilatéral qui est le meilleur, lorsque les erreurs angulaires sont de même signe; c'est le triangle isocèle rectangle, quand ces erreurs sont de signes contraires. Mais il est impossible, dans la pratique, de se soumettre à ces prescriptions....*

Voici donc un professeur distingué conduit à reconnaître que le triangle équilatéral est le meilleur, non pas parce qu'il est toujours le plus exactement déterminé, mais quoiqu'il ne jouisse pas de cette propriété. C'est ainsi que j'avais formulé une des conséquences du Mémoire cité ci-dessus.

M. le commandant Testu, dans son *Traité de Topographie et de Géodésie*, et M. le commandant Livet, dans le cours de géodésie qu'il faisait à l'Ecole d'Application de Metz, donnent la démonstation telle qu'elle se trouve dans l'ouvrage de Puissant.

A l'Ecole impériale spéciale Militaire, la même proposition est démontrée sans le secours de l'analyse et par cette seule considération, que chacun des angles doit se rapprocher autant que possible de l'angle droit. Or il n'est pas exact d'appliquer aux angles à la base ce qui ne peut se démontrer que pour l'angle au sommet.

Dans son ouvrage sur les approximations numériques, M. Vieille cherche l'erreur relative sur un côté; il arrive à l'expression

$$\frac{da}{a} = dA\,(\cot A - \cot B).$$

Il peut donc dire que le minimum de cette expression a lieu pour $A = B$; mais son raisonnement n'est plus exact quand il ajoute qu'on trouverait de même

$$\frac{dc}{c} = dC\,(\cot C - \cot B).$$

Le 25 février 1850, j'eus l'honneur de remettre à M. Arago un Mémoire dans la première partie duquel j'établissais que la démonstration donnée dans l'ouvrage de Puissant n'était pas exacte; je proposais, dans la seconde, d'envisager la question sous un autre point de vue. Le Mémoire fut présenté le même jour.

Dans la séance du 15 avril suivant, M. le colonel Hossard présentait un Mémoire dans lequel il se proposait de démontrer que le triangle équilatéral donne les meilleures conditions d'exactitude. Dans les séances des 27 mai et 3 juin, M. Hossard adressait une modification et un supplément à son premier travail, et publiait à la même époque deux petites brochures extraites des Mémoires soumis à l'Académie.

La même année, dans les numéros de mai et de juin des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, M. le général Piobert publiait un travail sur la forme préférable des triangles géodésiques. Enfin, dans la séance du 5 août, le savant général lisait sur le même sujet une Note que l'on trouve en entier dans le *Compte rendu* de la séance.

Je me propose de donner en quelques mots les conclusions des travaux de MM. Hossard et Piobert, sans entrer dans le détail des calculs, sans suivre même la marche des raisonnements.

M. Hossard dit en débutant : *L'erreur sur un côté provenant des erreurs angulaires sera exprimée par le rapport de la variation absolue de ce côté à sa longueur.*

De même, l'erreur sur la position d'un point déterminé aura pour expression le quotient du déplacement absolu de ce point par la distance au point de départ.

C'est ce quotient ou déplacement relatif qu'il importe de rendre le moindre possible.

Je ne comprends pas pourquoi le déplacement du sommet est rapporté au point de départ, ni pourquoi l'auteur dit plus tard que ce point de départ est l'extrémité la plus rapprochée de la base.

Dans la détermination d'un point géodésique, ce sera le déplacement absolu de ce point que je m'attacherai à rendre le moindre possible, et je crois être dans le vrai.

En effet, un canevas géodésique se résume dans les coordonnées des différents sommets des triangles, et les coordonnées les plus exactes correspondront évidemment aux points dont les déplacements absolus seront les moindres. Tout ce qu'on peut dire en dehors de ce principe peut faire l'objet de Mémoires fort intéressants, mais ne doit pas trouver place dans l'enseignement. Quoi qu'il en soit, en suivant le raisonnement de l'auteur on arrive à cette conclusion : *Lorsque les observations portent sur les trois angles, le triangle équilatéral est celui pour lequel la plus grande erreur à craindre sur la position du sommet est la moindre possible.*

J'ajoute qu'il est question ici de l'erreur relative, c'est-à-dire du rapport du déplacement absolu du sommet à la longueur du plus petit des deux côtés adjacents à ce sommet.

M. le colonel Hossard examine ensuite le cas où les deux angles à la base sont seuls observés, et arrive à cette conclusion, que le triangle rectangle isocèle est celui pour lequel l'erreur relative sur la position du point est la moindre possible.

Puis vient la recherche du déplacement absolu dans le cas du triangle isocèle; la conclusion est que le triangle à préférer serait le triangle isocèle rectangle au sommet.

M. le colonel Hossard fait enfin remarquer que si, au lieu de chercher le déplacement relatif par rapport à l'un des côtés, on eût cherché le déplacement relatif par rapport à la hauteur, *on serait encore arrivé au même résultat que précédemment, à savoir, que lorsque les trois angles sont observés, la forme équilatérale est celle qui donne lieu au minimum des plus grandes erreurs.*

Toutefois, il semble, ajoute l'auteur, *que l'erreur doit être exprimée en fonction de la distance du sommet du triangle au point le plus voisin de la base pris comme point de départ, plutôt qu'en fonction de la hauteur du triangle.*

Je ne trouve pas cette opinion assez motivée, et le déplacement relatif à la hauteur du triangle aurait pour moi plus de signification que celui qui a été plus particulièrement étudié par M. Hossard.

Dans la seconde brochure, M. Hossard cherche le triangle pour lequel l'erreur moyenne est un minimum; mais ici la discussion me paraît devenir plus spéculative qu'utile, et je ne suivrai pas l'auteur sur ce terrain. Je constate seulement que cette nouvelle considération conduit à conclure que le triangle préférable est compris entre le triangle rectangle et le triangle équilatéral.

Je termine ce résumé succinct en témoignant la vive impatience que j'éprouve de savoir comment M. le colonel Hossard, nommé récemment professeur de géodésie à l'École Polytechnique, fera la leçon sur cette matière.

Si je veux maintenant examiner le travail de M. le général Piobert sur le même sujet, je ne considérerai que la Note contenue dans le *Compte rendu* de la séance du 5 août 1850. Cette Note, qui résume les précédentes, est une discussion extrêmement remarquable de la question.

Le savant général insiste sur l'avantage de rapporter la déformation des triangles soit à la hauteur, soit à la longueur des côtés, et cherche le minimum de cette déformation, soit pour la moyenne des plus grandes déformations dans les deux sens, soit pour la plus grande déformation dans les deux sens, soit pour le produit des plus grandes déformations dans les deux sens, soit pour l'aire de l'espace dans lequel le sommet du triangle peut errer, soit pour le rapport de cette aire à celle du triangle, soit pour la déformation en hauteur, soit enfin pour la déformation latérale. L'auteur détermine la valeur des angles des triangles préférables, suivant que l'on pose l'une ou l'autre des conditions énumérées ci-dessus.

Je répéterai, à cet égard, ce que j'ai dit précédemment : qu'il me semble beaucoup plus rationnel, beaucoup plus simple et beaucoup plus utile d'établir la discussion sur le déplacement absolu du sommet.

Je me propose maintenant d'étudier la même question en me plaçant à un point de vue différent de celui des auteurs qui l'ont précédemment traitée.

Je pars de ce principe, que la forme préférable des triangles géodésiques est la forme équilatérale, parce que le triangle équilatéral présente l'avantage de conserver les mêmes longueurs aux côtés et d'embrasser la plus grande surface avec le moindre nombre de triangles ; mais je ne chercherai pas à démontrer par l'analyse que le triangle équilatéral est celui qui, pris isolément, détermine le plus exactement son sommet, car je serais conduit à un tout autre résultat.

Ce que je demanderai à l'analyse ce sera :

1°. De donner la limite de l'erreur possible sur la position du sommet d'un triangle lorsque l'on connaît la base, les angles et l'erreur angulaire que comportent ces angles;

2°. D'indiquer de combien on peut s'écarter du triangle équilatéral sans encourir sur la position du sommet une erreur plus grande que la limite assignée;

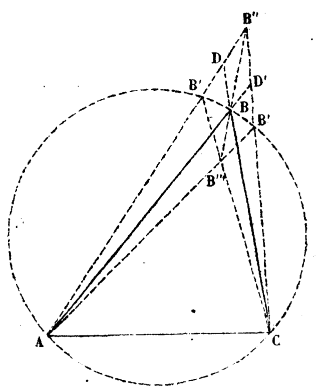
3°. De donner la plus grande dimension de la base à laquelle on pourra rattacher un sommet avec une approximation donnée;

4°. De donner l'approximation qu'on doit obtenir dans les mesures d'angles pour que le sommet du triangle s'appuyant sur une base donnée, soit déterminé avec une approximation donnée.

Comme il n'est pas possible de suivre l'enchaînement des erreurs que comportent les opérations successives d'un canevas, on aura satisfait aux conditions d'un bon travail en imposant une limite d'erreurs très-étroite aux différentes parties de ce travail. Je n'aurai donc à m'occuper que des conditions d'exactitude dans la détermination d'un point qu'on veut rattacher à une base.

Je dois commencer par chercher la relation qui existe entre les différents éléments que je veux combiner.

Soit AC une base exactement mesurée; on veut ratta-



cher le point B à cette base. Les deux angles A et C ont été mesurés et comportent une même erreur α, quelle est la relation qui existe entre la base b, l'angle au sommet B, les angles à la base A et C, l'erreur angulaire α et D le plus grand déplacement possible du sommet?

L'erreur angulaire α sera toujours supposée assez petite pour pouvoir être négligée devant les plus petits angles qui peuvent entrer dans un triangle géodésique.

Si l'erreur α se produit en sens inverse sur les deux angles A et C, le sommet viendra en B' sur la circonférence CBA, et l'on aura

$$\mathrm{BB}' = \frac{c \sin \alpha}{\sin \mathrm{C}} = \frac{b \sin \alpha}{\sin \mathrm{B}}.$$

Le sommet viendra en B'', si l'erreur se produit en augmentation sur les deux angles; en B''', si elle se produit en diminution.

Dans le triangle différentiel ABD, on a

$$\mathrm{BD} = \frac{c \sin \alpha}{\sin (\mathrm{B} - \alpha)} = \frac{c \sin \alpha}{\sin \mathrm{B}};$$

de même

$$\mathrm{BD}' = \frac{a \sin \alpha}{\sin \mathrm{B}};$$

B''D ne diffère de BD' que d'une quantité très-petite du second ordre, et l'on peut poser

$$\mathrm{B}'' \mathrm{D} = \frac{a \sin \alpha}{\sin \mathrm{B}}.$$

Mais

$$\mathrm{BB}'' = \sqrt{\mathrm{BD}^2 + \mathrm{B}''\mathrm{D}^2 + 2\,\mathrm{BD}.\mathrm{BD}'' \cos (\mathrm{B} - \alpha)};$$

donc

$$\mathrm{BB}'' = \frac{\sin \alpha}{\sin \mathrm{B}} \sqrt{c^2 + a^2 + 2ac \cos \mathrm{B}}.$$

On a

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}, \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B};$$

donc

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin^2 B} \sqrt{\sin^2 C + \sin^2 A + 2 \sin A . \sin C \cos B};$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin^2 B} \sqrt{\sin^2 B + 4 \sin A \sin C \cos B},$$

ou sous la forme

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B} \sqrt{\sin^2 A + \left(\cos A + \frac{2 \sin A \cos B}{\sin B}\right)^2},$$

BB‴ est sensiblement égale à BB″. La valeur trouvée pour BB″ est d'ailleurs l'expression rigoureusement exacte du déplacement BB‴. On trouverait, pour l'expression exacte de BB″,

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B} \sqrt{\sin^2 A + \left[\cos A + \frac{2 \sin (A + \alpha) \cos (B - \alpha)}{\sin (B - 2\alpha)}\right]^2}.$$

Pour avoir le plus grand déplacement possible, il faut donc chercher quelle est, suivant la forme du triangle, la plus grande des deux valeurs de ce déplacement :

$$BB' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B},$$

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B} \sqrt{\sin^2 A + \left(\cos A + \frac{2 \sin A \cos B}{\sin B}\right)^2}.$$

Or, pour $B < 100$ grades, on a

$$BB'' > BB',$$

pour $B = 100$ grades,

$$BB'' = BB',$$

et pour $B > 100$ grades,

$$BB'' < BB'.$$

Donc, lorsque nous voudrons imposer une limite à l'erreur possible sur la position du sommet, il faudra considérer BB'' si l'angle au sommet est aigu, et BB' s'il est obtus.

Supposons maintenant $B < 100$ grades et discutons la valeur de BB'':

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B} \sqrt{\sin^2 A + \left(\cos A + \frac{2 \sin A \cos B}{\sin B}\right)^2}.$$

On voit que pour une même valeur de A, BB'' augmente indéfiniment lorsque B diminue depuis 100 grades jusqu'à zéro. La plus petite valeur de BB'' que nous devons considérer est donc celle qui correspond à

$$B = 100^g,$$

d'où

$$BB'' = b \sin \alpha.$$

Au delà, c'est-à-dire pour $B > 100$ grades, il faut prendre la valeur de BB'.

L'expression

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin^2 B} \sqrt{\sin^2 B + 4 \sin A \sin C \cos B}$$

montre que, pour une même valeur de $B < 100$ grades, le maximum du déplacement a lieu pour le maximum du produit $\sin A \sin C$, c'est-à-dire pour $A = C$. Donc, de tous les triangles qui ont même base et même angle aigu au sommet, celui qui donne le plus grand déplacement absolu du sommet est le triangle isocèle.

Pour $A = C$, on a

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin^2 B} \sqrt{\sin^2 B + 4 \sin^2 A \cos B}$$

qui se met sous la forme

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2} B},$$

expression qui donne le plus grand déplacement correspondant à une valeur de B plus petite que l'angle droit; elle prouve en outre que, de tous les triangles isocèles qui s'appuient sur une même base, le triangle rectangle est celui dont le sommet est le moins déplacé par les erreurs commises dans la mesure des angles à la base.

Pour $A = B = C$, l'expression BB'' devient

$$BB'' = 2\, b \sin \alpha.$$

Donc le déplacement absolu du sommet d'un triangle équilatéral est double de celui du sommet d'un triangle rectangle isocèle s'appuyant sur la même base.

Pour des valeurs de B plus grandes que 100 grades, il faut discuter l'expression

$$BB' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B}.$$

Cette expression, indépendante des angles à la base, montre que le plus grand déplacement possible est le même pour tous les triangles qui ont même angle au sommet; elle montre également que le déplacement augmente lorsque l'angle B augmente depuis 100 grades jusqu'à 200 grades.

Nous pouvons maintenant résoudre les quatre questions que nous nous sommes posées dès le principe.

1°. La limite de l'erreur possible sur la position du sommet d'un triangle est donnée par l'expression

$$E = \frac{b \sin \alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2} B}$$

si l'angle B est aigu, et par

$$E = \frac{b \sin \alpha}{\sin B}$$

si l'angle B est obtus. Nous remarquerons que ces valeurs de E sont proportionnelles à b et à α.

2°. Si la limite E du déplacement est donnée ainsi que B et α, on trouve deux limites pour l'angle B :

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{b \sin \alpha}{2E}}$$

donne la limite des angles aigus, et

$$\sin B = \frac{b \sin \alpha}{E}$$

la limite des angles obtus.

3°. On connaît α et E, on demande la plus grande base à laquelle on puisse rattacher un sommet. Cette base correspondra à un triangle rectangle au sommet; nous prendrons donc

$$E = b \sin \alpha,$$

d'où

$$b = \frac{E}{\sin \alpha},$$

expression de la limite des bases.

4°. Si E, b et B sont donnés, on trouve, pour les limites de α,

$$\sin\alpha = \frac{2\,E \sin^2 \frac{1}{2} B}{b}$$

si B est aigu, et

$$\sin\alpha = \frac{E \sin B}{b}$$

si B est obtus.

Nous avons supposé que les deux angles à la base étaient seuls mesurés, mais il n'en est pas toujours ainsi. Dans les réseaux géodésiques du premier ordre, on mesure les trois angles à 1 ou 2 secondes près; dans la géodésie du second ordre, on mesure également les trois angles, mais on se contente d'une approximation de 10 à 20 secondes. Enfin, dans la géodésie du troisième ordre, on ne mesure que les deux angles à la base avec la même approximation de 10 à 20 secondes. En topographie, on ne mesure que deux angles qui sont le plus souvent les deux angles à la base; si l'on fait un canevas trigonométrique, le graphomètre donne les angles avec une approximation égale à 1 ou 2 minutes; avec la planchette, on peut admettre une approximation de 5 minutes; avec la boussole et le déclinatoire, une approximation de 25 minutes.

Revenons à la géodésie du premier et du second ordre, et voyons en quoi la mesure des trois angles peut nous obliger à modifier ce que nous avons dit dans le cas de la mesure des angles à la base.

Soit

$$\alpha = 3m;$$

les plus grands déplacements sont donnés par les combinaisons suivantes sur les angles observés :

$$\begin{array}{lll} A \pm 3m, & A \pm 3m, & A \pm 3m \\ B \pm 3m, & B \mp 3m, & B \mp 3m, \\ C \mp 3m, & C \pm 3m, & C \mp 3m, \end{array}$$

auxquels cas les angles réduits sont :

$$\begin{array}{lll} A \pm 2m, & A \pm 2m, & A \pm 4m, \\ B \pm 2m, & B \mp 4m, & B \mp 2m, \\ C \mp 4m, & C \pm 2m, & C \mp 2m. \end{array}$$

Si nous voulons discuter la valeur du déplacement dans le cas de ces suppositions sur les erreurs angulaires, nous dirons :

Soit da l'erreur produite sur le côté a par l'erreur angulaire m, on a

$$da = \frac{c \sin m}{\sin B};$$

on a de même

$$dc = \frac{a \sin m}{\sin B}.$$

La combinaison

$$A + 2m, \qquad C - 4m$$

donne un déplacement D qui est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres, $2dc$ et $4da$, comprennent l'angle B. La combinaison

$$A - 2m, \qquad C + 4m$$

donne un déplacement qui ne diffère pas sensiblement du précédent.

De même le déplacement D' donné par les deux combinaisons

$$A \pm 2m, \qquad C \pm 2m$$

est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres, $2da$ et $2da$, comprennent l'angle supplémentaire de l'angle B.

De même encore, le déplacement D'', donné par les deux combinaisons

$$A \pm 4m, \qquad C \mp 2m,$$

est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres, $2da$ et $4dc$, comprennent l'angle B.

Nous tirons de là

$$D^2 = 4dc^2 + 16da^2 - 16\,da\,dc\cos B,$$
$$D'^2 = 4dc^2 + 4da^2 + 8\,da\,dc\cos B,$$
$$D''^2 = 4da^2 + 16dc^2 - 16\,da\,dc\cos B.$$

Enfin, le plus grand déplacement qui serait donné dans le cas de la mesure des angles à la base par les combinaisons

$$A \pm 3m, \qquad C \pm 3m,$$

peut être exprimé par

$$D'''^2 = 9da^2 + 9dc^2 + 18\,da\,dc\cos B.$$

Cherchant la plus grande de ces quatre expressions dans le cas de l'angle B aigu, nous voyons que D''' est toujours plus grand que D', et que si $a = c$, on a

$$D = D'';$$

si $a < c$, on a

$$da > dc \quad \text{et} \quad D > D'';$$

si $a > c$, on a

$$D < D''.$$

Donc, si nous supposons $a < c$, il faudra, pour trouver le plus grand déplacement, comparer D''' à D.

Nous avons

$$D'''^2 - D^2 = 5dc^2 - 7da^2 + 34\,da\,dc\cos B.$$

Donc, tant qu'on aura

$$7\,da^2 < 5\,dc^2 + 34\,da\,dc\cos B,$$

on aura

$$D''' > D.$$

De cette inégalité, on tire

$$\cos B > \frac{7\,da^2 - 5\,dc^2}{34\,da\,dc},$$

ou

$$\cos B > \frac{7\,c^2 - 5\,a^2}{34\,a\,.\,c},$$

ou enfin

$$\cos B > \frac{7 - 5\dfrac{a^2}{c^2}}{34\dfrac{a}{c}}.$$

La plus grande valeur de cette expression correspond à la plus petite valeur de $\frac{a}{c}$. Or, si nous supposons que les réseaux géodésiques ne comportent pas de triangles dans lesquels on ait $a < \frac{c}{2}$, nous pourrons prendre $\frac{1}{2}$ pour la plus petite valeur de $\frac{a}{c}$, auquel cas l'inégalité devient

$$\cos B > \frac{23}{136}, \quad \text{d'où} \quad B < 89^g.$$

Dans le cas de $A = C$, on aurait

$$\cos B > \frac{1}{17}, \quad \text{d'où} \quad B < 96^g.$$

Ces limites se rapprochent assez de l'angle droit pour qu'on puisse dire que lorsque l'angle au sommet est aigu, on a $D''' > D$. Donc les limites trouvées précédemment dans le cas de la mesure des angles à la base conviennent *a fortiori* au cas de la mesure des trois angles, lorsque l'angle au sommet est aigu.

Si l'angle B est obtus et si l'on suppose toujours $a < c$, la plus grande valeur du déplacement est encore D; mais on a

$$D'''^2 - D^2 = 5\,dc^2 - 7\,da^2 + 34\,da\,dc \cos B,$$

expression toujours négative pour $da > dc$ et $\cos B < 0$; par conséquent, $D > D'''$. Les limites trouvées pour les angles obtus dans le cas de la mesure des angles à la base ne conviennent donc plus au cas de la mesure des trois angles; il est alors nécessaire de les modifier, et on est conduit à le faire de la manière la plus simple en remarquant que les déplacements donnés par les combinaisons

$$A \pm 2m, \quad C \mp 4m$$

et

$$A \pm 4m, \quad C \mp 2m$$

sont toujours plus petits que ceux donnés par

$$A \pm 4m, \quad C \mp 4m.$$

Or ces derniers sont représentés par l'expression

$$\frac{b \sin \frac{4}{3} \alpha}{\sin B}:$$

donc les limites, dans le cas de la mesure des trois angles et de l'angle au sommet obtus, se déduisent de l'équation

$$E = \frac{b \sin \frac{4}{3} \alpha}{\sin B}.$$

Applications numériques.

1°. Quelle est la limite du déplacement du sommet d'un triangle équilatéral dont le côté est de 30000 mètres, l'erreur que comporte la mesure des angles étant de 1 seconde?

On a

$$E = 2 b \sin \alpha, \quad \sin 1'' = 0,00000157,$$

d'où

$$E = 0^{m},942.$$

2°. La base est de 10000 mètres, l'approximation angulaire est de 1 seconde, les sommets des triangles doivent être déterminés à $0^{m},1$ près. Quelles sont les limites des angles au sommet?

Pour la limite des angles aigus, nous avons

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{b \sin \alpha}{2 E}} = \sqrt{0,79},$$

d'où

$$\frac{1}{2} B = 17^{g}, \quad B = 34^{g}.$$

Pour la limite des angles obtus, nous avons

$$\sin B = \frac{b \sin 1'',33}{E} = 0,21,$$

d'où

$$B = 186^g,50.$$

Le même problème, sur une base de 30000 mètres, donne pour la limite des angles obtus

$$\sin B = 0,63, \quad B = 156^g,50.$$

3°. E et α ayant les mêmes valeurs que précédemment, quelle est la plus grande base à laquelle on puisse rattacher un sommet?

On a

$$b = \frac{E}{\sin\alpha} = 63700^m;$$

dimension que n'atteignent pas les côtés des triangles géodésiques.

La limite des côtés des triangles équilatéraux est donnée par l'expression

$$b = \frac{E}{2\sin\alpha} = 31800^m.$$

4°. On a

$$b = 20000^m, \quad B = 50^g, \quad E = 0^m,1.$$

Quelle est la limite de l'approximation que l'on doit obtenir dans la mesure des angles?

On a

$$\sin\alpha = \frac{2E\sin^2\frac{1}{2}B}{b},$$

d'où

$$\log.\sin\alpha = \bar{4},16668, \quad \sin\alpha = 0,00000147, \quad \alpha = 0'',94.$$

$E = 0^{m},1$	$\alpha = 1''$
$b = 40^{k}$	B $\frac{76^{g}}{137^{g}}$
$b = 35^{k}$	B $\frac{67^{g}}{147^{g}}$
$b = 30^{k}$	B $\frac{64^{g}}{157^{g}}$
$b = 25^{k}$	B $\frac{58^{g}}{165^{g}}$
$b = 20^{k}$	B $\frac{52^{g}}{172^{g}}$
$b = 15^{k}$	B $\frac{45^{g}}{180^{g}}$
$b = 10^{k}$	B $\frac{36^{g}}{187^{g}}$
$E = 1^{m}$	$\alpha = 10''$

Le tableau ci-joint résume les conditions d'exactitude relatives à la géodésie du premier ordre.

Le même tableau peut servir à la géodésie du second ordre en supposant

$$E = 1^{m}, \quad \alpha = 10''.$$

Supposons que l'on commence un canevas sur une base de 10000 mètres; le premier triangle qui s'appuiera sur cette base pourra avoir un angle au sommet de 36 grades et être isocèle. Il donnera de nouvelles bases de 1800 mètres environ, sur lesquelles on pourra appuyer des triangles isocèles ayant un angle au sommet de 50 grades et des côtés de 24 kilomètres.... On arrivera ainsi aux côtés de 30 kilomètres qui conviennent aux triangles équilatéraux. On conservera cette longueur de côtés jusqu'à ce qu'on veuille revenir à une base de 10 kilomètres qui servira de vérification. Le tableau montre alors combien il est plus facile de diminuer les côtés que de les augmenter. En effet, sur une base de 30 kilomètres, on peut appuyer un triangle isocèle dans lequel l'angle au sommet est de 157 grades; il en résulte des nouvelles bases de 16 kilomètres, desquelles on passe immédiatement à un côté de 10 kilomètres.

Rien ne serait plus facile que d'établir de pareils tableaux pour la géodésie du troisième ordre et pour la topographie.

Pour la géodésie du troisième ordre, on supposerait

$\alpha = 20''$, $E = 2$ mètres. Les limites des valeurs de B plus grandes que 100 grades seraient données par l'expression

$$\sin B = \frac{b \sin \alpha}{E}.$$

Dans les canevas topographiques exécutés au graphomètre, on ne considérerait plus la grandeur naturelle E du déplacement du sommet, mais le déplacement graphique e. On supposerait $\alpha = 2'$, $e = 0^m,0002$.

Dans les canevas à la planchette, on supposerait $\alpha = 5'$, $e = 0^m,0005$.

Dans les opérations de détail avec la boussole ou le déclinatoire, on supposerait $\alpha = 25'$, $e = 0^m,001$.

Revenant à l'ouvrage de M. Vieille sur les approximations numériques, ouvrage que j'ai cité plus haut, je dirai que l'auteur émet une opinion qui n'est pas fondée en disant que *ce qu'il importe de considérer dans tout calcul approximatif, c'est moins l'erreur absolue commise que le rapport de cette erreur au résultat cherché... C'est ce rapport seul, et non l'erreur absolue, qui caractérise nettement le degré d'approximation obtenu.*

Si l'on peut, dans certains cas, se proposer de calculer des longueurs, des surfaces, des volumes, etc., en se donnant la limite des erreurs relatives, il arrive aussi souvent qu'on voudra obtenir les mêmes mesures en se donnant la limite des erreurs absolues. Dans ce dernier cas, l'erreur relative calculée après coup caractérisera, il est vrai, le degré d'approximation obtenu.

J'ajouterai qu'il est certains cas où l'erreur relative n'aurait aucun sens; je citerai, par exemple, les calculs d'angles, de coordonnées, de cotes de hauteur (ce sont des coordonnées verticales) et les calculs des triangles géodésiques; les côtés et les azimuts auxquels conduisent ces derniers calculs sont de véritables coordonnées polaires, qu'on transforme ensuite en coordonnées rectangulaires.

Il n'est pas hors de propos de signaler ici qu'il est inexact de dire, comme le fait l'auteur, p. 3, qu'*une erreur, même très-petite, commise sur la mesure d'une base géodésique, irait en grandissant dans le calcul des triangles du réseau dont cette base est un côté et pourrait conduire à des résultats très-fautifs*. Il est très-facile de se rendre compte que cette erreur se propage, au contraire, sans augmentation.

THÉORIE ANALYTIQUE DU GYROSCOPE DE M. L. FOUCAULT;

PAR M. YVON VILLARCEAU (*).

1. Lorsque ce Mémoire a été écrit, la théorie du gyroscope avait déjà été traitée par M. Quet, et les résultats des recherches de ce physicien avaient été publiés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. XXXV, pages 686 et suivantes). Cette publication avait échappé à M. Yvon Villarceau, dont l'attention avait été détournée par d'autres préoccupations. Il hésita d'abord à livrer son manuscrit au rédacteur des *Nouvelles Annales;* mais ayant obtenu les intégrales rigoureuses des équations principales du problème, alors que M. Quet n'avait présenté que des solutions suffisamment approchées, et présumant, d'ailleurs, que le travail de ce savant pourrait

(*) Ce Mémoire m'a été remis par M. Yvon Villarceau le 1er février 1853. La publication de son ouvrage sur l'*Établissement des Arches de pont* et les changements survenus dans ses fonctions à l'Observatoire de Paris ont empêché jusqu'ici M. Yvon Villarceau de surveiller l'impression du Mémoire actuel. O. TM.

différer du sien par la mise en équation (*), M. Yvon Villarceau s'est décidé à publier un travail qu'il considère comme offrant plutôt d'intéressants exercices de mécanique, que des moyens sérieux de remplacer les déterminations astronomiques par des expériences faites à l'aide du gyroscope.

La solution du problème des latitudes et des azimuts à l'aide de l'instrument de M. L. Foucault est étudiée dans ce Mémoire; mais l'auteur insiste pour que l'on n'envisage ses recherches que comme de purs exercices de mécanique.

La théorie du gyroscope a pu être fondée sur les théorèmes qui concernent les forces apparentes dans les mouvements relatifs; mais ces théorèmes n'étant pas encore très-généralement répandus, malgré les travaux des géomètres et des mécaniciens, l'auteur a préféré baser ses recherches sur la considération des mouvements absolus.

---

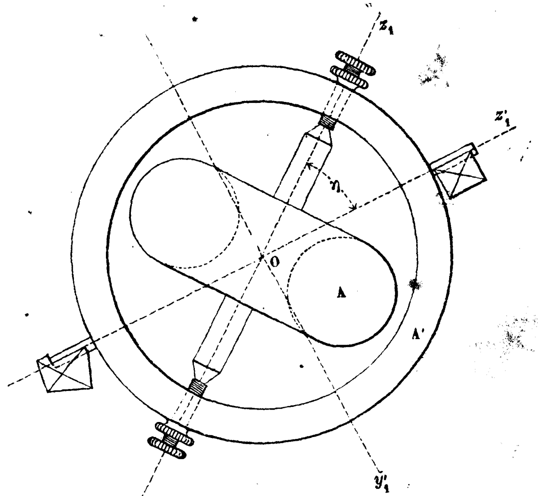
2. Le gyroscope consiste principalement en un anneau A′ (*fig.* 1) mobile autour d'un axe fixe Oz'_1 (**) et dans l'intérieur duquel un solide de révolution A tourne autour de son axe de figure Oz_1, lequel est entraîné dans le mouvement de l'anneau. Le solide de révolution est un tore dans l'appareil de M. Foucault, et l'axe de figure y est perpendiculaire à l'axe de l'anneau. Nous regarderons le solide de révolution comme ayant une figure quelconque et étant incliné sur l'axe de l'anneau d'un angle quel-

(*) La publication faite depuis par M. Quet dans le *Journal* de M. Liouville a pleinement confirmé cette prévision.

(**) La disposition physique de l'axe de rotation Oz'_1, dans l'appareil de M. L. Foucault, n'est pas celle que nous donnons dans la figure. Nous supposons ici que l'anneau tourne autour de deux tourillons cylindriques, attendu que cette forme de tourillons est la seule qui se prête aisément au calcul des frottements.

conque η. Seulement, pour abréger, nous lui conserverons la dénomination de *tore*.

FIG 1.



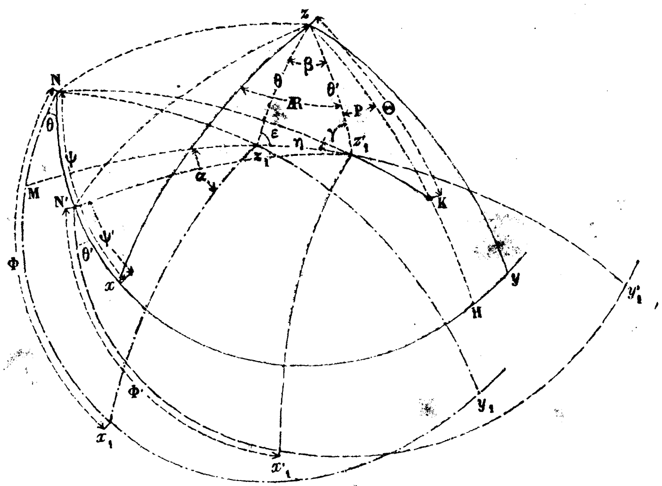
Nous admettrons que les centres de gravité du tore et de l'anneau coïncident en un point O, et que l'axe de figure du tore et l'axe de rotation de l'anneau se coupent en ce même point. Nous admettrons encore que ce dernier axe soit un axe principal de l'anneau. Quant à l'axe de figure du tore, nous établirons une pareille condition, qui sera nécessairemant remplie si la densité du tore est uniforme.

Rappelons enfin une convention relative au sens positif des vitesses de rotation et des moments. D'après la théorie des projections, la droite autour de laquelle s'effectue un mouvement de rotation réel ou virtuel d'un corps solide, et la droite à laquelle se rapportent les moments des forces, présentent chacune deux sens ou côtés distincts. L'un des côtés en particulier est pris pour le sens positif de l'axe de rotation ou des moments, on l'appelle alors *axe de rotation* ou *axe des moments :* ce côté reste arbitraire tant que le sens positif des rotations ou des moments n'est pas défini ; il est déterminé dans le cas contraire. Faisons coïncider l'un des trois axes rectangulaires x, y, z avec un axe de rotation ; la rotation réelle ou virtuelle autour de cet axe sera positive, lorsque le mouvement projeté sur le plan des deux autres axes sera celui de y vers z, de z vers x ou de x vers y, c'est-à-dire aura lieu dans l'ordre alphabétique des trois lettres x, y et z, supposées rangées circulairement. Réciproquement, l'axe d'une rotation ou d'un moment étant supposé connu, pour trouver le sens positif de la rotation ou du moment autour de cet axe, il faudra amener l'un des trois axes x, y, z à coïncider avec l'axe donné, en ayant le soin de ne pas permuter les deux autres, et reconnaître l'ordre alphabétique de ces derniers. Le sens positif de la rotation ou du moment sera celui que détermine l'ordre alphabétique ainsi reconnu.

3. Ceci posé, du point O comme centre, décrivons une sphère, et menons par ce point un plan de direction fixe qui coupe la sphère suivant le grand cercle $NN'xy$ (*fig* 2). Menons dans ce plan deux axes rectangulaires x et y, et perpendiculairement un axe z. Pour fixer les idées, notre plan fixe sera parallèle au plan de l'équateur terrestre, que nous supposerons immobile pendant toute la durée des expériences. Les points x, y, z, où ces axes percent la sphère, seront : l'un le point vernal, le second plus avancé de 90 degrés dans le sens de la rotation de la Terre ; le troisième sera le pôle boréal. Supposons maintenant que l'on ait fait choix de ceux des côtés des axes de rotation de l'anneau et du tore que l'on regardera comme positifs, et qu'on les prenne pour axes mobiles z_1 et z'_1 ; nous mène-

rons dans les plans de leurs équateurs deux autres axes rec-

FIG 2.



tangulaires mobiles que nous désignerons par x_1, y_1 et x'_1, y'_1. Seulement, nous insisterons sur ce que l'ordre alphabétique soit celui des axes fixes x, y, z. En d'autres termes, ces trois systèmes d'axes, étant superposés convenablement, doivent permettre la coïncidence des côtés de même dénomination : on pourra vérifier dans un instant que cette condition est remplie.

Le plan de l'équateur du tore coupe le plan de l'équateur terrestre en un point N distant de l'axe des x d'un angle $\overline{Nx} = \psi$ compté de x en sens contraire du mouvement de la Terre, et fait avec le plan des xy un angle θ au-dessous de ce plan ; nous désignons par Φ la distance de l'axe x_1 au point N, angle qui se trouve compté de N, dans le sens de x à y, lorsque θ est aigu ; l'angle Ny_1 est $90^\circ + \Phi$. Il s'ensuit que le point N correspond au nœud descendant de l'équateur du tore sur l'équateur terrestre. Le pôle de l'équateur du tore est en z_1 et fait avec l'axe des z un angle qui est précisément l'angle θ. Cet angle est compris entre zéro et deux droits, tandis que les angles ψ et Φ n'ont pas de limites.

Les mêmes lettres accompagnées d'un accent désignent les mêmes choses relativement à l'anneau. De la fixité relative de l'axe de l'anneau, il résulte que la distance polaire $\overline{zz'_1} = \theta'$ est constante. Le plan qui joint les pôles z et z'_1 est entraîné dans le mouvement diurne; l'angle dièdre $\widehat{xzz'_1}$ est l'ascension droite Æ de l'axe z'_1 de l'anneau. En désignant par ω la vitesse angulaire de la Terre et dt l'élément du temps, on a

$$(1) \qquad \frac{d\text{Æ}}{dt} = \omega.$$

Les pôles z_1 et z'_1, dont la distance constante est η, déterminent un plan que nous nommerons, pour abréger, *plan de l'anneau*. Par analogie, nous appellerons *plan horaire*, le plan qui passe par l'axe de l'anneau et l'axe terrestre. Le plan de l'anneau fait avec le plan horaire un angle γ qui est compté, à partir du dernier, dans le sens du mouvement de la Terre. Cet angle γ suffit évidemment pour déterminer la position de l'anneau. Nous fixerons l'axe y'_1 dans le plan de l'anneau et du côté opposé à l'angle η à partir de z'_1; l'axe x'_1 sera perpendiculaire à ce dernier plan, et en arrière de y'_1 (*fig* 2) d'un angle droit, dans le plan de l'équateur de l'anneau.

Il reste à fixer la position du tore relativement à l'anneau. A cet effet, prolongeons le plan de l'anneau jusqu'à sa rencontre en M avec l'équateur du tore : nous désignerons par α l'angle $\widehat{Mz_1x_1}$ que fait le méridien du tore qui contient l'axe x_1 avec le prolongement z_1M du plan de l'anneau, compté à partir de celui-ci dans le sens du mouvement terrestre.

L'angle γ qui détermine la situation de l'anneau et l'angle α qui fixe celle du tore relativement à l'anneau sont les quantités qu'il s'agit d'exprimer en fonction du temps.

4. Etablissons maintenant les relations de position des axes mobiles entre eux.

x'_1 étant le pôle de $Mz_1z'_1$, l'arc qui joindrait z_1 et x'_1 lui est perpendiculaire; il vient donc $\widehat{x_1 z_1 y'_1} = 90^\circ - \alpha$, d'où

$$(2) \qquad \cos(x_1, x'_1) = \sin\alpha.$$

Joignons x_1 et y'_1 (*); le triangle $x_1 z_1 y'_1$, où l'angle en z_1 est $180^\circ - \alpha$, donnera, à cause de $\overline{z_1 y'_1} = 90^\circ + \eta$,

$$(3) \qquad \cos(x_1, y'_1) = -\cos\eta\cos\alpha;$$

le triangle $x_1 z_1 z'_1$ donnera de même

$$(4) \qquad \cos(x_1, z'_1) = -\sin\eta\cos\alpha.$$

Formons le triangle $x'_1 z_1 y_1$; l'angle en z_1 sera α, et il viendra

$$(5) \qquad \cos(y_1, x'_1) = \cos\alpha:$$

on aura, par le triangle $y_1 z_1 y'_1$, où l'angle en z_1 est $90^\circ - \alpha$,

$$(6) \qquad \cos(y_1, y'_1) = \cos\eta\sin\alpha,$$

puis, dans le triangle $y_1 z_1 z'_1$, où l'angle en z_1 est encore $90^\circ - \alpha$,

$$(7) \qquad \cos(y_1, z'_1) = \sin\eta\sin\alpha.$$

(*) Pour ne pas trop compliquer la figure, on n'y a pas opéré cette jonction, ni d'autres qui sont indiquées plus loin; mais le lecteur y suppléera aisément par la pensée.

On a d'ailleurs directement

$$(8)\quad \begin{cases} \cos(z_1, x'_1) = 0, \\ \cos(z_1, y'_1) = -\sin\eta, \\ \cos(z_1, z'_1) = +\cos\eta. \end{cases}$$

Considérons le triangle Nzz_1; les arcs Nz, Nz_1 étant de 90 degrés, les angles en z et z'_1 sont pareillement droits; il en résulte $\widehat{Nzx} + \widehat{xzz_1} = 90^\circ$, ou bien, en désignant par β l'angle $\widehat{z_1zz'}$,

$$(8\ bis)\quad \psi + \mathcal{R} - \beta = 90^\circ.$$

A cause que l'angle en z_1 dans le même triangle est droit, il vient, en désignant par ε l'angle $\widehat{zz_1z'_1}$, $\varepsilon + \widehat{Nz_1M} = 90^\circ$, ou

$$(9)\quad \Phi - \alpha = 90^\circ - \varepsilon.$$

Le triangle $N'zz'_1$, pareillement birectangle, donne d'abord

$$(10)\quad \psi' = 90^\circ - \mathcal{R},$$

puis ensuite $\gamma + \widehat{Mz'_1N'} = 90^\circ$; mais $\widehat{Mz'_1N'} = 90^\circ - \Phi'$, il en résulte

$$(11)\quad \gamma = \Phi'.$$

La valeur de ψ tirée de l'équation (8 *bis*)

$$(12)\quad \psi = 90^\circ - \mathcal{R} + \beta,$$

comparée à celle de ψ', donne d'ailleurs

$$(13)\quad \psi - \psi' = \beta.$$

A ces relations nous joindrons immédiatement quelques-unes de celles que fournit le triangle $zz_1z'_1$. Par la proportionnalité des sinus, on a d'abord

$$(14)\quad \begin{cases} \sin\beta \sin\theta = \sin\eta \sin\gamma, \\ \sin\theta' \sin\gamma = \sin\theta \sin\varepsilon. \end{cases}$$

Les équations qui donnent le cosinus de l'un des angles en fonction des sinus et cosinus des côtés peuvent s'écrire

$$(15)\quad \begin{cases} \cos\eta\,\cos\theta' + \sin\eta\,\sin\theta'\cos\gamma = \cos\theta, \\ \cos\eta\,\cos\theta + \sin\eta\,\sin\theta\,\cos\varepsilon = \cos\theta', \\ \cos\theta'\cos\theta + \sin\theta'\sin\theta\,\cos\beta = \cos\eta. \end{cases}$$

Deux des formules inverses sont

$$(16)\quad \begin{cases} -\cos\gamma\,\cos\varepsilon + \sin\gamma\,\sin\varepsilon\,\cos\eta = \cos\beta, \\ -\cos\beta\,\cos\gamma + \sin\beta\,\sin\gamma\,\cos\theta' = \cos\varepsilon. \end{cases}$$

Enfin il existe une relation peu en usage et qui sert à démontrer la formule désignée quelquefois par *formule des cotangentes*. Voici les relations qu'elle fournit :

$$(17)\quad \begin{cases} \sin\theta'\cos\beta + \sin\eta\,\cos\theta\cos\varepsilon = \cos\eta\,\sin\theta, \\ \sin\theta'\cos\gamma + \sin\theta\,\cos\eta\,\cos\varepsilon = \cos\theta\,\sin\eta, \\ \sin\theta\,\cos\varepsilon + \sin\theta'\cos\eta\,\cos\gamma = \cos\theta'\sin\eta. \end{cases}$$

5. Dans les conditions du problème actuel, les équations différentielles du mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité, quel que soit d'ailleurs le mouvement de translation de celui-ci, sont

$$(18)\quad \begin{cases} A\,\dfrac{dp}{dt} - (B - C)\,qr = P, \\ B\,\dfrac{dq}{dt} - (C - A)\,rp = Q, \\ C\,\dfrac{dr}{dt} - (A - B)\,pq = R; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} p = \sin\Phi\,\sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt} - \cos\Phi\,\dfrac{d\theta}{dt}, \\ q = \cos\Phi\,\sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt} + \sin\Phi\,\dfrac{d\theta}{dt}, \\ r = \dfrac{d\Phi}{dt} - \cos\theta\,\dfrac{d\psi}{dt}; \end{cases}$$

A, B, C désignant les moments d'inertie autour des axes principaux des x_1, y_1, z_1 qui se coupent au centre de gravité; p, q, r les composantes de la vitesse angulaire de rotation par rapport aux mêmes axes; et P, Q, R les moments des forces extérieures par rapport à ces mêmes axes.

Mouvement du tore. Le tore étant de révolution autour de l'axe des z_1, les moments d'inertie autour des deux autres axes sont égaux; on a ainsi

$$B = A. \tag{20}$$

Quant aux moments des forces qui le sollicitent, on observera d'abord que la pesanteur doit être éliminée, puisque la force qui en résulte passe par le centre des moments. Le tore reçoit de l'anneau des actions dont nous désignerons par μ le moment résultant. Si nous négligeons le frottement et que nous admettions une parfaite symétrie autour de l'axe du tore, il s'ensuivra que les actions exercées parallèlement à l'axe sur les pivots se réduiront à une force dont la direction passe par l'axe de figure et ne donne lieu à aucun moment. En négligeant aussi la résistance de l'air, il restera des actions normales aux surfaces des tourillons; et la direction de ces forces passera par l'axe de figure. L'axe du moment résultant μ est donc situé dans le plan de l'équateur du tore. Soit λ l'angle de cet axe avec l'axe des x_1, compté dans le sens de x_1 à y_1, il viendra

$$\left\{\begin{aligned} P &= \mu\cos\lambda,\\ Q &= \mu\sin\lambda,\\ R &= \mu\cos(\mu, z_1) = 0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Cette dernière valeur jointe à la relation (20) réduit la troisième équation (18) à

$$\frac{dr}{dt} = 0;$$

d'où, en désignant par n une constante,

$$r = n. \tag{22}$$

En vertu de ce qui vient d'être établi, les deux premières équations (18) deviennent

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} + (C - A)\,nq = \mu\cos\lambda, \\ A\dfrac{dq}{dt} - (C - A)\,np = \mu\sin\lambda. \end{array}\right.$$

Mouvement de l'anneau. Les équations de ce mouvement s'écriront en ajoutant un accent à toutes les quantités qui entrent dans les équations (18) et (19), à l'exception du temps t. On pourrait établir la condition d'égalité des moments d'inertie B' et C' [*fig.* 1]; mais il n'en résulterait pas de réduction sensible dans l'équation finale. D'ailleurs il pourra arriver que la nécessité d'annexer quelques masses lorsqu'il s'agira de réaliser l'appareil, conduise à des moments B' et C' inégaux. Nous aurons d'abord

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} A'\dfrac{dp'}{dt} - (B' - C')\,q'r' = P', \\ B'\dfrac{dq'}{dt} - (C' - A')\,r'p' = Q', \\ C'\dfrac{dr'}{dt} - (A' - B')\,p'q' = R'; \end{array}\right.$$

puis, à cause de $\theta' =$ constante, les équations (19) donneront

$$p' = \sin\Phi'\sin\theta'\,\frac{d\psi'}{dt},$$

$$q' = \cos\Phi'\sin\theta'\,\frac{d\psi'}{dt},$$

$$r' = \frac{d\Phi'}{dt} - \cos\theta'\,\frac{d\psi'}{dt}.$$

Mais, en vertu de (10) et (1), il vient

(25) $$\frac{d\psi'}{dt} = -\omega,$$

et nous avons d'ailleurs, équation (11)

$$\gamma = \Phi';$$

il s'ensuit

(26) $$\left\{\begin{aligned} p' &= -\omega \sin\theta' \sin\gamma, \\ q' &= -\omega \sin\theta' \cos\gamma, \\ r' &= \frac{d\gamma}{dt} + \omega \cos\theta'; \end{aligned}\right.$$

on en tire

(27) $$\left\{\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= -\omega \sin\theta' \cos\gamma \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{dq'}{dt} &= +\omega \sin\theta' \sin\gamma \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{dr'}{dt} &= \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, les moments des forces que reçoit l'anneau sont: 1° ceux des forces égales et opposées à celles qu'il exerce sur le tore; 2° les moments des forces que les supports exercent sur l'axe de l'anneau lui-même. Nous trouverons, en raisonnant comme tout à l'heure, que ces derniers se réduisent à un moment μ', dont l'axe est situé dans le plan de l'équateur de l'anneau et fait un angle λ' avec l'axe des x'_1 compté de celui-ci vers y'_1. Il vient donc

$$\begin{aligned} P' &= -P\cos(x_1, x'_1) - Q\cos(y_1, x'_1) + \mu' \cos\lambda', \\ Q' &= -P\cos(x_1, y'_1) - Q\cos(y_1, y'_1) + \mu' \sin\lambda', \\ R' &= -P\cos(x_1, z'_1) - Q\cos(y_1, z'_1), \end{aligned}$$

ou, en vertu des relations (2) à (8) et ayant égard aux valeurs de P et de Q,

$$P' = -\mu \cos\lambda \sin\alpha \quad -\mu \sin\lambda \cos\alpha \quad +\mu' \cos\lambda',$$
$$Q' = +\mu \cos\lambda \cos\alpha \cos\eta - \mu \sin\lambda \sin\alpha \cos\eta + \mu' \sin\lambda',$$
$$R' = +\mu \cos\lambda \cos\alpha \sin\eta - \mu \sin\lambda \sin\alpha \sin\eta.$$

Substituant ces valeurs et les précédentes (26) et (27) dans les équations (24), il vient

$$-A'\omega\sin\theta'\cos\gamma\frac{d\gamma}{dt}+(B'-C')\omega\sin\theta'\cos\gamma\left(\frac{d\gamma}{dt}+\omega\cos\theta'\right)=-\mu\sin(\alpha+\lambda)+\mu'\cos\lambda',$$
$$+B'\omega\sin\theta'\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}+(C'-A')\omega\sin\theta'\sin\gamma\left(\frac{d\gamma}{dt}+\omega\cos\theta'\right)=\mu\cos\eta\cos(\alpha+\lambda)+\mu'\sin\lambda',$$
$$(28)\quad +C'\frac{d^2\gamma}{dt^2}-(A'-B')\,\omega^2\sin^2\theta'\sin\gamma\cos\gamma=\mu\sin\eta\cos(\alpha+\lambda).$$

Les deux premières de ces équations peuvent s'écrire

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu'\sin\lambda'=\omega\sin\theta'\sin\gamma\left\{\begin{array}{l}(B'+C'-A')\dfrac{d\gamma}{dt}\\ +(C'-A')\,\omega\cos\theta'\end{array}\right\}-\mu\cos\eta\cos(\alpha+\lambda),\\ \mu'\cos\lambda'=\omega\sin\theta'\cos\gamma\left\{\begin{array}{l}(B'-C'-A')\dfrac{d\gamma}{dt}\\ +(B'-C')\,\omega\cos\theta'\end{array}\right\}+\mu\sin(\alpha+\lambda).\end{array}\right.$$

Elles serviront à déterminer μ' et λ' lorsque tout ce qui se rapporte au mouvement du tore sera connu.

6. *Mouvement du système des deux corps.* Multiplions la première équation (23) par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$ et retranchons, il viendra

$$(30)\quad A\left(\cos\alpha\frac{dp}{dt}-\sin\alpha\frac{dq}{dt}\right)+(C-A)\,n\,(q\cos\alpha+p\sin\alpha)=\mu\cos(\alpha+\lambda);$$

on aurait semblablement

$$(31)\quad A\left(\sin\alpha\frac{dp}{dt}+\cos\alpha\frac{dq}{dt}\right)+(C-A)\,n\,(q\sin\alpha-p\cos\alpha)=\mu\sin(\alpha+\lambda).$$

Ces équations seraient propres à donner μ et $\alpha+\lambda$ en fonction des autres quantités supposées connues. La première pourrait aussi nous servir à former l'équation principale du problème. En effet, l'équation (30) étant multipliée par $\sin\eta$ et retranchée de l'équation (28), il vient

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &C'\frac{d^2\gamma}{dt^2} - (A' - B')\,\omega^2 \sin^2\theta' \sin\gamma\cos\gamma \\ &\qquad + A\sin\eta\left(\sin\alpha\frac{dq}{dt} - \cos\alpha\frac{dp}{dt}\right) \\ &\qquad - (C - A)\sin\eta\, n\,(q\cos\alpha + p\sin\alpha) = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation qu'il s'agirait de traiter à l'effet d'en éliminer toutes les variables et dérivées de variables autres que γ; mais, pour plus de symétrie, nous procéderons un peu différemment.

A l'aide des valeurs (19) nous formerons d'abord les combinaisons suivantes que contiennent les équations (30) (31) et (32) :

$$q\cos\alpha + p\sin\alpha = +\cos(\Phi - \alpha)\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \sin(\Phi - \alpha)\frac{d\theta}{dt},$$

$$q\sin\alpha - p\cos\alpha = -\sin(\Phi - \alpha)\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \cos(\Phi - \alpha)\frac{d\theta}{dt}.$$

Or nous avons trouvé (9)

$$\Phi - \alpha = 90^\circ - \varepsilon,$$

il s'ensuit

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} q\cos\alpha + p\sin\alpha &= +\sin\varepsilon\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varepsilon\frac{d\theta}{dt}, \\ q\sin\alpha - p\cos\alpha &= -\cos\varepsilon\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varepsilon\frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}\right.$$

En vertu de (12) et (1), la valeur de $\frac{d\psi}{dt}$ est

$$(34)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\beta}{dt} - \omega :$$

pour obtenir celle de $\frac{d\beta}{dt}$, nous aurons recours à la première équation (14) et à la troisième équation (15), que nous écrirons comme il suit :

$$\sin\theta \sin\beta = \sin\eta \sin\gamma,$$

$$\sin\theta \cos\beta = \frac{\cos\eta}{\sin\theta'} - \cot\theta' \cos\theta.$$

En les différentiant, il vient

$$+ \cos\beta \sin\theta \frac{d\beta}{dt} + \sin\beta \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \sin\eta \cos\gamma \frac{d\gamma}{dt},$$

$$- \sin\beta \sin\theta \frac{d\beta}{dt} + \cos\beta \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \cot\theta' \sin\theta \frac{d\theta}{dt};$$

multipliant la première par $\cos\beta$, la seconde par $-\sin\beta$, et ajoutant, on trouve

$$\sin\theta \frac{d\beta}{dt} = \sin\eta \cos\beta \cos\gamma \frac{d\gamma}{dt} - \cot\theta' \sin\beta \sin\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

On obtiendrait semblablement une relation entre $d\theta$ et $d\gamma$, mais il sera plus simple d'employer la première équation (15)

$$\cos\theta = \cos\eta \cos\theta' + \sin\eta \sin\theta' \cos\gamma;$$

elle donne directement

$$(35) \qquad \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = \sin\eta \sin\theta' \sin\gamma \frac{d\gamma}{dt},$$

et il vient, en substituant cette valeur dans celle de $\sin\theta \frac{d\beta}{dt}$,

$$\sin\theta \frac{d\beta}{dt} = \sin\eta (\cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma \cos\theta') \frac{d\gamma}{dt},$$

ou, en vertu de la deuxième équation (16),

$$(36) \qquad \sin\theta \frac{d\beta}{dt} = - \sin\eta \cos\varepsilon \frac{d\gamma}{dt}.$$

Portant les valeurs (34), (35) et (36) dans les équations (33), il vient

$$q \cos\alpha + p \sin\alpha = -\omega \sin\theta \sin\varepsilon - \frac{\sin\eta \cos\varepsilon}{\sin\theta}(\sin\varepsilon \sin\theta - \sin\theta' \sin\gamma)\frac{d\gamma}{dt},$$

$$q \sin\alpha - p \cos\alpha = +\omega \sin\theta \cos\varepsilon + \sin\eta\left(\cos^2\varepsilon + \sin\varepsilon \frac{\sin\theta' \sin\gamma}{\sin\theta}\right)\frac{d\gamma}{dt},$$

valeurs qui, en vertu de la deuxième équation (14), se réduisent à

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} q \cos\alpha + p \sin\alpha &= -\omega \sin\theta \sin\varepsilon \\ q \sin\alpha - p \cos\alpha &= +\omega \sin\theta \cos\varepsilon + \sin\eta \frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Différentions maintenant ces deux équations, nous aurons

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha \frac{dq}{dt} + \sin\alpha \frac{dp}{dt} - (q \sin\alpha - p \cos\alpha)\frac{d\alpha}{dt} &= -\omega \frac{d.\sin\theta \sin\varepsilon}{dt}, \\ \sin\alpha \frac{dq}{dt} - \cos\alpha \frac{dp}{dt} + (q \cos\alpha + p \sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt} &= +\omega \frac{d.\sin\theta \cos\varepsilon}{dt} + \sin\eta \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

Les deuxièmes équations (14) et (15) donnent d'ailleurs

$$\sin\theta \sin\varepsilon = \sin\theta' \sin\gamma,$$

$$\sin\theta \cos\varepsilon = \frac{\cos\theta'}{\sin\eta} - \cot\eta \cos\theta,$$

d'où

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d.\sin\theta \sin\varepsilon}{dt} &= +\cos\varepsilon \sin\theta \frac{d\varepsilon}{dt} + \sin\varepsilon \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \\ &= \sin\theta' \cos\gamma \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{d.\sin\theta \cos\varepsilon}{dt} &= -\sin\varepsilon \sin\theta \frac{d\varepsilon}{dt} + \cos\varepsilon \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \\ &= \cot\eta \sin\theta \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ces mêmes équations vont nous fournir la valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$ dont nous aurons besoin dans un instant. A cet effet, multiplions la première par $\cos\varepsilon$ et la deuxième par $-\sin\varepsilon$, puis ajoutons, il viendra

$$\sin\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=\sin\theta'\cos\gamma\cos\varepsilon\frac{d\gamma}{dt}-\cot\eta\sin\varepsilon\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

et, en substituant la valeur (35),

$$\sin\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=\sin\theta'(\cos\gamma\cos\varepsilon-\sin\gamma\sin\varepsilon\cos\eta)\frac{d\gamma}{dt}.$$

En ayant égard à la première équation (16), cette expression se réduit à

$$(40)\qquad \sin\theta\frac{d\varepsilon}{dt}=-\sin\theta'\cos\beta\frac{d\gamma}{dt}.$$

Les expressions (38) contiennent encore la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$ dont il faut calculer l'expression. L'équation (9) donne

$$d\Phi-d\alpha=-d\varepsilon,$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\Phi}{dt}+\frac{d\varepsilon}{dt},$$

et, en vertu de la troisième équation (19) et de l'équation (22),

$$\frac{d\alpha}{dt}=n+\cos\theta\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Substituant les valeurs précédemment obtenues, il vient

$$\frac{d\alpha}{dt}=n-\omega\cos\theta-\frac{1}{\sin\theta}(\sin\eta\cos\theta\cos\varepsilon+\sin\theta'\cos\beta)\frac{d\gamma}{dt},$$

ou, à cause des premières équations (15) et (17),

$$(41)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= n - \omega\cos\theta - \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt}\\ &= n - \omega(\cos\eta\cos\theta' + \sin\eta\sin\theta'\cos\gamma) - \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Présentons immédiatement une remarque relative à la constante n. Cette quantité n'est pas donnée directement par l'observation, mais l'équation précédente va nous donner le moyen de l'obtenir. Supposons que l'anneau étant en repos relativement à la surface de la Terre et son plan formant avec le plan horaire l'angle γ_0, on communique au tore une vitesse angulaire relative au plan de l'anneau qui soit w, et qu'on l'abandonne à lui-même en cet état; w sera la valeur initiale de $\frac{d\alpha}{dt}$, et l'équation (41) fournira l'expression suivante de n en fonction de w et γ_0:

$$(42)\quad n = w + \omega(\cos\eta\cos\theta' + \sin\eta\sin\theta'\cos\gamma_0) = w + \omega\cos\theta_0.$$

Cette relation montre que la vitesse de rotation autour de l'axe du tore est égale à la vitesse relative du tore, l'anneau étant au repos, augmentée de la composante de la vitesse de la Terre autour de l'axe du tore dans le même état de repos de l'anneau.

Revenons aux équations (38). En y substituant les valeurs (39), (35) et (41), on aura

$$\cos\alpha\frac{dq}{dt} + \sin\alpha\frac{dp}{dt} = +\left(n - \omega\cos\theta - \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt}\right)(q\sin\alpha - p\cos\alpha)$$
$$- \omega\sin\theta'\cos\gamma\,\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\sin\alpha\frac{dq}{dt} - \cos\alpha\frac{dp}{dt} = -\left(n - \omega\cos\theta - \cos\eta\frac{d\gamma}{dt}\right)(q\cos\alpha + p\sin\alpha)$$
$$+ \omega\sin\theta'\cos\eta\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{dt} + \sin\eta\,\frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$

Au moyen de ces valeurs les équations (30) et (31) donneront

$$\mu \sin(\alpha+\lambda) = \left[Cn - A\left(\omega\cos\theta + \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt}\right)\right](q\sin\alpha - p\cos\alpha)$$
$$- A\omega\sin\theta'\cos\gamma\,\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\mu \cos(\alpha+\lambda) = \left[Cn - A\left(\omega\cos\theta + \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt}\right)\right](q\cos\alpha + p\sin\alpha)$$
$$- A\omega\sin\theta'\cos\eta\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{dt} - A\sin\eta\,\frac{d^2\gamma}{dt^2};$$

substituant les valeurs (37), il viendra

$$\mu \sin(\alpha+\lambda) = +\left[Cn - A\left(\omega\cos\theta + \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt}\right)\right]\left(\omega\sin\theta\cos\varepsilon + \sin\eta\,\frac{d\gamma}{dt}\right)$$
$$- A\omega\sin\theta'\cos\gamma\,\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\mu \cos(\alpha+\lambda) = -\left[Cn - A\left(\omega\cos\theta + \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt}\right)\right]\omega\sin\theta\sin\varepsilon$$
$$- A\omega\sin\theta'\cos\eta\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{dt} - A\sin\eta\,\frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$

Développant et ordonnant, on aura d'abord

$$\mu \sin(\alpha+\lambda) = +(Cn - A\omega\cos\theta)\,\omega\sin\theta\cos\varepsilon$$
$$+ [Cn\sin\eta - A\omega(\sin\eta\cos\theta + \sin\theta'\cos\gamma + \cos\eta\sin\theta\cos\varepsilon)]\frac{d\gamma}{dt}$$
$$- A\sin\eta\cos\eta\,\frac{d\gamma^2}{dt^2},$$

$$\mu \cos(\alpha+\lambda) = -(Cn - A\omega\cos\theta)\,\omega\sin\theta\sin\varepsilon$$
$$+ A\omega\cos\eta\,(\sin\theta\sin\varepsilon - \sin\theta'\sin\gamma)\,\frac{d\gamma}{dt} - A\sin\eta\,\frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$

En ayant égard aux relations du n° 4, ces équations se réduisent à

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \mu \sin(\alpha + \lambda) &= + (Cn - A\omega\cos\theta)\,\omega\sin\theta\cos\varepsilon \\ &\quad + (Cn - 2A\omega\cos\theta)\sin\eta\frac{d\gamma}{dt} - A\sin\eta\cos\eta\frac{d\gamma^2}{dt^2}, \\ \mu\cos(\alpha+\lambda) &= -(Cn - A\omega\cos\theta)\,\omega\sin\theta'\sin\gamma - A\sin\eta\frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace ici $\cos\theta$ par sa valeur (15) et $\sin\theta\cos\varepsilon$ par sa valeur

$$(44)\qquad \sin\theta\cos\varepsilon = \cos\theta'\sin\eta - \sin\theta'\cos\eta\cos\gamma$$

tirée de la troisième équation (17), les formules (43) donneront μ et $\alpha + \lambda$ en fonction de γ et de ses deux premières dérivées.

7. *Formation de l'équation finale.* Eliminons la quantité $\mu\cos(\alpha+\lambda)$ entre la deuxième équation (43) et l'équation (28), il viendra

$$\begin{aligned} (A\sin^2\eta + C')\frac{d^2\gamma}{dt^2} &+ (Cn - A\omega\cos\theta)\,\omega\sin\theta'\sin\eta\sin\gamma \\ &- (A' - B')\,\omega^2\sin^2\theta'\sin\gamma\cos\gamma = 0, \end{aligned}$$

puis, en mettant pour $\cos\lambda$ sa valeur (15) et transposant,

$$(44\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} (A\sin^2\eta + C')\frac{d^2\gamma}{dt^2} &= -(Cn - A\cos\eta\,\omega\cos\theta')\,\omega\sin\theta'\sin\eta\sin\gamma \\ &\quad + (A\sin^2\eta + A' - B')\,\omega^2\sin^2\theta'\sin\gamma\cos\gamma. \end{aligned}\right.$$

Soient, pour abréger,

$$\frac{g}{a} = \frac{Cn - A\cos\eta\,\omega\cos\theta'}{A\sin^2\eta + C'}\,\omega\sin\theta'\sin\eta,$$

$$2\delta\,.\,\frac{g}{a} = \frac{A\sin^2\eta + A' - B'}{A\sin^2\eta + C'}\,\omega^2\sin^2\theta',$$

g désignant l'intensité de la pesanteur et δ un nombre abstrait qui sera toujours extrêmement petit, tant que, A' et B' étant supposés inégaux, $\sin\eta$ ne sera pas lui-même très-petit; l'équation précédente deviendra

$$(45)\qquad \frac{d^2\gamma}{dt^2}=\frac{g}{a}(-\sin\gamma+2\delta\sin\gamma\cos\gamma),$$

et l'on aura en même temps

$$(46)\qquad \begin{cases} a=\dfrac{g}{\omega\sin\theta'\sin\eta}\cdot\dfrac{A\sin^2\eta+C'}{Cn-A\cos\eta\,\omega\cos\theta'}, \\[2ex] \delta=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\omega\sin\theta'}{\sin\eta}\cdot\dfrac{A\sin^2\eta+A'-B'}{Cn-A\cos\eta\,\omega\cos\theta'}. \end{cases}$$

L'équation (45) étant multipliée par $2d\gamma$ s'intègre immédiatement. Soit donc $\pm\gamma_0$ la valeur réelle ou imaginaire de γ pour laquelle $\frac{d\gamma}{dt}$ est nul, il vient

$$\frac{d\gamma^2}{dt^2}=\frac{2g}{a}\left[\cos\gamma-\cos\gamma_0-\delta(\cos^2\gamma-\cos^2\gamma_0)\right],$$

d'où

$$(47)\qquad \frac{d\gamma}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2g}{a}(\cos\gamma-\cos\gamma_0)[1-\delta(\cos\gamma+\cos\gamma_0)]}.$$

Le cas où la valeur de γ serait imaginaire pour une valeur nulle de $\frac{d\gamma}{dt}$, est celui où l'anneau, au lieu d'être abandonné à lui-même à partir du repos, serait animé d'une vitesse capable de lui faire décrire un arc plus grand qu'une circonférence. Dans ce cas, que nous n'examinerons pas, $\cos\gamma_0$ pourrait encore être une quantité réelle, mais elle sortirait des limites ± 1 entre lesquelles sont compris les cosinus. Au reste, on obtiendrait la valeur de cette quantité en mettant dans l'équation précédente un système de valeurs simultanées de γ et de $\frac{d\gamma}{dt}$.

Ce cas étant exclu, γ_0 sera un angle réel, et à cause que δ est très-petit, le facteur $1 - \delta(\cos\gamma + \cos\gamma_0)$ sera constamment positif. Ceci posé, on voit que la seule condition pour que $\frac{d\gamma}{dt}$ soit une quantité réelle est que le facteur $\cos\gamma - \cos\gamma_0$ et la constante a soient de même signe. Or les angles θ' et η étant supposés compris entre 0 et 180 degrés, et le terme $A\cos\eta\,\omega\cos\theta'$ très-petit par rapport à Cn, le signe de a sera celui de n. Lors donc que la composante n du mouvement de rotation autour de l'axe de figure du tore sera positive, on devra avoir

$$\cos\gamma > \cos\gamma_0;$$

les valeurs de γ se succéderont dans l'ordre

$$\gamma_0,\ 0,\ -\gamma_0,\ 0,\ +\gamma_0,\ 0,\ldots$$

Si le mouvement de rotation a lieu dans le sens contraire, ou bien si la constante n est négative, on aura nécessairement

$$\cos\gamma < \cos\gamma_0;$$

et les valeurs de γ se succéderont comme il suit :

$$\gamma_0,\ \pi,\ \pi+\gamma_0,\ \pi,\ \gamma_0,\ \pi,\ \pi+\gamma_0,\ldots$$

La valeur absolue de $\frac{d\gamma}{dt}$ est la même pour deux valeurs égales et de signes contraires de γ; il suit de là, et de ce qui vient d'être dit, que le mouvement du plan de l'anneau est un mouvement oscillatoire autour du plan horaire, et que les vitesses angulaires sont égales dans les positions symétriques par rapport à ce plan. Il en résulte également que si un arc d'une amplitude donnée est décrit par le gyroscope dans le cas de n positif, l'arc qui sera décrit lorsqu'on changera le sens de la vitesse de rotation en conservant le même point de départ, sera la portion restante de la circonférence. Enfin, si l'on néglige le terme en δ dans l'équation (47), on voit que cette expression coïncide avec l'équation différentielle du mouvement du pendule plan de longueur a. Le mouvement du plan de l'anneau autour du plan horaire suivra, dans ce cas, les mêmes lois que le mouvement du pendule autour de la verticale. (Ce résultat a été indiqué par plusieurs auteurs.) La première équation (46) donne d'ailleurs la longueur du pendule simple qui accomplirait des oscillations de même amplitude dans le même temps.

On pourrait éviter de considérer le double cas relatif à n en regardant n comme une quantité toujours positive; mais alors, il faudrait, dans le cas du changement de sens de la rotation du tore, substituer au pôle z_1 son opposé, et changer aussi le sens de l'un des axes mobiles x_1 ou y_1, afin que les axes mobiles restassent superposables, comme il a été dit au n° 2. Il nous paraît préférable, quoique ce soit un peu plus long, de considérer séparément ces deux cas.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 303

(voir page 211);

PAR M. J. MURENT,
Licencié ès Sciences (Clermont-Ferrand).

PROBLÈME. *Quelles conditions doit remplir un quadrilatère pour que tous les rectangles circonscrits soient semblables à un rectangle donné. Quel est le lieu géométrique des centres de ces rectangles?*

Solution. 1°. Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en un point O. Ce quadrilatère sera déterminé si l'on suppose donnés l'angle θ des diagonales et les grandeurs a, b, c, d des segments OA, OB, OC, OD de ces diagonales. Menons par le point A une droite MQ faisant avec la diagonale CA un angle quelconque φ, et construisons le rectangle circonscrit MNPQ dont un côté est dirigé suivant la ligne MQ. En traçant, par le point O, des parallèles aux côtés du rectangle, on trouve facilement que les longueurs de ces côtés sont $(a+c)\sin\varphi$ et $(b+d)\cos(\theta-\varphi)$, ou plus simplement $D\sin\varphi$ et $D'\cos(\theta-\varphi)$, en désignant par D et D' les diagonales entières AC, BD.

Pour que le rectangle MNPQ soit semblable au rectangle donné dont nous représenterons les deux dimensions par C et C', il faut que l'on ait la proportion

$$\frac{D\sin\varphi}{D'\cos(\theta-\varphi)}=\frac{C}{C'},$$

et pour que la similitude existe pour tous les rectangles circonscrits, il faut que cette relation ait lieu pour toute valeur donnée à φ. Or, cette même relation développée, pouvant s'écrire sous la forme

$$(CD'\sin\theta-DC')\operatorname{tang}\varphi+CD'\cos\theta=0,$$

ne sera satisfaite, quel que soit φ, que si l'on a simultanément

$$CD'\cos\theta=0 \quad \text{et} \quad CD'\sin\theta-DC'=0,$$

d'où l'on déduit

$$\theta=90^\circ \quad \text{et} \quad \frac{D}{D'}=\frac{C}{C'}.$$

Ainsi, pour qu'un quadrilatère satisfasse aux conditions de l'énoncé, il faut et il suffit que ses diagonales fassent entre elles un angle droit et soient proportionnelles aux deux dimensions du rectangle donné.

On voit qu'il existe une infinité de quadrilatères possédant la propriété énoncée.

2°. *Lieu des centres*. Considérons un quadrilatère ABCD construit suivant les conditions que l'on vient de trouver : ses diagonales seront perpendiculaires entre elles et nous les prendrons pour axes coordonnés, les x et les y positives étant dirigées suivant OA et OB. Construisons le rectangle circonscrit MNPQ, dont le côté MAQ fait avec l'axe des x un angle quelconque φ, le point M étant situé dans l'angle des coordonnées positives.

Cela posé, il est facile de reconnaître que le centre du rectangle doit se trouver au point d'intersection des deux droites menées respectivement par les milieux des diagonales AC et BD du quadrilatère, parallèlement aux côtés MQ et MN du rectangle. Or le milieu de AC ayant pour abscisse $\frac{a-c}{2}$ et le milieu de BD ayant pour ordonnée $\frac{b-d}{2}$, les équations des deux droites sont

$$y = \operatorname{tang}\varphi . \left(x - \frac{a-c}{2}\right)$$

et

$$y - \frac{b-d}{2} = -\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi} . x.$$

Ces deux équations étant satisfaites par les coordonnées du centre du rectangle MNPQ, si l'on élimine entre elles l'angle φ, l'équation finale aura lieu entre les coordonnées du centre d'un rectangle circonscrit quelconque, et représentera, par conséquent, le lieu des centres de tous les rectangles circonscrits.

Pour éliminer φ, il suffit de multiplier membre à membre les deux équations, et l'on aura, en transposant,

$$y\left(y - \frac{b-d}{2}\right) + x\left(x - \frac{a-c}{2}\right) = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle qui passe par l'origine et par les points

$$x = \frac{a - c}{2}, \quad y = 0$$

et

$$x = 0, \quad y = \frac{b - d}{2},$$

c'est-à-dire par les points milieux des diagonales AC, BD.

Ainsi le lieu cherché est le cercle décrit en prenant pour diamètre la ligne qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère.

Remarque. On peut prendre pour quadrilatère un losange; on a alors

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d;$$

l'équation du lieu devient

$$y^2 + x^2 = 0,$$

et le lieu se réduit à un point, centre du losange.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 300

(voir page 254);

PAR M. J. MURENT,
Licencié ès Sciences.

PROBLÈME. *Trouver une fonction de* a, b, c, d *telle, qu'en y faisant* b = a *elle devienne* $\frac{c - d}{2(c + d)}$, *et en y faisant* d = c *elle devienne* $\frac{a - b}{2(a + b)}$. LEIBNITZ.

Solution. Désignons par $F(a, b, c, d)$ la fonction demandée. Cette fonction devant se réduire à $\frac{c - d}{2(c + d)}$

lorsqu'on y fait $b = a$, sera de la forme

$$(1) \quad F(a, b, c, d) = \frac{c-d}{2(c+d)} + (a-b) f(a, b, c, d),$$

f étant une fonction inconnue qui ne devient pas infinie lorsque $b = a$. Afin de déterminer cette fonction f, faisons $d = c$ dans l'égalité (1). Le premier membre devra, d'après l'énoncé, se réduire à $\frac{a-b}{2(a+b)}$, et nous aurons

$$\frac{a-b}{2(a+b)} = (a-b) f(a, b, c, c),$$

et, par suite,

$$f(a, b, c, c) = \frac{1}{2(a+b)}.$$

Cette relation montre que la fonction $f(a, b, c, d)$ doit être telle, qu'elle devienne $\frac{1}{2(a+b)}$, lorsqu'on y fait $d = c$: donc cette fonction est de la forme

$$f(a, b, c, d) = \frac{1}{2(a+b)} + (c-d)\varphi(a, b, c, d);$$

φ étant une nouvelle fonction qui ne devient pas infinie pour $d = c$. On voit de plus, par cette dernière égalité, que φ doit aussi rester finie pour $b = a$ puisqu'il en est ainsi de la fonction f.

Substituant la dernière valeur de f dans l'égalité (1), il vient

$$F(a, b, c, d) = \frac{c-d}{2(c+d)}$$

$$+ \frac{a-b}{2(a+b)} + (a-b)(c-d)\varphi(a, b, c, d),$$

ou, en réduisant,

$$F(a, b, c, d) = \frac{ac - bd}{(a+b)(c+d)}$$

$$+ (a-b)(c-d)\varphi(a, b, c, d).$$

Cette formule donnera une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions de l'énoncé; il suffira de prendre pour φ une fonction quelconque de a, b, c, d, qui ne devienne infinie ni pour $b = a$, ni pour $d = c$.

L'expression $\frac{ac - bd}{(a+b)(c+d)}$ sera la plus simple des fonctions qui répondent à la question.

COMPARAISON DE QUELQUES MÉTHODES DE QUADRATURE ET FORMULE NOUVELLE;

PAR M. THÉODORE PARMENTIER,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Capitaine du Génie (*).

De tout temps les géomètres se sont préoccupés de la recherche de formules d'approximation pour calculer l'aire des courbes planes. Ces formules sont de la plus grande utilité pratique; car, dans l'état actuel de nos connaissances, le nombre des fonctions intégrables est fort limité, et d'ailleurs on a bien souvent à considérer des courbes irrégulières qui ne peuvent être représentées par une fonction algébrique, telle par exemple que le périmètre de la section d'un cours d'eau ou une courbe dynamométrique dont l'aire représente le travail d'une machine ou d'un moteur.

On sait que l'aire comprise entre l'axe des abscisses de

(*) Aide de camp du général Niel, en Crimée. · TM.

la courbe $y = f(x)$ et les deux ordonnées

$$y_0 = f(x_0), \quad y_m = f(x_m)$$

est représentée par l'intégrale définie

$$S = \int_{x_0}^{x_m} f(x)\, dx.$$

Les méthodes de quadrature ont pour but de déterminer une valeur plus ou moins approchée de l'aire S dans le cas où la différentielle $f(x)\, dx$ n'est pas intégrable, ou lorsque la forme de la fonction $f(x)$ n'est pas connue et que l'on peut seulement se procurer la connaissance d'un certain nombre de valeurs particulières de cette fonction correspondant à des valeurs de x, généralement équidifférentes, comprises entre x_0 et x_m. En d'autres termes, on divise l'aire S en un certain nombre de trapèzes curvilignes déterminés par des ordonnées équidistantes, et il s'agit de trouver une valeur approchée de la surface de plusieurs de ces trapèzes consécutifs, exprimée à l'aide des différentes ordonnées formant les bases des trapèzes et de leur hauteur commune.

La première idée qui se présente, c'est de remplacer les trapèzes curvilignes par des trapèzes rectilignes en joignant deux à deux par des cordes les extrémités des différentes ordonnées. L'aire du polygone inscrit sera représentée par la formule

$$(1) \qquad A = h\left[\sum y - \frac{1}{2}(y_0 + y_m)\right],$$

dans laquelle h représente la commune hauteur des différents trapèzes, y_0 et y_m les ordonnées extrêmes, et $\sum y$ la somme de toutes les ordonnées. Cette formule est simple, mais ne donne qu'une approximation assez grossière.

En remplaçant l'aire de la courbe par celle d'un polygone circonscrit formé au moyen de tangentes menées à l'extrémité des ordonnées élevées au milieu de la base de chaque trapèze, on obtient la formule très-simple

$$(2) \qquad A = h \cdot \sum y.$$

Il est facile de déduire de simples considérations géométriques que cette dernière formule conduit toujours à un résultat plus approché de la valeur exacte de l'aire S que la formule (1), et comme elle a en outre l'avantage d'une plus grande simplicité, elle doit toujours être préférée.

Le géomètre anglais Thomas Simpson a cherché à obtenir une plus grande approximation en substituant à la courbe dont on cherche l'aire une suite d'arcs de paraboles du second degré à axes parallèles aux ordonnées : ce qui l'a conduit à la formule suivante, à laquelle il a attaché son nom et qui constitue encore aujourd'hui l'une des méthodes de quadrature les plus usitées,

$$(3) \qquad A = \frac{1}{3} h \left[\begin{array}{l} y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) \\ \qquad + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) \end{array} \right],$$

$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ représentant les valeurs numériques des $2n+1$ ordonnées distantes l'une de l'autre de la longueur constante h. Cette formule donne, en général, des résultats plus approchés que la méthode des tangentes; mais on ne peut pas affirmer *à priori* qu'il en est ainsi. Si l'on cherche, par exemple, l'aire du quart de cercle d'un rayon égal à 10, en partageant le rayon en dix parties égales, la formule (2) donne

$$A = 78{,}809,$$

et la formule (3)

$$A = 78,173.$$

Or la vraie valeur de l'aire est

$$S = 78,540.$$

L'erreur *en plus* à laquelle conduit la méthode des tangentes est donc moindre que l'erreur *en moins* que donne la formule de Simpson. L'aire de la parabole

$$y^2 = 9.x$$

entre l'axe des abscisses, la courbe et les ordonnées correspondant à $x = 0$ et $x = 10$, a pour valeur exacte

$$\frac{2}{3}\, 10 \times \sqrt{90} = 63,246.$$

En partageant la base en dix parties égales, la formule (2) conduit à

$$A = 63,408,$$

et la formule (3) à

$$A = 63,001.$$

L'avantage est donc encore à la méthode des tangentes. Il en serait de même en calculant, au moyen de dix ordonnées, l'aire du quart de l'ellipse, ou celle de l'arc de l'hyperbole $y = \sqrt{20.x + x^2}$ entre le sommet et l'ordonnée correspondant à $x = 10$. Mais si l'on cherche l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'hyperbole $xy = 1$ et les ordonnées correspondant à $x = 1$ et $x = 2$, aire dont la vraie valeur est

$$S = \text{log nép. } 2 = 0,693147,$$

on trouve que la formule (2) conduit, au moyen de dix ordonnées, à la valeur

$$A = 0,692835,$$

et la formule (3) à la valeur beaucoup plus approchée

$$A = 0,693150.$$

Je pense que la formule de Simpson doit, en général, être préférée à la méthode des tangentes, mais il me paraît difficile de les comparer entre elles et de décider, *à priori*, dans quel cas l'une doit l'emporter sur l'autre.

M. Catalan, remarquant que les différents axes de parabole de la méthode de Simpson ne se touchent qu'en un point et forment ainsi des jarrets, a pensé que l'on obtiendrait une formule plus exacte en faisant recroiser deux arcs consécutifs de manière à leur donner deux points communs. Après avoir mené un premier arc de parabole à axe parallèle aux ordonnées, par les extrémités des trois premières ordonnées, on ne conserve de cette ligne que la partie comprise entre les deux premières ordonnées; puis on fait passer un second arc de parabole par les extrémités des deuxième, troisième et quatrième ordonnées, et ainsi de suite, en conservant l'arc entier pour les trois dernières ordonnées. Pour donner de la symétrie à l'expression de l'aire de la courbe ainsi formée, M. Catalan refait la même construction dans l'ordre inverse, puis il prend la moyenne des deux aires. Il arrive ainsi à la formule

$$(4) \qquad A = h\left[\begin{array}{l}\sum y - \frac{5}{8}(y_0 - y_n) + \frac{1}{6}(y_1 + y_{n-1}) \\ \qquad - \frac{1}{24}(y_2 + y_{n-2})\end{array}\right],$$

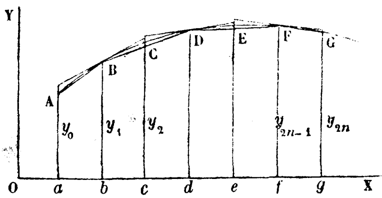
h représentant l'équidistance des ordonnées et $\sum y$ la somme des n ordonnées $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ (*).

(*) Voyez les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. X, p. 412.

M. Catalan pense que cette formule pourra presque toujours être préférée à celle de Simpson. La plus grande continuité donnée à la suite des arcs paraboliques semble, en effet, favorable à la formule (4). Pourtant on ne peut rien affirmer à cet égard. En comparant les deux formules dans le cas des cinq aires dont il a été question ci-dessus, on trouvera que l'avantage est toujours à la formule de Simpson. Cette dernière étant d'ailleurs plus simple, je pense qu'il n'y a pas avantage à lui substituer la formule (4).

Passons à la formule de M. le général Poncelet. L'aire d'une courbe étant comprise entre celle du polygone inscrit formé par une suite de cordes, et celle du polygone circonscrit formé par une suite de tangentes, il était naturel de penser qu'en général la moyenne arithmétique entre ces deux aires s'approcherait plus que chacune d'elles de l'aire de la courbe. C'est sur cette considération qu'est fondée la méthode mixte entre celle des tangentes et des cordes, exposée par M. Poncelet dans ses Leçons à la Faculté des Sciences de Paris.

Soit $aAGg$ l'aire à calculer.



On forme un polygone circonscrit à la courbe en menant des tangentes aux extrémités de toutes les ordonnées $y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}$ de rang pair, et un polygone inscrit, en joignant d'abord les extrémités A et B des deux premières ordonnées, et les extrémités F et G des deux dernières, puis menant les cordes de contact BD, DF, etc., du polygone circonscrit. Il est facile de voir maintenant que l'aire du polygone inscrit est exprimée par

$$h\frac{(y_0+y_1)}{2}+2h\frac{(y_1+y_3)}{2}+2h\frac{(y_3+y_5)}{2}+\ldots$$
$$+2h\frac{(y_{2n-3}+y_{2n-1})}{2}+h\frac{(y_{2n-1}+y_{2n})}{2},$$

ou

$$h\left(2\sum y_i+\frac{y_0+y_{2n}}{2}-\frac{y_1+y_{2n-1}}{2}\right),$$

et que l'aire du polygone circonscrit a pour expression

$$2h(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})=2h\sum y_i,$$

h représentant toujours l'équidistance des ordonnées et $\sum y_i$ la somme des ordonnées de rang pair (ou d'indice *impair*). La moyenne arithmétique entre ces deux aires donne pour l'aire approchée de la courbe

$$(5)\qquad S=h\left(2\sum y_i+\frac{y_0+y_{2n}}{4}-\frac{y_1+y_{2n-1}}{4}\right)\ (*).$$

Cette formule conduit fort souvent à une très-grande approximation si on l'applique, par exemple, à la détermination de l'aire du quart de cercle de rayon 10; on trouve, en divisant le rayon en dix parties égales,

$$S=78,403,$$

valeur plus approchée que celles que donnent les formules (2), (3) et (4). Il est à observer, en outre, qu'au

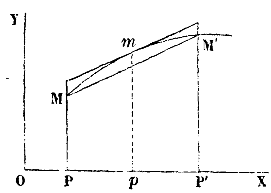
(*) *Voyez*, pour plus de développements, les *Éléments de Mécanique* de H. Resal, pages 28-31.

lieu de dix ou onze ordonnées qu'ont exigées ces dernières, on n'en a eu que sept à calculer pour appliquer la formule de M. Poncelet à ce cas particulier. L'approximation eût donc été plus grande encore, si l'on avait, comme l'eût exigé la comparaison équitable des diverses méthodes, partagé le rayon du quart de cercle en seize parties égales, afin d'avoir aussi dix ordonnées à calculer.

On peut se rendre compte, par l'analyse, de la valeur comparative de la méthode des cordes, de celle des tangentes et de celle de M. Poncelet.

Considérons, en effet, un élément MM′ de la courbe

$$y = f(x).$$



Soient

$$\text{OP} = x_0, \quad \text{PP}' = 2\Delta x,$$

et menons la corde MM′, ainsi que la tangente au point m correspondant au milieu de PP′. L'aire PMM′P′ de la courbe aura pour expression

$$S = \int_{x_0}^{x_0 + 2\Delta x} y\,dx,$$

ou, en posant $x = x_0 + x'$,

$$S = \int_{x'=0}^{x'=2\Delta x} dx f(x_0 + x');$$

mais on a

$$f(x_0 + x') = f(x_0) + x' f'(x_0) + \frac{x'^2}{2} f''(x_0) + \frac{x'^3}{2.3} f'''(x_0) + \ldots,$$

et, par suite,

$$\int dx f(x_0 + x') = x' f(x_0) + \frac{x'^2}{2} f'(x_0) + \frac{x'^3}{2.3} f''(x_0) + \ldots,$$

et

$$\int_{x'=0}^{x'=2\Delta x} dx f(x_0 + x') = 2\Delta x f(x_0) + \frac{4(\Delta x^2)}{2} f'(x_0) + \frac{8(\Delta x)^3}{2.3} f''(x_0) + \ldots,$$

ou enfin

$$S = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + \frac{4}{3}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots,$$

et l'on sait que ces séries sont toujours convergentes, si $2\Delta x$ est suffisamment petit et si $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, etc., sont limités. Il est facile de voir, d'un autre côté, que l'aire du trapèze inscrit a pour expression

$$A = \Delta x [f(x_0 + 2\Delta x) + f(x_0)],$$

ou, en développant $f(x_0 + 2\Delta x)$ en série,

$$A = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + 2(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots$$

Pareillement, l'aire du trapèze circonscrit, qui est égale à

$$2\Delta x f(x_0 + \Delta x),$$

peut être mise sous la forme

$$A' = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + (\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots$$

On a donc

$$S - A = -\frac{2}{3}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots,$$

et

$$S - A' = \frac{1}{3}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots.$$

On voit par là que si les éléments dans lesquels on a partagé la courbe sont assez petits pour que les termes qui renferment Δx à une puissance supérieure à la troisième puissent être négligés devant $(\Delta x)^3$, la méthode des tangentes conduit à une erreur qui est juste moitié moindre que celle à laquelle on arrive par la méthode des cordes (*).

La moyenne arithmétique entre le trapèze inscrit et le trapèze circonscrit a pour expression

$$M = \frac{A + A'}{2} = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + \frac{3}{2}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots;$$

on a donc

$$S - M = -\frac{1}{6}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots,$$

ce qui montre que, lorsque Δx est assez petit, cette moyenne donne la valeur approchée de S avec une erreur moitié moindre que celle résultant de l'aire circonscrite, et quatre fois plus faible que celle à laquelle conduit l'aire inscrite. Mais, pour obtenir cette moyenne, on serait obligé de calculer un nombre double d'ordonnées puisque les ordonnées du polygone inscrit ne correspon-

(*) Cette conclusion semble supposer que $f(x_0)$ n'est pas nulle; mais il est facile de voir, en calculant les termes suivants du développement de $S - A$ et de $S - A'$, qu'elle subsisterait encore dans le cas particulier de $f''(x_0) = 0$. Si $f'''(x_0)$ était aussi nulle ou si plusieurs des dérivées $f'''(x_0)$, $f^{\text{IV}}(x_0)$, etc., étaient nulles à la fois, l'avantage de la méthode des tangentes sur celle des cordes n'en serait que plus grand.

dent pas à celles du polygone circonscrit. On a vu de quelle manière ingénieuse M. Poncelet a évité cet inconvénient, et quoiqu'on ne puisse pas appliquer à sa formule le résultat comparatif que nous venons d'obtenir, puisque les cordes et les tangentes ne sont pas disposées de la même manière sur les deux figures ci-dessus, on conçoit néanmoins qu'elle doit conduire à une approximation supérieure à celle que donnent les deux autres méthodes, On vient de voir que la différence entre l'aire de la courbe et celle du polygone inscrit tend à devenir double de la différence qu'il y a entre l'aire de la courbe et celle du polygone circonscrit. On arriverait donc à une plus grande approximation si, au lieu de prendre pour l'aire approchée de la courbe $\frac{A + A'}{2}$, on prenait $\frac{A + 2A'}{3}$, car ce serait la véritable expression de l'aire de la courbe, si les termes renfermant Δx à une puissance supérieure à la troisième étaient réellement négligeables. On a, en effet,

$$\frac{A + 2A'}{3} = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + \frac{4}{3}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots,$$

expression qui ne diffère de la valeur de S que par des termes renfermant Δx à des puissances supérieures à la troisième (et même à la *quatrième*, comme on le verrait en calculant un plus grand nombre de termes). Cette considération m'a permis de modifier avantageusement la formule de M. Poncelet. Reprenons, à cet effet, les valeurs des aires inscrites et circonscrites de la première des deux figures ci-dessus,

$$A = h\left(2\sum y_1 + \frac{y_0 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}\right),$$

et

$$A' = 2h\sum y_i.$$

Mais, au lieu de prendre, comme M. Poncelet, la moyenne arithmétique entre ces valeurs, prenons pour l'aire S de la courbe l'expression $\frac{A + 2A'}{3}$, on aura

$$S = h\left(2\sum y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}\right) + \frac{4}{3}h\sum y_i,$$

ou

$$(6) \qquad S = h\left(2\sum y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{6} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{6}\right).$$

Cette nouvelle formule, qui n'est pas plus compliquée que celle de M. Poncelet et qui est beaucoup plus approchée, doit donc lui être toujours préférée (*).

Appliquons les considérations analytiques qui précèdent à un exemple numérique, celui de l'aire comprise entre l'arc de l'hyperbole équilatère $xy = 1$ et l'axe des abscisses, entre les limites $x = 1$ et $x = 2$, aire dont la valeur exacte est le logarithme népérien de 2 ou

$$S = 0,69314718.$$

(*) M. le général Poncelet, auquel j'ai soumis ce petit travail qu'il a bien voulu approuver sans restriction, m'a fait observer que l'on peut justifier cette nouvelle méthode de quadrature par cette considération purement géométrique, qu'à mesure que l'élément d'arc considéré diminue, la corde MM' (de la deuxième figure) tend à devenir parallèle à la tangente TT', en même temps que l'arc se rapproche indéfiniment de celui d'une parabole de second degré, de sorte que le segment intérieur $M_m M'$ converge vers les $\frac{2}{3}$ du trapèze MTT'M', considéré à la limite comme un véritable parallélogramme ; ce qui s'accorde entièrement avec les considérations analytiques sur lesquelles repose la formule (6).

En supposant la base partagée en dix parties égales, la méthode des cordes conduit à la valeur

$$A = 0,693971$$

et celle des tangentes à

$$A' = 0,692835.$$

On a donc

$$S - A = - 0,000624 \ldots$$

et

$$S - A' = 0,000312 \ldots,$$

ce qui fait voir qu'en s'arrêtant à la sixième décimale, $\Delta x = 0,1$ est assez petit pour que les termes du développement en série qui renferment Δx à une puissance supérieure à la troisième puissent être négligés.

En prenant la moyenne arithmétique entre A et A', on trouve

$$M = \frac{A + A'}{2} = 0,693033$$

et

$$S - M = - 0,000156,$$

ce qui est (en valeur absolue) la moitié de S — A', ainsi qu'on devait s'y attendre.

Enfin,

$$M' = \frac{A + 2A'}{3} = 0,693147,$$

ce qui ne diffère de la valeur de S qu'au delà de la sixième décimale et présente, par conséquent, une approximation bien supérieure à toutes celles qui précèdent.

Mais, comme je l'ai déjà dit, il est à remarquer que le calcul de M et de M' serait deux fois plus long que celui de A ou de A', et que l'on pourrait, par conséquent, dans le même temps calculer A′ en prenant Δx deux fois plus petit, ce qui donnerait peut-être l'avantage à cette dernière expression. Appliquons donc notre exemple à la formule de M. Poncelet ; la valeur de l'aire sera

$$S' = 0,693523,$$

et, par suite,

$$S - S' = -0,000376.$$

On voit que l'erreur est un peu plus grande que S — A′ et qu'elle est plus du double de S — M : mais cela tient à ce qu'en conservant la division de la base en dix parties égales, on a réellement pris Δx deux fois plus grand, comme il est facile de le voir sur la première figure, et que, sans avoir plus d'ordonnées à calculer, on aurait pu diviser la base en seize parties égales, auquel cas la formule du général Poncelet aurait sans doute eu l'avantage sur la méthode des tangentes.

La nouvelle formule (6) conduit à la valeur

$$S'' = 0,692984,$$

et l'on a, par suite,

$$S - S'' = -0,000163,$$

erreur notablement plus faible que S — S′.

Quant à la comparaison analytique entre la formule de M. Poncelet ou la formule (6) d'une part, et entre celle de Simpson ou la formule (4) d'autre part, elle me paraît fort difficile à faire, et je ne puis me prononcer sur leur mérite relatif. Je pense néanmoins qu'en général la nouvelle formule que je propose ne le cède pas en exactitude à celle de Thomas Simpson. Cette dernière, qui donne l'aire exacte dans le cas particulier d'une parabole du second degré à axe parallèle aux ordonnées, peut conduire, comme nous l'avons vu, à des résultats moins satisfaisants que la méthode des tangentes, tandis que la formule de M. Poncelet et à fortiori la formule (6) sont évidemment préférables à la méthode des tangentes.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES

(voir page 304).

Méthode de M. Stern.

La méthode des séries, employée par Euler, Lagrange et M. Cauchy, est sujette à de graves inconvénients. Il y a d'abord la difficulté de reconnaître la continuité et la convergence, de reconnaître si l'on s'approche par excès ou par défaut, et, lorsqu'il existe plusieurs racines réelles, il est difficile de distinguer les séries correspondantes aux diverses racines, les équations peuvent avoir une infinité de racines, et, pour les racines imaginaires, une première approximation est déjà pénible à obtenir. C'est ce qui a engagé l'Académie des Sciences de Copenhague à proposer en 1837 la question : *De æquationum transcendentium radicibus indagandis*. M. le D^r Stern, célèbre analyste qui habite Göttingue et qui y cultive la science pour elle-même, a remporté le prix (*). Nous allons essayer de donner une idée de l'ouvrage couronné.

La racine d'une équation, soit algébrique, soit transcendante, est une quantité qui, substituée à la place de l'inconnue x, la réduit à zéro; dans une équation algébrique qui a pour facteur $x-\alpha$, on est autorisé à en conclure que α est une racine; il n'en est pas ainsi dans une équation transcendante. Si l'on a

$$f(x) = (x-\alpha)\,F(x) = 0,$$

(*) Venu à Paris pour voir l'Exposition.

posant

$$x = \alpha,$$

F (x) peut devenir infini. Par exemple, soit

$$\operatorname{tang} x = \sin x \operatorname{séc} x = 0,$$

on peut poser

$$\sin x = 0$$

et ensuite

$$\operatorname{séc} x = 0\,;$$

les racines de l'équation

$$\sin x = 0$$

annulent aussi $\operatorname{tang} x = 0$. En effet on a

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

(voir les *Tables* de Callet).

Ainsi

$$x = 0, \quad x = \pi, \quad x = 2\pi, \ldots,$$

et ces racines donnent

$$\operatorname{séc} x = 0\,;$$

donc, dans ce cas,

$$\operatorname{tang} x = 0\,;$$

mais les racines de $\operatorname{séc} x = 0$ sont évidemment imaginaires. Posons donc

$$x = y + zi,$$

alors

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})\cos y - \frac{1}{2}i(e^z - e^{-z})\sin y,$$

$$\sin x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})\sin y + \frac{1}{2}i(e^z - e^{-z})\cos y.$$

On doit avoir, séc x étant nul,

$$\cos x = \infty\,;$$

donc

$$z = \infty\,,$$

et, par conséquent,

$$\sin x = \infty\,.$$

Ainsi, en posant

$$\text{séc}\, x = 0,$$

$\sin x$ devient infini et $\text{tang}\, x$ n'est pas nul; en effet, on trouve alors

$$\text{tang}\, x = i.$$

Par conséquent, l'annulation d'un des facteurs n'annule pas le produit.

L'auteur fonde sa méthode sur ces trois théorèmes :

I. Théorème. *L'équation*

$$f(x) = 0$$

étant donnée, substituant successivement x_1, x_2 *à la place de* x, *si les valeurs de* $f(x_1)$, $f(x_2)$ *sont de signes opposés, il existe une ou plusieurs racines de l'équation entre* x_1 *et* x_2; *s'il n'existe aucune racine entre* x_1 *et* x_2, *les valeurs de* $f(x_1)$, $f(x_2)$ *sont de même signe.*

Observation. Bien entendu que $f(x)$ est continue entre x_1 et x_2.

II. Théorème. *Si la fonction* $f(x)$ *et toutes ses dérivées restent continues entre* x *et* $x+a$, *on aura*

$$f(x+a) = fx + af'(x,\ x+a),$$

$$f(x+a) = fx + af'x + \frac{1}{2}a^2 f''(x,\ x+a),$$

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{1}{2}a^2 f''(x) + \frac{1}{2.3}f'''(x, x+a),$$

où $(x,\ x+a)$ *représentent des quantités renfermées* *entre* x *et* x + a, *qui ne sont pas les mêmes dans chaque équation* (MOIGNO, *Calcul différentiel,* p. 34).

III. THÉORÈME DE FOURIER. M. Ossian Bonnet en a donné une démonstration très-simple (*Nouvelles Annales*, tome III, page 119); rappelons seulement l'énoncé du théorème.

Soient f (x) *une fonction algébrique quelconque de degré* m, *et* α, β *deux nombres et* $\beta > \alpha$; *écrivons les deux suites*

$$(\alpha)\quad f^{(m)}(\alpha),\quad f^{(m-1)}(\alpha),\quad f^{(m-2)}(\alpha),\ldots,\quad f(\alpha),$$
$$(\beta)\quad f^{(m)}(\beta),\quad f^{(m-1)}(\beta),\quad f^{(m-2)}(\beta),\ldots,\quad f(\beta).$$

Les exposants indiquent des dérivations; les deux suites peuvent présenter le même nombre de variations, mais dans aucun cas la suite (β) n'a plus de variations que la suite (α). Lorsque la suite (β) a moins de variations, le nombre de racines réelles de l'équation comprises entre α et β ne peut jamais dépasser le nombre de variations perdues. Les pertes de variations proviennent: 1° de ce que des valeurs intermédiaires entre α et β annulent $f(x)$; 2° ou bien de ce que ces valeurs intermédiaires annulent une ou plusieurs des fonctions dérivées, et, dans ce cas, les variations disparaissent par couples et indiquent l'existence de racines imaginaires dans l'équation

$$f(x) = 0.$$

Le nombre de variations perdues pouvant tenir à l'une ou à l'autre de ces deux circonstances, on ne peut savoir, comme par le théorème de M. Sturm, le nombre *juste* des racines comprises, on a seulement une limite; mais, lorsque par la nature des fonctions dérivées on sait qu'une d'elles s'annule, alors le nombre de variations perdues indique le nombre de racines réelles renfermées entre α et β, et, en général, lorsque le nombre des variations perdues est *impair*, il existe au moins une racine réelle entre α et β.

Dans les fonctions algébriques, $f^{(m)}$ est toujours une constante et c'est à cette particularité qu'on doit de pouvoir compter le nombre de variations dans chaque suite (α) et (β) qui ne contiennent au plus chacune que m termes; mais dans les fonctions transcendantes on peut continuer les différentiations indéfiniment et il n'y a plus lieu au théorème de Fourier. Pour remédier à cet inconvénient, et c'est là le point fondamental de la méthode, M. Stern adopte pour $f^{(m)}$ une dérivée qui jouisse de la propriété qu'entre α et β elle ne change jamais de signe; c'est-à-dire que dans cet intervalle l'équation

$$f^{(m)}x = 0$$

n'a aucune racine, et il démontre qu'alors les suites (α) et (β) jouissent des mêmes propriétés que pour les équations algébriques, par des raisonnements analogues à ceux que l'on fait pour ce genre d'équations. Il nomme *dérivée déterminante* celle qui remplit cette condition, et *nombres déterminants* les nombres α et β, et, pour éviter la longueur des calculs, il choisit α et β de telle sorte, que m ne dépasse pas *deux* et qu'il n'y ait qu'une seule racine comprise, et qu'aucune racine des équations

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0$$

ne soit comprise entre ces nombres. Il est toujours possible d'avoir des limites si resserrées tant que $f'(x)$ et $f''(x)$ n'ont pas de facteurs communs; dans ce dernier cas, il faut chercher ce facteur et le mettre de côté. Ces limites étant trouvées, on cherche laquelle de ces limites substituée à la place des x dans $f(x)$ et $f''(x)$ donne même signe. C'est ce que l'auteur nomme la limite *extrême*. Si c'est α, alors on aura pour nouvelle limite une autre plus rapprochée $\alpha + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$; si β est la limite extrême, $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ sera une nouvelle limite; et on continue de même avec ces nouvelles limites. Lorsque les deux limites ne diffèrent plus que d'une unité décimale, on peut aller plus vite. Soit

$$\beta - \alpha = \left(\frac{1}{10}\right)^n;$$

on divise la plus grande des deux valeurs $f''\alpha$ et $f''\beta$ par la plus petite des deux valeurs $2f'(\alpha)$, $2f'(\beta)$ et soit $\left(\frac{1}{10}\right)^k$ l'unité décimale immédiatement plus grande que ce quotient; si n est plus petit que $1-k$, on resserre les limites jusqu'à ce qu'on ait

$$n = 1 - k \quad \text{ou} \quad n > 1 - k;$$

alors, si β est la limite *extrême*, on développe le quotient $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ jusqu'à la décimale d'ordre $2n+k$; on augmente le dernier chiffre du quotient d'une unité et on *l'ajoute*, ainsi augmenté, à β, si $f(\beta)$ et $f'(\beta)$ sont de signes différents, ou bien on retranche de β, si $f(\beta)$ et $f'(\beta)$ ont même signe. La nouvelle valeur approchée β' peut être au-dessus ou au-dessous de la valeur de la racine; de quoi l'on peut s'assurer en substituant β' à la place de x dans $f(x)$: en tout cas, β' diffère de x d'une quantité moindre que $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$. Augmentant ou diminuant la dernière figure décimale de β' d'une unité, selon que β' est plus grand ou moindre que la racine, on aura de nouvelles limites ; et procédant avec celles-ci comme avec les précédentes, on parvient à des résultats exacts jusqu'à la $2n+k$, $4n+3k$, $8n+7k$ figure décimale.

Les applications suivantes éclairciront ce que l'exposé peut présenter d'obscur (*).

Il y a donc trois points essentiels qu'il faut avoir toujours présents dans l'application de cette méthode : 1° la recherche de la *fonction déterminante ;* 2° la recherche des nombres k et n ; 3° resserrer les limites jusqu'à ce que l'on ait

$$n \geqq 1-k.$$

1er *Exemple :*

$$x \log x - 100 = 0$$

(Euler, *Institut*, t. II, § 243) ; il s'agit de logarithmes hyperboliques.

$$f''(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = 1 + \log x, \quad f(x) = x \log x - 100;$$

3 et 4 sont des *nombres déterminants ;* car $f''(x)$ ne change pas de signe dans cet intervalle.

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	fx,
	$+$	$+$	$-$
(3)	$\frac{1}{3}$,	2,098,	0,3093,
	$+$	$+$	$+$
(4)	$\frac{1}{4}$,	2,386,	0,940....

Ainsi la racine est entre 3 et 4.

$$4-3 = \left(\frac{1}{10}\right)^0,$$

(*) On en donnera plus tard la démonstration plutôt longue que difficile et qui aurait trop allongé cet article.

donc

$$n = 0.$$

$\frac{1}{3}$ est la plus grande des valeurs de $f''(x)$, 5,196 est la plus petite des valeurs de $2f'(x)$; donc

$$\frac{\frac{1}{3}}{5,196} = 0,07\ldots,$$

on a

$$\left(\frac{1}{10}\right)^1 > 0,07;$$

donc

$$k = 1 \quad \text{et} \quad n = 1 - k.$$

Ainsi la condition est remplie. La limite extrême est 4, car cette limite donne même signe à $f''(x)$ et $f(x)$

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{0,940}{2,386},$$

et comme $2n + k = 1$, il suffit de pousser la division jusqu'à la première décimale (*voir* p. 389).

Ainsi

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 0,3;$$

augmentant cette décimale d'une unité, on a, pour première valeur approchée,

$$4 - 0,4 = 3,6;$$

on retranche parce que $f(\beta)$ et $f'(\beta)$ ont même signe (p. 389).

$f(3,6)$ est *positif*, donc 3,6 est trop grand et la racine est comprise entre 3,5 et 3,6; or

$$3,6 - 3,5 = \frac{1}{10},$$

donc

$$n = 1;$$

on a encore $k = 1$ et

$$n > 1 - k, \quad 2n + k = 3.$$

Il faut donc pousser le quotient $\frac{f(3,6)}{f'(3,6)}$ jusqu'à la troisième décimale et l'on obtient

$$\frac{f(3,6)}{f'(3,6)} = 0,002;$$

ainsi la seconde limite est

$$3,6 - 0,003 = 3,597,$$

approchée à un millième près. $f(3,597)$ est négatif, la racine est donc comprise entre 3,597 et 3,598; or 3,598 est la limite extrême:

$$\frac{f(3,598)}{f'(3,598)} = \frac{0,00163032}{2,28037813},$$

or

$$4n + 3k = 7;$$

il faut pousser jusqu'à la septième décimale, donc

$$\frac{f(3,598)}{f'(3,598)} = 0,0007149;$$

ainsi la troisième valeur approchée est

$$3,598 - 0,000715 = 3,597285,$$

exacte à $\left(\frac{1}{10}\right)$ près; de sorte que la racine est entre 3,5972850 et 3,5972851. Euler trouve 3,5972852.

2^e^ *Exemple :*

$$x - \cos x = 0$$

(Euler, *Introduction,* livre II, § 531); il est évident que cette équation n'a qu'une seule racine réelle.

$$f''(x) = \cos x, \quad f'(x) = 1 + \sin x, \quad f(x) = x - \cos x,$$

depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 90$ degrés, $\cos x$ conserve le même signe; donc $f'(x)$ peut être prise pour fonction déterminante;

$$0 - \cos 0 = -1, \quad 90^\circ - \cos 90^\circ = +90^\circ$$

donc il y a une racine entre 0 et 90 degrés; des limites plus resserrées donnent

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	fx,
	$+$	$+$	$-$
(0,7),	0,764,	1,644,	0,064,
	$+$	$+$	$+$
(0,8),	0,696,	1,717,	0,103,

$$\frac{0,774}{2.1,644} = 0,2;$$

donc

$$k = 0,$$

car $\left(\frac{1}{10}\right)^0 > 0,2$;

$$n = 1, \quad n = 1 - k.$$

$$\frac{f(0,8)}{f'(0,8)} = \frac{0,103}{1,717}$$

(0,8 est la limite extrême). Il faut pousser jusqu'à la seconde décimale, car

$$2n + k = 2,$$

donc

$$\frac{0,103}{1,717} = 0,06;$$

première valeur approchée

$$0,8 - 0,07 = 0,73.$$

$f(0,73)$ est négatif; ainsi la racine est comprise entre 0,73 et 0,74.

$$\frac{f(7,4)}{f'(7,4)} = \frac{0,001531}{1,674} = 0,0009 \text{ (car } 4n + k = 4\text{)};$$

seconde valeur approchée

$$0,74 - 0,001 = 0,739.$$

$f(0,739)$ est négatif; la racine est entre 0,739 et 0,7391.

$$\frac{f(0,7391)}{f'(0,7391)} = \frac{0,000024887}{1,67362} = 0,00001487$$

(car $8n + k = 8$);

troisième approximation

$$0,7391 - 0,00001488 = 0,73908512,$$

exacte jusqu'à la huitième décimale. Euler trouve 0,7390847.

La suite prochainement.

SUR UN SYSTÈME DE TROIS COURBES PLANES;

PAR UN ABONNÉ
(Montpellier).

Soient

(1) $A = 0,$

(2) $B = 0,$

(3) $C = 0,$

les équations de trois courbes;

(4) $$A + \lambda B = 0$$

sera l'équation d'une courbe passant par les points d'intersection des équations (1) et (2), et nous pourrons déterminer λ par la condition que (4) coupe (3) orthogonalement.

(5) $$A + \mu C = 0$$

pourra aussi représenter une courbe passant par les points d'intersection des équations (1) et (3) en coupant (2) orthogonalement.

(6) $$B + \nu C = 0$$

passera de même par les points d'intersection des équations (2) et (3) et coupera (1) orthogonalement.

Les valeurs de λ, μ, ν sont

$$\lambda = -\frac{\frac{dA}{dx}\frac{dC}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dC}{dy}}{\frac{dB}{dx}\frac{dC}{dx} + \frac{dB}{dy}\frac{dC}{dy}},$$

$$\mu = -\frac{\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy}}{\frac{dB}{dx}\frac{dC}{dx} + \frac{dB}{dy}\frac{dC}{py}},$$

$$\nu = -\frac{\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy}}{\frac{dA}{dx}\frac{dC}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dC}{dy}},$$

et l'on a toujours l'identité

$$\nu\lambda + \mu = 0, \quad \text{ou} \quad \nu = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

$$\lambda B - \mu C = 0 \tag{7}$$

est l'équation d'une courbe passant par les points d'intersection des courbes (4) et (5). D'après l'identité trouvée, l'équation (6) peut s'écrire sous la forme

$$\lambda B - \mu C = 0.$$

Donc les courbes (4), (5) et (6) ont toutes leurs cordes communes.

Ce théorème est la généralisation d'un théorème de Plücker énoncé dans un des volumes des *Nouvelles Annales*.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS DE LA LOXODROMIE;

D'APRÈS M. H. D'ARREST.

(*Astron. Nachr.* 1853, t. XXXVI, p. 351.)

1. *Notations.*

α, δ coordonnées astronomiques d'un point d'une loxodromie passant par l'*origine*.

A = angle constant de la loxodromie avec le méridien.

r = rayon de courbure sphérique de la loxodromie au point (α, δ).

α', δ' = coordonnées du centre du cercle osculateur de la loxodromie au point (α, δ).

n = portion de la normale comprise entre la courbe et l'équateur.

r' = rayon de courbure de la développée au point (α', δ').

n' = portion de la normale au point (α', δ') comprise entre la développée et l'équateur.

A' = angle que fait la développée au point (α', δ') avec le méridien passant par ce point.

s' = longueur d'un arc de la développée.

2. *Formules.*

Équation de la loxodromie passant par l'origine :

$$(1) \qquad \log \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = \alpha \cot A.$$

$$(2) \qquad \cot r = -\sin A \operatorname{tang} \delta.$$

$$(3) \qquad \alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$(4) \qquad \operatorname{tang} \delta' = \pm \operatorname{tang} A \operatorname{s\acute{e}c} \delta.$$

$$(5) \qquad \operatorname{tang} r \operatorname{tang} n = -\operatorname{cos\acute{e}c}^2 A.$$

$$(6) \qquad \cot r' = \frac{\sin A \operatorname{tang} \delta'}{\sin^3 \delta'}.$$

$$(7) \qquad \operatorname{tang} r' \operatorname{tang} n' = -\operatorname{cos\acute{e}c}^2 A \sin^4 \delta'.$$

$$(8) \qquad \sin A' \sin \delta' = \pm \sin A.$$

$$(9) \quad \operatorname{tang} \delta' = \pm \frac{1}{2} \operatorname{tang} A \left[e^{\left(\alpha' \pm \frac{\pi}{2}\right) \cot A} + e^{-\left(\alpha' \pm \frac{\pi}{2}\right) \cot A} \right],$$

équation de la développée.

$$(10) \qquad \cos s' \cos A = \cos \delta'.$$

3. On conclut de l'équation (9) que la développée de la loxodromie n'est pas une loxodromie; elle diffère en cela de la spirale logarithmique.

Si l'on mène les deux cercles parallèles de latitude $+A$ et $-A$ formant deux segments sphériques, l'équation (9) montre que la développée est formée de deux spirales séparées, renfermées chacune dans un des segments et ayant le pôle correspondant pour point asymptotique. Chacune de ces spirales s'étend aussi dans la zone comprise entre les parallèles.

4. Le cône qui a pour centre celui de la sphère et pour base la développée de la loxodromie coupe le cylindre qui touche la sphère suivant l'équateur en une certaine ligne courbe; développant le cylindre, la ligne courbe devient plane et a pour équation

$$y = \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right),$$

équation de la caténaire.

5. A étant toujours l'angle constant, supposons qu'un point décrive sur la sphère une courbe qui coupe chaque méridien suivant un angle A' tel, que l'on ait la relation

$$\tang A' = \tang A \sin \delta ;$$

l'équation de cette courbe sera

$$(a) \qquad \log \cos \delta = \alpha \cot A :$$

la projection orthogonale de cette courbe sur l'équateur a pour équation polaire

$$\rho = e^{\alpha \cot A},$$

c'est une spirale logarithmique.

L'équation de la normale sphérique à la courbe (a) est

$$\tang \delta' = \tang \delta \left[\cos (\alpha - \alpha') - \tang A \sin (\alpha - \alpha') \right],$$

où α', δ' représentent les coordonnées courantes.

Faisant

$$\delta' = 0,$$

on obtient

$$\text{tang sous-normale} = \cot A.$$

Ainsi la sous-normale est constante, ce qui n'a pas lieu pour la parabole sphérique.

6. Rappelons ces formules générales données par Gudermann.

Soient

$$f(\alpha, \delta) = 0$$

l'équation d'une courbe tracée sur la sphère; r le rayon de courbure; α', δ' les coordonnées du centre de courbure correspondant au point α, δ.

Posons

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \varkappa, \quad 1 + \varkappa^2 \cos^2 = \lambda, \quad \varkappa^2 \cos\delta - \varkappa \sin\delta = \mu,$$

$$\varkappa\lambda \sin\delta = \nu,$$

on a

$$\operatorname{tang}(\alpha - \alpha') = -\frac{\lambda}{\mu\cos\delta}, \quad \sin\delta' = \frac{\mu\sin\delta - \varkappa\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2 + \varkappa^2\lambda^3 - 2\mu\nu)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\nu - \mu}.$$

On trouve ces formules dans la *Sphérique analytique* de Gudermann; Cologne, 1830.

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET TOPOGRAPHIE,

Théorèmes à démontrer.

1. ABC est un triangle sphérique.

m est le centre du cercle inscrit; r le rayon sphérique de ce cercle.

μ est le centre du cercle circonscrit; ρ le rayon sphérique de ce cercle.

ρ', ρ'', ρ''' les rayons sphériques des trois cercles ex-inscrits.

s l'aire du triangle, p le périmètre.

On a

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \frac{\cos m\mu}{\sin r \sin \rho},$$

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \frac{\cos m\mu}{2 \sin r \sin \rho},$$

$$\sin\frac{1}{2}s = \frac{(\operatorname{tang}\rho . \operatorname{tang}\rho' . \operatorname{tang}\rho'' . \operatorname{tang}\rho''')^{\frac{1}{2}}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}p \operatorname{tang}\rho}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

(H. d'Arrest (*)).

2. Pour un lieu terrestre donné et une déclinaison d'une étoile donnée, le minimum de l'accroissement de l'azimut a lieu lorsque le sinus de la hauteur de l'étoile est égal à la tangente de la moitié de la hauteur dans le premier vertical. (Möbius.)

3. Mêmes données; le minimum de l'accroissement de l'angle parallactique a lieu lorsque le sinus de la hauteur de l'étoile est égal à la tangente de la moitié de la plus grande digression. (H. d'Arrest.)

4. Soit φ la hauteur du pôle pour un lieu donné; δ la déclinaison d'une étoile S; O et O' deux points de l'ho-

(*) Directeur de l'observatoire de Pleissenberg, près Leipzig, élève du célèbre Encke; il est de la colonie de Berlin; provenant de Français exilés par la révocation de l'édit de Nantes : mesure funeste qu'on pourrait caractériser plus sévèrement et qui entache la fin du siècle de Bossuet et de Fénélon.

rizon diamétralement opposés au point ortif et au point occase de l'étoile, s étant l'aire du triangle SOO'. Cette aire est constante (LEXELL) et l'on a

$$\operatorname{tang}\frac{s}{4} = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\varphi+\delta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi-\delta}{2}\right)}}.$$

(H. D'ARREST.)

5. Sur le diamètre d'un grand cercle d'une sphère comme axe on décrit une lemniscate, on fait une projection stéréographique de cette lemniscate sur la sphère; cette projection renferme une partie de l'hémisphère; l'aire de la partie restante de l'hémisphère est égale au carré du diamètre de la sphère. (H. D'ARREST.)

6. A, B, C, D, E sont cinq points dans un plan; A, B, C, trois points consécutifs en ligne droite. *Données longueurs* AB, BC, DE; *angles* DAE, DBE, DCE. Construire le quadrilatère ACDE : 1° par un moyen mécanique, 2° par le calcul. (*Problème de topographie.*)

Théorème combinatoire à démontrer.

Soit 1, 2, 3, 4,..., $n-1$ une suite de nombres naturels; représentons par $F_r(n-1)$ l'expression *algébrique* de la somme de ces nombres combinés r à r *et sans répétition.*

Soit 1, 2, 3, 4,..., n une seconde suite de nombres naturels; représentons par $F'_r(n)$ l'expression *algébrique* de la somme de ces nombres combinés r à r *avec répétition.* En changeant dans $F_r(n-1)$, $+n$ dans $-n$, on retrouve la fonction $F'_r(n)$ et, réciproquement, en changeant dans $F'_r(n)$, $+n$ dans $-n$, on obtient $F_r(n-1)$

Exemples :

$$r = 1,$$

$$F_1(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad F'_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$F_1(-n-1) = \frac{n(n+1)}{2} = F'_1(n),$$

$$F'(-n) = \frac{n(n-1)}{2} = F_1(n-1);$$

$$r = 2,$$

$$F_2(n-1) = \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{3n-1}}{1.2.3.4},$$

$$F'_2(n) = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{3n+1}}{1.2.3.4},$$

$$F_2(-n-1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1.2.3.4} = F'_2(n),$$

$$F'_2(-n) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{1.2.3.4} = F_2(n-1).$$

(OETTINGER.)

BIBLIOGRAPHIE

(voir p. 272).

ALGÈBRE SUPÉRIEURE ; par M. *Serret*. (Fin.)

9^e *Leçon* (118-132). On fait voir comment M. Minding s'est servi du parallélogramme de Newton pour déterminer le degré de l'équation finale dans l'élimination, parallélogramme qui sert, comme on sait, dans la recherche des asymptotes hyperboliques de divers ordres d'une courbe dont l'équation est donnée. M. Liouville a fait emploi de ces asymptotes pour calculer d'une manière élégante les divers termes de l'équation finale. C'est ce que donne aussi la méthode de Bezout. « M. Liouville a déduit, des résultats qui précèdent, la démonstration d'un théorème *curieux* de géométrie (p. 128). » Il s'agit d'un *magnifique* théorème sur les tangentes parallèles dans les courbes et sur les plans parallèles dans les surfaces. Il me semble qu'il aurait été convenable de dire qu'on doit cette *curiosité* à M. Chasles (*) (voir *Nouvelles Annales*, tome IV, p. 153 et 178).

10e *Leçon* (133-143). Extension des résultats de la leçon précédente aux surfaces.

11e *Leçon* (144-162). Théorie des fonctions semblables des racines d'une équation.

Dans cette théorie créée par Lagrange on a besoin de la proposition suivante :

Le nombre des valeurs distinctes *que peut prendre une fonction de* m *lettres quand on y permute les lettres qu'elle renferme, est toujours un diviseur du produit* m!

Démonstration. Si toutes les permutations sont différentes les unes des autres, le nombre de ces valeurs est évidemment m!. Formons ces permutations *normalement*, comme nous l'avons indiqué (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 127) (**), et écrivons-les les unes au-dessous des autres; le même mode qui sert à dériver la deuxième de la première fait dériver la quatrième de la troisième, la sixième de la cinquième, etc ; donc, si la première permutation devient égale à la deuxième, la quatrième de-

(*) Le théorème sur les plans appartient aussi à M. Chasles.

(**) On persiste à ne pas parler de cette formation normale (Hindenbourg) dans les Traités élémentaires, et je persiste à la recommander parce qu'elle est essentielle.

viendra égale à la troisième, la sixième à la cinquième, etc; le nombre de permutations distinctes sera donc $\frac{m!}{2}$. La troisième permutation dérive de la première, comme la sixième de la quatrième, la neuvième de la septième, etc. Donc, si les trois premières permutations deviennent égales, les quatrième, cinquième et sixième permutations seront aussi égales, et ainsi donc le nombre des permutations distinctes se réduit à $\frac{m!}{3}$ etc.

C. Q. F. D.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

$$(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

deux fonctions des racines sont semblables lorsqu'une permutation quelconque dans l'une amène une permutation semblable dans l'autre.

Exemples : $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ sont des fonctions semblables; à $x_1 + x_3$ correspond $x_1 x_3$, etc., mais $x_1 - x_2$ et $x_1 x_2$ ne sont pas semblables, car à $x_2 - x_1$ correspond $x_2 x_1$; $x_1 - x_2$ et $x_1 - x_2$ sont de signes opposés, tandis que $x_1 x_2$ et $x_2 x_1$ sont égaux, mais $x_1 - x_2$ et et $x_1^3 - x_2^3$ sont semblables. Cette définition admise, lorsque l'on connaît la valeur numérique d'une de ces fonctions, on peut en déduire la valeur numérique des fonctions semblables. M. Hermite en a donné une démonstration plus simple que celle qu'on lit ici (*Nouvelles Annales,* t. I, p. 329); mais il n'a pas discuté les cas exceptionnels, d'ailleurs très-faciles, où certaine équation a des racines égales.

Le théorème subsiste encore lorsque les fonctions ne sont pas semblables; on le ramène facilement au cas où les fonctions sont semblables (p. 161); ainsi, étant donnée la valeur d'une fonction des racines, on peut trouver une racine.

12ᵉ *Leçon* (163-170). Applications numériques qui facilitent l'intelligence de la leçon précédente et une nouvelle démonstration du théorème de Lagrange, par Galois.

13ᵉ *Leçon* (171-189). Équations binômes; théorie des *racines primitives,* créée par Euler; manière de les trouver et leur nombre, application du principe de M. Sturm à l'équation

$$V_n + V_{n-1} + \ldots + V_2 + V_1 + 1 = 0$$

ou

$$V_n = x^n + \frac{1}{x^n};$$

faisant

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

on a

$$V_n = z V_{n-1} - V_{n-2}. \tag{1}$$

V_n est une fonction de z.

A l'inspection de cette relation, on voit : 1° que les V forment une série récurrente, dont l'échelle de relation est z_1, -1; 2° qu'on peut appliquer à ces fonctions V les mêmes raisonnements qui servent à opérer la séparation des racines dans le théorème de M. Sturm. Faisant successivement

$$x = -1,$$

d'où

$$z = -2; \quad x = +1, \quad \text{d'où} \quad z = 2,$$

on trouve que l'équation $V_\mu = 0$ a μ racines réelles comprises entre $+2$ et -2.

Posons

$$U_n = V_n + V_{n-1} + \ldots + V_2 + V_1 + 1.$$

U_n est une fonction du degré n en z; on a la relation

$$U_n = z U_{n-1} - U_{n-2},$$

et l'on conclut que l'équation $U_\mu^2 = 1$ a μ racines réelles comprises entre -2 et 2.

Toutes les fois que la relation (1) existe, le principe de M. Sturm est applicable.

14^e *Leçon* (190-200). Roule encore sur les fonctions V_n et U_n de la leçon précédente; donne les équations différentielles linéaires du deuxième ordre auxquelles ces fonctions satisfont. On déduit de ces équations les expressions développées de ces fonctions, et aussi les développements de $\cos na$ et de $\frac{\sin na}{\sin a}$ en fonction de $\cos a$. On ne mentionne pas les relations de ces fonctions avec les séries récurrentes.

15^e *Leçon* (201-217). Résolution de l'équation générale du troisième degré. Hudde, Lagrange, Tschirnhaus, Euler.

16^e *Leçon* (218-232). C'est une suite. Équations du troisième degré dont deux racines peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de la troisième. On regrette que l'auteur, au lieu de s'attacher à un cas particulier, n'ait pas donné la théorie de M. Hill, généralisée par M. Minding, et où l'on démontre que les racines d'une équation algébrique quelconque sont liées *cycliquement* les unes aux autres (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 443), et l'on parvient facilement et d'une manière directe aux équations (7), (8), (9), (10) qu'on obtient ici assez péniblement (voir *Nouvelles Annales*, tome VII, p. 446).

M. Vincent a démontré que la méthode de Lagrange (fractions continues) pour la résolution numérique des équations amène nécessairement à la séparation des racines; observation très-importante et qui aurait fait une grande sensation, si le théorème de M. Sturm n'avait pas déja subsisté (1832) (*Journal de M. Liouville*, tome I, page 341, 1836). Faisant l'application à l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

le perspicace auteur remarque que les trois fractions continues sont terminées par les mêmes quotients, et il ajoute: « Cette propriété mériterait peut-être un examen spécial. » M. Lobbato, géomètre hollandais, a fait cet examen (*Journal de M. Liouville*, t. IX, p. 177, 1844) et démontre que toutes les équations du troisième degré qui ont cette forme

$$x^3 - 3\frac{A^2 + A + 1}{A'^2}x + \frac{2A^3 + 3A^2 + 3A + 1}{A'^3} = 0$$

jouissent de cette propriété. A est un nombre entier quelconque et A' un diviseur quelconque de $A^2 + A + 1$; faisant

$$A = 4, \quad A' = 3,$$

on trouve l'équation particulière

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Ce beau résultat, corrigé en quelques points, termine la leçon, et dans la Note VII (p. 476), M. Serret établit avec une extrême sagacité qu'on rencontre ce genre d'équations parmi celles dont le quantième du degré est divisible par 2 ou par 3 et qui sont irréductibles; indique le moyen de former ces équations. La division du cercle en sept ou neuf parties égales conduit à une telle équation du troi sième degré, et la division du cercle en quinze parties égales, à une équation analogue du quatrième degré. C'est un des plus beaux produits analytiques que l'auteur a consigné dans le *Journal de M. Liouville*, tome XV.

17^e^ *Leçon* (233-243). Résolution générale de l'équation générale du quatrième degré. Ferrari, Lagrange, Descartes, Tschirnhaus et Euler.

18^e^ *Leçon* (244-262). Traitée d'après Lagrange. De la résolution des équations dont le degré est un nombre premier ou dont le degré est un nombre composé, d'après la Note XIII du *Traité de la résolution des équations numériques*, exposée avec une grande clarté.

19^e^ et 20^e^ *Leçons* (263-276, 277-288). En permutant les deux lettres a et b dans $(a-b)^2$, on obtient deux formes et une seule valeur; en permutant les trois lettres a, b, c dans l'expression $(a+\alpha b+\alpha^2 c)^3$ où α est racine de l'équation

$$\alpha^2+\alpha+1=0,$$

on obtient six formes et deux valeurs; en permutant les quatre lettres a, b, c, d dans l'expression $(a+b-c-d)^2$, on obtient six formes et trois valeurs. Nous avons vu ci-dessus que la question est de savoir comment on peut former des fonctions qui aient un nombre donné de valeurs. Deux leçons roulent sur cette question qu'on est bien loin de savoir résoudre généralement. Nous devons nous contenter de transcrire les théorèmes qu'on est parvenu à établir, sauf à en donner ailleurs les démonstrations.

1. Le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est toujours un diviseur de $n!$. (Lagrange.)

2. Une fonction de cinq lettres ne peut jamais avoir ni trois valeurs, ni quatre valeurs. (Ruffini.)

3. p étant le plus grand nombre premier divisant n,

si une fonction de n lettres a moins de p valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux. (CAUCHY.)

4. Si une fonction de six lettres a moins de six valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux. (CAUCHY.)

5. Si une fonction de n lettres a n valeurs, elle est symétrique par rapport à $n - 1$ lettres. (ABEL.)

6. Si $n > 7$ et s'il y a au moins un nombre premier p compris entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$, alors si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux. (BERTRAND.)

7. Si $n > 7$ et s'il n'y a aucun nombre premier entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$, alors si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux.

8. Si une fonction de n lettres a plus de n valeurs, n étant plus grand que 9, elle en a au moins $2n$.

(BERTRAND.)

9. Lorsque $n > 7$, il y a au moins un nombre premier entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$. (TCHEBICHEF.)

Ce théorème est l'objet de la Note XV (p. 582).

La démonstration est fondée sur la relation suivante : Soit $T(z)$ la somme des logarithmes népériens de tous les nombres entiers qui ne surpassent pas z, et $\theta(z)$ la somme de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas z. Faisons

$$\psi(z) = \theta(z) + \theta\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(z^{\frac{1}{3}}\right) + \theta\left(z^{\frac{1}{4}}\right) + \ldots;$$

la série se prolonge jusqu'au terme qui devient zéro, alors on a

$$T(z) = \psi(z) + \psi\left(\frac{z}{2}\right) + \psi\left(\frac{z}{3}\right) + \psi\left(\frac{z}{4}\right) + \ldots.$$

Cette relation importante a été publiée en France par

M. de Polignac, avant que le travail de M. de Tchebichef y fût connu (*).

21^e *Leçon* (289-298). Classification des fonctions; démonstration de l'impossibilité de résoudre les équations supérieures au quatrième degré.

22^e *Leçon* (290-309). Quatre opérations : 1° addition et soustraction; 2° multiplication.

Cette leçon et la suivante sont tirées des articles de Wantzel, insérés dans les *Nouvelles Annales*, t. II, p. 117, t. III, p. 325, t. IV, p. 57. A partir de la page 35 on copie même textuellement ce journal sans le nommer. La dichotomie abélienne des fonctions est clairement exposée; nous y reviendrons.

23^e et 24^e *Leçons* (310-324, 325-342). Théorie des congruences et des racines primitives et des nombres complexes (imaginaires de Gallois).

25^e *Leçon* (343-370). Les commencements de la 25^e leçon se trouvent aussi dans les *Nouvelles Annales* (t. III, p. 204, 214, 337) et plus simplement, parce qu'on y fait usage de la notation leibnitzienne. Nous nous proposons de donner, à l'aide de la même notation, les résultats importants renfermés dans ces trois leçons et nous croyons avec avantage.

26^e et 27^e *Leçons* (371-383, 384-400). Les sections 4^e, 5^e et 6^e des *Disquisitiones* contiennent le germe et le point de départ de tous les travaux arithmologiques du XIX^e siècle; de même, la 7^e section de cette immortelle production contient le germe et le point de départ de tous les travaux sur la théorie des équations et principalement ceux de Gallois et d'Abel qui forment la matière de ces deux leçons. L'illustre géomètre de Gottingue a montré

(*) M. de Polignac, officier d'artillerie devant Sébastopol, a rencontré dans une entrevue parlementaire le frère de M. de Tchebichef, officier de la même arme dans Sébastopol.

que l'équation irréductible $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ (p nombre premier) jouit de la propriété que chaque racine est une fonction rationnelle de l'une quelconque des autres; et que les radicaux qui entrent dans l'expression des racines ont pour indices un des facteurs premiers de $p - 1$. Abel a généralisé cette expression et l'a étendue à des équations irréductibles de degré quelconque. Maintenant ces travaux sont arriérés, étant tous compris et rectifiés dans le superbe Mémoire de M. Léopold Kronecker. La traduction du résumé de ces recherches fait par le profond analyste lui-même est contenue dans la Note XIII (p. 560).

M. Serret a aussi enrichi son ouvrage de la traduction d'un Mémoire géométrico-algébrique de M. Otto Hesse, le célèbre disciple de Jacobi. Les courbes du troisième degré ont neuf points d'inflexion, dont trois réels et toujours en ligne droite (Maclaurin). Ces points dépendent d'une équation du neuvième degré que M. Otto Hesse démontre être toujours résoluble algébriquement.

28e *Leçon* (400-414). C'est la 7e section des *Disquisitiones* sur la division de la circonférence. On donne une construction géométrique du polygone de dix-sept côtés. Dans le Journal de Crelle (t. XXIV, p. 251), M. Staudt indique une construction qui serait la plus simple de toutes, étant analogue à celle du pentagone, si des fautes typographiques ne la rendaient inintelligible; il est extrêmement à désirer que le savant géomètre veuille indiquer les corrections qui sont urgentes, vu l'absence de figures (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 390).

29e *Leçon* (415-423). Traite de la formule de Lagrange pour développer z en série ordonnée suivant la puissance de t au moyen de l'équation

$$z = x + tf(z),$$

z se réduisant à x lorsque $t = 0$, et l'on en donne l'application à l'équation

$$z = x + tz^m.$$

M. Serret adopte la démonstration de M. Duhamel (*Cours de Mécanique*). On nous a communiqué une autre démonstration encore plus simple et qui montre en même temps que la série ne s'applique qu'à la plus petite racine.

30ᵉ *et dernière Leçon* (424-430). Solution d'une question de calcul aux différences partielles indéterminées qui se rattache à la représentation géométrique des fonctions elliptiques et abéliennes. On a l'équation

$$dx^2 + dy^2 = \frac{c^2 dz^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)}:$$

il faut trouver pour x et y des fonctions réelles et rationnelles de z qui ne deviennent pas infinies pour

$$z = \pm a, \quad z = \pm \alpha;$$

c est une constante réelle et a et α sont deux constantes imaginaires conjuguées. Cette belle solution, qu'on doit à M. J. Serret, a obtenu les honneurs de l'impression dans le tome XI des *Savants étrangers*.

La longue analyse que nous venons de faire de cet ouvrage ne donne pourtant qu'une idée incomplète de son mérite, des qualités qui y brillent, des richesses qui y sont étalées. Lorsque des hommes puissants dans le monde, ennemis de tout idéal, veulent faire reléguer dans la région d'inutiles chimères les travaux des Lagrange, Laplace, Legendre, etc., de tous nos illustres analystes; lorsque, dans une autre sphère, des écrivains diversement passionnés s'efforcent de démolir Corneille, Racine, Voltaire, nos plus illustres génies littéraires: quoique de tels efforts ne puissent inspirer de craintes plus sérieuses qu'on n'en aurait pour la statue de Napoléon si un essaim de fourmis s'avisaient de creuser sous la colonne de la place Vendôme, néanmoins, il est agréable, il est consolant de rencontrer des hommes de talent qui consolident, illustrent les productions des grands maîtres et marchent sur leurs traces. Puisse M. J. Serret nous gratifier de nouvelles leçons; il rencontrera toujours dans le public géomètre un auditoire attentif et reconnaissant.

SOLUTION DE LA QUESTION 297

(voir t. XIV, p. 117);

PAR M. POUDRA,
Chef d'escadron d'état-major en retraite.

On demande de déterminer un triangle ABC, connaissant une hauteur Bb, une bissectrice Cc et une médiane Aa : chacune de ces droites partant d'un sommet différent.

1°. Prenons arbitrairement un des sommets A sur la droite MN, direction de AC. Le sommet B se trouvera sur une parallèle PQ à MN à distance Bb.

2°. Le point a étant le milieu du côté BC, il est aussi le milieu de Ad, d étant le point de rencontre de Aa et de PQ, et comme Aa est donné, il s'ensuit qu'on connaît d et, par suite, le point a.

3°. Si par a milieu de BC on mène une parallèle à la bissectrice Cc, la longueur de cette droite comprise entre a et la droite BA égale $\frac{Cc}{2}$: donc, le point m de la droite BA est sur une circonférence décrite de a comme centre vec un rayon $am = \frac{1}{2}Cc$.

4°. Si l'on prolonge am jusqu'en f à sa rencontre avec PQ, on aura nécessairement

$$f\mathrm{B} = \mathrm{B}a.$$

Si donc, sur PQ, on prend une suite infinie de points tels que B et qu'on les joigne à A; puis, que de tous ces points on porte sur PQ, à gauche et à droite de chacun d'eux, leur distance respective au point a et qu'on joigne ces points, tels que f, ainsi obtenus avec a, on aura par cette construction les points O d'intersections des droites respectives des deux faisceaux dont les sommets sont A et a. Le lieu de ces points O est une courbe du troisième ordre ayant plusieurs branches, un point double en a et passant par A. Cette courbe coupera la circonférence en des points m, m', alors le triangle ABC est déterminé.

Une courbe du troisième ordre peut être rencontrée par une circonférence en six points. Comme le centre du cercle est un point de la courbe, il y aura nécessairement au moins deux solutions réelles.

GRAND CONCOURS DE 1855

(voir t. XIII, p. 296, et 358).

CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (PRIX D'HONNEUR).

Des formules d'interpolation et de leurs applications. Résoudre l'équation

$$1,3\tan x - \cot\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = 0,31416.$$

Observation. Si le grand concours a pour but de découvrir quels sont, parmi les élèves, les meilleurs calculateurs, la question est bien choisie; il n'en est plus de même si le but est de découvrir les meilleures intelligences. C'est un fait d'expérience que l'aptitude pour les méditations mathématiques et l'aptitude pour les calculs numériques sont rarement réunies. D'ailleurs le mérite d'un calcul, c'est l'exactitude. Les dispositions fiévreuses d'un grand concours laissent-elles subsister le calme, le sang-froid nécessaires pour obtenir cette exactitude? La transposition d'un seul chiffre peut faire passer du premier au dernier rang.

Physique et Chimie.

1°. Proportions chimiques. Données sur lesquelles cette théorie repose. Construction et emploi de la Table des proportions chimiques.

2°. Un morceau d'or pèse 3 kilogrammes dans le vide. On demande la valeur des poids apparents qu'on lui trouve en le pesant d'abord dans l'air, puis dans l'eau, comme si l'on voulait en déterminer le poids spécifique. On admettra que, dans les conditions de l'expérience, le poids d'un litre d'air est $1^{gr},293$, celui d'un litre d'eau 1 kilogramme, enfin celui d'un litre d'or $19^{k},5$. Enfin, on supposera que les poids employés sont en laiton de pesanteur spécifique 8,4.

CLASSE DE LOGIQUE (SECTION DES SCIENCES).

Mathématiques.

Exposer la théorie de la racine carrée en prenant pour exemple le nombre 755161.—Comment obtiendrait-on à 0,001 près celle du nombre décimal 0,78614?

On connaît l'angle du sommet d'un triangle, la hauteur du triangle et la longueur de la ligne qui joint le sommet au milieu du côté opposé. On propose de construire le triangle.

Dans un quadrilatère dont deux angles opposés sont droits, on donne les deux côtés qui comprennent l'un des deux autres angles. Avec cet angle, trouver les deux autres côtés et les deux diagonales.

Observation. Bonnes questions.

Sciences physiques.

Densités des solides, des liquides et des gaz. Moyens employés pour les déterminer.

On veut construire un aérostat capable d'enlever 1250 kilogrammes avec une force ascensionnelle de 10 kilogrammes. On demande quel devra être son volume : 1° pour le cas où l'on se servirait d'hydrogène pour le remplir ; 2° pour le cas où l'on emploierait du gaz de l'éclairage d'une densité de 0,408. On négligera dans le calcul le volume de l'enveloppe et celui de la nacelle. On cherchera de plus, dans l'hypothèse où l'on se servirait d'hydrogène, combien il faut employer de fer ou de zinc et d'acide sulfurique pour produire ce gaz, et combien il en résultera de sulfate de fer ou de zinc.

Histoire naturelle.

De la division du règne animal en quatre embranchements.

De la fleur.

Observation. *De omnibus aliquid, de toto nihil* : résultat certain de tout enseignement encyclopédique.

CLASSE DE LOGIQUE (SECTION DES LETTRES).

Mathématiques.

1°. Exposer les diverses propositions au moyen desquelles on démontre quelle est la mesure d'un parallélogramme quelconque.

2°. Démontrer que si sur trois côtés d'un triangle, considérés comme diamètre, on décrit trois circonférences, celles-ci se coupent deux à deux sur les côtés même du triangle, prolongés s'il le faut. Discussion.

3°. On a deux payements à effectuer : l'un de 10000 fr. au bout de quatre ans six mois, l'autre de 30000 francs au bout de cinq ans huit mois. On voudrait s'acquitter en une fois au moyen d'un payement de 40000 francs. On demande à quelle époque il devra s'effectuer, l'intérêt est simple et le taux 4,50 pour 100.

Physique.

Exposer les diverses expériences au moyen desquelles on démontre que la lumière blanche est composée de rayons distincts les uns des autres par leur couleur et leur réfrangibilité.

On donne un récipient de 3 litres de capacité ; on y introduit 2 litres d'hydrogène à la pression de $1^{m},30$, 1 litre d'acide carbonique à la pression de $0^{m},25$, 3 litres d'azote à la pression de $0^{m},25$. On demande quelle sera la pression finale du mélange.

Dissertation latine.

Justitiam sine caritate perfectam esse non posse.

CLASSE DE RHÉTORIQUE (SECTION DES SCIENCES).

Mathématiques.

Étant donnée une parabole, démontrer que si l'on joint deux points M et M′ de la courbe, et qu'on prolonge jusqu'à la rencontre de la directrice, la ligne qui joint ce point de rencontre au foyer divise en deux parties égales l'angle formé par l'un des rayons vecteurs, et par le prolongement de l'autre.

Décrire le mouvement apparent du Soleil dans le cours d'une année, et examiner les phénomènes relatifs à ce mouvement.

Observation. La propriété géométrique énoncée appartient à une conique quelconque.

Mécanique.

1°. De l'eau considérée comme moteur.

Déterminer la quantité de travail moteur fourni par une chute d'eau, après avoir exposé les principes sur lesquels repose cette détermination. Évaluer la force trouvée en chevaux-vapeur.

2°. Parmi les récepteurs hydrauliques, examiner en particulier la roue en dessous à aubes planes, la roue en dessous à aubes courbes et la roue à angles. Les comparer les unes avec les autres.

Histoire naturelle.

De la digestion. Des organes qui servent à cette fonction et de leurs principales modifications chez les mammifères.

Du fruit et de ses principales modifications.

Des terrains tertiaires et des corps organisés, animaux et végétaux, qui les caractérisent.

Observation. C'est à des rhétoriciens, à des jeunes gens de seize à dix-huit ans qu'on adresse ce tohu-bohu de questions scientifiques! *Risum teneatis, amici?*

CLASSE DE SECONDE (SECTION DES SCIENCES).

Mathématiques.

Mesurer le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets. Déduire de là le volume du secteur sphérique, et, par suite, de la sphère.

Par l'une des arêtes d'un tétraèdre donné, mener un plan qui divise l'arête opposée en deux parties proportionnelles aux aires des faces dont l'arête commune est celle par laquelle on doit mener le plan.

Quelle est la droite qui partant d'un sommet d'un tétraèdre rencontre la base en un point tel, qu'en le considérant comme le sommet commun de trois triangles ayant pour bases les trois côtés de cette base, les aires de ces triangles soient proportionnels aux aires des faces.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
CONCOURS D'ADMISSION EN 1855 (Paris).

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Mathématiques.

1re *série.* On donne l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3,$$

trouver les droites situées sur cette surface, l'intersection des plans passant par ces droites avec la surface.

2^e *série.*

$$x = \operatorname{tang} x.$$

Démontrer que cette équation a une infinité de racines. Calculer la plus petite racine positive à un dix-millième près.

3^e *série.* Trouver les quatre points d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole qui ont un foyer commun F et dont les centres sont respectivement O et O'. On donne l'angle $OFO' = d$; les deux demi-axes a et b de l'ellipse; a' et b' de l'hyperbole. Faire le calcul dans le cas où $d = 22^o\,30'$, $a = 10$, $b = 7$, $a' = 1$, $b' = 1$.

Physique et Chimie.

1re *série.* Loi de Mariotte; dans quelle limite elle doit être acceptée.

2^e *série.* De l'azote. Ses propriétés; ses combinaisons avec l'oxygène; gaz qui en résultent; analyse de ces gaz; rapports entre les poids et les volumes. Déterminer l'équivalent de l'azote.

3^e *série.* Démontrer expérimentalement les lois d'attraction ou de répulsion des fluides électriques et des fluides magnétiques. Comparer les méthodes employées dans les deux cas. Faire ressortir les analogies et les différences des deux problèmes. Indiquer les degrés de précision des expériences à ce sujet.

Épures.

1re *série.* Intersection d'un cylindre et d'un tétraèdre.

2^e *série.* Données : Un tétraèdre régulier de $0^m,12$ de côté reposant sur une de ses faces sur le plan horizontal de projection. Aucun des côtés de la base n'est parallèle ni perpendiculaire à la ligne de terre; le tétraèdre est placé de manière que les projections de ses trois arêtes soient visibles sur le plan vertical de projection.

2°. Une (*sic*) ellipsoïde de révolution : L'axe de révolution est vertical et porté à une distance de $0^{m},025$ du sommet du tétraèdre dans un plan faisant un angle de 45 degrés avec celui de projection. Le centre de l'ellipsoïde est à $0^{m},6$ au-dessus du plan horizontal. Les deux demi-axes de la méridienne ont respectivement $0^{m},05$ et $0^{m},03$ de longueur ; le grand axe est vertical.

Il faut : 1° construire la projection du corps formé par l'ensemble de ces deux solides sur chacun des plans de projection horizontale et verticale placé comme il est indiqué ci-dessus ; 2° construire la tangente au point où se rencontrent deux des coupes d'intersection déterminées dans l'ellipsoïde par les faces du tétraèdre, puis les tangentes horizontales de ces mêmes courbes.

3^{e} *série*. Données :

1°. Même tétraèdre que dans la 2^{e} série.

2°. Un (*sic*) ellipsoïde dont les trois demi-axes sont respectivement $0^{m},03$, $0^{m},04$, $0^{m},05$ de longueur : celui de $0^{m},03$ est vertical, celui de $0^{m},04$ est perpendiculaire au plan vertical de projection. Le centre de l'ellipsoïde est placé sur la verticale abaissée du sommet du tétraèdre à $0^{m},4$ du plan horizontal.

Il s'agit de faire les mêmes constructions que pour la deuxième série.

Nota. On fera bien de faire emploi des sections circulaires.

Mécanique.

1re *série*. Etant donnés un cercle et une droite BB′ tangente, on fait mouvoir la droite de telle manière que le point de contact A parcoure le cercle d'un mouvement uniforme en 8 secondes, en même temps que la droite tourne autour du point A d'un mouvement uniforme en 4 secondes. Le point B′ est à une distance de 1 mètre du point A. On demande quelle sera la vitesse du point B′ au bout de 3 secondes.

2e *série*. Démontrer les lois du mouvement par les expériences. Etant donnée une droite homogène d'une dimension transversale très-petite; étant donnés deux plans, l'un vertical, l'autre horizontal, dont l'intersection est perpendiculaire au plan vertical, on demande quelle est la position maximum que prendra la droite appuyée sur les deux plans pour ne pas glisser. Les plans sont homogènes et de même matière; le coefficient de frottement de la droite avec les plans est égal à 10 degré s.

3e *série*. On demande l'équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné, dans le cas où ce corps est simplement soumis à la pesanteur et au frottement du plan.

Calcul d'un triangle.

1re *série*.

$$\begin{aligned} A &= 120^\circ\, 2'\, 6'',8, \\ B &= 89.8.\,38,7, \\ C &= 90.\,16.\,7,2, \\ R &= 2715^{m},28. \end{aligned}$$

Calculer en mètres les côtés de ce triangle sphérique.

2e *série*.

$$\begin{aligned} A &= 60^\circ, \\ B &= 120^\circ, \\ C &= 90^\circ\, 30', \\ R &= 295^{m},214. \end{aligned}$$

Trouver la surface.

3e *série*. On donne les côtés a, b, c d'un triangle sphérique et le rayon R de la sphère, savoir :

$$a = 71^{m},284,$$
$$b = 94^{m},998,$$
$$c = 110^{m},749,$$
$$R = 442^{m},488.$$

On demande de résoudre le triangle et de calculer sa surface en mètres carrés.

Dessin.

Les trois séries. Une académie.

Lavis à l'encre de Chine.

Les trois séries. Un chapiteau.

Composition française.

1re *série.* Apprécier Bossuet et ses oraisons funèbres.

2e *série.* Corneille. Appréciation de ses tragédies au point de vue de la moralité.

3e *série.* Donner une idée de la première représentation des *Perses* d'Eschyle, à Athènes, huit ans après la deuxième guerre médique.

Thème allemand.

Les trois séries. Treize lignes pour chaque série.

Observations. Les questions devraient présenter à peu près même degré de difficulté pour les trois séries; il s'en faut de beaucoup qu'il en soit ainsi. La première série a généralement les questions les plus faciles. Cela n'est pas juste.

On a reproché aux anciens examens de présenter trop de difficultés mathématiques. On y a remédié en triplant les difficultés, mais les transportant sur la physique, sur la chimie, l'art graphique et les langues. Où est l'allégement? Les candidats entrant à l'Ecole devant être des Pic de la Mirandole, que seront-ils en sortant?

Vers la fin du livre I[er] des *Géorgiques*, Virgile peint un laboureur stupéfait d'admiration en découvrant des ossements gigantesques dans un ancien champ de bataille des Romains :

Grandiaque effosis mirabitur ossa sepulcris.

De même, *sæculis volventibus*, la postérité lisant un jour nos Programmes, exclamera : Quels torrents de science coulaient chez ce peuple phénix où, rien que pour se *préparer* à certaines études, les jeunes gens devaient être munis de tant d'instruction sur toutes les parties des connaissances humaines, dissertaient *de omni re scibili!* Lisant ensuite que ce même peuple ajoutait foi aux baguettes, aux tables, aux somnambules divinatoires, etc., les érudits, jamais embarrassés, ne manqueront pas de découvrir que deux peuples différents, l'un très-savant, l'autre très-ignorant, portaient le même nom, et au besoin donneront les raisons de cette homonymie.

ÉCOLE IMPÉRIALE SPÉCIALE MILITAIRE DE SAINT-CYR, CONCOURS D'ADMISSION EN 1855.

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Mathématiques.

1[re] *série.* Dans un quadrilatère plan ABCD, on donne

$$\begin{aligned} AB &= 428^{m},74, \\ DAB &= 102^{\circ}\,51'\,43'',8, \\ CAB &= 48.42.38,6, \\ CBA &= 80.12.10,4, \\ DBA &= 42.16.14,6. \end{aligned}$$

Calculer la distance des deux points inaccessibles C et D.

2e *série*. Même question.

$$\begin{aligned}
AB &= 619^{m},84,\\
DAB &= 104^{\circ}\,28'\,56'',4,\\
CAB &= 41.30.24,7,\\
CBA &= 87.41.17,6,\\
DBA &= 43.11.19,6,
\end{aligned}$$

Épures.

Les deux séries. A = tronc de prisme quadrangulaire reposant sur le plan horizontal de projection ;

B = tronc de prisme quadrangulaire posé sur A ;

C = parallélipipède rectangle posé sur B.

On donne les dimensions en mètres des trois corps et leurs positions; il faut construire le plan, l'élévation et la coupe du système des trois corps.

SUR LE PROBLÈME DE HALLEY

(voir p. 268) ;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Le théorème de Nicollic peut s'énoncer de la manière suivante :

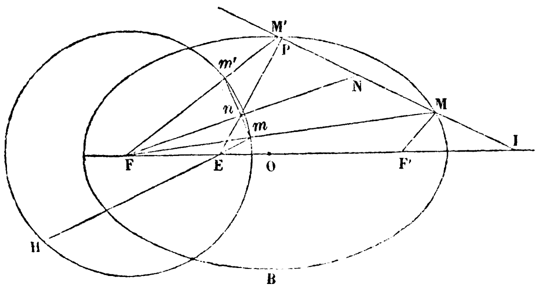
Étant donnés trois points d'une conique et l'un de ses foyers, de ce foyer comme centre et d'un rayon quelconque décrivez une circonférence sur laquelle les rayons vecteurs determineront trois cordes correspondant aux côtés du triangle formés par les points donnés.

Joignez le foyer au milieu d'une des cordes de la conique; cette médiane coupera la corde correspondante du cercle en un certain point, duquel vous abaisserez une perpendiculaire sur la corde de la conique; faites la même construction pour les deux autres cordes, les trois perpendiculaires concourront en un même point qui sera sur l'axe focal.

La distance de ce point au foyer sera égale au rayon du cercle multiplié par le rapport d'excentricité de la conique.

Nous allons démontrer ce théorème en renversant l'énoncé et chercher le point où la perpendiculaire, menée comme on vient de l'indiquer sur une corde de la conique, rencontre l'axe focal.

Soient F le foyer et M, M′ deux points de la conique;



du centre F et du rayon r décrivons un cercle qui rencontre FM en m et FM′ en m'; joignons F au milieu N de MM′: cette droite FN coupe mm' en n; enfin du point n abaissons sur MM′ la perpendiculaire nP qui coupe en E l'axe focal: il s'agit de calculer FE.

Le triangle FnE donne

$$FE = Fn\frac{\sin Fn E}{\sin nEF};$$

mais soit N l'angle aigu PNF, on a

$$\sin Fn E = \cos N,$$

et soit I le point où MM′ coupe l'axe focal,

$$\sin n\,\mathrm{EF} = \cos \mathrm{I}.$$

Ainsi

$$\mathrm{FE} = \frac{\mathrm{F}n \,.\cos \mathrm{N}}{\cos \mathrm{I}}.$$

La courbe étant rapportée à ses coordonnées polaires, on pose

$$\mathrm{FM} = \rho,\quad \mathrm{FM}' = \rho',\quad \mathrm{MFE} = \omega,\quad \mathrm{M'FE} = \omega',$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{MFM}' = \omega' - \omega;$$

on a d'ailleurs les relations

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},\quad \rho' = \frac{p}{1 - e\cos\omega'}.$$

Si l'on cherche à déterminer en général l'angle que font la base et la médiane d'un triangle, on aura

$$\cos \mathrm{N} = \frac{\rho^2 - \rho'^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho'\cos(\omega' - \omega)}\,.\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\omega' - \omega)}}.$$

Ensuite, pour calculer Fn, nous observerons que si, dans un triangle isocèle, on joint le sommet n à un point quelconque de la base, on a la relation

$$\overline{\mathrm{F}n}^2 = r^2 - mn\,.\,m'n\,.$$

Un autre théorème de géométrie fait voir que la base MM′ étant divisée en deux parties égales au point N, la corde mm' est divisée en raison inverse des côtés FM et FM′, de sorte que

$$\frac{mn}{m'n} = \frac{\rho'}{\rho},$$

d'où l'on conclut

$$m'n = \frac{mm'.\rho}{\rho + \rho'}, \qquad mn = \frac{mm'.\rho'}{\rho + \rho'},$$

et enfin

$$mn.\, m'n = \frac{\overline{mm'}^2\, \rho\rho'}{(\rho + \rho')^2}.$$

Mais, dans le cercle de rayon r, la corde

$$mm' = 2r \sin\frac{1}{2}(\omega' - \omega),$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}n = r^2 \left[1 - \frac{4\rho\rho' \sin^2\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}{(\rho + \rho')^2} \right]$$

ou bien

$$\mathrm{F}n = \frac{r\sqrt{\rho' + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\omega' - \omega)}}{\rho + \rho'},$$

et l'on a pour première simplification

$$\mathrm{FE} = \frac{r(\rho - \rho')}{\cos \mathrm{I} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega' - \omega)}}.$$

Il faut actuellement calculer cos I. Le triangle FIM nous donne

$$\frac{\mathrm{FI}}{\rho} = \frac{\sin \mathrm{FMI}}{\sin \mathrm{I}} = \frac{\sin(\mathrm{I} + \omega)}{\sin \mathrm{I}} = \cos\omega + \sin\omega \cot \mathrm{I}.$$

De même

$$\frac{\mathrm{FI}}{\rho'} = \cos\omega' + \sin\omega' \cot \mathrm{I},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\cos\omega + \sin\omega \cot \mathrm{I}}{\cos\omega' + \sin\omega' \cot \mathrm{I}} = \frac{1 - e\cos\omega}{1 - e\cos\omega'}.$$

On en déduit

$$\tang I = \frac{\sin\omega' - \sin\omega - e\sin(\omega'-\omega)}{\cos\omega - \cos\omega'}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\omega'+\omega) - e\cos\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}$$

et

$$\frac{1}{\cos I} = \frac{\sqrt{1-2e\cos\frac{1}{2}(\omega'+\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega'-\omega)+e^2\cos^2\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}}{\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega)}.$$

Cherchons à comparer cette valeur avec l'expression

$$\sqrt{\rho+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\frac{1}{2}(\omega'-\omega)} = \sqrt{(\rho-\rho')^2+4\rho\rho'\sin^2\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}.$$

Remplaçant ρ et ρ' par leurs valeurs et réduisant, cette expression devient

$$\frac{2p\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}{(1-e\cos\omega)(1-e\cos\omega')}\sqrt{1-2e\cos\frac{1}{2}(\omega'+\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega'-\omega)+e^2\cos^2\frac{1}{2}(\omega'-\omega)},$$

ce qui donne

$$FE = \frac{r(\rho-\rho')(1-e\cos\omega)(1-e\cos\omega')}{2p\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega)\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}.$$

Remplaçant encore ρ et ρ' par leurs valeurs, on a enfin

$$FE = re. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il reste encore à faire voir que, si l'on prolonge mE jusqu'à une seconde rencontre du cercle en H, on aura la relation

$$\frac{mE}{HE}=\frac{MF'}{MF},$$

F′ étant le second foyer.

D'abord nous connaissons dans le triangle mEF,

$$\overline{mE}^2 = r^2(1+e^2-2e\cos\omega).$$

Nous connaissons aussi le produit $mE.HE$ qui est égal au produit des parties du diamètre dirigé suivant EF; ces deux parties sont $r-re$ et $r+re$, donc on a

$$me.HE = r^2(1-e^2)$$

et

$$\frac{mE}{HE}=\frac{\overline{mE}^2}{r^2(1-e^2)}=\frac{1+e^2-2e\cos\omega}{1-e^2}.$$

Il faut donc prouver que

$$MF'=\rho.\frac{1+e^2-2e\cos\omega}{1-e^2}$$

est effectivement égal à $2a-\rho$, c'est-à-dire au rayon vecteur correspondant. On peut mettre le numérateur sous la forme

$$2-2e\cos\omega+e^2-1=\frac{2p}{\rho}-(1-e^2),$$

d'où

$$MF'=\frac{2p}{1-e^2}-\rho.$$

Or

$$p=\frac{b^2}{a}=a-\frac{c^2}{a}=a-ae^2,$$

d'où

$$a=\frac{p}{1-e^2},$$

et l'on trouve en effet

$$MF' = 2a - \rho.$$

La démonstration est faite pour l'ellipse, mais elle serait aussi facile pour l'hyperbole.

Quant à la parabole, le point E est sur la circonférence puisque $e = 1$.

La courbe est maintenant parfaitement définie; en effet la somme $MF' + MF$ donne la quantité $2a$, et le rapport connu

$$FE = r.\frac{c}{a}$$

achève de tout déterminer. On voit donc que, si du centre M et du rayon MF' que l'on vient de trouver, on décrivait une circonférence coupant l'axe focal en deux points, l'une des solutions serait fausse.

Cependant, on sait que le problème a quatre solutions; l'une peut être, suivant les circonstances, une ellipse, ou une parabole, ou bien une hyperbole dans laquelle les trois points donnés sont sur une même branche. Les trois autres sont trois hyperboles dans lesquelles deux des points donnés sont sur une branche et le troisième sur l'autre. Voici comment ces solutions peuvent se déduire de la construction précédente.

Nous avons supposé jusqu'à présent que les points M et m étaient du même côté des points F; mais nous aurions pu prendre, au lieu de m, l'autre extrémité du diamètre. En considérant de même les autres points M' et M'' de la conique, nous aurons enfin les trois autres points m_1, m'_1 et m''_1 que l'on peut combiner entre eux ou avec les extrémités opposées m, m' et m''.

Si l'on cherche à combiner ensemble m_1, m'_1 et m''_1, on trouve un point E_1 placé sur le même axe FE à une distance $FE_1 = FE$; il est alors facile de voir que l'on retombe sur la courbe qu'on a déjà obtenue.

Mais les trois combinaisons suivantes :

$$(m_1,\ m',\ m''),\quad (m'_1,\ m,\ m''),\quad (m''_1,\ m,\ m')$$

donnent les trois hyperboles indiquées.

Quant aux trois autres combinaisons :

$$(m,\ m'_1,\ m''_1),\quad (m',\ m_1,\ m''_1),\quad (m'',\ m,\ m'_1),$$

elles donneraient encore ces trois mêmes hyperboles.

Le theorème de Nicollic présente plusieurs conséquences. D'abord, on en conclut, indépendamment de toutes considérations de coniques, que si, sur trois points M, M', M'', on fait, avec un quatrième point F et un cercle de rayon quelconque, la construction indiquée, les trois perpendiculaires qu'elle donne se réuniront en un même point.

De plus, si deux des trois points pris sur la conique se réunissent en un seul, la sécante deviendra tangente, mais le point E ne changera pas et l'on aura toujours

$$FE = re.$$

On pourra donc réciproquement, en supposant la conique donnée, profiter de cette propriété pour mener une tangente par un point donné sur la courbe.

Considérons d'abord l'ellipse, et comme le rayon du cercle est arbitraire, nous prendrons pour rayon

$$FB = OA = a,$$

O étant le centre et B l'extrémité du petit axe : alors

$$FE = r\frac{c}{a} = c,$$

d'où résulte la construction suivante :

Pour mener une tangente à l'ellipse par un point M *pris sur cette courbe, joignez* M *au foyer; de ce foyer comme centre, et avec* FB = OA *comme rayon, décrivez une circonférence qui rencontre* FM *en* m ; *joignez* Om *et sur* Om *abaissez du point* M *une perpendiculaire qui sera la tangente demandée.*

Les points M et *m* sont du même côté du foyer. Pour l'hyperbole, la construction est la même, seulement les points M et *m* sont des côtés opposés du foyer.

Quant à la parabole, *du foyer* F *comme centre, et d'un rayon quelconque, décrivez un cercle qui coupe l'axe en* E *du côté opposé à la directrice et le rayon vecteur* FM *en* m; *joignez* Em, *et sur* Em *abaissez du point* M *une perpendiculaire qui sera tangente.*

Ici, comme pour l'ellipse, M et *m* sont du même côté de F.

SUR UN THÉORÈME ARITHMOLOGIQUE D'EULER,

PAR M. Is. CHEVILLIER,
Professeur au lycée de Reims.

Euler, dans le n° 35 de la seconde partie de ses *Éléments d'Algèbre,* attire l'attention du lecteur sur une *propriété de la plus grande importance relativement à la nature des nombres.* Si j'ai bien compris ce passage, la proposition dont il s'agit est la suivante :

Si l'on peut trouver un nombre entier x *tel, que* $mx - b$ *divise* $mc + ab$, *la valeur correspondante de* y *donnée par l'équation*

$$my - a = \frac{mc + ab}{mx - b}$$

sera pareillement entière.

En cherchant à démontrer cette proposition, j'ai trouvé qu'on ne peut l'affirmer que si m est premier avec le diviseur $mx - b = f$.

En effet, l'équation ci-dessus donne en y remplaçant $mx - b$ par f,

$$my = a + \frac{mc + ab}{f}.$$

Le second membre est entier par hypothèse, c'est-à-dire que l'expression $af + mc + ab$ est divisible par f. Elle est aussi divisible par m, car elle peut s'écrire

$$mc + a(f + b),$$

et

$$\frac{f + b}{m} = x$$

est supposé entier. Si donc m et f sont premiers entre eux, on peut affirmer que

$$y = \frac{mc + a(f + b)}{mf}$$

est entier; sinon cette valeur de y peut bien être fractionnaire.

Pour décider si ce défaut de généralité doit être imputé à la proposition elle-même ou à ma démonstration, j'ai eu recours à des exemples numériques.

Tout facteur premier commun à m et f devant diviser $mc + ab$, divisera nécessairement a ou b. Soient donc, par exemple

$$m = 6, \quad a = 2, \quad b = 3, \quad c = 9,$$

on aura

$$6y - 2 = \frac{60}{6x - 3}.$$

J'omets à dessein les simplifications. Les seuls diviseurs de 60 compris dans la formule $6x - 3$ sont 3 et 15, et aucun d'eux n'est premier avec 6. En donnant à x les valeurs correspondantes 1 et 3, on trouve pour y, $3\frac{2}{3}$ et 1. On voit donc que m *et* f *peuvent n'être pas premiers entre eux et que, si cette circonstance se présente,* y *pourra être entier ou fractionnaire.*

SOLUTION DE LA QUESTION 303

(voir page 117);

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau (*).

QUESTION. *Étant donnés dans le même plan, de grandeur et de position, cinq segments* ab, cd, gh, ik, lm, *construire une conique qui coupe chaque segment harmoniquement en* a′, b′; c′, d′; etc.

Avant de résoudre cette question, proposons-nous la suivante qui sera un acheminement naturel vers celle dont il s'agit.

1er PROBLÈME AUXILIAIRE. *Étant donnés dans le même plan quatre points* α, β, γ, δ, *et un segment fixe* gh, *décrire une conique qui passe par les quatre points et qui coupe* gh *harmoniquement.*

Supposons qu'on ait décrit le faisceau de coniques qui passent par les quatre points α, β, γ, δ; chacune d'elles

(*) Commandant *la Lance*.

coupera la droite indéfinie LghL′ en deux points n, n' qui formeront involution avec les quatre points de rencontre des côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ par la transversale (*Géométrie supérieure*, n° 656). Donc les points variables n, n' marqueront sur LL′ deux divisions homographiques en involution (n° 236). Les points doubles e, f de ces deux divisions, lesquels sont déterminés au moyen du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, coupent harmoniquement tous les segments nn', et par conséquent aussi le segment inconnu $g'h'$ intercepté par la conique cherchée sur la transversale. Réciproquement, ce segment $g'h'$ divise harmoniquement ef; d'ailleurs, il faut qu'il divise harmoniquement le segment donné gh. Donc g' et h' sont les points doubles de l'involution déterminée par les deux segments ef, gh (*Géométrie supérieure,* n° 193). Il sera facile de les construire sans tracer aucune conique. Le problème est donc résolu, et l'on voit, de plus, qu'il n'admet qu'une seule solution.

Actuellement, supposons que les points γ, δ, au lieu d'être fixes sur la droite indéfinie qui les joint, s'y meuvent en divisant toujours harmoniquement le segment cd donné sur cette droite. Ils y marqueront deux divisions en involution. Si l'on fait passer par ces points, conjugués deux à deux dans chacune de leurs positions successives, et par les deux autres points fixes α, β, la conique *unique* qui divise harmoniquement le segment gh, on formera un faisceau de coniques qui couperont la droite LL′ en des points g'..., h'... formant deux divisions en involution dont les points doubles sont g et h. Or je démontrerai (ci-après, afin de ne pas rompre le fil des idées) que des coniques qui ont deux points communs, et qui, en outre, divisent en involution deux droites fixes, ont deux autres points communs (réels ou imaginaires), et, par conséquent (*Géométrie supérieure,* n° 743), divisent en involution une troisième droite quelconque. Prenons ik pour cette troisième droite, et soient e', f' les points doubles des divisions en involution que les coniques y déterminent (il suffira de deux coniques d'essai ou de fausse position pour trouver ces points, et encore ne sera-t-il pas nécessaire de les tracer). Soient i', k' les deux points qui divisent harmoniquement à la fois les deux segments ik et $e'f'$. Celle des coniques du faisceau qui nous occupe, qui passe par les points i' et k', jouit de la propriété de passer par les deux points donnés α, β et de diviser harmoniquement les trois segments donnés cd, gh, ik. Ceci est une conséquence évidente de ce qui précède. Cette conique est unique; comme dans le premier problème, elle est complétement déterminée et facile à construire. On a donc une solution de ce nouveau problème auxiliaire.

2^e PROBLÈME AUXILIAIRE. *Par deux points donnés, faire passer une conique qui coupe harmoniquement trois segments donnés.*

Nous avons fait un nouveau pas vers la solution de la question proposée en éliminant deux points fixes et introduisant deux segments de plus. Nous allons éliminer les deux autres points et les remplacer par les deux derniers segments en suivant la même marche.

Supposons donc que les points α, β se meuvent sur la droite ab en ne cessant pas de diviser harmoniquement le segment ab, et, pour chaque position de ces deux points, supposons qu'on ait décrit la conique qui, passant par eux, coupe harmoniquement les trois autres segments cd, gh, ik (2^e problème ci-dessus). On aura formé ainsi un faisceau de coniques qui marquent, sur chacune des quatre droites, deux divisions en involution, dont les points doubles sont respectivement a, b; c, d; g, h; i, k. Or je démontrerai plus loin que des coniques qui satisfont à une telle condition sont circonscrites au même quadrilatère (réel ou imaginaire). Donc (*Géométrie supérieure*, n° 743) une cinquième droite quelconque, lm par exemple, est divisée par ces courbes en involution. Soient e'', f'' les points doubles de ces divisions et soient l', m' les deux points qui divisent harmoniquement à la fois les deux segments $e''f''$ et lm. Celle des coniques du faisceau en question qui passe par les points l' et m', et il n'y en a encore qu'une, coupera aussi harmoniquement les quatre autres segments donnés. Cette conique, facile à construire, est donc la conique demandée, et la question 298 est résolue.

Il reste maintenant à donner la démonstration des deux théorèmes sur lesquels je me suis appuyé dans le courant du discours.

Démonstration du 1^er^ *théorème auxiliaire*. Plusieurs coniques passent par deux points fixes a, b et divisent harmoniquement deux droites données CD, GH; il faut prouver qu'elles sont toutes circonscrites à un même quadrilatère $ab\varepsilon\varphi$. Soient Σ, Σ' deux de ces coniques, a, b, ε, φ leurs points communs, et supposons, s'il est possible, qu'une troisième conique Σ'' ne passe pas par les deux points (réels ou imaginaires) ε, φ. Soient γ, δ, les points où Σ'' coupe la droite CD. Parmi toutes les coniques du faisceau circonscrit au quadrilatère $ab\varepsilon\varphi$, il en est une, Σ''', qui passe par γ et δ, puisque la droite CD coupe les coniques Σ, Σ', Σ''' en six points en involution (*Géom. sup.* n° 743), et que, par hypothèse, les points γ et δ, intersection de Σ'', sont en involution avec les quatre autres. Ainsi les deux coniques Σ'', Σ''' ont déjà en commun les quatre points a, b, γ, δ. Or le premier problème auxiliaire (voir sa conclusion) prouve que par quatre points donnés on ne peut mener qu'une seule conique qui coupe harmoniquement un segment gh situé sur une autre droite GH, c'est-à-dire qui coupe cette droite en deux points faisant partie de l'involution dont g et h sont les points doubles; d'ailleurs la conique Σ''' remplit cette condition *de fait*, et la conique Σ'' la remplit *par hypothèse*; donc Σ'' et Σ''' se confondent et Σ'' est circonscrite au quadrilatère $ab\,\varepsilon\varphi$.

C. Q. F. D.

Démonstration du 2^e théorème. Plusieurs coniques Σ, Σ', Σ'', etc., divisent harmoniquement quatre droites données AB, CD, GH, IK; il s'agit de prouver qu'elles sont circonscrites au même quadrilatère. Soient ε, φ, ε', φ' les points d'intersection des deux premières. Par ces points et par les deux points α, β, où Σ'' rencontre AB, décrivons une conique Σ'''; elle coupe les trois autres droites en des points qui sont en involution avec ceux où les coupent Σ et Σ'. Prouvons que Σ'' se confond avec Σ'''. Pour cela, soient γ et δ les points où Σ''' coupe la droite CD; si l'on prouvait que Σ'' passe par ces deux points, tout serait démontré, à cause du théorème précédent.

Supposons donc, s'il est possible, que Σ'' coupe CD en deux points γ', δ' autres que γ et δ. Parmi l'infinité de coniques qui passent par les quatre points α, β, γ', δ' il n'y en a qu'une (1^er Problème) qui coupe la droite GH en deux points qui forment involution avec les quatre qui s'y trouvent marqués par les coniques Σ, Σ'; cette conique doit donc être Σ''; mais comme il ne reste plus rien d'arbitraire dans sa détermination, on n'est plus libre de la faire varier de manière à ce que, tout en remplissant les trois conditions déjà énoncées, elle puisse encore satisfaire à celle qu'impose la quatrième droite IK. Cette dernière condition ne pourra donc pas, en général, être remplie par Σ'', tant que les points γ', δ' différeront de γ et δ. Or Σ'' y satisfait *par hypothèse*; donc les points γ', δ' coïncident avec γ et δ, et Σ'' se confond avec Σ''' qui remplit, *de fait*, toutes les conditions. Donc le théorème est démontré.

La question 298 donne lieu *corrélativement* à la suivante :

QUESTION. *Étant donnés dans le même plan de grandeur et de position, cinq angles, construire une conique dont les tangentes divisent chaque angle harmoniquement.*

La solution serait évidemment corrélative de la précédente.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE NICOLLIC

(voir pages 263 et 425) ;

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

(Je conserve les notations des *Nouvelles Annales.*) La conique et le cercle F, décrit du foyer donné comme centre, sont deux figures homologiques (PONCELET, *Propriétés projectives*, n° 453, p. 260 et 261, et *Géométrie supérieure*, n° 529). Le *centre d'homologie* est le point F lui-même, et l'*axe d'homologie* est la sécante commune (réelle ou idéale) des deux courbes. Cette sécante, ou *axe de symptose,* est évidemment perpendiculaire à l'axe focal.

D'après cela, soient x, x', x'' les points de rencontre des cordes données $A'''A'$, $A'A''$, $A''A'''$ avec leurs homologues $a'''a'$, $a'a''$, a'', a''' respectivement. Ces trois points sont sur l'axe d'homologie (*Géométrie supérieure*, n° 518) et le déterminent. Pour obtenir l'axe focal, il suffit donc d'abaisser sur xx'' la perpendiculaire FP.

Cette construction fort simple n'est pas celle qu'emploie Nicollic. Il divise les trois cordes du cercle, aux points B'', B''', B', en segments inversement proportionnels aux rayons vecteurs de la conique qui aboutissent aux extrémités de ces cordes. On voit d'abord aisément que ces points sont, respectivement, les homologues des points milieux des cordes de la conique; ainsi, le rayon FB'', par exemple, coupe la corde $A'''A'$ en son milieu β''. En effet, soit x le point de concours des cordes homologues $A'''A'$, $a'''a'$. Les triangles $xA'a'$, $xA'''a'''$, coupés par la transversale $FB''\beta''$, donnent les deux relations

$$\frac{FA'}{Fa'} \cdot \frac{B''a'}{B''x} \cdot \frac{\beta''x}{\beta''A'} = 1$$

et

$$\frac{FA'''}{Fa'''} \cdot \frac{B''a'''}{B''x} \cdot \frac{\beta''x}{\beta''A'''} = 1.$$

(*Géométrie supérieure*, n° 352.)

Egalant les premiers membres et remarquant qu'on a, par construction,

$$Fa' = Fa'''$$

et

$$\frac{FA'}{FA'''} \cdot \frac{B''a'}{B''a'''} = 1,$$

il reste

$$\beta''A' = \beta''A''',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Actuellement, supposons qu'on mène une série de cordes parallèles à $A'A'''$. Le lieu de leurs points milieux

β'' sera le diamètre de la conique conjugué à leur direction. Donc le lieu des points homologues B'' sera aussi une ligne droite, passant par le point P, qui est, dans le cercle, le point homologue du centre O de la conique. Or je dis que cette droite $B''P$ est, de plus, perpendiculaire sur $A'A'''$. En effet, soient T, T' les extrémités du diamètre conjugué à $A'A'''$; t et t' les points homologues sur le cercle, et soit enfin $F\tau$ une parallèle à $A'A'''$ menée par le foyer F. $F\tau$ divise l'angle TFT' en deux parties égales, en vertu d'une propriété bien connue des coniques (Poncelet, *Propriétés projectives*, n° 461 ou 469); donc $F\tau$ est perpendiculaire sur la corde tt' du cercle. Mais cette corde n'est autre chose que la droite $B''P$, puisque les points t, t' sont deux portions particulières du point B''. Donc enfin $B''P$ est perpendiculaire sur $A'A'''$. C. Q. F. D.

Le point P, homologue du centre O de la conique, est un point fixe, indépendant de la corde $A'A'''$. Les droites, lieux géométriques des points B''' et B', passent aussi par ce point, et sont respectivement perpendiculaires sur les cordes $A'A''$, $A''A'''$; tout cela d'après les raisonnements identiques à ceux qui précèdent.

Donc les trois perpendiculaires abaissées des points B'', B', B''' sur les cordes respectives de la conique se coupent en un même point de l'axe focal, ainsi que l'auteur l'a avancé.

Le point P étant connu, menons Pa' jusqu'à la rencontre de l'axe d'homologie en π; la droite homologue $\pi A'$ déterminera le point O sur l'axe focal; et si cet axe coupe le cercle aux points d, d', il sera bien aisé de trouver leurs homologues D, D' qui sont les extrémités de l'axe focal. La conique est donc de la sorte complétement déterminée. Mais il faut arriver aux proportions données par Nicollic.

Soit OE l'axe transverse de la conique ; il est parallèle à l'axe d'homologie $xx'x''$, son homologue $\mathrm{P}e$ lui est donc aussi parallèle ; les triangles rectangles FOE, $\mathrm{FP}e$ sont semblables et l'on a

$$\frac{\mathrm{PF}}{e\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{EF}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{PF}}{a'\,\mathrm{F}} = \frac{\text{excentricité}}{\text{demi-axe focal}},$$

à cause de

$$e\mathrm{F} = a'\mathrm{F}.$$

Les lignes $\mathrm{A'O}$ et $a'\mathrm{P}$ sont deux droites homologues ; donc les points $\mathrm{C'}$ et α, où elles coupent la conique et le cercle, sont en ligne droite avec le centre d'homologie F. De plus, O est le milieu de $\mathrm{A'C'}$ et $\mathrm{F}a' = \mathrm{F}\alpha$; donc, en vertu de notre premier théorème, FP divise $a'\alpha$ en deux segments inversement proportionnels aux rayons vecteurs $\mathrm{FA'}$, $\mathrm{F}c'$ et l'on a

$$\frac{a'\,\mathrm{P}}{\alpha\mathrm{P}} = \frac{c'\mathrm{F}}{\mathrm{A'F}} = \frac{\mathrm{A'}f}{\mathrm{A'F}}\ (^*),$$

à cause de

$$c'\,\mathrm{F} = \mathrm{A'}f,$$

f étant le second foyer.

Toutes les propositions de l'auteur sont donc démontrées.

(*) Plusieurs fautes d'impression se sont glissées à cet endroit dans le texte des *Nouvelles Annales*.

SOLUTION DE LA QUESTION 310

(voir page 263);

PAR M. ERNEST DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Un observateur placé au pôle ne voit, dans chaque lunaison, que la moitié des phases de la Lune, parce que cet astre, dont l'orbite est inclinée à l'équateur, ne demeure sur l'horizon du lieu que pendant la moitié de sa révolution autour de la Terre. L'espèce des phases observées dépend de la différence des longitudes du Soleil et de la Lune, au moment où celle-ci traverse l'équateur pour entrer dans l'hémisphère au pôle duquel se trouve l'observateur. D'après cela, il est facile de vérifier que les phases observées au pôle nord pendant l'année 1855 seraient les suivantes :

Du 1er janvier au 9 janvier.	P.L. et D.Q.
Du 23 janvier au 6 février. .	☽, ○, ○.
Du 19 février au 5 mars. . . .	☽, ☽, ○, ○.
Du 18 mars au 2 avril.	●, ☽, ○.
Du 15 avril au 29 avril.	☾, ●, ☽, ○.
Du 12 mai au 26 mai.	☾, ●, ☽.
Du 8 juin au 23 juin.	☾, ●, ☽.
Du 6 juillet au 20 juillet. . . .	Mêmes ph. c.-à-d. DQ., NL., PQ.
Du 2 août au 16 août.	☾, ●, ☽.
Dn 29 août au 12 septembre.	○, ☾, ●, ☽.
Du 26 sept. au 10 octobre. .	○, ☾, ●.
Du 23 octobre au 6 novemb. .	○, ○, ☾.
Du 19 novemb. au 3 décemb.	○, ○, ☾.
Du 17 décemb. au 31 décem.	☽, ○, ☾. c-à-d. PQ, PL, DQ.

Le bord éclairé est le plus rapproché de l'horizon, tant que la distance polaire boréale de la Lune est plus petite que celle du Soleil; c'est le contraire quand elle est plus grande, ce qui ne peut avoir lieu que pendant une partie de l'été.

Pendant la durée de chacune de ces périodes, la Lune reste constamment sur l'horizon. Le spectateur voit donc la succession continue des phases visibles, et l'hélice apparente que l'astre décrit sur la voûte du ciel est *sinistrorsum* pendant les sept premiers jours, et *dextrorsum* pendant les sept autres.

SUR LES DIVERS NOMS DE L'ALGÈBRE;

D'APRÈS NESSELMANN.

Ce qui semble prouver que cette branche de la science a pris naissance chez les Indiens, c'est qu'eux seuls donnent à cette branche de la science un nom spécial, un nom caractéristique. Ce nom est *vija-ganita* (*) *origine-calcul.* Cela veut dire que c'est un genre de calcul tel, que les résultats indiquent la source d'où ces résultats proviennent, ce qui n'existe pas pour les résultats numériques. C'est encore que les Indiens ont des signes pour représenter les opérations, pour distinguer les inconnues; les Arabes, au contraire, n'ont aucune espèce de signes, raisonnent et discourent sur les équations, mais ne savent pas les peindre. Aussi cette science ne porte pas chez eux de nom caractéristique. Ils la désignent par la réunion de deux termes relatifs à deux opérations fonda-

(*) Prononcez *vidscha*.

mentales. La première opération consiste à transporter les quantités *soustractives* d'un membre dans un autre pour les rendre *additives*. Selon les Arabes, on opère là une restitution, un rétablissement ; *aljabar*, du verbe *jâber*(*) : il relia, il établit. La seconde opération consiste à comparer les termes sous le rapport de l'homogénéité : les carrés avec les carrés, les cubes avec les cubes, etc., afin de faire les réductions ; c'est ce que les Arabes nomment la *comparaison*, *al mukâbalah*, du verbe *kâbal*, opposer, comparer (**). C'est avec cette double dénomination que l'algèbre a fait son entrée en Europe au XIII[e] siècle. Le chapitre XV du *Liber abaci* de Léonard Bonacci (1202) a pour titre : *Tertia pars erit super modum algebræ et almucabalæ* et débute ainsi : *Incipit pars tertia de solutione quarundam quæstionum secundum modum algebræ almucabalæ, scilicet oppositionis et restaurationes*. Cannaci (XIV[e] siècle) ne se sert que du premier nom : *Ragionamente di algebra*. De même Regiomontanus au XV[e] siècle. Luca Pacioli (1494) emploie le plus souvent les deux noms, *arte di algebra ed almucabala*, mais forme déjà l'adjectif *algebratico*. A partir de là, le second nom *almucabala* devient plus rare. Christophe Rudolf, Stifel, Cardan, Gemma Frisius (1540) n'emploient que le nom *algèbre*. Cependant l'*Algèbre* de Gosselin (1577) porte le titre : *De arte magna seu de occulta parte numerorum quæ et algebra et almucabala vulgo dicitur*. On ne sache pas qu'il y ait un ouvrage plus récent où l'on rencontre le second nom *almucabala*.

D'autres noms furent aussi en vogue. Ainsi Bonacci, Pacioli, Stifel, Cardan, considérant l'algèbre comme la

(*) Prononcez *dschaber*. Ce mot signifie aussi rétablir les membres disloqués. De là en espagnol *algebrista* chirurgien et en français *renoueur*.

(**) La préposition *kâbal* en chaldéen signifie aussi contre, à l'opposé, et d'où aussi la *kiblah* de la liturgie musulmane.

partie élevée de l'arithmétique, l'appelèrent *ars magna* (*arte maggiore*), par opposition à l'arithmétique ordinaire, *ars minor*. Cette dénomination ne paraît pas avoir franchi les Alpes et disparaît après le *Ars magna* de Cardan (1545) (*).

Une autre dénomination s'étendit davantage et eut plus de durée et a une origine arabe. La quantité inconnue porte chez les Arabes le nom de *schai* (*res*, *aliquid*), et le carré celui de *mâl* (*Nouvelles Annales*, t. V, p. 297) *possessio, opes*. De là, Bonacci introduisit les noms *res* et *census*, et l'algèbre reçut le nom de *ars rei et census* ou simplement *ars rei*. Cette dénomination s'est maintenue longtemps hors de l'Italie, et lorsqu'au XIVe siècle, depuis Guillaume de Lunis, les mathématiciens italiens commencèrent à écrire dans leur langue nationale, ces dénominations reçurent des formes italiennes. L'inconnue prit le nom de *cosa* ou *cossa* et le carré celui de *censo*, et, le plus souvent, hors de l'Italie, celui de *zenso*. Il paraît que vers la fin du XVe siècle c'était le nom le plus répandu en Italie. Ainsi Pacioli, dans sa *Summa de arithmetica* (1494), parlant des divers noms de l'algèbre, dit qu'elle porte chez le vulgaire le nom de *la regola o l'arte della cosa*. On a ensuite latinisé ce mot italien, *ars cossica*, *ars cosæ*. Gemma Frisius, dans son ouvrage *Arith. practica* (1571), dit : *Per regulam cosæ sive algebræ* (pages 81, 105, 110 et 112).

La *coss* paraît en Allemagne depuis Christophe Rudolf (1524) et Stifel (1553). L'inconnue reçut même le nom barbare *numerus cossicus*. Le nom de *coss* paraît s'être maintenu avec les autres dans le XVIIe et jusqu'au

---

(*) Cette dénomination a presque reparu de nos jours : *Algèbre supérieure*, *Géométrie supérieure*.

commencement du XVIII[e] siècle. *Nic. Reimari Ursi Dithmarsi arithmetica analytica vulgo coss oder algebra. Fran. a. O.* 1601, *in-4.*

Arithmetica philosophica .oder Schone neue und Vohlgegrundete Kunstliche rechnung der Coss und Algebra. Nurnberg, 1607, *in-folio.*

Ce nom a disparu des ouvrages classiques vers la fin du XVII[e] siècle. Nous exceptons l'ouvrage suivant :

Christman : *Ars cosæ promota;* Francfort, 1813 ; et du même : *Cardanus suevus sive de functionibus cosæ resolventibus tractatio;* Stuttgard, 1815. Assez fade originalité.

Viète fit le pas immense de remplacer les coefficients numériques par des lettres et il donne à ces coefficients littéraux le nom de *species;* de là la division qui a existé pendant quelque temps entre *Algebra numerosa* et *Algebra speciosa.*

L'algèbre doit à Viète encore un autre nom qui subsiste encore et a été généralement adopté, c'est *analyse.* L'ouvrage de Viète porte pour titre : *In artem analyticam isagoge* (15...). Dès 1601 paraît : *Reimari Ursi Dithmarsi arithmetica analytica;* ensuite *Harrioti artis analyticæ praxis;* London, 1631; De La Hire: *La construction des équations analytiques;* Paris, 1679; et beaucoup d'autres.

La dénomination qui caractérise le mieux l'essence de l'algèbre c'est celle que propose Newton, *Arithmétique universelle.* Car, d'après Descartes, l'espace étant devenu *nombre,* la force étant devenue *nombre,* il n'existe plus qu'une science, c'est l'*arithmétique* considérée dans son universalité.

THEORIE ANALYTIQUE DU GYROSCOPE DE M. L. FOUCAULT;

PAR M. YVON VILLARCEAU

(voir page 343).

Intégration de l'équation (47) *par les fonctions elliptiques.*

8. *Cas de* n *positif.* Soient

$$(48) \qquad \xi = \cos\gamma, \quad \xi_0 = \cos\gamma_0,$$

d'où

$$\sin\gamma\, d\gamma = -d\xi,$$

et, par suite,

$$d\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi;$$

l'équation (47) donnera

$$(49) \qquad \sqrt{\frac{2g}{a}}\, dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi-\xi_0)[1-\delta(\xi+\xi_0)]}}.$$

Désignons par R la valeur du radical du deuxième membre en y comprenant le double signe, et posons

$$(50) \qquad (\xi-\xi_0)[1-\delta(\xi+\xi_0)] = (1-\xi^2)z^2,$$

nous aurons

$$(51) \qquad R = (1-\xi^2)z.$$

et l'équation à intégrer deviendra

$$(52) \qquad \sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt = \frac{d\xi}{R}.$$

Tirons de l'équation (50) la valeur de ξ en z^2, il viendra

$$(53) \qquad \xi(z^2 - \delta) = -\frac{1}{2} + Z,$$

en posant

$$Z^2 = \frac{1}{4}[1 - 4\,\delta\xi_0(1 - \delta\xi_0)] + z^2[\xi_0(1 - \delta\xi_0) - \delta] + z^4$$

ou

$$Z^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\delta\xi_0)^2 + [\xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2)]\,z^2 + z^4.$$

Différentiant actuellement l'équation (50), on a

$$[1 + 2\xi(z^2 - \delta)]\,d\xi = 2(1 - \xi^2)\,z\,dz,$$

d'où, en ayant égard aux équations (51) et (53),

$$\frac{d\xi}{R} = \frac{dz}{Z};$$

il s'ensuit

$$(54) \qquad \sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt = \frac{dz}{Z}.$$

Nous remarquerons que si l'on néglige les termes en δ, la valeur de Z^2 est plus grande que $\frac{1}{4}\xi_0^2 + \xi_0 z^2 + z^4 = \left(\frac{1}{2}\xi_0 + z^2\right)^2$, quantité essentiellement positive; nous pouvons donc écrire

$$(54\ bis) \qquad Z^2 = \upsilon^2 + 2\upsilon\cos 2\varkappa . z^2 + z^4.$$

Pour identifier cette valeur avec la précédente, il suffit de poser

$$\upsilon^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\delta\xi_0)^2,$$

$$2\upsilon\cos 2\varkappa = \xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2),$$

d'où

$$(55) \qquad 2\upsilon = 1 - 2\delta\xi_0,$$

$$\cos 2\varkappa = \frac{\xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2)}{1 - 2\delta\xi_0}:$$

on en tire

$$\sin^2\varkappa = \frac{1 - \xi_0 + \delta(1 - 2\xi_0 + \xi_0^2)}{2(1 - 2\delta\xi_0)} = \frac{1 - \xi_0}{2}\,\frac{1 + \delta(1 - \xi_0)}{1 - 2\delta\xi_0},$$

ou bien, à cause de $\xi_0 = \cos\gamma_0$,

$$\sin^2\varkappa = \sin^2\frac{1}{2}\gamma_0\,\frac{1 + 2\delta\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0}{1 - 2\delta\cos\gamma_0}$$

et

$$(56) \qquad \sin\varkappa = \pm\sin\frac{1}{2}\gamma_0\sqrt{\frac{1 + 2\delta\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0}{1 - 2\delta\cos\gamma_0}}.$$

Soit actuellement

$$(57) \qquad z = \sqrt{\upsilon}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi,$$

d'où

$$(58) \qquad dz = \frac{1}{2}\sqrt{\upsilon}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi};$$

la valeur de Z^2 (54 *bis*) deviendra

$$Z^2 = \upsilon^2\left(1 + 2\cos 2\varkappa \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi + \operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\varphi\right)$$

$$= \frac{\upsilon^2}{\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\left[\cos^4\frac{1}{2}\varphi + 2(1 - 2\sin^2\varkappa)\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi + \sin^4\frac{1}{2}\varphi\right]$$

$$= \frac{\upsilon^2}{\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\left[\left(\cos^2\frac{1}{2}\varphi + \sin^2\frac{1}{2}\varphi\right)^2 - 4\sin^2\varkappa\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi\right],$$

et, si l'on pose

$$c^2 = \sin^2\varkappa,$$

on aura simplement

(59) $$Z = \pm\frac{\upsilon}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi};$$

il en résultera

(60) $$\frac{dz}{Z} = \pm\frac{1}{2\sqrt{\upsilon}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

A l'aide de cette valeur et de celle de 2υ, l'équation (54) devient

(61) $$dt = \frac{1}{2\sqrt{1 - 2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

Nous avons supprimé ici le double signe, attendu que l'élément du temps dt est essentiellement positif et que nous allons disposer de l'angle φ pour que $d\varphi$ le soit pareillement. A cet effet, les équations (50), (55) et (57) donnent

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{2\frac{(\xi - \xi_0)[1 - \delta(\xi + \xi_0)]}{(1 - \xi^2)(1 - 2\delta\xi_0)}},$$

ou, en vertu des équations (48),

$$(62)\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \pm\frac{1}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{2(\cos\gamma-\cos\gamma_0)[1-\delta(\cos\gamma+\cos\gamma_0)]}{1-2\delta\cos\gamma_0}}.$$

Cette valeur peut encore s'écrire :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \pm\frac{2}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma)}{1-2\delta\cos\gamma_0}\left[1-2\delta\cos\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma)\right]}.$$

Nous avons vu que les valeurs de γ se succèdent dans l'ordre

$$+\gamma_0,\ 0,\ -\gamma_0,\ 0,\ +\gamma_0,\ 0,\ -\gamma_0\ldots$$

Pour fixer les idées, supposons $\sin\gamma_0$ positif et écrivons les valeurs correspondantes de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, en prenant les signes inférieur ou supérieur suivant que $d\gamma$ est positif ou négatif; inscrivons aussi les signes que prennent ces tangentes dans l'intervalle de deux valeurs consécutives de γ, et nous aurons la suite

$$0\ +\infty\ -0\ +\infty\ -0\ +\infty\ -0,\ldots;$$

les valeurs correspondantes de $\frac{1}{2}\varphi$ seront

$$0,\quad \frac{\pi}{2},\quad \pi,\ 3\frac{\pi}{2},\quad 2\pi,\ 5\frac{\pi}{2},\quad 3\pi,\ldots,$$

et celles de φ

$$0,\quad \pi,\quad 2\pi,\ 3\pi,\quad 4\pi,\ 5\pi,\quad 6\pi,\ldots.$$

Le passage de la valeur γ_0 à $-\gamma_0$ et inversement répond à une variation de φ égale à 2π. Si $\sin\gamma_0$ est négatif, on prendra encore dans $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ les signes inférieur ou supérieur suivant que $d\gamma$ est positif ou négatif, et l'on aura de même une suite ascendante et continue de valeurs de φ.

Intégrons l'équation (61); il viendra, en comptant le temps à partir de l'instant où γ est égal à γ_0 et prenant φ nul à cette époque,

$$(63)\qquad t = \frac{1}{2\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{F}(c,\varphi).$$

Pour avoir la durée de l'oscillation simple, ou entre les limites $+\gamma_0$ et $-\gamma_0$, il faudra faire $\varphi = 2\pi$, d'après ce qui vient d'être dit. Mais on a

$$\mathrm{F}(c, 2\pi) = 4\mathrm{F}\left(c, \frac{\pi}{2}\right);$$

désignant par T la durée de l'oscillation, on aura

$$(64)\qquad \mathrm{T} = \frac{2}{\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{F}\left(c, \frac{\pi}{2}\right),$$

équation dans laquelle

$$(65)\qquad c = \pm\sin\frac{1}{2}\gamma_0\sqrt{\frac{1+2\delta\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0}{1-2\delta\cos\gamma_0}}.$$

Quand on néglige δ, l'angle du module se réduit à $\pm\frac{1}{2}\gamma_0$, et si l'on suppose d'ailleurs γ_0 infiniment petit, il vient

$$\mathrm{F}(c,\varphi) = \varphi,\quad \text{d'où}\quad \mathrm{F}\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

on retombe alors sur la formule ordinaire du pendule $\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

9. *Cas de* n *négatif*. Nous avons dit que nous supposerions $\sin n$ positif; $\sin\theta'$ étant d'ailleurs essentiellement positif et ω très-petit par rapport à n, la valeur de a,

première équation (46), devient négative. Dans ce cas, il faut, ainsi que nous l'avons fait voir, que $\cos\gamma - \cos\gamma_0$ soit négatif. De cette manière, l'équation (49) doit être changée en

$$(66)\quad \sqrt{\frac{2g}{-a}}\,dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi_0-\xi)[1-\delta(\xi_0+\xi)]}}.$$

En comparant le deuxième membre de cette équation à celui de l'équation (49), on reconnaît que l'on passe de celui-ci à l'autre au moyen d'un changement de signes des quantités ξ, ξ_0 et δ; d'où résulte la nécessité de changer γ en $180^\circ - \gamma$ et γ_0 en $180^\circ - \gamma_0$. De cette manière, les relations (56) et (62) se transforment en

$$(67)\quad \left\{ \begin{aligned} & c = \sin\varkappa = \pm \cos\frac{1}{2}\gamma_0 \sqrt{\frac{1-2\delta\cos^2\frac{1}{2}\gamma_0}{1-2\delta\cos\gamma_0}} \\ & \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \pm \frac{1}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{2(\cos\gamma_0-\cos\gamma)[1-\delta(\cos\gamma_0+\cos\gamma)]}{1-2\delta\cos\gamma_0}}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas actuel, les valeurs de γ, en supposant, par exemple, γ_0 positif, se succèdent dans l'ordre

$$\gamma_0,\ \pi,\ 2\pi-\gamma_0,\ \pi,\ \gamma_0,\ \pi,\ 2\pi-\gamma_0,\ \pi,\ \gamma_0,\ldots.$$

Prenant ici le signe supérieur ou inférieur, suivant que $d\varphi$ est positif ou négatif, on aura encore la suite correspondante des valeurs de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$

$$0 + \infty\quad -0\quad +\infty - 0 + \infty\quad -0\quad +\infty - 0\ldots,$$

puis la série suivante des valeurs de $\frac{1}{2}\varphi$

$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 3\frac{\pi}{2},\ 2\pi,\ 5\frac{\pi}{2},\ 3\pi,\ 7\frac{\pi}{2},\ 4\pi,\ldots,$$

et celles de φ

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi,\ 7\pi,\ 8\pi,\ldots;$$

en sorte que la valeur générale de t (63), se transforme en

$$(68) \qquad t = \frac{1}{2\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{-a}{g}}\,F(c,\varphi).$$

La durée d'une oscillation répondant aux limites γ_0 et $2\pi-\gamma_0$ de γ, ou bien aux limites o et 2π de φ comme ci-dessus, il vient, pour la durée T de l'oscillation,

$$(69) \qquad T = \frac{2}{\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{-a}{g}}\,F\left(c,\frac{\pi}{2}\right).$$

En négligeant δ, on voit que l'angle du module c est $90^0 - \frac{1}{2}\gamma_0$, il est complémentaire de celui qui répond au cas de n positif. Si l'on suppose γ_0 infiniment petit, le module c devient égal à l'unité, et la fonction $F\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ infinie; il en résulte que le plan de l'anneau étant mis sans vitesse en coïncidence avec le plan horaire reste dans cette position sans osciller, lorsque n est négatif; mais alors il est en équilibre instable, car pour peu qu'on l'éloigne de cette position, ou, en d'autres termes, quelque petite valeur de γ_0 que l'on détermine, la valeur de T cesse de devenir infinie, elle devient seulement très-grande.

Calcul de α.

10. En ajoutant membre à membre les équations (41) et (42) on trouve

$$\frac{d\alpha}{dt} = n' - \omega\sin\theta'\sin\eta(\cos\gamma - \cos\gamma_0) - \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt},$$

d'où l'on tire

$$(70) \qquad \alpha = n't - \gamma\cos\eta - \omega\sin\theta'\sin\eta\int(\cos\gamma - \cos\gamma_0)\,dt.$$

Il s'agit d'effectuer l'intégration indiquée au dernier terme.

Considérons le cas où n et a sont positifs.

On tire de l'équation (62), en ayant égard à la relation (55),

$$(71)\quad \cos\gamma - \cos\gamma_0 = \upsilon \sin^2\gamma \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi + \delta(\cos^2\gamma - \cos^2\gamma_0).$$

A cause de $\xi = \cos\gamma$, les équations (53), (57) et (59) donnent

$$\cos\gamma = \frac{-\frac{1}{2} + Z}{\upsilon \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi - \delta} = \frac{-\frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{2}\varphi \pm \upsilon\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}{\upsilon \sin^2\frac{1}{2}\varphi - \delta\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Pour distinguer quel signe il convient de donner au radical, observons que nous devons avoir $\cos\gamma = \cos\gamma_0$ pour $\varphi = 0$, d'après ce qui a été convenu dans les numéros précédents. Or le signe $+$ produit seul ce résultat, car l'équation précédente, en y mettant la valeur de υ, donne alors

$$\cos\gamma = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2\delta\cos\gamma_0)}{-\delta} = \cos\gamma_0;$$

on a donc généralement

$$\cos\gamma = \frac{\upsilon\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\upsilon\sin^2\frac{1}{2}\varphi - \delta\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Le terme qu'il s'agit d'intégrer étant déjà affecté du facteur ω qui est extrêmement petit relativement à w, nous pouvons négliger δ dans l'expression différentielle, ce qui réduira la valeur de υ à $\frac{1}{2}$; et l'équation (71) donnera

$$\int (\cos\gamma - \cos\gamma_0)\,dt = \frac{1}{2}\int \sin^2\gamma \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi\, dt.$$

La valeur de $\cos\gamma$ devient elle-même

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi} - \cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi},$$

expression dont l'indétermination, dans le cas de $\varphi = 2i\pi$, est facile à lever ; on en tire

$$\sin^2\gamma = \frac{\sin^4\frac{1}{2}\varphi - \cos^4\frac{1}{2}\varphi - (1 - c^2\sin^2\varphi) + 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}{\sin^4\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{-\left(\cos^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi\right) - 1 + 4c^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi + 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}{\sin^4\frac{1}{2}\varphi}$$

ou

$$\sin^2\gamma = 2\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin^4\frac{1}{2}\varphi}\left(2c^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi - 1 + \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}\right),$$

et l'intégrale proposée devient

$$\int(\cos\gamma - \cos\gamma_0)dt = \int\left[2c^2 - \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi} + \frac{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\right]dt.$$

L'intégrale du premier terme est $2c^2t$. Quant aux autres termes, nous mettrons à la place de dt sa valeur (61) en y négligeant le terme en δ. Soit, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi},$$

il viendra

$$\int(\cos\gamma-\cos\gamma_0)\,dt=2c^2t-\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\int\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}-\int\frac{d\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\right].$$

La première de ces deux intégrales peut s'écrire

$$\int\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}=\int\frac{1}{1-\cos\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}=\int\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}=\int\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta},$$

il vient donc

$$\int\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}=\int\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}+\int\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Pour effectuer la première des intégrations indiquées au second membre, différentions l'expression

$$\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\cot\varphi,$$

il viendra

$$\begin{aligned}d.\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\cot\varphi&=-\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}-\frac{c^2\cos^2\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi\\&=-\frac{1-c^2\sin^2\varphi+c^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi\\&=-\frac{1-c^2\sin^4\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,\end{aligned}$$

d'où

$$d.\Delta\cot\varphi=-\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}+c^2\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi;$$

on en tire

$$\int\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}=c^2\int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi-\Delta\cot\varphi.$$

L'intégrale au second membre est la fonction elliptique que les géomètres allemands substituent à la fonction de deuxième espèce $\int \Delta d\varphi$ de Legendre.

Posons maintenant

$$x = c\sin\varphi,$$

d'où

$$\cos\varphi\, d\varphi = \frac{dx}{c},$$

il viendra, en faisant abstraction de la constante,

$$\int \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{c}{x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{c}{x}\sqrt{1-x^2} = -\frac{\Delta}{\sin\varphi}.$$

On a donc

$$\int \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = c^2\int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta}d\varphi - \frac{\Delta}{\sin\varphi}(1+\cos\varphi);$$

on a d'ailleurs directement

$$-\int \frac{d\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi} = +\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Réunissant ces deux intégrales, il vient

$$\int \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} - \int \frac{d\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi} = c^2\int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta}d\varphi + \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}(1-\Delta).$$

Pour éviter l'indétermination qui se présenterait dans le cas de $\sin\varphi = 0$, nous multiplierons haut et bas le dernier terme par $(1+\Delta)$; il viendra

$$\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}(1-\Delta) = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{c^2\sin^2\varphi}{1+\Delta} = 2c^2\frac{\sin\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\Delta}.$$

De cette manière, on aura

$$\int(\cos\gamma - \cos\gamma_0)\,dt = 2c^2t - c^2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi + \frac{2\sin\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\Delta}\right].$$

Substituant enfin cette valeur dans l'équation (70) et supposant que, pour $t = 0$, on ait $\alpha = 0$, $\gamma = \gamma_0$, $\varphi = 0$, l'expression de α deviendra finalement

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= (w - 2\omega\sin\theta'\sin\eta\, c^2)\,t - (\gamma - \gamma_0)\cos\eta \\ &\quad + \omega\sin\theta'\sin\eta\, c^2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi + \frac{2\sin\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\Delta}\right).\end{aligned}\right.$$

On pourra s'assurer aisément que si la quantité a ou n est négative, il suffira de changer ici les signes de a et des termes en ω, en calculant d'ailleurs le module c et l'amplitude φ au moyen des formules qui conviennent au cas de n négatif.

La formule (72) fait voir que l'angle α, indépendamment de variations périodiques provenant de $(\gamma - \gamma_0)$, du terme en $\sin\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi$ et de la fonction elliptique, subit des variations proportionnelles au temps introduites par cette même fonction elliptique et le terme en c^2t, qui se confondent avec le terme principal wt.

Leur grandeur et leur signe dépendent de la demi-amplitude des oscillations et du sens du mouvement.

La suite prochainement.

NOTE SUR LA QUADRATURE ÉLÉMENTAIRE DU CERCLE;

PAR M. SCHLOMILCH,
Professeur à l'université de Dresde.

En désignant par S_n l'aire d'un polygone régulier de n côtés inscrit an cercle et par T_n l'aire du polygone circonscrit correspondant, on a, comme on sait, les deux relations

$$(1) \qquad S_{2n} = \sqrt{S_n T_n}, \quad T_{2n} = \frac{2 S_{2n} T_n}{S_{2n} + T_n}.$$

On se sert de ces formules pour le calcul numérique du rapport entre le rayon et l'aire du cercle, mais ce calcul est peu commode parce qu'il faut aller jusqu'au nombre $n = 32768$ pour trouver sept décimales de π. C'est pourquoi nous allons développer une formule approximative qui jouit d'une grande précision et qui donne déjà pour $n = 256$ le même résultat que les formules ci-dessus pour $n = 32768$.

Pour rendre plus traitables les relations (1), nous prenons

$$\frac{1}{S_n} = \overset{*}{S}_n, \quad \frac{1}{T_n} = \overset{*}{T}_n,$$

ce qui donne

$$(2) \qquad \overset{*}{S}_{2n} = \sqrt{\overset{*}{S}_n \overset{*}{T}_n}, \quad \overset{*}{T}_{2n} = \frac{1}{2}(\overset{*}{S}_{2n} + \overset{*}{T}_n).$$

D'autre part, il est connu que l'on peut remplacer la moyenne géométrique entre deux nombres α et $\alpha + \delta$ par la moyenne arithmétique, pourvu que l'erreur commise qui ne surpasse jamais la quantité $\frac{\delta^2}{8\alpha}$ n'altère pas le degré de précision que l'on désire (*). En faisant usage de ce principe, nous posons un terme quelconque

$$\overset{*}{T}_k = \alpha \quad \text{et} \quad \overset{*}{S}_k = \alpha + \delta,$$

et nous aurons

$$\overset{*}{S}_{2k} = \alpha + \frac{1}{2}\delta,$$

$$\overset{*}{T}_{2k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta,$$

$$\overset{*}{S}_{4k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{8}\delta,$$

$$\overset{*}{T}_{4k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{16}\delta,$$

$$\overset{*}{S}_{8k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{16}\delta + \frac{1}{32}\delta,$$

$$\overset{*}{T}_{8k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{16}\delta + \frac{1}{64}\delta.$$

. . . .

(*) L'équation identique

$$\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} = \sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{2}\delta\right)^2 - \frac{1}{4}\delta^2}$$

fait voir que l'on a toujours

$$\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} < \alpha + \frac{1}{2}\delta.$$

Soit de plus ε l'erreur que l'on commet en remplaçant $\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)}$ par $\alpha + \frac{1}{2}\delta$, on a

$$\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} = \alpha + \frac{1}{2}\delta - \varepsilon$$

et

$$\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} + \varepsilon = \alpha + \frac{1}{2}\delta;$$

le carré de cette équation est

$$2\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} + \varepsilon^2 = \frac{1}{4}\delta^2,$$

ce qui donne

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{4}\delta^2}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} + \varepsilon} < \frac{\delta^2}{8\alpha}.$$

La limite vers laquelle convergent ces expressions est évidemment

$$\frac{1}{\pi} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{16}\delta + \frac{1}{64}\delta + \frac{1}{256}\delta + \ldots$$

$$= \alpha + \frac{1}{3}\delta = \overset{*}{\mathrm{T}}_k + \frac{1}{3}(\overset{*}{\mathrm{S}}_k - \overset{*}{\mathrm{T}}_k) = \frac{1}{3}(\overset{*}{\mathrm{S}}_k + 2\overset{*}{\mathrm{T}}_k).$$

En substituant les valeurs de $\overset{*}{\mathrm{S}}_k$ et de $\overset{*}{\mathrm{T}}_k$, on parvient à la formule très-simple

$$(3) \qquad \pi = \frac{3\mathrm{S}_k\mathrm{T}_k}{2\mathrm{S}_k + \mathrm{T}_k}.$$

L'erreur commise est moindre que la quantité

$$\frac{(\overset{*}{\mathrm{S}}_k - \overset{*}{\mathrm{T}}_k)^2}{8\overset{*}{\mathrm{T}}_k} = \frac{(\mathrm{T}_k - \mathrm{S}_k)^2}{8\mathrm{S}^2_k\mathrm{T}_k}.$$

Pour rendre plus commode cette expression, nous remarquons que l'on a toujours $\mathrm{S}_k > \mathrm{S}_3$, pourvu que $k > 3$; il suit de là

$$\mathrm{S}_k > \frac{3}{4}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}^2_k > \frac{27}{16};$$

d'autre part, il est clair que T_k surpasse toujours le nombre 3, on a donc

$$8\mathrm{S}^2_k\mathrm{T}_k > 8.\frac{27}{16}.3 > 40;$$

l'erreur commise est donc moindre que la quantité $\frac{1}{40}(\mathrm{T}_k - \mathrm{S}_k)^2$.

Ce petit développement n'enrichit point la science, mais nous croyons qu'il peut être utile pour l'enseignement de la géométrie.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XIV.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie ; Arithmétique.

Déterminants.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie descriptive.

Trigonométrie plane et sphérique.

Géométrie dans l'espace ; Lignes et Surfaces.

Méthodes métamorphiques (géométrique et fonctionnelle) et symboliques.

Géométrie des lignes planes spéciales.

Coniques planes.

Géométrie pratique.

Mécanique.

Calcul infinitésimal; séries.

Physique mathématique; Astronomie.

Questions proposées.

Questions résolues.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

(*) Mort en août 1855. Célèbre éditeur du recueil des plus précieux documents de l'analyse et de la géométrie contemporaines.

(*) Mort en 1855.

(*) Successeur de Gauss à Gottingue.

(*) Mort le 18 décembre 1855, âgé de 51 ans. Carrière subitement illustrée par un théorème, conception de génie, subitement terminée par une per-

---

turbation d'esprit. Sturm a assez vécu pour sa gloire, trop peu pour la science dans laquelle il a laissé une trace si brillante. Ayant dédaigné l'exploitation des fumées lucratives, il transmet à sa famille une trop modeste condition et un nom populaire, acquis par une voie honnête, nullement populaire. Puisse le Gouvernement connaître cette situation ! elle serait améliorée. Nous reviendrons sur la vie de ce professeur remarquable, qui laisse un vide dans l'enseignement consciencieux de la mécanique rationnelle.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les quatorze premiers volumes.

Nos.		Pages.
	TOME II.	
61		48
	TOME IV.	
93		259
	TOME V.	
120		202
	TOME VII.	
190		240
192		368
193		*Ibid.*
	TOME VIII.	
199		44
	TOME X.	
240		357
245		358

Nos.		Pages.
	TOME XI.	
251 (échec)		115
252 (domino)		*Ibid.*
266		401
	TOME XII.	
270		99
280		327
	TOME XIII.	
289		192
294		314
	TOME XIV.	
307		262
313		305

Observation. Sur 313 questions, il en reste 18 à résoudre. Les autres sont résolues et imprimées, ou bien en manuscrit, et paraîtront en 1856.

ERRATA.

Page 113, dernière ligne, *au lieu de* $a_p(a-p)$, *lisez* $a_p(a-p+1)$.

114, dernière ligne, *au lieu de* $-1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, *lisez*

$$a_{p-1}+\frac{(\alpha-p+1)(\alpha-p)}{2}.$$

174, ligne 5 en rem., *au lieu de* 68577, *lisez* 68557.

174, ligne 6 en rem., *au lieu de* 68577, *lisez* 68557.

229, ligne 9, *au lieu de* sont le, *lisez* sont sur le.

211, dernière ligne, *au lieu de* CA, DB, *lisez* AD, BC.

284, ligne 16, *au lieu de* $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$, *lisez* $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$.

284, ligne 19, supprimez $\beta-2$ au commencement et à la fin de la ligne.

286, ligne 5, et 294, ligne 7, *au lieu de* 6, lisez 5.

291, ligne 17, *au lieu de* $2n$, *lisez* n.

294, ligne 9, *au lieu de* 14, *lisez* 12.

349, ligne 10, *au lieu de* $\widehat{x_1 z_1 y'_1}$, *lisez* $\widehat{x_1 z_1 x'_1}$.

362, ligne 6 en rem., *au lieu de* $\cos\lambda$, *lisez* $\cos\theta$.

364, ligne 10 en rem., *au lieu de* $\pi+\gamma_0$, *lisez* $2\pi-\gamma_0$,

374, ligne 7, *au lieu de* axes, *lisez* arcs.

374, ligne 7 en rem., *au lieu de* $\frac{5}{8}(y_0-y_n)$, *lisez* $\frac{5}{8}(y_0+y_n)$.

378, ligne 8 en rem., *au lieu de* $4(dx^2)$, *lisez* $4(dx)^2$.

379, ligne 6 en rem., *au lieu de* que $f(x_0)$, *lisez* que $f''(x_0)$.

382, ligne 3, *au lieu de* 0,693971, *lisez* 0,693771.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

NOTICE SUR LA DÉCOUVERTE DES LOGARITHMES.

« Le temps est l'étoffe dont la vie est faite, dit Franklin; ménager cette étoffe, c'est prolonger la vie. » L'introduction de l'arithmétique chiffrée, de l'algorithme algébrique, les inventions des logarithmes et du calcul infinitésimal, comme les chemins de fer et les télégraphes électriques, font parcourir à la pensée de grands espaces en peu d'instants. Avant le siècle de Néper, ceux qui faisaient de l'arithmétique leur étude favorite trouvaient un passe-temps agréable à comparer les progressions géométriques et arithmétiques, et fournissaient ainsi l'occasion à ceux qui aiment mieux décrier les mathématiques que les étudier, comme dit Lambert, l'occasion de ranger ces comparaisons parmi les oiseuses et inutiles spéculations; et c'est pourtant ces oiseuses spéculations qui ont amené une de ces inventions qui font époque dans les annales de l'esprit humain. Cette invention a été proclamée la première fois dans l'ouvrage suivant, d'une extrême rareté (*) :

(*) M. Biot, en écrivant l'article dont nous parlerons plus loin, n'a trouvé qu'un exemplaire dans la bibliothèque de feu Walkenaer, membre

Mirifici logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio; authore et inventore JOANNE NEPERO, barone MERCHISTANII, etc., Scoto. Edduburgi, ex officina Andreæ Hart, bibliopolæ. CIϽ DC XIV; in-4; 19 feuilles et demie; texte, 8 feuilles et 1 page; Tables, 11 feuilles et 2 pages; 56 pages de texte et 90 pages de Tables.

L'ouvrage est dédié à Charles, prince de Galles, fils unique de Jacques I^{er}. La dédicace débute ainsi :

Quum nullum sit studium, vel doctrinæ genus (illustrissime princeps) quod generosa ac heroica ingenia, ad præclara quæque et sublimia magis acuat, contraque tarda et impulsa pectora magis obtundat, quam mathesis : non mirandum est eruditos et magnanimos principes eam magnopere præteritis omnibus seculis in deliciis habuisse, imperitos vero et ignavos homines eandem velut ignorantiæ suæ et ignaviæ hostem, semper odio acerrimo prosequutos esse.

Voici le sens :

« Illustre prince, comme il n'existe aucune étude, aucune espèce d'enseignement qui aiguise tout à la fois les esprits généreux et élevés, et rebute, par contre, les âmes inertes, frivoles, tant que les mathématiques, ne soyons donc pas surpris si, dans tous les siècles passés, des princes instruits, magnanimes, ont pris plaisir à cette science, tandis que des hommes apathiques, ignorants, ont toujours poursuivi cette science d'une haine violente, la traitant comme une ennemie de leur ignorance et de leur apathie. »

---

de l'Institut; cet exemplaire, que nous avons sous les yeux, fait maintenant partie de la précieuse collection mathématique de M. Chasles. Comme à l'ordinaire, l'ouvrage, étant rare et de science, ne se trouve plus à la Bibliothèque impériale, où il est inscrit au catalogue, 4°, V, 1005.

Il termine par prier le prince d'accepter cet opuscule avec bienveillance : *Quod si fecisse intellexero, vel hac sola ratione animos mihi jam morbis pene confecto addideris, ad alia propediem, his fortasse majora et tanto principe magis digna moliendum.*

Ensuite on lit des vœux ardents pour la conservation du prince, vœux qui n'ont pas été exaucés : Charles Ier a péri sur l'échafaud.

Dans la préface d'une seule page qu'il adresse *charissimis mathematicæ cultoribus*, il dit que rien n'est si fatigant dans la pratique que les multiplications, les divisions, les extractions de racines carrées et cubiques : *quæ præter prolixitatis tædium, lubricis etiam erroribus plurimum sunt obnoxiæ.* Il veut remplacer ces opérations par des additions, des soustractions, des bissections et des trisections.

Selon l'usage d'alors, la préface est suivie de cinq éloges en vers. L'un est d'André Junius, professeur de philosophie de l'Académie d'Édimbourg.

L'ouvrage est divisé en deux livres, dont le premier contient cinq chapitres. Le chapitre I contient les définitions, dont voici les trois principales; nous les expliquerons plus bas :

1re Définition. *Linea æqualiter dicitur, quum punctus eam describens æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.*

2e Définition. *Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctum eam transcurrens æqualibus momentis, segmenta abscindit ejusdem continuo rationis ad lineas a quibus abscinduntur.*

6e Définition. *Logarithmus ergo cujusque sinus est numerus quam proxime definiens lineam, quæ æqualiter crevit inter eas dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono atque initio æquiveloce.*

Il déduit comme corollaire que le logarithme du sinus total 10 000 000 est nul et que les logarithmes des nombres plus grands que le sinus total sont négatifs, *nihilo minores;* il les nomme *logarithmes défectifs* et les désigne par —, tandis qu'il nomme *abondants* et désigne par + les logarithmes des nombres moindres que le sinus total.

Le chapitre II donne les propriétés des logarithmes : les nombres croissant en progression géométrique, les logarithmes croissent en progression arithmétique, etc. Dans un avertisssement final, il dit que ce serait maintenant à expliquer le moyen de calculer les logarithmes, mais qu'il réserve cela pour un temps plus opportun. *Præstolor enim eruditorum de his judicium et censuram, priusquam cætera in lucem temere prolata lividorum detrectationi exponantur.*

Le chapitre III comprend la description des Tables; chaque page est divisée en sept colonnes; la première est celle des arcs croissant de minute en minute depuis zéro jusqu'à 45 degrés; la septième colonne est celle des arcs décroissant de minute en minute de 89° 60′ jusqu'à 45 degrés ; la seconde colonne est celle des sinus des arcs de la première colonne; la sixième contient les sinus des arcs de la septième; la troisième contient les logarithmes des sinus des arcs qui sont à gauche, et la cinquième les logarithmes des sinus des arcs qui sont à droite: ce sont les logarithmes des cosinus ; mais il ne se sert pas de cette dénomination, il les nomme *antilogarithmes* étant vis-à-vis des logarithmes des sinus. La quatrième colonne enfin, colonne du milieu, contient les différences entre les logarithmes de la troisième colonne et de la cinquième colonne; cette colonne quatrième porte en tête les deux signes + et —; les différences sont *abondantes* en retranchant les nombres de la cinquième colonne de la troisième, et *défectives* en retranchant les nombres de la troisième colonne de la cinquième : ce sont les logarithmes des tangentes et cotangentes ; il ne fait pas usage de ce dernier mot.

Le chapitre IV est intitulé : *De usu Tabulæ et numerorum ejus.* Il indique aussi le moyen de trouver les logarithmes des nombres qui ne sont pas dans la Table et les nombres correspondants aux logarithmes non consignés dans les Tables. Dans l'avertissement final, il annonce qu'il donnera plus tard les deux progressions pour calculer les logarithmes. *Quare de his* (*Deo aspirante*) *ubi de logarithmis condendis et creandis agetur, amplius aliquando disseremus.*

Cap. V. *De amplissimo logarithmorum usu et expedita per eos praxi.* Il donne plusieurs exemples ; tous reviennent à insérer un certain nombre de moyennes proportionnelles géométriques entre deux nombres donnés.

Le livre second, divisé en six chapitres, est un Traité des deux trigonométries, avec des applications logarithmiques ; il est intitulé : *De canonis mirifici logarithmorum præclaro usu in trigonometria.*

Les deux premiers chapitres contiennent la résolution des triangles rectilignes, rectangles et obliquangles, avec des applications numériques.

Lorsque la hauteur du triangle est intérieure, il nomme *base vraie* la somme de deux segments, et *base alterne* leur différence ; et lorsque la hauteur est extérieure, la base vraie est la différence des segments, et la base alterne leur somme. Il conserve aussi en trigonométrie sphérique ces dénominations qui abrégent les énoncés de certains théorèmes.

Conclusio. *Sequantur jam sphærica triangula, omnium difficillima, ut vulgo ab aliis traduntur, per logarithmos tamen nostros omnium facillima.*

Le chapitre III, d'une seule page (p. 29), ne contient que des définitions : un triangle quadrantal (*quadrantale*) est celui où il entre un angle ou un côté de 90 degrés.

Le chapitre IV est consacré aux triangles quadrantaux; les exemples se rapportent à des questions sur la position du Soleil dans l'écliptique, et les énoncés sont toujours *logarithmiques*. On discute les cas douteux.

Cap. V. *De non quadrantalibus mixtis.*

Ce sont des triangles dont aucun côté, aucun angle n'est de 90 degrés, et où les données renferment à la fois des côtés et des angles ; il divise de tels triangles en triangles *quadrantaux*, par des perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés.

Cap. VI. *De non quadrantalibus puris.*

C'est lorsqu'il entre dans les données seulement des côtés ou seulement des angles. Il dit que ce chapitre aurait dû précéder le chapitre V; mais à cause de ses difficultés il l'a réservé pour le dernier. On trouve ici ses trois analogies énoncées d'une manière assez compliquée et une démonstration géométrique de l'analogie des tangentes. *Verum quia hujus analogiæ tangentium fundamentalis, hactenus ignotæ, demonstrationem a me forte requirent lectores, eam ideo, quantum hujus compendii brevitas patitur, hic explicabimus.*

Il indique trois méthodes pour déduire les angles, connaissant les côtés : la première est la formule

$$\sin^2 \frac{1}{2} \mathrm{A} \sin b \sin c = \sin(p-b)\sin(p-c);$$

la seconde est la formule

$$\cos^2 \frac{1}{2} \mathrm{A} \sin b \sin c = \sin p \sin(p-a);$$

la troisième est la formule

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \mathrm{A} \sin p \sin(p-a) = \sin(p-c)\sin(p-b):$$

c'est ce qu'il nomme l'analogie des tangentes. La démonstration faite sur la sphère repose sur un procédé de perspective (*umbræ*). La dernière phrase de l'ouvrage est : *Interim hoc brevi opusculo fruamini, Deoque opifici summo, omniumque bonorum opitulatori laudem summam et gloriam tribuite.*

(*La suite prochainement.*)

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie générale des Approximations numériques, suivie d'une Application a la résolution des équations numériques; par M. *J. Vieille*, agrégé près la Faculté des Sciences de Paris, maître de conférences à l'École Normale, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée impérial Louis-le-Grand. 2[e] édition, corrigée et augmentée. Paris, 1854; xii-200 p.; in-8 (*).

L'édition de 1852 n'a que 100 pages (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 457); l'augmentation de l'édition actuelle ne consiste pas seulement en pages, mais en substance, en nouveaux matériaux, en amélioration d'anciens matériaux. Conservant la bonne opinion que nous avons émise sur la première édition, nous allons ajouter quelques observations, en parcourant cette seconde édition. On lit (p. 14) le calcul du logarithme népérien de 2 avec sept décimales exactes. Pourquoi, à cette occasion, n'avoir pas mentionné la méthode Koralek qui permet de calculer de tels logarithmes avec une promptitude inouïe et avec autant de décimales qu'on veut? C'est une omission fâcheuse. Le calcul de π (p. 22) est

(*) Prix : 3[f] 50[c], chez *Mallet-Bachelier*, libraire.

arriéré de beaucoup, depuis le travail si remarquable de M. Lehmann (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 419).

On dit qu'en prenant $\pi = 3,14159265358$, on ne se tromperait pas de *deux* unités du dernier ordre; on ne se trompe pas d'une demi-unité de cet ordre. Parlant du module M, on lit (p. 51) qu'en faisant $M = 0,434294481 91$, *on ne sait si cette valeur* est approchée par défaut ou par excès; comme les chiffres qui suivent 9 sont 032, il est évident que l'approximation est par excès (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 368).

Dans les utiles applications que donne l'auteur, on regrette de ne pas trouver celles-ci, d'une haute importance: Avec combien de décimales exactes faut-il calculer $\cos a$ pour que l'on ait avec m décimales exactes les valeurs de $\frac{1}{\cos a}$ et $\frac{\sin a}{\cos a}$? questions qui ont été si bien traitées par Prony dans ses *Éclaircissements sur un point de l'historique des Tables trigonométriques* (*Mém. de l'Inst.*, t. V, p. 671; an XII). Ce point historique est fort curieux.

P. Joachim (Georges), surnommé Rheticus, né en 1514 à Feldkirch, dans les Grisons (Rhetia), était, en 1537, professeur de Mathématiques à Wittemberg (Saxe). Ayant entendu parler du système de Copernic, il se rendit auprès de l'illustre chanoine, en 1539, à Wiarm, resta avec lui, et devint son ami et son *calculateur*. Copernic était découragé faute de livres sur la trigonométrie; aidé de Rheticus, il composa une Trigonométrie que Rheticus publia en 1542 (*). Copernic se remit ensuite à son immortel

(*) *De lateribus et angul. triangul. tum planor. rectilineor. tum sphæricor. libellus eruditissimus et utiliss. cum ad plerasque Ptolomæi demonstrationes intelligendas tum vero ad alia multa.* Scriptus a clariss. et doctiss. viro D. Nicolao Copernico Toruniensi. Additus est canon semissium subtensarum rectarum linearum in circulo. Vitteb., 1542; in-4.

La partie ajoutée est probablement de Rheticus.

ouvrage *De revolutionibus orbium cœlestium*, dont on doit aussi la publication à Rheticus, qui revint en 1541 à Wittemberg.

Partisan enthousiaste du système de Copernic, il résolut de construire des Tables pour en faciliter l'usage. Il se mit au travail en 1540 et fit paraître en 1551, à Nuremberg : *Georgii Joachimi Rhetici medici et mathematici canon doctrina triangulorum*. Une seconde édition parut à Bâle en 1580, mais son grand travail ne fut publié et achevé qu'après sa mort (1576).

Opus palatinum de triangulis, a Georgio Joachimo Rhetico cœptum; L. Valentinus Otho, principis Palatini Friederici IV electoris mathematicus, consummavit. Ann. Sal. Hum. 1596; in-fol; titre, dédicace, préface, 10 pages; texte, 341 pages. A la fin on lit : *Neostadii in Palatinatu excudebat Matthæus Harniscus, anno salutis* 1596, *Meteoroscopium....* 21 pages.

Ce Valentin Othon, étant à Wittemberg, cultivant l'astronomie, désira aussi une connaissance approfondie de la trigonométrie; à cet effet, il se rendit auprès de Rheticus, alors en Hongrie, et en fut très-bien accueilli. Il lui dit : « Tu viens auprès de moi au même âge où je suis » venu auprès de Copernic. Sans moi son ouvrage n'au» rait pas vu le jour. *Nisi ego illum adiissem opus, ipsius* » *omnino lucem non vidisset.* Moi aussi j'ai interrompu » mon travail et n'ai pas encore touché aux triangles obli» quangles, car je n'ai achevé que ma troisième Table; » pour le moment je ne puis m'y mettre; mais, puisque je » t'aurai pour compagnon et associé, je le reprendrai » plus tard. En attendant, tu suivras mes leçons. »

Il expliquait alors le XIII[e] et le XIV[e] chapitre d'Albategnius, et, le cours terminé, il envoya Othon à Cracovie pour y chercher la première et la deuxième série de ses Tables, qu'il avait laissées dans cette ville. Dans cet intervalle, Rheticus invité chez un certain baron, ayant couché dans une chambre nouvellement peinte, gagna une fluxion de poitrine, dont il souffrit lors du retour d'Othon. Ils furent à peine trois jours ensemble, que Rheticus reçut une autre invitation auprès du comte Jean Ruber, *Summæ rei præfecto in Ungaria*. La maladie s'aggrava à Cassau, et, se préparant à mourir, il fit prier le comte, par des amis, de remettre son ouvrage à Othon. Ruber y consentit; quatre jours après, Rheticus expira dans les bras d'Othon, à 2 heures du matin, en 1576, dans sa 61e année (*). Ruber manda sa mort à l'empereur Maximilien II, qui approuva non-seulement la volonté de Rheticus, mais fit dire à Othon qu'il se chargerait des frais de l'impression. Othon se mit tout de suite à travailler à la troisième série. L'empereur étant mort, l'impression ne put avoir lieu. Après diverses vicissitudes, Othon se rendit dans le Palatinat et y trouva moyen de subvenir aux frais. Delambre donne une description incomplète de l'ouvrage (*Astron. moderne*); c'est Kästner qui en donne une idée complète (*Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 590), et aussi J. Bernoulli (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1786).

Il suffit de savoir que Rheticus adopte pour rayon l'unité suivie de quinze zéros, et en calcule les sinus avec quinze décimales, de 10 secondes en 10 secondes du quadrant, pour être publié avec 10 décimales; de même les tangentes et les sécantes avec 10 décimales. Au lieu des dénominations, sinus, cosinus, sécante, il emploie les dénominations, *perpendicule*, *base*, *hypoténuse*. Les tri-

(*) La fréquentation des grands n'est pas favorable à la longévité des savants. Kepler mourut par suite d'un voyage avec l'empereur Sigismond. Le séjour de Stockholm, auprès d'une folle couronnée, abrégea la vie de Descartes. Les *petits soupers* ruinèrent la santé de d'Alembert et menèrent de bonne heure Clairaut au tombeau.

angles sphériques obliquangles sont le travail d'Othon, qui était de Naples (*Parthenopolitanus*) et doit être né vers 1530.

Une partie de l'ouvrage porte pour titre : *L. Valen. Oth. Parthenopol. Meteoroscopium numerorum primam monstrans proportionem singul. parall. ad æquatorem vel meridianum. Meteoroscopium* signifie ici mesure des hauteurs célestes ; c'est une Table pour calculer les quantités $\cos\beta \sin\delta$, $\cos\beta \cos\delta$. β est la distance d'un parallèle à l'équateur et δ un arc quelconque pris sur ce parallèle depuis $\delta = 1^\circ$ jusqu'à $\delta = 89^\circ$, et β aussi de 1 à 89 degrés.

L'ouvrage devait porter le titre *Opus saxonum*; des circonstances ultérieures ont fait changer le titre. Une seconde édition de ce célèbre ouvrage parut sous un autre titre également célèbre :

Thesaurus mathematicus, sive Canon sinuum ad radium 1 00000 00000 00000 *et ad dena quæque scrupula secunda quadrantis una cum sinubus primi et postremi gradus, ad eundem radium. Adjunctis ubique differentiis primis et secundis, atque ubi res tulit etiam tertiis. Jam olim quidem incredibile labori et sumtu a Georgio Joachimo Rhetico supputatus; at nunc primum in lucem editus et cum viris doctis communicatus a Bartholomæo Pitisco Grunbergensi Silesio, cujus etiam accesserunt :* I. *Principia sinuum ad radium*

1 00000 00000 00000 00000 00000

quam accuratissime supputata; II. *Sinus decimorum, tridecimorum et quinquagesimorum quorumque scrupulorum secundorum per prima et postrema* 35 *scrupula prima ad radium* 1 00000 00000 00000 00. *Francofurti excudebat Nicolaus Hofmannus sumtibus Jonæ Rosæ, anno* CIↃ IↃ XIII.

Pitiscus, né à Schlaun, près Grunberg, en 1561, théologien et géomètre, avait été chargé par l'électeur palatin Frédéric IV d'améliorer les Tables de Rheticus, ce qui n'était pas possible en prenant pour rayon 10^{10}, tel qu'il est dans l'*Opus palatinum.* Il conjectura que Rheticus devait avoir calculé avec 15 décimales. S'en étant informé auprès d'Othon, ce dernier en convint, mais ne sachant plus, par affaiblissement de sa mémoire, ce que les papiers étaient devenus, il croyait les avoir laissés à Wittemberg. Othon, à sa mort, légua ses papiers à Jacob Christmann (*) qui y trouva inopinément les calculs de Rheticus. Lorsque Pitiscus apprit cela, il examina ces précieuses reliques, *utrinque situ et squalore obsitas et pæne fœtentes.* Il dit que pour les lignes trigonométriques des tangentes et sécantes des arcs de commencement et de la fin du quadrant, Othon avait commis de grandes erreurs, parce qu'il avait calculé le sinus avec 10 décimales, tandis qu'il en faut 22; c'est à cet effet qu'il calcula la Table qui est à la fin du *Thesaurus,* au moyen de laquelle il recalcula les cotangentes et cosécantes des arcs depuis le commencement du quadrant jusqu'à la fin du sixième degré, de 10 secondes en 10 secondes; il fit imprimer 86 pages de l'*Opus palatinum* pour en faire un carton et remplacer les 86 pages fautives. Voici le titre de cette réimpression:

Georgii Joachimi Rhetici magnus Canon doctrinæ triangulorum ad decades secundorum scrupulorum et ad partes 1 00000 00000 *recens emendatus a Bartholomæo Pitisco Silesio. Addita est brevis commonefactio de fabrica et usu hujus canonis, etiam separatim ab Opere palatino venditur in bibliopola Harnischiano.*

Il paraît que peu de personnes se sont procuré ce car-

(*) Savant orientaliste et géomètre, né au Johannisberg (Nassau-Biberich). N. 1554, M. 1613.

ton. C'est à Prony qu'on en doit la connaissance; il ne parle que de deux exemplaires existants à Paris : le sien et celui de la bibliothèque du Conseil d'État; je ne sais pas ce qu'est devenu l'exemplaire de Prony. L'illustre analyste compare les Tables de l'*Opus palatinum*, du *Thesaurus*, avec les grandes Tables du Cadastre, et il fait voir que pour avoir les sécantes d'un arc de $89°59'47''$ à $89°59'56''$ avec 10 décimales exactes, il faut calculer les cosinus avec 20 décimales exactes, et d'autres résultats analogues qui prenaient naturellement place dans l'ouvrage de M. Vieille. Il me semble que faire connaître aux élèves les gloires de la France fait partie du professorat : ce n'est pas un devoir rigoureux, j'en conviens; toutefois il est bon de le remplir. On ne cite pas davantage les travaux de MM. Guilmin, Lionnet, etc., sur les approximations de diverses espèces et qui ne diffèrent pas essentiellement de celles de l'auteur. Il paraît que M. Vieille n'a pas pris connaissance de ce que dit M. Piobert sur la meilleure forme à donner aux triangles dans les levés (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 234) : il aurait présenté autrement ce qu'il dit à ce sujet (p. 123). Le calcul approché des racines des équations numériques est traité avec beaucoup de soin; les applications aux équations transcendantes sont nombreuses, bien choisies dans Euler; la méthode est la même que celle de M. Stern dans son Mémoire couronné. On ne dit rien ni des racines imaginaires, ni des équations à plusieurs inconnues (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 365).

L'ouvrage a le mérite de réunir sous un petit volume des théories et des pratiques précieuses, exposées avec lucidité, rigueur et méthode, et ramenées à un petit nombre de principes généraux. Mais on dirait que l'auteur, selon l'expression de Bacon, a tout tiré, *araneæ instar*, de lui-même : c'est le *mal français*, comme dit La Fontaine. Cette *Théorie générale* dispense d'une multiplicité de livres qui entraîne perte de temps et d'argent; écoutons le conseil de Sénèque : « *Onerat discentem turba, non instruit, multoque satius paucis te auctoribus tradere quam errare per multos* (*De tranquillitate animi*, § 9). L'ouvrage suivant, dont je ne connais que le titre, a de l'analogie avec celui de M. Vieille :

Mundt. Carl. Æm. De accuratione, qua possit quantitas per Tabulas determinari et quidem cum per Tabulas universum, tum singulatim per Tabulas logarithmicas et trigonometricas. Grand in-4, Hauniæ, 1842, Leipzig.

GRANDES TABLES LOGARITHMIQUES DE L'OBSERVATOIRE (*).

Lors de l'établissement du système métrique français, l'idée devait naturellement se présenter de reprendre en sous-œuvre le travail de Briggs sur les divisions centésimales du quadrant. D'après la tendance de l'époque (an II), on résolut de construire des Tables sur une échelle qui dépassât tout ce qui existait. Prony fut chargé de l'entreprise, puissamment protégée par Carnot, Prieur (de la Côte-d'Or), Brunet (de Montpellier), membres de la Convention. Voulant faire usage du principe de Smith sur la division du travail, Prony s'y prit de cette manière. Une grande série de nombres quelconques étant donnée, en formant successivement les différences premières, secondes, troisièmes, etc., si l'on parvient à des différences

(*) *Voir* Notice sur les grandes Tables logarithmiques et trigonométriques calculées au Bureau du Cadastre sous la direction du citoyen Prony (*Mémoires de l'Institut*, t. V, p. 49, an XII). La Notice a été lue le 1er germinal an IX.

constantes, ou à peu près constantes, on peut, au moyen de cette différence constante et des premiers termes des séries précédentes, trouver tous les termes de la première série, rien que par des additions et des soustractions. Quand il s'agit des logarithmes des nombres, des lignes trigonométriques et de leurs logarithmes, l'analyse donne des formules pour calculer les différences constantes et les premiers termes des différences. On peut consulter à cet effet les Notes de Legendre sur la trigonométrie et les leçons d'analyse de Prony. Les travailleurs furent distribués en trois sections.

1. La section des théoriciens, formée de cinq ou six mathématiciens éminents, parmi lesquels figure Legendre, dirigeait et surveillait toutes les opérations théoriques.

2. La section des calculateurs, au nombre de sept ou huit, composée d'hommes familiarisés avec les calculs numériques et analytiques, calculait les termes des séries par les différences. Leurs travaux étaient doubles, c'est-à-dire, on devait parvenir aux mêmes résultats par des formules *différentes*; moyen de contrôle.

3. Enfin, une troisième section de soixante à quatre-vingts personnes qui ne s'occupaient que d'additions et de soustractions; les neuf-dixièmes ne savaient que les quatre règles et les travaux étaient aussi doubles, mais les mêmes; les travailleurs ne communiquant pas ensemble devaient parvenir aux mêmes résultats (*). On a remarqué que ce n'étaient pas les plus instruits d'entre eux qui commettaient le moins d'erreurs.

Tous ces calculs forment dix-sept volumes in-folio, déposés et conservés à l'Observatoire impérial.

(*) Prony a enrôlé beaucoup d'anciens coiffeurs que la suppression des perruques et des cheveux poudrés avait laissés sans occupation.

Voici le contenu :

1°. Introduction; contenant la théorie de toutes les opérations et l'usage des Tables.

2°. Sinus naturels pour chaque seconde décimale, avec 25 décimales et sept à huit colonnes de différences, pour être publiés avec 22 décimales et cinq colonnes de différences.

3°. Logarithmes des sinus pour chaque tierce décimale; 14 décimales, 5 colonnes de différences.

4°. Logarithmes de $\frac{\sin a}{a}$ pour les cinquante premières tierces décimales; 14 décimales et cinq colonnes de différences.

5°. Logarithmes des tangentes correspondants aux logarithmes sinus.

6°. Logarithmes $\frac{\operatorname{tang} a}{a}$, comme au § 4; à être publiés avec 12 décimales et trois colonnes de différences.

7°. Logarithmes des nombres 1 à 10^4 avec 19 décimales.

8°. Logarithmes des nombres 10^4 à 2.10^5; 14 décimales et cinq colonnes de différences; à être publiés avec 12 décimales et trois colonnes de différences.

Un marché était conclu avec Firmin Didot pour la publication stéréotype en 1200 pages in-folio, non compris l'introduction. Cent planches furent tirées. La chute du papier-monnaie et le désordre des finances interrompirent l'opération, qui ne fut jamais reprise (*).

Le gouvernement actuel, qui a exécuté avec bonheur de si vastes travaux, ajouterait à son illustration en élevant deux monuments de gloire impérissable.

1°. L'achèvement de l'œuvre conventionnelle. Lorsque

(*) Il y a eu des négociations à ce sujet avec le gouvernement anglais qui n'aboutirent pas.

toutes les observations atteignent une si extrême précision, la publication complète des Tables de l'Observatoire serait sans conteste désirable en beaucoup d'occasions. D'ailleurs, c'est surtout dans les sciences que se vérifie cet apophtegme de Voltaire : *Le superflu, chose si nécessaire.*

2°. L'imitation d'une œuvre de Louis XIV : la construction aux environs de la capitale d'un observatoire digne de la nation, observatoire simultanément astronomique, météorologique, compris le magnétisme. Sobre dans les constructions, n'épargnant rien pour l'établissement et l'acquisition des instruments, laissant toute latitude à l'activité, au zèle intelligent du célèbre *directeur* qui ajouterait ainsi une nouvelle auréole à sa réputation (*) ; et en outre, bien entendu, un personnel suffisant, confortablement logé, honorablement rémunéré, et avec la science de nos astronomes, le talent de nos artistes, le bon goût de nos architectes, il est permis d'espérer non-seulement d'atteindre le modèle Pulkova, mais de le surpasser. L'édilité parisienne ne refusera pas de contribuer à cette dépense, infiniment moindre que celle qu'entraîne la création d'une rivière stagnante au bois de Boulogne.

La démolition d'une macédoine de murailles, épaisses, de laide apparence, la vente du terrain, couvriraient une partie notable de la dépense et embelliraient une des entrées principales de la capitale.

A ce propos, nous nous rappelons les réflexions d'un auteur anglais, nommé Thomas Smith ; il propose comme très-désirable l'édition d'un collection des anciens mathématiciens, *veterum mathematicorum corpus*, et il

(*) « Quelle limite dois-je mettre dans la dépense ? demanda M. Struve à l'empereur Nicolas. — Achetez tout ce qu'il y a de plus parfait en instruments, il n'y a pas d'autre limite. » Réponse digne d'un grand souverain, digne de l'illustre astronome de Pulkova.

ajoute qu'un tel projet ne peut se réaliser : *At si quando auspicatiora illuxerint tempora, reges principesque, qui immensas in ædibus construendis et illarum apparatu opes, ne dicam in luxu et voluptatibus parum se dignes nocivisque, et quæ cito effluunt, longe gloriosius, et non, nisi pereunte mundo, periturum monumentum, inde auspiciis suis et munificentia regali, hominum doctorum industria ad id præstandum allecta et provocata, sibi condendum et erigendum curarent.* (*Admodum reverendo et doctissimo Roberto Huntington, etc.*; scriptore THOMA SMITH. Londini; 1704.)

On publie la collection des médecins grecs; pourquoi pas celle des arithméticiens, géomètres, mécaniciens, musiciens grecs?

BIBLIOGRAPHIE.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, suivie de la DISCUSSION DES COURBES D'UN DEGRÉ SUPÉRIEUR AU SECOND; par *C. Jacob*, ancien élève de l'École Polytechnique, capitaine d'artillerie. Deuxième tirage (*).

Le premier tirage est de 1843; ce second tirage répandra un ouvrage dont il a été rendu un compte avantageux par M. Gerono, professeur si compétent [*Nouvelles Annales*, t. II, p. 192 (**)]; publié avant les *nouveaux Programmes*, il y a là une contexture scientifique qui, bien loin de nuire, met les élèves en état de résoudre facilement les questions des examens actuels. L'auteur est mort le 30 juillet 1848.

(*) Prix : 5 francs, chez Mallet-Bachelier.

(**) C'est par erreur qu'on a mis mon nom au bas d'un extrait mis en tête de ce second tirage.

Système de notations des diverses unités employées dans les sciences appliquées; par M. *Didion*, capitaine d'artillerie (*). Metz, in-8, 11 pages. (*Extrait des Mémoires de l'Académie royale de Metz*, 1836-37.)

Voici les notations commodes proposées par l'auteur et dont plusieurs sont ou méritent d'être adoptées.

SYSTÈME MÉTRIQUE DÉCIMAL.

Unités simples.

Mètre.... *m*						
Litre.... *l*	Unités multiples......	Myria M	Kilo K	Déca D		
Gramme. *g*						
Are...... *a*	Unités sous-multiples.	Déci *d*	Centi *c*	Milli *m*	Décimilli *dmm*	Centimilli *cmm*
Stère.... *s*						
Franc.... *f*						

L'auteur remarque que cette notation est celle de M. Vincent dans sa Géométrie.

Ainsi

15^{Mm}	signifie	15 myriamètres.
45^{mm}	»	45 millimètres.
$17^{Ha},1525$	»	17 hectares 15 ares 25 centiares.

Unités composées.

m^2	signifie	mètre carré.
m^3	»	mètre cube.
mm^2	»	millimètre carré.
cm^2	»	centimètre carré.

(*) Aujourd'hui colonel.

MÉCANIQUE.

1^{Km}	signifie	1 kilogramme élevé à 1 mètre de hauteur.
$15^{M:h}$	»	vitesse de 15 mètres par heure.
$5\frac{1}{2}^{L:h}$	»	vitesse de $5\frac{1}{2}$ lieues à l'heure.
$5^{m:''}$	»	5 mètres parcourus en une seconde.
$3^{m^3:''}$	»	écoulement de 3 mètres cubes d'eau par seconde.
1^{Ko}	»	1 kilogramme d'eau élevé à la température de 1 degré.
$254^{Ko}, 5$	»	calorique nécessaire pour élever $25^{k},45$ d'eau à 10 degrés.
$75^{Km:s}$	»	75 kilogrammes élevés à 1 mètre par seconde = cheval-vapeur.

Nous croyons utile de donner ici les rapports entre les mesures françaises et les mesures anglaises, plus développés qu'on ne les trouve dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

			Log.	Colog.
Toise en mètres...........	=	1.94903 659	0.28981 99924	9.71018 00076
Toise en yards.............	=	2.13153 084	0.32869 16209	9.67130 83791
Toise en pieds anglais	=	6.39459 252	0.80581 28756	9.19418 71244
Pied en pieds anglais......	=	1.06576 542	0.02767 16253	9.97232 83747
Mètre en yards............	=	1.09363 3067	0.03887 16284	9.96112 83716
Mètre en pieds anglais	=	3.28089 9167	0.51599 28831	9.48400 71169
Mètre en pouces anglais....	=	39.37079	1.59517 41291	8.40482 58709
Myriamètre en milles......	=	6.21382 424	0.79335 89605	9.20664 10395
Hectare en acres..........	=	2.47114 3	0.39289 79	9.60710 21
Gramme en grains anglais..	=	15.44242	1.18871 4926	8.81128 5074
Gramme en livres troys....	=	0.00268 0976	7.42829 2443	2.57170 7557
Gr. en livres avoir-du-poids.	=	0.00220 6060	7.34361 6886	2.65638 3114
Kilogramme en cwt........	=	0.01969 6964	8.29439 8864	1.70560 1136
Litre en gallons...........	=	0.22009 687	9.34261 3866	0.65738 6134
Litre en pouces cubes anglais.	=	61.02705 1	1.78552 28873	8.21447 71127

(*Extrait des Tables de Shortfrede.*)

Nouvelles Tables astronomiques et hydrographiques, contenant un Traité abrégé des cercles de la sphère, la description des instruments à réflexion, diverses méthodes pour obtenir les latitudes et les longitudes terrestres, une nouvelle Table des logarithmes, des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, de seconde en seconde, pour les quatre-vingt-dix degrés du quart du cercle; par *V. Bagay,* professeur d'hydrographie (*); édition stéréotypée, gravée, fondue et imprimée par MM. Firmin Didot père et fils. Avertissement et application, LXXXIV pages; Tables des logarithmes, 615 pages; trente-trois Tables diverses de navigation, 125 pages. Paris, in-4°; 1829 (**).

Voici un enfant du peuple qui, sans aucun secours, en argent, en livres, en hommes, a fait un ouvrage utile, le premier de ce genre, a vécu dans la misère, est mort aveugle et *illuminé*. Nouveau document à l'appui de cette pensée de Juvénal. *Probitas laudatur et alget*. Honneur à sa mémoire; c'est bien le moins qu'on puisse lui accorder.

Bagay (Valentin) est né le 9 avril 1772 dans la commune de Bisses-la-Maconnaise, canton de Lugny (Saône-et-Loire). En 1794, étant entré dans l'artillerie de la marine (4e régiment), il a traversé quatre fois l'Atlantique, et a assisté à plusieurs combats de mer; parvenu au grade de fourrier, il enseigna pendant six années les mathématiques au régiment et prit son congé en 1806, à Lorient, où il s'est marié, et donna des leçons aux aspirants de marine et aux capitaines de long cours. Ses relations avec les officiers de marine lui apprirent qu'on désirait beau-

(*) Professeur non officiel.

(**) Prix : 25 francs, chez Mallet-Bachelier.

coup d'avoir des Tables trigonométriques calculées de *seconde en seconde;* le 1er mai 1820 il entreprit ce travail qui fut présenté, le 24 mars 1824, à l'Académie sous le ministère de Clermont-Tonnerre. Le Rapport ne fut point très-favorable. On reproche à l'auteur de n'avoir interpolé qu'avec 7 décimales les petites Tables de Callet, ce qui occasionne des erreurs sur les 7ièmes décimales; erreurs qu'il a corrigées à la fin de son ouvrage; il en reste 74 qu'il annonce devoir publier. Les officiers de la marine royale firent des démarches auprès du gouvernement, et fin de 1825 une souscription fut accordée sous le ministère de Chabrol. Alors, en 1826, Bagay se rendit à Paris, et, porteur d'une liste de 240 officiers de marine souscripteurs, il traita avec Didot père et fils pour le stéréotypage de son ouvrage, avec la clause de ne recevoir aucune rémunération qu'après la rentrée de tous les frais, qui se montèrent à 25000 francs. En 1841, il n'y avait encore que 12000 francs de rentrés, et Bagay atteignait sa soixante-neuvième année sans avoir rien reçu. Le gouvernement anglais lui avait accordé 1000 francs pour soixante-dix-neuf erreurs qu'il avait signalées dans les Tables de Taylor. En 1826, le même gouvernement lui avait fait offrir 30000 francs pour ses Tables; offre qu'il refusa par motif patriotique (*). Ayant une nombreuse famille à faire subsister, il fut réduit à établir une espèce de cantine, où il vendait des leçons aux aspirants, et des liqueurs et comestibles aux matelots. En 1832, ayant subi un examen pour être professeur d'hydrographie, il fut refusé; ce qui n'a rien de surprenant, car il n'avait malheureusement reçu aucune instruction littéraire. Il n'a jamais voulu faire connaître les procédés qu'il employait pour faire ses

(*) A l'appui de ce généreux dévouement, Bagay cite le témoignage de son concitoyen, M. Mathieu, astronome, membre de l'Institut.

calculs, auxquels il faisait travailler toute sa famille. Accablé de fatigues, de misère et d'ingratitude, Bagay eut des hallucinations, se figurant que Dieu, pour le récompenser de ses travaux mal appréciés sur la terre, lui envoyait la nuit des visions célestes, et madame Bagay écrivait chaque matin sur une *Connaissance des Temps* les visions nocturnes de son infortuné mari, qui fut délivré de ses maux et de la vie le 15 février 1851.

Bagay, dans sa jeunesse, avait cédé à son frère aîné toute sa part d'héritage. Bagay, mieux que savant, était un homme de cœur et n'a légué à sa famille qu'un souvenir honorable et des bras pour travailler. Septuagénaire, il avait offert à la maison de Didot la cession de tous ses droits en échange d'une pension viagère de 400 francs. La proposition fut acceptée et non réalisée. Devant le tribunal de l'équité, il semble que la famille a droit à quelque indemnité.

Bagay est le premier qui ait calculé des lignes trigonométriques de *seconde en seconde,* car l'ouvrage analogue de Shortrède est de 1844. C'est encore le seul qui existe en France. Il dispense de l'emploi incommode des parties proportionnelles.

Dans un écrit daté de Lorient 1er décembre 1821, signé par neuf capitaines de vaisseau, deux capitaines de frégate, seize lieutenants de vaisseau et sept enseignes, on lit : « *Comme navigateurs, nous devons applaudir d'avance au succès que M. Bagay ne pourra manquer d'obtenir, et nous nous empressons de lui exprimer notre gratitude en héritant du fruit de ses veilles.*

En France, la gratitude publique est très-souvent un arbre qui montre de belles fleurs, mais qui ne se nouent pas en fruit.

DIE GEOMETRISCHEN KONSTRUCTIONEN AUSGEFUHRT MITTELST DER GERADEN LINIE UND EINES FESTEN KREISES, ETC. Les Constructions géométriques exécutées au moyen de la ligne droite et d'un cercle fixe, comme sujet d'étude, dans les hautes institutions et pour l'utilité pratique; par *Jacob Steiner,* docteur en philosophie, professeur royal ordinaire à l'École d'industrie à Berlin. Berlin, 1833; in-8, 110 pages; 2 planches en taille-douce (*).

Introduction (1-6). Mascheroni (N. 1750, M. 1808) a montré comment on peut construire les problèmes à l'aide du compas seul. Le but du présent ouvrage est de construire les problèmes à l'aide de la règle et d'un cercle fixe donné de *grandeur* et de *position.* Il est divisé en quatre chapitres.

CHAPITRE Ier (6-29). Faisceaux et points harmoniques, transversales. A l'aide de ces propriétés, les problèmes suivants peuvent se résoudre avec la règle *seule.*

1°. Étant donnés trois points sur une droite, trouver un quatrième point *harmonique* sur cette droite.

2°. Étant donnés les trois rayons d'un faisceau, trouver le quatrième faisceau *harmonique.*

3°. Un angle droit et un angle quelconque ayant même sommet et un côté commun, doubler ce dernier angle.

4°. Étant donnés un angle et sa bissectrice, construire la bissectrice de l'angle adjacent.

5°. Par un point donné, mener une droite vers l'intersection *inaccessible* de deux points.

6°. G, H, I sont trois points donnés sur une droite

(*) Traduit en français par Carette et en allemand par Gruson (1825).

GH = HI, mener par un point quelconque K une parallèle à la droite GHI.

7°. Les droites GF, HI sont parallèles, GF est donné de grandeur et de position; trouver le milieu de GF.

8°. Deux parallèles sont données, mener, par un point donné, une troisième parallèle.

9°. GF, HI sont deux droites parallèles, GF est donnée de grandeur et de position : *a.* prendre sur la même droite, à partir du point donné M, une longueur MN qui soit un multiple donné de GF; *b.* partager GF en un nombre donné de parties égales ou en deux parties qui soient en rapport donné; *c.* trouver sur la même droite une longueur MN qui soit dans un rapport donné avec GF.

10°. BD, DC sont deux segments adjacents d'une droite et dans un rapport rationnel donné; par un point donné mener une parallèle à la droite.

11°. Un parallélogramme étant donné et une droite: *a.* mener par un point donné une parallèle à la droite; *b.* une longueur étant donnée, la multiplier ou la diviser un nombre donné de fois.

12°. Dans un plan on donne une de ces quatre données:

α. Trois parallèles qui coupent une droite en deux segments ayant un rapport rationnel donné;

β. Deux parallèles, une longueur sur la première et une longueur sur la seconde et qui sont dans un rapport rationnel donné;

γ. Deux parallèles et une droite partagée en deux segments qui sont dans un rapport donné;

δ. Deux longueurs non parallèles; chacune est divisée en deux segments suivant des rapports rationnels donnés.

Il s'agit : *a.* de mener une parallèle suivant une direction donnée; *b.* de partager une longueur donnée selon un rapport donné.

13°. Un carré est donné ; il s'agit, dans le plan du carré : *a.* d'abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée ; *b.* de mener la bissectrice d'un angle droit donné ; *c.* de construire un multiple donné d'un angle donné.

C'est à Lambert qu'on doit toute cette géométrie de la règle.

CHAPITRE II (29-58). Propriétés harmoniques ; pôles et polaires (29-37) ; points de similitude (38-58) ; principaux théorèmes qui s'en déduisent et que l'auteur a donnés dans son *Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques* (*Gergonne*, t. XIX ; 1828) ; puissance d'un point relatif au cercle ; lieu d'égale puissance (59-67). Nous ne citons pas ces théorèmes qui sont maintenant du domaine public.

CHAPITRE III (67-89). Solution de tous les problèmes de géométrie avec la règle, lorsqu'un cercle fixe est donné. Les deux précédents chapitres donnent les moyens de solution des problèmes du chapitre III, but essentiel. Il est évident que le cercle fixe fournit : 1° un système de droites dont on connaît les milieux ; 2° un système de couple de droites parallèles ; 3° un système d'angles droits ; 4° un système d'angles égaux ; 5° un système de droites égales.

PROBLÈME I. *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.*

Lorsque la droite donnée est une corde, on construit la corde parallèle, et l'on est ramené à l'un des problèmes précédents.

Lorsque la droite ne coupe pas le cercle, par un point quelconque *a* de la droite on mène un diamètre, par un autre point quelconque du cercle on mène une corde parallèle à ce diamètre, on construit une seconde corde égale et parallèle à la première ; les deux cordes prolongées coupent la droite donnée en deux points b et c; on a $ab = ac$, et l'on est encore ramené à l'un des problèmes précédents.

PROBLÈME II. *Sur une droite une longueur est donnée, trouver: 1° une autre longueur multiple donnée de la première; 2° partager la longueur en un nombre donné de parties égales; 3° une longueur qui ait un rapport rationnel donné avec la longueur donnée.*

On mène une parallèle à la droite donnée, et l'on revient à un problème déjà résolu.

PROBLÈME III. *Par un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite.*

Solution. Par le centre on mène une parallèle à une droite et deux cordes cd, $c'\,d'$ égales et parallèles à ce diamètre; la corde cd' est perpendiculaire au diamètre. Il suffit de mener par le point donné une parallèle à cette dernière perpendiculaire.

L'auteur donne encore cinq autres problèmes qui peuvent toujours se ramener à la géométrie de la règle. Le dernier problème est celui-ci : Connaissant les centres et les rayons de deux cercles, construire les points d'intersection, bien entendu sans décrire les cercles. En disant que toutes les constructions portent l'empreinte d'une grande élégance, nous n'apprenons rien de nouveau à nos lecteurs, qui connaissent depuis longtemps le célèbre géomètre de Berlin.

L'ouvrage est terminé par un appendice qui contient vingt problèmes divers sur les coniques.

En voici quelques énoncés :

Une conique est donnée par cinq points ou cinq tangentes : 1° trouver l'intersection de cette conique par une droite donnée; 2° par un point donné, mener les tangentes à la conique.— Une conique est donnée par quatre points et une tangente, trouver le point de contact. —

Une conique est donnée par quatre tangentes et un point, mener la tangente en ce point. — Une conique est donnée par trois points et deux tangentes, trouver les deux points de contact et les tangentes passant par les trois points ; et autres problèmes du même genre dont beaucoup ne sont qu'énoncés.

Deux coniques sont données par deux points en commun et chacune encore par trois points, trouver les deux autres points communs. — Deux coniques sont données par deux tangentes communes et chacune par trois autres tangentes, trouver les deux autres tangentes communes. Ces problèmes sont résolus. Le problème final est d'une utilité pratique : on donne un point d'un cercle dont le centre est visible, mais non accessible ; il s'agit de décrire le cercle par points.

Zusatze zu den logaritmischen und trigonometrischen Tabellen zur Erleichtrung und Abkurzung der bey anwendung der Mathematik vorfallenden Berechnungen ausgefertigt ; von *J.-H. Lambert*. Berlin, bey Haude und Spener Konigl. und der Acad. der Wissench. Buchhandler, 1770 ; in-8. Titre et préface, 2 p. ; introduction, 98 pages ; Tables, 210 pages.

Ces Tables, à joindre à celles des logarithmes, sont au nombre de quarante-quatre ; plusieurs ont été adoptées et étendues. Un semblable recueil serait d'une immense utilité.

1°. Les plus petits diviseurs des nombres de 1 à 102000, d'après Pell, excepté les diviseurs 2, 3, 5.

2°. Produits de chacun des nombres de la Table précédente par les nombres 1, 2,.... 9, aussi d'après Pell.

3°. Produits des nombres premiers de 7 à 173 de 5 en 5.

4°. Liste des trois derniers chiffres (à droite) des carrés des nombres impairs.

5°. Formules pour les quatre cas où un nombre non divisible ni par 2 ni par 3 est la différence de deux carrés.

6°. Table des nombres premiers de 1 à 102000.

7°. Les soixante-dix premières puissances de 2.

8°. Les cinquante premières puissances de 3.

9°. Les cinquante premières puissances de 5.

10°. Formules pour e^x.

11°. Table pour e^{-x}.

12°. Formules pour les logarithmes hyperboliques.

13°. Logarithmes hyperboliques de 1 à 100, avec 7 décimales calculées par Lambert.

14°. Logarithmes hyperboliques des dix premières puissances de 10.

15°. Logarithmes hyperboliques d'après Simpson, de 1,01 à 10,00.

16°. Les dix premiers logarithmes hyperboliques avec 25 décimales d'après Euler.

17°. Tables des nombres compris dans la formule $2^m.3^n.5^p.7^q$ de 1 à 10^4.

18°. Formules pour les sinus, cosinus, tangentes hyperboliques.

19°. Expressions algébriques des sinus de 3 degrés en 3 degrés.

20°. Formules trigonométriques.

21°. Formules pour la résolution des triangles rectangles et obliquangles sphériques.

22°. π en fractions rationnelles.

23°. Longueurs des arcs de cercle de degré en degré.

24°. Formules cyclométriques.

25°. Table de Pythagore pour les sinus de chaque degré.

26°. Sinus, tangentes, sécantes et logarithmes des sinus et tangentes pour tous les 90 degrés.

27°. Formules pour la résolution des équations et principalement les équations de 2^e et 5^e degré.

28°. Formules pour les équations cubiques dont toutes les racines sont réelles; exemples.

29°. Ces racines depuis 0,001 jusqu'à 1,155.

30°. Formules pour toutes sortes d'équations cubiques.

31°. Divers cas d'équations bi-quadratiques.

32°. Fonctions hyperboliques semblables aux fonctions circulaires.

33°. Comparaison de l'hyperbole équilatère avec le cercle.

34°. Quelques expressions relatives aux racines carrées et cubiques.

35°. Les 1000 premiers carrés.

36°. Les 1000 premiers cubes.

37°. Nombres figurés.

38°. Formules d'interpolation.

39°. Puissances de séries infinies.

40°. Puissance des centièmes d'unité.

41°. Racines carrées des 100 premiers nombres avec 7 décimales.

42°. Racines carrées approchées en fractions.

43°. Racines carrées de $a \pm \sqrt{b}$, etc.

44°. Les coefficients de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ et $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

SUR LA DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DE DIEU

(voir NOUVELLES ANNALES, t. XIII, p. 366).

On lit un historique instructif sur cette célèbre définition dans l'ouvrage suivant, à la page 3 :

Pensées de Pascal, publiées dans leur texte authentique, précédées de la Vie de Pascal, par M^me Perrier, *avec un Supplément, et d'une Étude littéraire, et accompagnées d'un Commentaire suivi* (sic); par *Ernest Havet,* agrégé près la Faculté des Lettres de Paris. In-8, LVIII-548 pages; 1852 (*).

Vincent de Beauvais, précepteur des enfants de saint Louis, mort vers 1260, dans son *Speculum majus*, espèce d'encyclopédie, imprimée en 10 volumes in-folio, à Strasbourg, en 1573, dit au premier chapitre du *Miroir historique : Empedocles quoque sic Deum diffinire fertur: Deus est sphæra, cujus centrum ubique, circumferentia nusquam.* Et il dit (*Miroir de la Nature,* I, 4) qu'il a emprunté cette assertion à Hélinand, poëte du XII^e siècle, devenu moine et chroniqueur, et dont les écrits sont perdus.

On trouve la même pensée chez saint Bonaventure (1121-1174), contemporain de Vincent de Beauvais, dans son *Itinerarium mentis in Deum* (*Œuvres*, t. VII, p. 325; Mayence, 1609). C'est de là que le célèbre Gerson (Jean Charlier de) (1363-1429) a tiré cette même définition. Dans un ouvrage grec, intitulé Ποίμανδρης, *le Pasteur,* et attribué à Mercure Trismégiste, personnage fabuleux, on lit à la fin du XIII^e dialogue :

Ὁ κύκλος ὁ ἀθάνατος του Θεοῦ προσδεξάσθω μου τὸν λόγον.

« Le cercle immortel de Dieu accueille mon discours. » (Édition de Berlin, 1852.)

C'est par réminiscence que Rabelais dit (livre III, chapitre XIII) :

« *Nostre asme, lorsque le corps dort..., s'esbat et re-*

(*) C'est la seule édition qu'on devra désormais consulter. On y fait une parfaite dichotomie de Pascal, genie profond et toutefois janséniste timoré. Cette œuvre ne laisse rien à désirer sous le rapport de la philosophie, théologie, histoire et bibliographie. Quand nous donnera-t-on un semblable travail sur les *Provinciales ?*

veoit sa patrie, qui est le ciel. Dè là receoit participation insigne de sa prime et divine origine, et en contemplation de ceste infinie et intellectuale sphère, le centre de laquelle est en chascun lieu de l'univers, la circonférence point (c'est Dieu selon la doctrine de Hermes Trismégiste) *à laquelle rien n'advient, rien ne passe, rien ne dechet, tous temps sont présents, note non-seulement les choses passées... mais aussi les futures.* »

Pascal, qui, ainsi que Mallebranche et Descartes, faisait peu de cas de l'érudition historique, puisait la sienne dans les *Essais* de Montaigne; et on lit dans l'édition publiée par mademoiselle de Gournay, en 1635 :

« *Trismégiste appelle la Déité cercle dont le centre est partout, la circonférence nulle part.* »

Il résulte de tout ceci que l'idée est d'origine grecque. Voltaire l'attribue à Timée de Locres. En effet, il y a des idées analogues dans le *Timée* de Platon; c'est ce qui a induit en erreur la mémoire de l'illustre philosophe. A cette occasion, M. Havet se permet de dire : « *C'est une de ses légèretés, pour ne pas dire plus.* »

C'est parler avec beaucoup de légèreté d'une des plus vastes, des plus belles intelligences qui aient paru sur le sol de la France. Nous ne saurions parler avec trop de modestie respectueuse de ces génies créateurs, lors même qu'ils s'égarent; car notre littérature, notre philosophie actuelles, comme ces goules qu'on rencontre dans les *Mille et une Nuits*, ne se repaissent que de cadavres, ne vivent plus que des morts.

GAUSS.

Euler et Gauss, deux génies identiques, ont tous deux profondément labouré, richement fécondé toutes les plages du vaste sol mathématique. Euler répandait sur ses découvertes un océan de lumière, dont les rayons pénètrent dans les recoins les plus obscurs; variant les expositions, ramifiant les applications, il sait assouplir ses méditations et les adapter aux intelligences de toute dimension.

Gauss ne vise qu'à la perfection logique et littéraire, ne veut produire que des œuvres accomplies, d'une rigueur inexorable; accumulant les preuves, ne les affaiblissant jamais par condescendance; présentant la théorie sous diverses faces, mais conservant toujours la dignité de la sévère abstraction. Il a peu écrit; mais chaque écrit est un modèle de style, un chef-d'œuvre de raisonnement. Dans la géométrie vulgaire et supérieure, dans l'algèbre des quantités finies et infinitésimales, dans la mécanique rationnelle, en dynamique céleste, partout on rencontre l'empreinte de ses pas : des pas de géant. Quels magnifiques théorèmes sur l'élément superficiel, sur l'élément attractif potentiel, sur l'élément magnétique! Quel admirable remaniement des méthodes géodésiques, des orbites planétaires et cométaires! Et toutefois ce ne sont pas là les plus brillants joyaux de sa couronne d'immortalité.

La science de la quantité se divise en deux parties bien distinctes : l'une renferme pour ainsi dire quelque chose de terrestre, de matériel; l'idée du nombre est attachée à deux formes : *espace* et *temps;* formes inhérentes à une intelligence humaine, à un esprit asservi à des organes. Dans l'autre partie, qu'avec Ampère nous nommons *arithmologie*, règne l'idée *pure*, le nombre est débarrassé de ses deux entraves anthropologiques; idée *pure*, qui est pour ainsi dire un reflet, l'ombre du paradigme divin, comme s'expriment les écoles de Pythagore et de Platon. Il y a encore une autre différence moins essentielle et très-importante. Dans les questions qui s'agitent dans la première partie, l'esprit découvre presque toujours à première vue des points d'appui d'où il peut prendre son essor, des guides pour diriger cet essor, des instruments très-commodes, aisément maniables, pour opérer avec promptitude et facilité; tandis que, dans la seconde partie, la science du nombre pur, tous ces moyens font défaut. Dépourvu d'auxiliaires, livré à lui-même, l'esprit est obligé de tout créer, d'inventer de toute pièce la solution de chaque question. Aussi l'arithmologie semble être, en mathématique, le vrai critérium de l'intensité intellectuelle. Où cette intensité se manifeste-t-elle avec plus de vigueur, sujet incessant de surprise et d'admiration, que dans les *Disquisitiones*? Chaque chapitre développe une idée nouvelle; chaque idée nouvelle est une création. Les congruences, les résidus potentiels, les nombres complexes, les formes similaires rattachées aux déterminants ont fondé un monde, inauguré une ère, l'ère de Gauss. La statue qui transmettra ses traits à la postérité, pour représenter fidèlement la physionomie intérieure, devrait dépasser nature; et que de richesses, hélas! Gauss emporte au tombeau. Sa mission est terminée; remercions la Providence d'avoir accordé au genre humain un tel missionnaire pendant une longue carrière. On peut dire de lui ce que Cicéron dit de l'orateur Calidius (*de Clar. Orat.*, LXXIX) : NON FUIT *geometra* UNUS E MULTIS, POTIUS INTER MULTOS PROPE SINGULARIS FUIT.

Gauss a vu le jour, le 23 avril 1777, dans le duché de Brunswick. Ayant donné des indices très-précoces d'heureuses dispositions, il attira l'attention du duc régnant, Charles-Guillaume-Ferdinand, qui ne cessa de protéger toute la carrière scientifique de son illustre sujet. Honneur à l'illustre mécène!

Gauss fut nommé professeur à l'université de Gottingue en 1807; conseiller de cour (*hofrath*) en 1816, et ensuite directeur de l'observatoire astronomique et de l'observatoire magnétique; il est mort à Gottingue le 23 février 1855, âgé de soixante-dix-huit ans.

Ses principaux ouvrages sont :

1°. *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* In-4; Helmstadt, 1799. (*Voir* Prouhet, *Nouvelles Annales*, tome IV, page 441.)

2°. *Disquisitiones arithmeticæ.* In-8, 1801.

3°. *Theoria motus corporum cœlestium.* In-4, 1809. A contribué puissamment à faire entrer l'esprit d'exactitude dans les calculs astronomiques.

4°. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ.* Premier emploi de la méthode des moindres carrés en Allemagne.

5°. *Dissertations sur la haute géodésie.* Par ordre du gouvernement il continua, à travers le royaume de Hanovre, l'arc du méridien mesuré en Danemark. A cette occasion il inventa un *héliostat*, instrument qui rend visibles, par la réflexion des rayons solaires, les stations les plus éloignées.

6°. *Observations magnétiques*, publiées annuellement depuis 1837, avec la collaboration de Weber (Willhelm). Le gouvernement fit élever, à côté de l'observatoire, un édifice destiné aux observations magnétiques. Gauss, par ses travaux sur le magnétisme terrestre, donnant à cette théorie difficile une nouvelle face, se livra à de nombreuses observations, consignées aussi dans l'*Atlas du magnétisme terrestre*. Leipzig, 1840

7°. Les *Commentaires de la Société royale de Gottingue* contiennent un grand nombre de Mémoires de Gauss, remarquables par la profondeur des recherches et aussi par l'élégance du style. Nous en donnerons la liste; espérons qu'on en publiera la collection.

BIBLIOGRAPHIE.

Algèbre élémentaire, à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles du Gouvernement; par M. *E. Lionnet*, agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques pures et appliquées au Lycée impérial Louis-le-Grand, examinateur suppléant d'admission à l'École Navale. Rédigée conformément aux *Programmes officiels* des Lycées. Paris, 1855; in-8 de 245 pages (*).

Ouvrage classique, bien soigné, entièrement conforme au règlement d'exercices qui régit maintenant l'enseignement universitaire. La réputation de l'auteur est si bien établie, qu'il est presque superflu de dire que sa tâche est remplie et son but atteint. L'auteur établit très-clairement la division sur le principe de l'homogénéité algébrique; la multiplication repose sur la définition d'Euclide : c'est la bonne manière et qui donne sans embarras la règle des signes. Il y a quelques énoncés qu'on pouvait omettre; par exemple celui-ci: *Lorsque plusieurs fractions sont égales entre elles, la somme des numérateurs divisée par celle des dénominateurs forme une fraction égale à l'une quelconque des fractions proposées* (p. 41). Il ne faut pas trop se défier de la spontanéité du lecteur.

Le livre II (p. 45) traite des équations du premier

(*) Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : $3^{fr},50$.

degré. Avant de résoudre une équation, on enseigne, comme principe, la manière d'*altérer* une équation (p. 47). Cette disposition ne me semble pas naturelle. Ainsi, on dit qu'on altère l'équation $x - 3 = 0$ en l'élevant au carré $(x - 3)(x - 3) = 0$, parce que celle-ci admet *deux fois* la solution $x = 3$, tandis que la première équation ne l'admet qu'*une fois*. Cela suppose des idées que l'élève ne peut avoir en ce moment-ci.

L'auteur établit la notion des quantités négatives sur des considérations cinématiques et aboutit à des *conventions : il suffira de convenir* (p. 70). Avec d'autres conventions on obtiendrait donc d'autres solutions ; assertion singulière. Il me semble que tout se ramène à ces deux questions : Dans l'équation $x + 1 = 0$, que doit-on écrire au lieu de x? *Réponse :* — 1. Un homme a 1 franc d'actif, que doit-on lui donner pour qu'il n'ait rien? *Réponse :* 1 franc de passif. César est le premier qui ait eu une idée nette des quantités négatives. Il disait : « Si quelqu'un me donnait quinze millions de sesterces, je serais au niveau d'un homme qui n'a rien. » Il avait autant de dettes. Il en est de même des quantités imaginaires. Dans l'équation $x^2 - 4 = 0$, que doit-on écrire pour x? *Réponse :* $+\sqrt{4}$ ou $-\sqrt{4}$ *ad libitum*. Que doit-on écrire pour x dans l'équation $x^2 + 4 = 0$? *Réponse :* écrivez -4 au lieu de x^2, ou, *mnémoniquement*, écrivez au lieu de x, $+\sqrt{-4}$ ou $-\sqrt{-4}$, signe qui rappelle qu'il faut remplacer x^2 par -4.

Il est utile pour les commençants d'employer un signe particulier, par exemple ↣ pour désigner les quantités positives et le signe ↢ pour les quantités négatives, et de montrer ensuite qu'on peut se dispenser d'écrire ces signes.

L'affirmation étant l'opposé de la négation, les quantités positives devraient s'appeler quantités *affirmatives*.

Ces dénominations erronées proviennent du *jeu* qui a donné naissance à l'Algèbre. Quand on était amené à retrancher un nombre d'un autre plus petit, on *niait* l'exactitude des *données* ou bien on déclarait le problème impossible; de là le nom de *fausses* donné aux quantités négatives. Les dénominations *progressives* et *regressives* me semblent plus convenables.

L'auteur passe en revue les cas *d'impossibilité, d'indétermination*, avant d'aborder la discussion des équations du premier degré à une et à deux inconnues.

Le livre III est consacré à l'équation du deuxième degré. A la page 163, on lit: *Les racines imaginaires d'une équation n'indiquent pas toujours l'impossibilité du problème;* proposition chanceuse. Il s'agit de diviser la droite AB en deux segments tels, que la longueur $AB = a$ soit moyenne proportionnelle entre les deux segments. Soit C le point de division; en prenant ce point C entre A et B, les deux segments CA, CB, de directions opposées, doivent, suivant le principe de M. Chasles, être de signes opposés : l'un étant désigné par $+x$, l'autre doit être désigné, non par $a - x$, mais par $x - a$, et l'on a

$$x(x - a) = a^2;$$

les deux racines sont réelles et indiquent deux points, l'un situé à la droite de B et l'autre à la gauche de A.

En général, pour toute question, quelle qu'elle soit, l'Algèbre ne donne que des solutions numériques, mais elle ne prétend pas donner des règles pour l'interprétation de ces solutions. Elle s'en rapporte au bon sens, dont rien ne dispense.

La théorie élémentaire des maxima et minima est donnée d'une manière complète et rigoureuse.

Le livre IV et dernier contient les deux progressions, les logarithmes, les intérêts composés et les annuités.

Chaque livre est terminé par un bon nombre de questions intéressantes auxquelles s'exerceront utilement les candidats aux Écoles du Gouvernement.

On ne trouve dans cet ouvrage aucun nom propre, aucun renseignement historique; suppléons-y.

Les signes $+$, $-$ se trouvent pour la première fois dans la *Coss* de Christophe Rudolf (1524). Le signe $=$ est de Robert Record (*The whetstone of wit, etc*; 1557). Descartes se sert encore de la lettre *a* retournée ($\propto$). Viète (1540-1603) est le premier qui ait représenté des nombres par des lettres, mais par des lettres capitales; les petites lettres sont de Thomas Harriot (*Artis analyticæ praxis, etc*; 1623). Les signes $>$, $<$ sont aussi de Harriot. Les *parenthèses* entre crochets sont d'Albert Girard (*Invention nouvelle, etc.*; 1629).

Cet ouvrage, dont nous avons cru devoir critiquer quelques parties, se distingue par un esprit de rigueur bien rare aujourd'hui. La médiocrité seule est à l'abri de toute critique.

L'*Algèbre élémentaire* de M. Lionnet sera prochainement suivie d'un autre ouvrage, qui complétera la première année d'algèbre pour les candidats à l'École Polytechnique, et ce qui est exigé pour l'admission à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures (*).

(*) *Complément d'Algèbre élémentaire.* (Sous presse.) In-8. — Prix : 1 fr

NOTICE SUR LA DÉCOUVERTE DES LOGARITHMES

(voir page 1).

Neper étant mort en 1617, son fils Robert publia en 1619 cette seconde édition de l'œuvre de son père, où le procédé des logarithmes est expliqué (*).

Mirifici logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus in utraque Trigonometria, ut etiam in omni logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio. Accesserunt opera posthuma: Primo, Mirifici ipsius Canonis constructio et logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines. Secundo, Appendix de alia, eaque præstantiora logarithmorum specie construendis. Tertio, Propositiones quædam eminentissimæ, ad triangula sphærica mira facilitate resolvenda; authore ac inventore JOANNE NEPERO, barone MERCHISTONII, etc., Scoto. Edinburgi, excudebat Andreas Hart, anno 1619; in-4; 18 feuilles trois quarts.

Les *Opera posthuma* ont ce titre particulier :

Mirifici logarithmorum Canonis constructio una cum appendice de alia atque præstantiore logarithmorum specie condenda, quibus accessere propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resolvenda: Una cum annotationibus aliquot doctissimi D. Henrici Briggii, in eas et memoratam appendicem; authore et inventore

(*) Un exemplaire de la première édition (1614) est à la bibliothèque de l'Institut. Il a été acquis en 1834 à la vente des livres de J.-F. Français, professeur d'art militaire à l'École d'Application de Metz. Ces livres ont appartenu à Arbogast, qui les a légués à son disciple et neveu F. Français, mort en 1810, professeur à l'École d'Artillerie de Mayence; c'est le frère du professeur sus-nommé.

Joanne Nepero, barone Merchistonii, etc., Scoto. Edinburgi, excudebat Andreas Hart, anno Domini 1619.

En tête des *Opera posthuma* est une préface de Robert Neper où il donne en deux pages le contenu de ces œuvres posthumes.

Dans la *Canonis constructio*, J. Neper dévoile le secret du calcul des logarithmes. Il fonde ce calcul sur cette considération cinématique. Soient deux points fixes A et B pris sur une droite indéfinie; deux points L et N partent simultanément de A et se dirigent vers B, avec la même vitesse *initiale*, représentée par $\frac{AB}{n}$, où n est un nombre donné; le point L conserve toujours la même vitesse $\frac{AB}{n}$; de sorte qu'il décrit d'un mouvement uniforme la droite AB, indéfiniment prolongée. Il n'en est point ainsi du point N, dont la vitesse va sans cesse en diminuant, car elle est toujours présentée par la distance de ce point au point fixe B, distance divisée par n; ainsi P étant le point d'arrivée de N au bout du temps t, la vitesse sera représentée par $\frac{PB}{n}$; l'espace segmentaire que décrit le point N va donc toujours en diminuant, et il mettra un temps infini à parvenir en B où sa vitesse sera éteinte, pour devenir négative au delà de B. Voici comment Neper définit ces deux mouvements :

Arithmetice crescere est æqualibus temporibus æquali semper quantitate augeri (page 5);

C'est le mouvement du point L.

Geometrice decrescere est æqualibus temporibus quantitatem primo totam inde aliam ejus partem superstitem simili semper proportionali parte decrescere (page 14);

C'est le mouvement du point N.

Neper ajoute :

Numerus artificialis (*) *sinus dati est qui arithmetice crevit tanta semper velocitate quanta sinus totus incipit geometrice decrescere;*

C'est-à-dire le nombre artificiel d'un sinus donné est celui qui s'est accru arithmétiquement, avec la même vitesse constante qu'avait le sinus total lorsqu'il a commencé à décroître géométriquement; accroissement qui a eu lieu dans le même temps que le sinus total a mis pour devenir égal, en décroissant, au sinus donné. AB est le sinus total; le but essentiel de Neper étant de faciliter les calculs trigonométriques, il s'attache principalement aux logarithmes des lignes trigonométriques.

Traduisons ces considérations en caractères algébriques.

Soient :

d = AB = sinus total;

x = chemin décrit arithmétiquement par le point L, dans le temps T;

y = chemin décrit géométriquement par le point N, dans le même temps T;

md = vitesse initiale commune aux points L et N;

$d - y$ = distance du point N au point B, au bout du temps T.

Soit T partagé en un nombre n infiniment grand de temps égaux t infiniment petits, de sorte que $T = nt$; prenons t pour unité de temps; alors, à la fin des temps, $0, t, 2t, 3t, \ldots, nt$ les valeurs correspondantes de x seront $0, md, 2md, 3md, \ldots, nmd$ et les valeurs correspondantes de $d - y$ seront

$$d,\ d(1-m),\ d(1-m)^2,\ d(1-m)^3, \ldots, d(1-m)^n:$$

(*) On lit en marge le mot *Logarith.* *Numerus artificialis* est le premier nom qu'avait adopté Neper; il n'a trouvé le mot *logarithme* que longtemps après la composition de cet écrit.

donc au bout du temps T on aura

$$x = nmd, \quad y = d - d(1 - m)^n = d - d\left(1 - \frac{x}{nd}\right)^n,$$

$$y = d\left[\frac{x}{d} - \frac{n.n-1}{1.2}\frac{x^2}{n^2 d^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{x^3}{n^3 d^3} - \ldots\right];$$

or n étant infiniment grand, on a

$$y = d\left[\frac{x}{d} - \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{d^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{x^3}{d^3} - \frac{1}{1.2.3.4}\frac{x^4}{d^4} + \ldots\right],$$

$$= d - de^{-\frac{x}{d}},$$

où e est la base des logarithmes hyperboliques

$$\frac{d-y}{d} = e^{-\frac{x}{d}}, \quad -\frac{x}{d} = \log \text{hyp.} \frac{d-y}{y};$$

$$x = -d \log \text{hyp.} \frac{d-y}{d}.$$

Mais x est le logarithme népérien de $d-y$; donc

$$\log \text{nép. de } d - y = -d \log \text{hyp. de } \frac{d-y}{d}.$$

Ainsi les logarithmes de Neper ne sont pas identiques aux logarithmes hyperboliques. Lacroix a donné pourtant le nom de *népériens* aux logarithmes hyperboliques, et avec justice, afin d'attacher à l'invention le nom de l'inventeur.

Neper prend

$$d = 10^7 = \sin 90^\circ,$$

$$\frac{d}{2} = 5.10^6 = \sin 30^\circ.$$

Dans la Table de Neper on trouve

$$\log \sin 30 = 6931471,808942;$$

or

$$\frac{d-y}{d} = \frac{1}{2}, \quad \log \text{hyp.} \frac{1}{2} = -0,693147180599. \quad \text{(Callet.)}$$

Pour avoir le logarithme népérien, il faut multiplier ce nombre par -10^7 (*voir* ci-dessus), et l'on trouve

$$69314771,805599;$$

l'erreur de Neper n'est donc que de 3 unités par excès sur la dixième décimale.

Pour calculer les logarithmes, Neper n'emploie pas les séries; il calcule directement les termes successifs de la progression d, $d(1-m)$, $d(1-m)^2, \ldots, d(1-m)^{100}$, et prend $d = 10^7$, $m = 10^{-7}$. Le calcul devient extrêmement facile : il suffit de retrancher de chaque terme ce même terme divisé par 10^7, et l'on obtient le terme suivant. Ainsi il fait emploi des décimales et les écrit comme nous faisons aujourd'hui, à l'exception que, pour séparer les entiers, il prend un point au lieu de la virgule. (*Nouvelles Annales*, tome XII, page 204.)

Voici un spécimen de son calcul :

$$\begin{array}{lr}
d\ldots\ldots\ldots & 10000000.0000000 \\
 & 1.0000000 \\ \hline
d(1-m)\ldots & 9999999.0000000 \\
 & 0.9999999 \\ \hline
d(1-m)^2\ldots & 9999998.0000001 \\
 & .9999998 \\ \hline
d(1-m)^3\ldots & 9999997.0000003
\end{array}$$

et continuant ainsi, il trouve

$$d(1-m)^{100} = 9999900.0004960;$$

or

$$d(1-m)^{100} = 10^7(1-10^{-7})^{100};$$

si l'on développe le binôme et qu'on pousse jusqu'à 10^{-21}, on trouve

$$d(1-m)^{100} = 9999900.000499838300392122,$$

ce qui diffère très-peu du nombre de Neper.

Pour apprécier le degré d'exactitude de ses calculs, Neper démontre, par des considérations géométriques, que $\log(d-y)$ est compris entre y et $\frac{dy}{d-y}$; chaque fois qu'il a besoin d'un logarithme exact, il calcule ces deux limites, et lorsqu'elles diffèrent moins que l'ordre de la décimale qu'il veut conserver, il prend la moyenne arithmétique entre ces limites pour logarithme exact. Ceci peut s'établir analytiquement; en effet,

$$\log \text{nép.}\, d-y = -d \log \text{hyp.} \left(1-\frac{y}{d}\right)$$

$$= y + \frac{1}{2d}y^2 + \frac{1}{3d^2}y^3 + \frac{1}{4d}y^4 + \ldots$$

$$\frac{dy}{d-y} = \frac{y}{1-\frac{y}{d}} = y + \frac{y^2}{d} + \frac{y^3}{d^2} + \frac{y^4}{d^3} + \ldots;$$

prenant la moyenne arithmétique entre y et $\frac{dy}{1-y}$, on obtient

$$y + \frac{y^2}{2d} + \frac{y^3}{2d^2} + \frac{y^4}{2d^3} + \ldots.$$

La différence entre cette moyenne et le logarithme népérien de $d-y$ ne commence qu'au terme du troisième ordre; cette différence est

$$\frac{1}{2}\frac{y^3}{d^2} - \frac{1}{3}\frac{y^3}{d^2} = \frac{1}{6}\frac{y^3}{d^2}.$$

Pour que cette différence s'élève à une unité de l'ordre 10^{-14}, il faut que y soit égal à $\sqrt[3]{6}$, que y soit compris entre 1 et 2. Posons pour exemple

$$y = 1,$$

alors

$$d - y = 9999999,$$

$$\frac{dy}{d-y} = \frac{10^7}{10^7-1} = 1,00000\,01000\,00001:$$

la moyenne entre y et $\frac{dy}{d-y}$ est

$$1\,0000\,05.$$

Tel est donc, à très-peu près, le logarithme népérien de

$$9999999 = 10^7 - 1.$$

En effet, on a

$$\log \text{nép.}\ 10^7 - 1 = -10^7 . \log \text{hyp.}\ 1 - 10^{-7}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\,10^{-7} + \frac{1}{3}\cdot 10^{-14} + \frac{1}{4}\cdot 10^{-21} + \ldots$$
$$= 1{,}00000\,005\,0000\,3333.$$

Le résultat de Neper n'est donc en erreur que d'un tiers d'unité sur la quatorzième décimale.

Ainsi le logarithme népérien de $10^7(1-10^{-7}) = 9.999999$ est $1{,}0000000 5$, moyenne arithmétique entre

$$1 \text{ et } \frac{10^7}{10^7-1} \text{ et } \log 10^7(1-10^{-7})^{100} = \log 9999900 = 100{,}00050.$$

Ce nombre 9999900 sert à Neper pour une seconde Table de progression géométrique dont la raison est

$$\frac{9999900}{10^7} = \frac{99999}{10^5} = \frac{10^5-1}{10^5} = 1 - \frac{1}{100000}:$$

le cinquantième et dernier terme de cette Table est $9995001{,}222927$; Table qui se calcule aussi par soustraction en partant de $d = 10^7$, comme précédemment; ayant le logarithme de 9995000, il construit une troisième Table de progression géométrique ayant pour raison

$$\frac{9995000}{10^7} = \frac{9995}{10^4} = 1 - \frac{1}{2000}.$$

Cette Table n'a que vingt termes et sert à calculer les logarithmes de 9990000 et 9900000.

A l'aide de ces trois Tables, il construit une quatrième Table qu'il nomme *Table radicale*, parce qu'en effet elle est fondamentale. Cette Table consiste en soixante-neuf colonnes verticales chacune de vingt et un termes écrits à côté les uns des autres. Le premier terme de la première colonne est 10^7; ensuite les soixante-neuf premiers termes, formant la première ligne horizontale, suivent une progression géométrique dont la raison est

$$\frac{99}{100} = 1 - \frac{1}{100};$$

ensuite les nombres de chaque colonne suivent aussi une progression géométrique dont la raison est

$$\frac{10^7}{10^7 - 500} = 1 - \frac{1}{2000}.$$

Chaque colonne est divisée en deux parties par une ligne verticale; la première partie contient les nombres naturels, termes des progressions géométriques dont on vient de parler, et la seconde partie contient les logarithmes correspondants faciles à calculer : car, pour la première ligne horizontale, les logarithmes forment une progression arithmétique dont la raison est 100503,3585228, logarithme de 9900000; de même, dans chaque colonne verticale, les logarithmes forment une progression arithmétique dont la raisen est 5001,25041645, logarithme de 9995000, et ces deux derniers logarithmes ont été calculés ci-dessus. Le dernier des nombres naturels de la Table radicale est 4998609,4034 qui est à peu près la moitié de 10^7, par conséquent à peu près égal au sinus de 30 degrés; son logarithme est 6934253,4. Pour trouver les logarithmes des sinus des arcs moindres que 30 degrés, Neper fait usage de ce théorème :

$$\log(d - y_1) - \log(d - y_2)$$

est compris entre $\dfrac{y_2 - y_1}{d - y_1}\, d$ et $\dfrac{y_2 - y_1}{d - y_1}\, d.$

Ceux qui désirent plus de détails peuvent consulter l'analyse étendue du *Mirifici logarithmorum, etc.*, qu'a donnée M. Biot dans le *Journal des Savants* (1835, p. 354), et dont nous avons tiré en partie ce qui précède.

Remarquons que l'on a

$$\text{log nép. } a + \text{log nép. } b = \text{log nép. } \frac{ab}{d},$$

$$\text{log nép. } a - \text{log nép. } b = \text{log nép. } \frac{ad}{b},$$

formules incommodes. Aussi dans l'appendice *De alia atque præstantiore, etc.*, Neper propose de prendre $d = 1$ au lieu de $d = 10^7$; alors

$$\log 1 = 0 \quad \text{et} \quad \text{log nép. } a = -\text{log hyp. } a,$$

les logarithmes de Neper sont positifs ou négatifs selon que a est moins grand ou plus grand que l'unité.

John Speidel a remédié à cet inconvénient dans l'ouvrage suivant dont la 1re édition est de 1619, la 3e de 1621 et la 6e de 1624 :

New logarithmes the first invention whereof was by the lord Nepair, baron of Merchiston, and printed at Edinburg in Scotland, anno 1614. *In whose use was and is required the knowledge of algebrical addition and soubstraction according to + and —. These being extracted from and out of them (they being first oversee corrected and amended) require not all any skill in algebra or cossike numbers, but may be used by every one that can onely adde and substract in whole numbers according to the common or vulgar arithmeticke; without any consideration or respect of + and —*; by JOHN SPEIDEL, professor of the Mathematiks, and are to be sold at his dwelling house in the fields, on the back side of Drury Lane, between Princes street and the Playhouse. The 3 impression, in-4, 1621.

« Nouveaux logarithmes, dont la première invention est de lord Jean Nepair, baron de Merchiston, est imprimée à Édimbourg en 1614, mais dont l'usage exige la connaissance des additions et soustractions algébriques fondées sur les signes + et —; ici on a laissé ces signes de côté et l'on n'a plus besoin d'aucune notion algébrique ni de nombres cossiques: il suffit de connaître seulement l'addition et la soustraction selon l'arithmétique vulgaire, sans égard aux signes + ou —. Se vend chez l'auteur à sa maison dans les champs, près de Drury Lane, etc. »

Cette annonce explique le rapide débit de l'ouvrage. Les nouveaux logarithmes de Speidel sont les compléments arithmétiques des logarithmes de Neper rapportés à $d = 1$; de sorte que

$$\log \text{Speidel}\ a = \log \text{nép.}\ \frac{1}{a},$$

et au lieu de faire décroître les nombres de 1 vers zéro, Speidel les fait croître de zéro à 1 et trouve ainsi

$$\log 10 = 2302584;$$

ce sont les premiers logarithmes hyperboliques que l'on ait calculés, il vont de 1 à 1 000.

John Speidel est le père d'Euclid Speidel qui a publié à Londres, en 1688, une *Logarithmotechnie*, où il montre qu'on peut calculer géométriquement les logarithmes avec 25 décimales en carrant des hyperboles.

BIOGRAPHIE.

VEGA ET LALANDE.

Ce qui suit est extrait d'une Lettre de M. Fournerat, juge honoraire au tribunal civil de la Seine, retiré à Ancy-le-Franc. Parvenu à son quinzième lustre, il charme sa vieillesse, par la lecture des ouvrages des géomètres dont il possède une belle collection. C'est bien là *Otium cum dignitate*.

« Il y a environ vingt ans (en 1834), j'ai eu l'occasion de faire l'acquisition d'un fort bel exemplaire du *Thesaurus logarithmorum* de Vega, in-folio; 1794. Ce volume provenait de M. de la Grave, ancien proviseur du lycée de Pau, auteur de l'article *Sinus* du *Dictionnaire de l'encyclopédie méthodique*. Le même exmplaire avait appartenu à Lalande, qui en a fait corriger toutes les fautes, et lui avait été adressé en présent par Vega même, avec une Lettre de sa main inscrite sur une des gardes. Je vous demanderai la permission de vous faire passer copie de l'autographe de cet habile et infortuné calculateur, qui à cette époque servait dans l'armée autrichienne. Peut-être est-ce le seul autographe de Vega qui existe en France.

Astronomo longe celeberrimo Josepho Hieron. Lalandio S. P.

Accipe, vir clarissime, animo benevolo, opus istud tormentorum inter tonitru in lucem editum, sinceræ meæ erga merita tua immortalia venerationis testimonio, et grati animi pro fructibus quos ex lucubratione operum tuorum pauculis haurire potui pacis horis documento tibi missam. Vale.

Dabam Manheimii ad Rhenum. Die 22 *decemb.* 1795. *Georgius Vega.*

Manheim avait été alors repris sur les Français commandés par Pichegru; l'armée autrichienne était commandée par Clairfayt. »

Note du Rédacteur. En 1802, Vienne fut consternée en apprenant la mort de Vega, noyé dans le Danube (*). On pensait à un suicide, attribué, dit-on, au chagrin qu'un passe-droit faisait éprouver au colonel. Telle était l'o-

(*) Né en 1754.

pinion publique sur cette catastrophe, lorsque, sept années après, en 1811, un régiment d'artillerie vint à passer par Vienne. L'officier qui surveillait la salle du dessin vit entre les mains d'un canonnier un rapporteur en cuivre, portant le nom de *Vega*, et le canonnier dit que le bourgeois chez lequel il logeait, lui avait prêté cet instrument, et il disait vrai. Ce bourgeois était un meunier; interrogé sur la possession de cet instrument, le meunier fit des réponses embarrassées, et l'on se rappela que c'était chez lui que Vega était descendu pendant son séjour à Vienne. Instruite de ces faits, la justice fit des poursuites. Mis en prison, et après plusieurs interrogatoires, le meunier fit cet aveu : « Lorsque Vega vint chez moi » en 1802, j'avais un très-beau cheval auquel j'étais passionnément attaché. Le colonel me demanda à diverses » fois de le lui vendre. J'ai constamment refusé; mais il » finit par offrir un si haut prix, que je cédai, et afin » que je ne pusse changer de résolution, il me paya » comptant et la livraison devait avoir lieu dans la soirée. » A l'heure convenue, nous nous rendîmes à l'écurie, et » pour cela il fallait passer par-dessus une passerelle, » jetée sur le cours d'eau dérivé du Danube et qui fait » aller le moulin. Arrivé sur la passerelle, j'eus un si » violent regret de me séparer de mon cheval, que l'idée » diabolique s'empara de moi de garder l'argent et le » cheval. Il faisait très-obscur. Le colonel marchait devant moi: je lui donnai une forte secousse; il tomba » dans l'eau et disparut. »

D'après cette déclaration, l'assassin mourut sur la potence. Ainsi cet incident providentiel lava d'un soupçon injurieux la mémoire du célèbre artilleur.

En France, dans l'état actuel du jury, le malheureux meunier, entraîné par un vertige momentané de fébrile cupidité, aurait obtenu la faveur des circonstances atténuantes.

———

MATHURIN JOUSSE.

« Mon cher Monsieur Terquem,

» En recevant hier votre Lettre, je me suis empressé de faire des recherches au sujet de Mathurin Jousse, et je suis heureux de pouvoir vous transmettre quelques renseignements, ignorés des biographes, et d'une exactitude authentique.

» La *Biographie* Michaud ne donne ni le lieu ni la date de sa naissance et de sa mort; je puis, comme vous allez le voir, combler cette lacune importante.

» Je commencerai d'abord par transcrire un passage relatif à Mathurin Jousse, que je tire d'un livre publié par un des fonctionnaires du Prytanée, et intitulé : *Histoire de l'École de la Flèche, depuis sa fondation par Henri* IV *jusqu'à sa réorganisation en Prytanée impérial militaire;* par Jules Clère; in-18 ; la Flèche, 1853.

» Je transcris donc à peu près littéralement.

« .... L'enseignement du collége de la Flèche exerça » encore une heureuse influence sur le développement » des arts mécaniques parmi les ouvriers de la ville. De ce » nombre fut Mathurin Jousse, *né à la Flèche le* » 27 *août* 1607 (*), et qui dut comme externe fréquenter » les cours vers l'année 1622. Il se livra de bonne heure à » la mécanique, dut faire très-jeune son tour de France » et aller en Dauphiné et *en la Franche-Comté,* d'a- » près la manière dont il parle de la mode de l'un et des » petits hachereaux de l'autre; et dès 1627, n'ayant que » 20 ans, fit imprimer à la Flèche deux traités avec gra- » vures sur acier et sur bois, dont l'un a pour titre : *La* » *fidèle ouverture de l'art du serrurier, où l'on voit les*

(*) Cette date est authentique, je l'ai encore relevée moi-même aujourd'hui sur les registres de la ville de la Flèche. (E. Coupy.)

» *principaux préceptes, dessins et figures touchant les* » *expériences et opérations manuelles dudit art, ensem-* » *ble un petit traité de diverses trempes*, le tout fait et » composé par Mathurin Jousse de la Flèche. A la pre- » mière page se lit une humble dédicace aux Pères du col- » lége : Messieurs, le lustre et l'éclat incomparable de la » doctrine et vertu que vous professez avec une admira- » tion singulière de tout l'univers, sembleraient me devoir » rendre timide et craintif d'approcher de vous pour vous » présenter et consacrer ce rude et mal poly mien petit » labeur, etc....

« Le second ouvrage est intitulé : *Le théâtre de l'art du* » *charpentier enrichi de diverses figures, avec l'inter-* » *prétation d'icelles, terminé par un brief traité des cinq* » *ordres des colonnes*. Ces deux ouvrages différents ont » pu faire croire que Jousse était serrurier ou charpentier. » Il fut encore l'auteur d'un livre ayant pour titre : *Le* » *secret de l'architecture découvrant fidèlement les traits* » *géométriques, coupes et dérobements nécessaires dans* » *les bâtiments*. Il publia en dernier lieu la *Perspective* » *positive*.

» Jousse commença par le métier et arriva à l'art et à la » science, l'érudition même marchant de pair à côté. Il » cite Vitruve, Diego, Lagredo, Vignole; il parle nom- » bres et proportions géométriques comme un mathéma- » ticien ; il versifie comme un poëte du temps et même » mieux, et sa prose, simple et claire, mais arriérée, et » tenant plus du XVI^e^ que du XVII^e^ siècle, a très-souvent le » charme du doux style d'Amyot.

» L'église du collége est embellie de l'une de ses œuvres : » il travailla aussi au château de la Varenne, et parmi » les différentes inventions mécaniques dont il fut l'au- » teur, on a longtemps admiré un fauteuil et une chaise » avec lesquels on pouvait avancer ou reculer et se tour- » ner en tous sens par le moyen d'un seul ressort ; une

» main et une jambe de fer qui suppléaient à la main ou à » la jambe amputées et se mouvaient à volonté. » (*Histoire de l'École de la Flèche*, pages 164 et 165.)

» J'ajouterai ce qui suit aux détails précédents.

» Vous pourrez sans doute vous procurer à la Bibliothèque impériale les ouvrages de Jousse, et collationner les titres que je vous envoie. Nous possédons à notre bibliothèque tous ses ouvrages, excepté le *Secret de l'architecture* et la *Perspective positive*. Dans le privilége du roi qui accompagne ces ouvrages, vous verrez que Jousse est qualifié de *marchand et maître serrurier en notre ville de la Flèche*. En tous cas, c'était un serrurier précurseur de Vaucanson, et s'occupant au besoin de mécanique et d'architecture. Le titre d'ingénieur lui aurait mieux convenu, je crois.

» Il était très-probable, d'après ce qui précède, que Jousse avait dû mourir à la Flèche : j'ai été feuilleter ce matin les poudreux registres de la ville, et j'ai été assez heureux pour y découvrir l'acte d'inhumation de Mathurin Jousse. Je transcris *textuellement* ici cette pièce, avec son orthographe :

» *Le vingt et neuvième et dernier jour de février de l'année bissextile mil six cent septante et deux, a été inhumé au grand cimetière de la paroisse de la Flèche par moy vicaire de la paroisse, Maître Mathurin Jousse, marchand orfévre, âgé d'environ soixante ans, décédé d'hier au soir. Ont été présents à la sépulture Jonas Jousse et* (*) *Jousse ses enfans, tous de cette paroisse, lesquels ont signé avec nous :*

V. de la Planche,
Prestre.

(Tiré du registre des baptêmes, mariages, et sépultures de la ville de la Flèche, du 1er janvier 1672 au 31 juillet 1673.)

(*) Il y a un blanc pour le prénom qui manque. Il y a aussi des blancs pour les deux signatures qui manquent.

» Vous remarquerez que Jousse est qualifié d'orfévre dans cette pièce, et qu'il était dans sa soixante-cinquième année, quoiqu'on ne lui donne là que soixante ans. Il demeure donc acquis à la biographie que Mathurin Jousse est né à la Flèche le 27 août 1607 et y est mort à 65 ans le 28 février 1672.

» Vous savez du reste que la Flèche revendique encore, comme illustrations scientifiques, le fameux astronome Jean Picard, qui fonda en 1679 la *Connaissance des Temps*, et le célèbre physicien Sauveur, tous deux nés à la Flèche. Je ne cite pas Descartes, élevé seulement au collége.

» Il ne reste plus actuellement aucune personne du nom de Jousse à la Flèche : mais il y en a encore dans les environs. J'ignore si ce sont des descendants.

» Voilà, mon cher Monsieur Terquem, tout ce que je puis vous transmettre au sujet de Mathurin Jousse.

» La Flèche, 23 mars 1855.

ÉMILE COUPY,
Professeur. »

M. de la Gournerie, ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur de géométrie descriptive à l'École Polytechnique, ayant été nommé professeur de la même science au Conservatoire des Arts et Métiers, y a prononcé un *Discours d'ouverture du cours* (*), le 14 novembre 1854. On y lit un historique très-instructif du *trait* stéréotomique, qui rappelle les travaux de Philibert de l'Orme et de Mathurin Jousse appréciés avec beaucoup de justice. On aurait désiré autant de justice à l'égard de Desargues, qui le premier a donné une base théorique aux procédés graphiques des praticiens. Dans la triste discussion que le célèbre géomètre eut à soutenir contre ces praticiens, il prétend ne reconnaître pour juges que les géomètres. M. de la Gournerie blâme cette prétention. Il me semble pourtant

(*) *Discours sur l'Art du trait et la Géométrie descriptive*. In-8, chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 1fr 25c.

très-naturel qu'un procès de *théorie* soit plaidé devant un tribunal de théoriciens. Si, par exemple, il s'élevait une discussion sur l'excellente *Théorie des Voûtes* que vient de publier M. Yvon Villarceau (*), il faudrait consulter ceux qui connaissent la dynamique des voûtes plutôt que ceux qui savent seulement le tracé et l'appareil des voûtes. On ne peut non plus approuver ce que le savant professeur dit de la belle invention de la méthode dite des *échelles* que Desargues a introduite dans la perspective, avant Lambert. Pour atténuer le mérite de ces procédés, M. de la Gournerie dit que Monge n'en a pas fait usage dans les épures destinées à l'École Polytechnique. Cette raison ne paraît pas suffisante; Monge n'a pas non plus employé la méthode des cotes, qui est pourtant d'un usage journalier et que le Mémoire de M. Noizet a rendue élémentaire (*Mémorial du Génie*, n° 6, 1823). Desargues était le précurseur de Frezier, le précurseur de Monge. Il ne lui a manqué qu'une qualité, la clarté; elle est essentielle pour se faire valoir: c'est souvent le seul mérite de la médiocrité. Voltaire dit que la limpidité des petits ruisseaux tient à ce qu'ils sont peu profonds.

Quant à la question de savoir si la géométrie descriptive est une méthode à découvertes ou non, elle est tout aussi importante que celle de savoir si la logique est une science ou un art. Faites des découvertes, on ne s'inquiétera pas de l'instrument.

ABEL.

Niels Henrik Abel (**) est né le 5 août 1802 à Findoë, sur la côte occidentale de Christiansandstifft, en Norvége.

(*) *Sur l'établissement des arches de pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité, et Tables pour faciliter les applications numériques.* In-8, avec figures dans le texte et 2 planches. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix: 12 francs.

(**) Nicolas-Henri.

Son père Sörn Georg Abel était ministre protestant dans un village. En 1803, la famille fut transférée à Gierrestadt, paroisse voisine de Findoë. Abel reçut la première éducation de son père jusqu'en 1815, où il fréquenta l'école épiscopale de Christiania. Il ne se distingua pas dans ses études littéraires; mais en 1818 ses talents pour les mathématiques commencèrent à se développer subitement. M. Holmboë, professeur à cette école, lui donna des leçons particulières. Ayant passé rapidement les *Éléments*, on lui fit parcourir l'*Introduction* et les *Institutiones* d'Euler. Il étudia seul les ouvrages de Lacroix, Francœur, Poisson, Gauss et surtout ceux de Lagrange, et fit lui-même quelques essais. Sorti de l'école épiscopale, il entra à l'Université de Christiania. Son père étant mort, il reçut des leçons gratis, jouit d'une bourse et des secours des professeurs. Les deux années suivantes, il obtint une subvention du gouvernement. A cette époque, il composa plusieurs Mémoires insérés dans le *Magasin fur die Naturwissenschaften* (*Recueil d'Histoire naturelle*), journal qui paraît à Christiania. Le premier de ces Mémoires a été imprimé en 1820, sous le titre : *Allgemeine methode functionen einer variabeln grösse zu finden, wenn eine eigenschaft dieser functionen durch eine gleichung zwischen zwei variabeln ausgedruckt ist.* Méthode générale de trouver les fonctions d'une seule variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables.

Il s'occupa aussi de la résolution de l'équation du cinquième degré. Une fois, il crut l'avoir trouvée, mais ayant remarqué son erreur, il se proposa ou de la corriger, ou de démontrer l'impossibilité de la résolution générale des équations supérieures. Il réussit dans cette dernière tâche et fit imprimer sa démonstration en 1824, à Christiania, en français. S'étant extraordinairement distingué, le gouvernement, sur les recommandations de MM. les professeurs Ramusen et Hansteen, lui accorda des frais de voyage pour continuer pendant deux années ses études, en Allemagne, en Italie, en France. Il arriva à Berlin en 1825 et y resta six mois. M. Crelle dit que c'est à Abel qu'il doit l'idée de son journal. De Berlin, Abel se rendit par Vienne, Venise, Milan, Turin, à Paris, où il fit un séjour de dix mois, chez M. de Cotte, ancien principal de collége, alors maître de pension (*). Abel était accompagné de son camarade Moler, fils d'un riche propriétaire de mines en Norvége. M. de Cotte, géomètre bien capable d'apprécier Abel, m'a dit qu'il était d'un caractère doux, ouvert, communicatif, très-jovial et d'une extrême modestie. Son physique et sa tenue rappelaient une origine scandinave. Cette *tenue* n'a pas permis aux grands géomètres de Paris de deviner le génie d'Abel. En effet, comment soupçonner qu'un homme qui se présente en *casquette* puisse avoir du génie? En quittant Paris, il retourna à Berlin et de là à Christiania. Après une absence de vingt mois, il ne trouva pas d'abord un emploi convenable, et ce ne fut que peu de temps avant sa mort qu'il obtint des appointements fixes.

En décembre 1828, au fort de l'hiver, il entreprit un voyage pour les fonderies de fer de Froland, où se trouvait alors Mademoiselle Kremp, sa future, devenue depuis M[me] Keilhan. Vers la mi-janvier, il y tomba malade et mourut de phthisie le 6 avril 1829, entouré des soins de sa future et de M. Smith, alors propriétaire de ces fonderies.

Le Ministre des Cultes et de l'Instruction publique de Prusse avait résolu de lui envoyer une invitation pour venir occuper une chaire à Berlin. M. Crelle, chargé de cette mission, en écrivit tout de suite à Abel; la Lettre arriva

(*) Rue Sainte-Marguerite-Saint-Germain, dans la maison où se trouve maintenant (1853) l'institution Gillet-Damiette.

peu de jours après sa mort. Il a été enterré près de l'église de Froland, où ses amis lui ont érigé un monument en fonte de fer. Il a laissé une mère, une sœur et plusieurs frères. C'est à sa famille qu'ont été adressés les 1500 francs, moitié d'un prix de 3000 francs que l'Institut a décerné à lui et à Jacobi conjointement en 1830; dans la Lettre d'Arago à Abel, du 24 juillet 1830, on dit que le prix sera proclamé dans la séance publique du 26 juillet 1830.

M. Holmboë, ancien professeur d'Abel, a publié :

Œuvres complètes de N. H. Abel, mathématicien, avec des *Notes et développements*, rédigées par ordre du roi par B. Holmboë, professeur de mathématiques à l'Université de Christiania, membre de la Société physiographique à Christiania et de l'Académie royale des Sciences de guerre à Stockholm.

Tome I^{er}, contenant les œuvres de l'auteur qui ont été publiées auparavant. Christiania, 1839; in-4, de 479 pages.

Tome II, contenant les œuvres de l'auteur qui n'ont pas été publiées auparavant. Christiania, 1839; in-4, de 294 pages.

Observation. On a omis dans cette édition un Mémoire d'Abel sur l'élimination, que l'on trouve dans le *Bulletin* de Ferussac.

Nous croyons utile de donner un résumé succinct des Mémoires contenus dans ces deux volumes.

JAMNITZER (Wentzel),

Médailleur, Opticien, Orfévre, Mathématicien.

Né à Nuremberg ou à Vienne vers 1508. Un manuscrit de Jean Neudorfer, mathématicien, qui fut son ami et, à ce qu'on croit, son parent par alliance, nous apprend que lui et son frère Albert firent venir leurs vieux parents de Vienne à Nuremberg. Les deux frères, tous deux artistes, ont travaillé ensemble. Nous avons parlé de son ouvrage de perspective (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 138). Une médaille de 1568, portant le portrait de Jamnitzer, existe à la Bibliothèque impériale (*Magasin pittoresque*, page 286; 1851). Il est mort à Nuremberg le 15 décembre 1586.

SUR LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES;

PAR M. JUSTE BELLAVITIS.

L'étude des sciences mathématiques est tellement généralisée, qu'il doit arriver fréquemment qu'on reproduise des choses déjà publiées, et il serait injuste d'en tirer une accusation de plagiat, et même futile d'en réclamer la priorité; néanmoins je vous prie, Monsieur, de me permettre une observation sur une assertion qu'on trouve dans le cahier de décembre 1854 des *Nouvelles Annales*, tome XIII, page 464.

Dans les *Annales des Sciences*, pour le royaume lombardo-vénitien (tome VII, 1837), j'ai publié un long Mémoire sur la méthode géométrique que j'ai nommée *méthode des équipollences*. Dans le volume I^{er} (1843) des *Mémoires de l'I. R. Institut vénitien*, et dans des autres publications, j'ai donné plusieurs applications de cette méthode, lesquelles n'étaient que de simples déductions des principes déjà posés dans mon *Essai* publié à la fin de l'année 1835 (*Annales des Sciences*, tome V). Je ne sache pas que M. Saint-Venant ait traité des sommes géométriques avant l'année 1845 (*Comptes rendus* du 15 septembre, tome XXI, page 620), et je crois qu'il n'a pas donné à ces principes les extensions auxquelles j'étais parvenu dix ans auparavant. Il me semble donc très-inexact de dire que les idées de M. Saint-Venant et de

M. Cauchy ont été reproduites par moi sous le nom d'*é-quipollences*.

Permettez-moi aussi d'observer que les trois définitions suivantes sont tout à fait géométriques : 1° une droite est équipollente à une autre droite multipliée par un nombre donné quand elle est parallèle à cette droite, égale à la même multipliée par ce nombre, et prise dans la même direction; 2° une droite est équipollente à la somme de deux ou de plusieurs droites quand elle est équipollente au dernier côté d'un polygone, qui a les autres côtés équipollents à ces droites; 3° dans un plan on dira qu'une droite est équipollente au produit de deux droites divisées par une troisième quand sa longueur est égale à ce quotient, et son inclinaison est égale à la somme des inclinaisons des deux premières droites diminuées de l'inclinaison de la troisième. Les conséquences que j'ai déduites de ces définitions et des principes de géométrie élémentaire sont rigoureuses autant que les théorèmes d'Euclide.

S'il y a quelque chose de nébuleux, c'est, à mon avis, l'usage ordinaire de $\sqrt{-1}$, regardé comme quantité; et je crois que le vrai moyen d'interpréter les quantités imaginaires est de les considérer comme des *quantités géométriques*. Tandis qu'une équation entre quantités réelles *peut* être regardée comme une relation des distances entre un point pris pour origine et les points d'une droite, une équation entre quantités imaginaires *doit* être regardée comme une équipollence entre les distances des points d'un plan, comptées d'une origine donnée; les quantités réelles sont prises sur une droite fixe, et les coefficients de $\sqrt{-1}$ sont pris perpendiculairement à cette droite. C'est la représentation des quantités imaginaires proposée par plusieurs auteurs et qui m'a donné la première idée de ma méthode des équipollences; mais, au lieu de dire que les points d'un plan représentent des choses qui n'existent pas et qui sont impossibles, je dis que les binômes $a+b\sqrt{-1}$ représentent les points du plan : de cette manière, chaque question sur les quantités dites *imaginaires* a une véritable signification réelle, et l'Algèbre est, dans toutes ses parties, une science rigoureuse. La signification géométrique que j'adopte (et que je crois la seule possible) donne beaucoup de clarté aux questions algébriques, comme j'ai cherché à le faire voir dans un Essai sur l'Algèbre des imaginaires, dont la première partie a été publiée dans le tome IV (1852) des *Mémoires de l'Institut vénitien*. M. Cauchy, qui, à plusieurs reprises, a cherché à donner un sens précis au calcul des quantités imaginaires, a adopté dernièrement la même opinion supérieurement exposée.

La méthode des équipollences est tout à fait géométrique, et il est accidentel au sujet que, dans la statique, la résultante de deux forces soit équipollente à leur somme. La seule chose un peu nébuleuse dans ma méthode, mais qui est tout à fait accessoire, c'est la théorie des points fictifs, c'est-à-dire des points qui, à la manière déjà connue, représentent les intersections imaginaires d'une droite avec une courbe, lesquels points fictifs ont quelquefois des propriétés analogues à celles des intersections réelles.

Vous augmenterez, Monsieur, mes obligations, si vous avez la bonté de faire connaître, dans votre estimable journal, que, dans ma méthode des équipollences, je n'ai pas reproduit les idées de M. Saint-Venant.

BIBLIOGRAPHIE.

Lettre de Kepler a Nicolas Reimarus Ursus.

Nicolao Reimaro Urso Diethmarsa, mathematico Cæsareo nobilissimo.

Pragam.

Qui ignoti ad ignotas in longinquas regiones transmittunt epistolas, mirabiles sunt homines. Te mihi notum pridem fecit illustrissima tua gloria, qua mathematicos hujus ævi præcedis unus, quantum Phœbus orbis minuta sidera. Sed nec tempus plura fert, nec mathematicorum est garrulitas. Hoc unum habe, tanti a me fieri, quanti omnes docti te faciunt, quorum judicium aspernari arrogantis est, collaudari modesti juvenis. Cùm itaque, præceptore te, id est libris tuis, hoc quantulum est, cognitionis acquisiverim in mathematicis, æquum duxi ut te in re ardua, nec ut mihi videtur, contemnenda, consulam. Si approbaveris quod ago, beatum me prædicabo, proximum felicitatis gradum in eo statuo, ut a te corrigar : tanti est mihi tuum judicium. Hypotheses tuas amo. Sed Copernicum satis admirari non possum, cujus hypotheses hoc habent, quod his versibus complexus sum :

Quid mundus, quæ causa Deo ratioque creandi,
Unde Deo numeri, quæ tantæ regula moli,
Quid faciat sex circuitus, quo quælibet orbe
Intervalla cadant, cur tanto Jupiter et Mars
Orbibus haud primis interstinguantur hiatu,
Accipe Pythagoræ monstratum quinque figuris.

Nam inter Saturnum et Jovem est cubus, sic ut una Saturni periodus, sit orbis circumscriptus summa Jovi in-scriptus; inter Jovem et Martem tetraedron, inter Martem et Terram dodecaedron, inter Terram et Venerem icosaedron, inter Venerem et Mercurium octaedron. Ordinem hunc corporum neque metaphysici, neque mathematici cum ratione immutaverunt. Jam et medii motus se accommodant, est enim eorum dupla ratio ad distantias, scilicet quia (vel eadem esset incitatio partium, in omnibus) propter majorem amplitudinem, quidem tardius redirent, et jam accedit debilitatio in exterioribus, qualis accidit in lucidi radii extenuatione. Parum utrique ac Copernico disceditur, plus tamen si ex motibus mediis constituentur distantiæ, quam si ex corporibus. Nam ex correctione distantiarum per corpora sequitur differentia prosthaphæresin, apogæorum non major, quam in Saturno 12^{m}, in Jove 25^{m}, in Marte $1^{gr},45^{m}$, in Venere 1^{gr}, in Mercurio 51^{m}. Plura non scribo, judicium tuum expectans, quod non gravaberis in gratiam nobilissimi juvenis D. Sigismundi Wagani, cujus instinctu scribo, hac vel proxima occasione ad nos transmittere. Vale, sideribus et nostræ scientiæ, decus Germaniæ.

Gratii, 15 Novemb., anno 1595.

Ex. tuæ discipulus M. Joanne Kepplerus, illustrium Styriæ provincialium mathematicus.

Né en 1571 (*), Kepler avait 24 ans, lorsqu'il écrivait cette Lettre. A cet âge, il était déjà en possession des idées suivantes:

1. Il admettait le système de Copernic, qui n'avait paru qu'en 1543.

2. Il rattachait le *nombre* des planètes au nombre des polyèdres réguliers. A cet effet, il imagine pour chaque planète une sphère d'un rayon égal à la distance moyenne

(*) Son lieu de naissance est Weil, près Stuttgardt. Beaucoup de familles israélites portent ce nom.

de la planète au Soleil; il inscrit certains polyèdres réguliers, dont les faces touchent une sphère dont le rayon représente la distance moyenne de la planète immédiatement inférieure, et il trouve la planète supérieure de la même manière. Ainsi, il circonscrit un dodécaèdre autour de la Terre : la sphère qui passe par les sommets est Mars; à cette dernière planète il circonscrit un tétraèdre : la sphère circonscrite à ce tétraèdre est Jupiter; il place de même Saturne, en circonscrivant un cube autour de Jupiter; ensuite il inscrit dans la Terre un icosaèdre : la sphère inscrite dans ce solide est Vénus; il inscrit dans Vénus un octaèdre : la sphère inscrite est Mercure.

Dans un ouvrage, publié en 1596, il motive ces divers solides par des considérations qui ne sont pas plus admissibles que l'objet même.

Tout cela est la partie poétique; mais voici des points d'une immense importance.

3. Kepler a une idée de l'attraction (*partium incitatio*), de l'action des masses (*corporum*); il compare la diminution de cette action (*debilitatio in exterioribus*) à l'affaiblissement des rayons lumineux (*in lucidi radii extenuatione*), et cet affaiblissement est en raison inverse des carrés des distances. Cette simple réflexion, si Kepler l'avait faite, lui donnait la loi newtonnienne.

4. Les racines carrées des moyens mouvements sont en raison inverse des distances au Soleil. Il donne la raison pourquoi les distances dépendent des moyens mouvements et non des masses.

Les provinces styriennes, étant catholiques, avaient adopté la réforme grégorienne et appelé Kepler à Gratz, en 1593, pour enseigner l'astronomie et faire des calendriers. Reimarus Ursus (en allemand, *Bär*), de Dithmar (Holstein), était un gardeur de porcs, qui apprit plusieurs langues et les mathématiques tout seul, et a composé beaucoup d'ouvrages; le plus célèbre est celui où il prétend que le système de Tycho de Brahé lui appartient, et accuse de plagiat et très-grossièrement l'illustre astronome qui, arrivé à Prague en 1596, où se trouvait alors Ursus, lui intenta un procès en calomnie. L'empereur institua une commission de juges; mais la mort d'Ursus, en 1599, mit fin à la procédure. Du reste, il n'est pas impossible qu'Ursus ne fût parvenu au même système que Tycho. Selon le dire de celui-ci, Kepler se disposait à écrire contre Ursus, qui avait inséré dans un de ses ouvrages la Lettre rapportée ci-dessus.

NOUVELLE ARITHMÉTIQUE APPLIQUÉE AU COMMERCE ET A LA MARINE, mise en vers par *L. Chavignaud*, ex-maître de pension, ancien professeur de Mathématiques à l'Institut Rollin, auteur de plusieurs ouvrages. 4e édition, revue et corrigée. Toulouse, imprimerie Delsol. In-8 de 92 pages; 1843 (*).

Je plais en instruisant, et ma muse facile
Répand sur la jeunesse une semence utile.

L'Épitre dédiée aux marins termine par ces trois vers :

Traduisant de Bourdon la docte Arithmétique,
Je serai trop heureux, si mes utiles vers,
En charmant vos instants, vous suivent sur les mers.

L'auteur décrit, en effet, toutes les opérations de l'arithmétique Bourdon en vers techniques d'assez bonne facture. On est préparé d'avance à y trouver des *chevilles*

(*) Il y a une édition de Lyon, 1846, éditée par la veuve (chez Mallet-Bachelier, libraire).

en abondance. L'auteur débute ainsi :

Définitions.

L'utile Arithmétique, en ses peintures sombres,
Nous fait connaître à fond la science des nombres,
Dans ses divers rapports les fait envisager,
Assembler, retrancher, composer, partager,
Donne des moyens sûrs à l'homme qui s'exerce,
Et grave en son esprit les règles du commerce.

Les opérations sont en général bien indiquées pour ceux qui les connaissent, et ces vers peuvent servir à certaines intelligences pour les retenir.

Voici le début de la règle d'escompte :

Lorsque le créancier veut faire une remise,
Le débiteur alors, et la loi l'autorise,
En retranche l'escompte au susdit commerçant,
Qui change son billet pour de l'argent comptant.

Cela suffit pour donner une idée de l'ouvrage. On a omis les extractions des racines.

Un Anglais nommé Guillaume Buckley a publié une *Arithmetica memorativa* en vers latins. Wallis a acheté cet ouvrage qui était joint à la *Logique* de Seton, publiée à Cambridge en 1631. Il ignore si l'*Arithmétique* est antérieure ou non à la *Logique* (Wallis, *Opera*, t. II, p. 38). On y trouve le plus ancien exemple connu de l'extraction approchée de la racine carrée, au moyen des décimales, en ces quatre vers hexamètres :

Quadrato numero, senas præfigito cyphras :
Producti quadri radix per mille secetur,
Integra dat quotiens; et pars ita recta manebit
Radici ut veræ ne pars millisima desit (subintellige *unius*).

Heilbronner écrit erronément Guillielmus Budæus (*Hist. matheseos*, p. 783). Il était de Lichtfeld et trèsaimé d'Édouard VI. Mort vers 1550, il était contemporain du célèbre Robert Record.

Leslie, dans sa *Philosophy of arithmetic* (p. 237), donne les extraits suivants de cette Arithmétique.

De numeratione.

. . . Numerorum signa decem sunt
Quorum significant aliquid per se omnia, præter
Postremum, nihili quæ dicitur esse figura.
Circulus hæc alias, alias quoque cyphra vocatur,
Quæ supplere locum nota est non significare.
Hi characteres, prima si sede locentur,
Significant se simpliciter, positique secunda
Significant decies se; quod si tertius illis
Obtigerit locus, ad centum se porrigit usque
Summa; locus quartus solus tibi millia fundit,
Et quartum quintus decies complectitur, huncque
Tantumdem sextus superat. Quid multa? sequens cum
Quisque locus soleat decies augere priorem.

Ratio numeris tum scribendi tum exprimendi.

Scripturis numerum a dextris fac incipias, hinc
In lævam tendens, donec conscripseris omnes,
Post signa minimis loca quarternaria punctis
Punctaque quot fuerint, totidem tibi millia monstrant.
A læva vero numerorum expressio fiat.

Pour la division, il indique cette disposition :

Au-dessous du diviseur, on tire deux traits laissant entre eux un certain intervalle, pour écrire les chiffres successifs du quotient; on écrit le diviseur au-dessous du dernier trait et vers l'extrémité gauche; on cherche le quotient qu'on met à la place indiquée; on fait le produit et l'on écrit le résidu au-dessus du diviseur; on barre la partie du dividende employée; ensuite on fait avancer le diviseur vers la droite, et ainsi de suite. Il résume ces diverses opérations dans un seul vers :

Divide, multiplica, subduc, transferque secantem.

Voici la preuve :

Per divisorem, quotientem multiplicabis;
Producto reliquum, si quod fuit, adde priorque
Exhibet numerus, nisi te deceperit error.

Le titre de l'ouvrage est : ARITHMETICA MEMORATIVA, *sive* COMPENDIARIA ARITHMETICÆ TRACTATIO, *non solum tironibus, sed etiam veteranis et bene exercitatis in ea arte viris, memoriæ juvandæ gratia, admodum necessaria, authore Gulielmo Budæo, Cantabriensi.*

Neper, dans sa *Rabdologie*, a inséré des vers mnémoniques pour expliquer l'emploi de ses baguettes.

On sait que le *Lilavati*, qui remonte au XII^{e} siècle de notre ère, est écrit en vers sanscrits mnémoniques.

CHAVIGNAUD (Pierre-Léon), né à Saintes (Charente-Inférieure), en 1791, fils d'un négociant honorable, s'appliqua de bonne heure aux mathématiques et se destinait à la marine de guerre, dont un de ses oncles, Clavier, lieutenant de vaisseau, devait lui faciliter l'entrée, alors assez difficile. La rentrée des Bourbons mit obstacle à ses projets. Dès lors se livrant à l'enseignement des mathématiques et des langues étrangères, il professa les mathématiques dans un des colléges royaux de la capitale et donna des leçons d'anglais et d'allemand. Depuis, il obtint la chaire de mathématiques de Châteauroux, et, en 1820, vint se fixer à Saintes, sa ville natale. Chargé de l'organisation des écoles primaires et supérieures de l'arrondissement, il dirigea l'école d'enseignement mutuel de la ville de Saintes. C'est alors qu'il fit paraître la première édition de sa *Méthode de lecture,* imprimée, en 1823, chez

Hus (Alexandre), et ensuite, en 1824, son *Histoire de France* en vers lyriques, et un an plus tard sa *Grammaire* en vers alexandrins, in-12 de 150 pages, imprimée à Nantes en 1825 par M. Laforest. Ayant fait usage de ces deux ouvrages dans son école d'enseignement mutuel, il en obtint les meilleurs résultats, malgré les critiques qui ne lui manquèrent pas ainsi qu'à tous les novateurs. D'après ce succès il s'occupa de son *Arithmétique en vers,* œuvre à laquelle il s'attacha plus spécialement et qui était son œuvre de prédilection. Il s'attacha à mettre toute la clarté possible dans les définitions et à éviter toute redondance et toute superfluité. Cet ouvrage est le plus parfait en ce genre comme facilité de vers et rectitude d'impression. Les définitions, quoique en vers, ont beaucoup de clarté et de précision. La première édition parut en 1830, à Cognac, imprimerie Fournier. En 1830, il mit la Charte en vers et fit des développements en vers sur le *Pater,* l'*Ave* et le *Credo,* publiés par les soins du fils de l'auteur, à Nantes, en 1840. Dix éditions successives se sont écoulées de la *Grammaire* et de l'*Arithmétique en vers,* par les soins du fils et de la veuve de l'auteur, et bien des personnes ont réappris, à l'aide de ces deux ouvrages, les éléments de la grammaire et de l'arithmétique.

L'auteur ne se faisait point un jeu d'esprit en mettant en vers des choses aussi arides: son désir était de se rendre utile en rendant faciles, par la mnémotechnie, les principes de Lhomond et de Bezout, et en répandant quelques fleurs sur un chemin aride et épineux. Sur les dernières années de sa vie, il devint imprimeur et créa l'*Abeille saintongeoise.* Il mourut en 1837.

(*Communiqué* par M. CHAVIGNAUD fils.)

CHRISTOPHE RUDOLF.

Le plus ancien ouvrage d'algèbre en Allemagne est celui de Christophe Rudolf de Jauer (*), et a paru en 1524. Je n'ai vu nulle part la description de cette première édition. En 1552, l'ouvrage était déjà si rare, que le prix avait quadruplé. C'est ce qui engagea Michel Stiffel à en donner une nouvelle édition (*) sous ce titre : *Die cosz Christorfs Rudolfs mit schönen Exemplen der cosz, durch Michael Stiffel, gebessert und sehr gemehrt*, 1571; in-4 de 491 pages : La cosz de Christophe Rudolf avec de beaux exemples de la cosz, améliorée et très-augmentée par Michael Stiffel.

Le titre porte 1571; mais à la fin de l'ouvrage on lit : *Gedruckt zu Königsperg in Preussen, durch Alexandrum Behm von Luthomissel; vollendet am dritten Tag des herbstmonats als man zalt nach der geburt Unsers Lieben Herren Jesu Christi* 1554 : Imprimé à Konigsberg, en Prusse, par Alexandre Behm, de Luthomissel, fini le troisième jour du mois d'automne, lorsqu'on compte 1554 après la naissance de Notre Cher Seigneur Jésus-Christ.

Ainsi, l'ouvrage a été publié dix-sept ans après l'impression. Voici comment Stiffel raconte ce qui lui a fait entreprendre cet ouvrage : « Après l'apparition de la cosz » de Rudolf, plusieurs maîtres de calcul (*rechenmeister*) » allemands s'occupèrent de l'*algebra numerosa*, et con- » trairement à la charité chrétienne, en injuriant et

(*) Près de Liegnitz, en Silésie, province qui, au XVI^e siècle, appartenait à l'Empereur, comme roi de Bohème.

(**) Murhard indique une édition de 1626 et de Nuremberg 1661.

» maudissant l'auteur, parce qu'il avait donné ses règles
» sans y joindre aucune démonstration. Cependant,
» comme dit Salomon, *le fou dit tout ce qu'il fait,*
» *et le sage se retient* (Prov.), et d'ailleurs voulant
» faire un bon livre, il lui était loisible d'y mettre ce
» qu'il voulait (*). »

A la fin de l'impression de cette nouvelle édition, Stiffel reçut de Jean Neudorffer, maître de calcul à Nuremberg, un autographe de Rudolf, contenant les démonstrations de ses théorèmes par des figures de géométrie. Stiffel ajouta ces figures à cette nouvelle édition, en avertissant qu'elles appartenaient à Rudolf, et cela pour écarter les soupçons qu'on avait répandus, que Rudolf ne comprenait rien à ses règles, et qu'il les avait tirées d'un manuscrit de la Bibliothèque de Vienne. Du reste, ces figures *montrent,* mais ne démontrent pas.

Rudolf débute ainsi : « Ce livre est partagé en deux
» parties : la première renferme huit algorithmes et au-
» tres préliminaires, nécessaires pour expliquer la cosz;
» l'autre partie donne les règles de la cosz, chacune ex-
» pliquée à part, au moyen de nombreux et de beaux
» exemples. »

PREMIÈRE PARTIE.

« La première Partie de ce livre est subdivisée en douze
» chapitres : le *Chapitre Ier* traite de l'algorithme ordi-
» naire des nombres entiers; apprend à numérer, ajou-
» ter, soustraire, multiplier, diviser, progresser. »

Voici comme il énonce le nombre 24375634567 :

Vingt-quatre fois mille mille mille trois cents fois mille mille soixante-quinze fois mille mille six cent mille

(*) Rudolf est pour l'Allemagne ce qu'est pour l'Italie Fibonacci, dont nous parlerons à l'occasion d'un manuscrit précieux qui vient d'être découvert et publié par le savant prince de Boncompagni.

trente-quatre mille cinq cent soixante-sept. Les mots *million, billion* ont été introduits plus tard par les Italiens, et on les trouve déjà chez Albert Girard (mort vers 1633).

Il donne dans ce chapitre les règles pour la progression arithmétique et géométrique. Stiffel ajoute les nombres parfaits, trigonaux, et les progressions qui donnent les côtés rationnels des triangles rectangles.

Chapitre II. « De l'algorithme ordinaire des fractions, » enseigne brièvement à écrire, à énoncer, sommer, sous- » traire, multiplier, diviser les fractions. »

Chapitre III. « Enseigne la règle *detri* en nombres » entiers et rompus : Donne la dernière place à l'objet » en question, pose à la première place ce qui a même » nom que l'objet en question, et met l'autre objet au » milieu; ensuite multiplie le moyen nombre avec le der- » nier et divise par le premier, et tu as dans le quotient » ce que coûte le troisième nombre. »

Il termine par cette règle *detri* inverse : « Multiplie » le moyen nombre par le premier et divise par le troi- » sième, et tu as réponse à la question. »

Chapitre IV. « Enseigne à extraire des racines : cela » veut dire extraire des racines en carrés et cubes. »

Mêmes procédés qu'aujourd'hui : il donne les racines des nombres irrationnels à une unité près, et pas d'approximations ultérieures.

Chapitre V. « De l'algorithme de la cosz, en latin : *De* » *additis et diminutis integrorum :* cela veut dire des » nombres ajoutés et retranchés. L'addition est marquée » par le signe + : cela signifie *plus*. La soustraction par » le signe — : cela signifie *minus*. »

C'est la première apparition de ces signes.

Numérer. « Les anciens, nos prédécesseurs, après une

» application sérieuse ont inventé la *cosz :* cela veut dire » le calcul d'une chose et le compte des nombres d'après » l'ordre naturel..., et ont aussi désigné, pour abréger, » par des signes tirés du commencement du mot ou du » nom de cette manière. »

Ici Rudolf donne dix signes en caractères gothiques que, pour éviter les embarras typographiques, nous remplaçons par les lettres ordinaires :

d	*dragma*	correspond à	$x^0 = 1$,
r	*racine*	—	x^1,
c	*census*	—	x^2,
C	*cubus*	—	x^3,
cc	*census deccus*	—	x^4,
sc	*sursolidum*	—	x^5,
cC	*censicubus*	—	x^6,
BcC	*Bsursolidum*	—	x^7,
ccc	*censceus deceus*	—	x^8,
CC	*cubus de cubo*	—	x^9.

Il enseigne ensuite la règle des signes pour les quatre opérations comme aujourd'hui.

Exemple : A multiplier $6r + 8d$ par $5r - 7d$. Il trouve pour produit

$$30c - 2r - 56d;$$

car *rr* est *c* et *dd* reste *d*

$$\frac{5C}{7cc} = \frac{5d}{7r}.$$

Chapitre VI. Calculs des fractions cossiques.

Chapitre VII. Algorithme *de surdis quadratorum.*

Rudolf distingue trois sortes d'irrationnelles quadratiques et se sert du signe actuel $\sqrt{\ }$.

Exemple :

1°. Rationnelles : $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b.$
2°. Communicant : $\sqrt{a^2 c} + \sqrt{b^2 c} = (a + b)\sqrt{c}.$
3°. Non-communicant : $\sqrt{a} + \sqrt{b}.$

L'addition et la soustraction sont fondées sur ces formules :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + \sqrt{4ab}}; \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a + b - 4\sqrt{ab}}.$$

Chapitre VIII. Algorithme nommé en latin *de surdis cubicorum.*

On désigne la racine cubique par ce signe $\surd\surd\surd$.

On y trouve la formule

$$\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{m + n + 3\sqrt[3]{m^2 n} + 3\sqrt[3]{mn^2}}.$$

Chapitre IX. Algorithme nommé en latin *de surdis quadratorum de quadratis.*

La racine quatrième est représentée par $\surd\surd$. Exemples des quatre opérations.

Chapitre X. Algorithme nommé en latin *de binomiis et residuis.*

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est un binôme et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est un résidu ; il enseigne les quatre opérations sur les binômes et les résidus.

Exemple :

$$\frac{16 + \sqrt{64}}{10 - \sqrt{4}} = \frac{(16 + \sqrt{64})(10 + \sqrt{4})}{(10 - \sqrt{4})(10 + \sqrt{4})}$$
$$= \frac{176 + \sqrt{12544}}{96} = 1\frac{5}{6} + \sqrt{1\frac{13}{36}} = 3.$$

Chapitre XI. Extraction des racines carrées des nombres binômes et des nombres résidus. Énoncé de la même règle qu'on trouve dans l'*Arithmétique universelle* de Newton et sans démonstration ; ainsi

$$\sqrt{7 + \sqrt{48}} = 2 + \sqrt{3}\ .$$

Chapitre XII. Les cinq espèces de nombres proportionnés.

1°. *Multiplex* $\frac{mn}{n}$; ainsi

$\frac{2n}{n}$ *proportio dupla,*

$\frac{3n}{n}$ — *tripla,*

$\frac{n}{2n}$ — *subdupla,*

$\frac{n}{3n}$ — *subtripla.*

2°. *Superparticularis* $\frac{n+1}{n}$:

$\frac{3}{2}$ *sesquialtera,* $\frac{4}{3}$ *sesquitertia,* $\frac{5}{4}$ *sesquiquarta.*

3°. *Superpartiens* $\frac{n+p}{n}$ où $p < n$ et > 1:

$\frac{5}{3}$ *superpartiens tertias,* $\frac{7}{4}$ *superpartiens quartas.*

4°. *Multiplex superparticularis* $\frac{mn+1}{n}$:

$\frac{5}{2} = \frac{2.2+1}{2}$ = *dupla superpartiens tertias,*

$\frac{17}{4} = \frac{4.4+1}{4}$ = *quadrupla sesquiquarta,*

$\frac{31}{6} = \frac{6.5+1}{6}$ = *quintupla sesquisexta.*

5°. *Multiplex superpartiens* $\frac{mn+p}{n}$, $p < n$ et > 1:

$\frac{8}{3} = \frac{2.2+2}{3}$ = *dupla superbipartiens tertia,*

$\frac{18}{5} = \frac{3.5+3}{5}$ = *tripla supertripartiens quinta.*

Ces dénominations, soit dit en passant, prouvent d'une manière irréfragable que les Grecs, qui s'en sont servis, n'avaient aucune idée d'une numération chiffrée.

Lorsque deux quantités sont égales, il y a *proportio æqualitatis;* pour deux quantités inégales, il y a *proportio inæqualitatis* et *majoris*, par exemple, pour $\frac{3}{2}$ et *minoris* pour $\frac{2}{3}$.

On voit que *proportio* est pris pour rapport chez les écrivains du moyen âge. Rudolf renvoie pour plus de détails à Boëce.

SECONDE PARTIE.

La seconde Partie est divisée en trois *différences* (*).

Première différence.

La première différence contient les huit règles de la *cosz*.

Rudolf dit que « les anciens l'ont nommée *l'art des* » *choses, parce qu'à son aide on peut résoudre les secrets* » *des questions sur les choses, savoir sur les nombres et* » *les mesures*.

» Dans chaque question, on se servait de la formule: » *Ponatur una res*. Les règles de solution ont été nommées » en italien *regule de la cosse*, une *cossa* signifie une » chose. »

L'ordre naturel des quantités est *d*, *r*, *c*, C, *cc*, etc., (voir ci-dessus). *r* est dit plus grand que *d*, *c* plus grand que *r*, et ainsi de suite.

1re *équation*. Deux quantités qui se suivent dans l'ordre naturel deviennent égales.

Exemples:

3 *r* égal	6 *d*	fac.	. *r*. 2.
4 *c* égal	8 *r*	—	
5 C égal	10 *c*	—	

(*) Dénomination empruntée aux Arabes. L'expression *Ponatur una res* est l'origine des nombres *positifs*.

cela revient à

$$3x = 6, \quad 4x^2 = 8x, \quad 5x^3 = 10x^2,$$

d'où

$$x = 2.$$

Rudolf ne connaît pas le signe $=$, il se sert du point. Ainsi $r.2$ cela veut dire $x = 2$; il choisit tous ses exemples de manière que l'on ait $x = 2$. Il démontre la règle par une figure de géométrie : c'est un rectangle partagé en cinq rectangles égaux.

Nous écrirons les équations suivantes d'après la manière actuelle.

2^e^ *équation*. Deux quantités sont égales entre lesquelles une quantité naturelle est supprimée. Nous écrirons :

Exemple :

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 = 8x^0, \\ 3x^3 = 12x, \end{array}\right\} x = 2.$$

3^e^ *équation*. *Exemple :*

$$\left.\begin{array}{l} 2x^3 = 16x^0, \\ 3x^4 = 4x, \end{array}\right\} x = 2.$$

4^e^ *équation*. *Exemple :*

$$\left.\begin{array}{l} 2x^4 = 32x^0, \\ 3x^5 = 48x, \end{array}\right\} x = 2.$$

5^e^ *équation*. *Exemple :*

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 4x = 20x^0, \\ 5x^3 + 6x^2 = 32x, \end{array}\right\} x = 2.$$

Rudolf donne la règle ordinaire pour la résolution de l'équation du second degré.

La figure se rapporte à l'équation

$$x^2 + 8x = 240;$$

on a

$$240 = 144 + 96, \quad 96 = 2.48 = 4.12 + 4.12;$$

il construit les deux rectangles 4.12 et le carré 12.12.

Ces trois rectangles ayant pour hauteur commune 12 sont réunis dans un seul rectangle ayant pour hauteur 12 et pour hauteur 20, et dont l'aire est 240 ; ainsi l'équation se trouve vérifiée. Il en est ainsi pour toutes les autres figures ; elles ne *démontrent* pas les solutions, mais les vérifient.

6^e *équation. Exemple :*

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 + 8x^0 = 12x, \\ 3x^3 + 9x = 14\tfrac{1}{2}x, \\ 3x^2 + 30x^0 = 19x, \\ 2x^3 + 31x = 21\tfrac{1}{2}x, \end{array}\right\} x = 2.$$

La figure vérifie l'équation

$$x^2 + 96 = 20x, \quad x = 12.$$

Stiffel dit que Rudolf a d'abord donné un énoncé faux, mais qu'il a rectifié dans un opuscule qu'il a publié postérieurement. Quel est cet opuscule?

7^e *équation. Exemple :*

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 12x^0 = 5x^2 \\ 5x^2 + 14x = 6x^3 \end{array}\right\} x = 2.$$

La figure vérifie l'équation

$$x^2 = 8x - 240, \quad x = 20.$$

Rudolf donne à la valeur 20 le nom *racine vraie :* c'est qu'il regarde la seconde racine $x = -12$ comme *fausse.*

8^e *équation. Exemple :*

$$\begin{array}{r} 24x^4 + 5x^2 = 52, \\ 3x^5 + 6x^3 = 72x, \\ x^6 + 3x^3 = 88, \\ 2x^7 + 4x^4 = 160x, \\ 2x^8 + 8x^4 = 640, \\ 3x^9 + 10x^5 = 928x. \end{array}$$

Cette classification des équations quadratiques est évidemment d'origine arabe (*voir* Alkhâgâmi de Wœpcke, *Nouvelles Annales*, tome IX, page 389, et tome XIII, page 148). L'Arabe introduit souvent l'unité comme facteur pour rétablir l'homogénéité géométrique, et par imitation Rudolf a un signe particulier pour représenter l'unité.

Deuxième différence. (Cautèles.)

On avait donné jusqu'à Rudolf vingt-quatre espèces d'équations du second degré. Alkhâgâmi en donna même vingt-cinq (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 389). Rudolf enseigne ici les moyens (cautèles) de réduire ces vingt-quatre espèces aux huit qu'il a indiquées. Il donne quatre règles pour opérer cette réduction : les deux premières règles apprennent à transporter un terme d'un membre dans un autre par le changement de signe; la troisième règle apprend à faire disparaître les radicaux par l'élévation à des puissances; la quatrième enseigne à faire disparaître les dénominateurs.

Troisième différence. (Énigmes.)

Cette troisième et dernière Partie ne porte aucun titre, et contient quatre cent trente-trois problèmes (*ænigmata*) pour l'application des huit règles cossiques. Il y a des questions numériques pour la spéculation et d'autres pour la pratique.

Et à la fin il y a huit problèmes qui ne peuvent se résoudre par ces huit règles cossiques, parce qu'elles mènent à des équations du troisième degré. Stiffel pense que par là Rudolf voulait dire : « Vois, mon cher lecteur, j'ai traité dans ce mien livre seulement de la cosz quadratique; eh bien, il y a encore la cosz cubique dont je ne t'ai rien dit; puisses-tu apprendre, à cause de cela, la cosz cubique: dans cette louable intention, je te montre ce cube. » En effet, l'ouvrage de Rudolf est terminé par la représentation d'un cube, divisé de manière à figurer les quatre termes du développement de $(3 + \sqrt{2})^3$.

Nous avons tiré ce qui précède des scolies que M. A. Drechsler, professeur, a *publiées* en 1851 sous ce titre : *Scholien zu Christoph Rudolfs Cosz*. Dresde ; in-8 de 47 p.

Kästner donne des renseignements fort curieux sur l'ouvrage de Stiffel [*Histoire des Mathématiques*, tome I, page 174 (*)]. Stiffel dédie son ouvrage à Christophe Ottendorffer, honorable bourgeois de Kœnigsberg (Prusse), et dans un appendice il lui raconte cette histoire de sa vie. Moine Augustin à Esslingen, il avait appris dans les livres de Luther que la vie monastique était une abomination devant Dieu, mais ne savait pas comment il pourrait subvenir à ses besoins hors de son couvent. Cela pesait lourdement sur sa conscience, surtout à cause des messes journalières. En 1520, ayant lu dans l'Apocalypse : *Timidis autem et incredulis... pars illorum erit in stagno ardenti, igne et sulphure* (XXI, 8), il ne pouvait plus ni dormir dans son lit ni veiller à matines, et lorsqu'il voyait les autres moines être gais, il déplorait de ne pouvoir être de même humeur. Enfin, lorsque, étant de nouveau dans la bibliothèque du couvent, il lut le chapitre XIII de l'Apocalypse, l'idée lui vint que la *bête* apocalyptique désignait le pape Léon X. Méditant sur le nombre apocalyptique 666, il pensait : Mon Dieu, quelle consolation, si l'on avait quelque calcul certain. Il trouvait bien, dans LEO DECIMVS, M.D.C.L.V.I, mais la lettre M était de trop, et il manquait la lettre X

(*) La première édition est de 1554 et la seconde de 1571 ; il y a une édition de 1615, imprimée à Amsterdam chez W. Janson. On dit qu'il existe une édition en hollandais de la même année 1615, imprimée aussi à Amsterdam.

pour faire 666. Or le nom peut s'écrire LEO X, et la lettre M peut signifier *mystérieux;* ayant fait cette découverte, il rentra dans sa cellule, se mit à genoux, remercia Dieu de cette consolation, et reprit courage. Ayant quitté le couvent et devenu prédicateur de la cour à Mansfeld, il montra ses calculs à Martin Luther, qui lui conseilla d'abandonner ces spéculations, qui n'avaient rien de certain. Toutefois, en 1532, menant une vie oisive, il poussa l'indiscrétion jusqu'à publier un opuscule, où, interprétant les paroles de Daniel, il fixait l'heure et le jour de la fin du monde en octobre 1533. Quand on lui objectait les paroles du Christ : *De die autem illo vel horâ nemo scit* (Marc, XIII, 32), il répondait que Jésus, comme homme, le savait pourtant; mais il avoue s'être trompé, confesse son erreur devant Dieu et les hommes, se repent de n'avoir pas écouté les conseils de son cher Luther, et devint si ennemi des calculs (bien entendu prophétiques), que, pendant quatorze années, il n'aimait pas d'en entendre parler (*); il eut pourtant une rechute (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 267).

Nous signalons ces aberrations mentales, parce qu'elles sont instructives. La psychologie ne sera établie sur des fondements stables que lorsqu'on aura bien étudié les anomalies de l'esprit humain, et les influences indestructibles des idées telles qu'elles sont inoculées dans la molle cervelle des enfants. Les désordres tératologiques des formes et des fonctions répandent un grand jour sur la structure et la vie normales des êtres organisés.

Note. Aux manuscrits de la Bibliothèque impériale (365, m. 4), il existe une traduction latine de l'ouvrage de Christophe Rudolf sous ce titre : *Arithmetica Christo-*

(*) Pleins de confiance dans cette prophétie, les paysans de sa cure se mirent à faire bombance et à dissiper tous leurs biens; trompés dans leur attente, ils voulurent tuer Stiffel, qui ne dut son salut qu'à l'intervention de Luther.

phori Rudolfi ab Jauer e germanica lingua in latinam a Christophoro Auvero, Petri Danesii mandato, Romæ, anno Christi 1540, *conversa.*

BIBLIOGRAPHIE.

A TREATISE ON THE CALCULUS OF OPERATIONS, DESIGNED TO FACILITATE THE PROCESSES OF THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS AND THE CALCULUS OF FINITE DIFFERENCES; by the Rev. *Robert Carmichael*, A. M. fellow of Trinity college, member of the royal irish Academy, and sometime examiner in mathematics in the Queen's University in Ireland. London, Longman, Brown, Green, and Longmans. In-8 de XII-170 pages; 1855. — Traité du calcul des opérations, destiné à faciliter les procédés du calcul différentiel et intégral et du calcul aux différences finies.

Dans toute opération analytique, on peut distinguer trois parties : 1° le signe qui indique l'opération à faire; 2° la quantité sur laquelle on opère, autrement le sujet de l'opération; 3° le résultat. Ainsi dans $\sqrt{4}$, le signe est $\sqrt{\ }$, le sujet est 4, le résultat est 2. Dans $d.x^2$, le signe est la lettre d, le sujet est x^2 et le résultat $2xdx$. On peut faire abstraction des deux dernières parties et ne raisonner que sur les signes indicateurs. Alors on parvient à des théorèmes très-instructifs, de nature philosophique et dont l'ensemble constitue ce que les Anglais nomment le *calcul des opérations*, et qu'ils cultivent beaucoup depuis quelques années. Donnons un exemple. Dans l'algèbre ordinaire, on a

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\ }} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\ }} = \sqrt[mn]{\ },$$

c'est un théorème de calcul opératoire. Dans l'analyse infinitésimale,

$$d^m . d^n = d^n . d^m = d^{m+n}, \quad ds = sd$$

sont d'autres théorèmes de ce genre. Le germe de cette doctrine est dans la relation indiquée par Leibnitz entre les exposants des puissances et les exposants différentiels. Mais le premier fondateur est Arbogast. On lit dans son *Calcul dedérivation* (1800) : « Ici nous allons présenter » la chose sous un autre aspect. Nous allons *détacher* des » dérivées leur *échelle de dérivation* (p. 308). » C'est ce qu'on appelle la méthode des *échelles détachées* (*). Mais Arbogast ne considère que les *différences* et les *différentiels*, et ses notations sont disgracieuses. Le second et véritable fondateur du calcul des opérations est Servois (*Annales de Gergonne*, t. V, p. 93 ; 1814). Le premier il a considéré la question sous un point de vue général, l'a placée sur un terrain philosophique et a *inventé* les théorèmes fondamentaux qui découlent de cette position ; théorèmes que des géomètres anglais ont *réinventés* dans ces derniers temps.

Le révérend Carmichael cite ces géomètres : ce sont Hargreave, Boole, Bownin, Doukin, Graves, Murphy, Spotiswoodes, Sylvester, mais jamais Servois. La raison en est toute simple. Le savant auteur trouve qu'il est aussi superflu de dire que toute cette théorie est due à Servois, que de dire que la quadrature de la parabole appartient à Archimède. Cette explication admise, nous pouvons passer à l'analyse de cette production remarquable, qui réunit en un faisceau une foule de faits épars dans diverses collections, et imprime aux méthodes d'intégration une uniformité qui manque complétement dans les traités ordinaires.

(*) Cette idée se rencontre déjà chez Lorgna.

1. *Notation.* $\varphi.u$. Le point ne désigne ni une multiplication, ni que l'on a une fonction de u, mais il indique qu'il faut faire sur le sujet une certaine opération désignée par φ. Soit X le résultat de cette opération, de sorte que

$$\varphi.u = X,$$

alors

$$\varphi^{-1}.X = u;$$

φ^{-1} indique l'opération φ qu'il faut faire sur X pour reproduire u. On écrit aussi symboliquement

$$\frac{X}{\varphi} = u;$$

φ^{-1} se nomme *indice opératoire inverse.*

$$\sin^{-1} x = \text{arc sin} = x,$$
$$\log^{-1} x = \text{nomb. dont le log.} = x;$$

$\varphi_n \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} \dots \varphi_2 \varphi_1 . u$ indique n opérations à faire sur n.

On fait d'abord l'opération φ_1, sur ce premier résultat l'opération φ_2, sur ce second résultat l'opération φ_3, etc.

Si toutes ces opérations sont identiques, on écrit $\varphi^n.u$; n est un exposant opératoire, et

$$\varphi^n \varphi^{-n}.u = u = \varphi^0.u.$$

Cette équation définit l'indice opératoire négatif. D'ailleurs $\varphi^0.u$ indique qu'il ne faut faire aucune opération sur u, et, par conséquent, laisser la quantité telle qu'elle est.

$$a_1 \varphi_1\, u + a_2 \varphi_2 . u + \dots + a_n \varphi_n . u$$

s'écrit symboliquement

$$(a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n).u.$$

$F(\varphi).u$ signifie qu'il faut développer la fonction $F(\varphi)$ et ensuite ajouter le sujet u.

Exemple :

$$(a+\varphi)^m.u = a^m u + ma^{m-1}\varphi.u + m\cdot\frac{m-1}{m-2}a^{m-2}\varphi^2.u + \ldots$$
$$= \left(a^m + ma^{m-1}\varphi + m\cdot\frac{m-1}{2}a^{2m-2}\varphi^2 + \ldots\right).u,$$
$$e^{\varphi}.u = \left(1+\varphi+\frac{\varphi^2}{1.2}+\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\ldots\right).u.$$

Si φ désigne une dérivation, on a

$$e^{D}.u = u + D.u + \frac{D^2.u}{1.2} + \frac{D^3.u}{1.2.3} + \ldots$$
$$= \left(1 + D + \frac{D^2}{1.2} + \frac{D^3}{1.2.3} + \ldots\right).u.$$

Chapitre II. — *Principes élémentaires.*

1. *Loi commutative.* Lorsqu'on a

$$\varphi_1\varphi_2.u = \varphi_2\varphi_1\ u,$$

les deux symboles opératoires φ_1, φ_2, sont dits être soumis à la *loi commutative.*

Les nombres sont soumis à cette loi. En effet, un nombre est une opération sur l'unité (Euclide, livre VII, définition 2), de sorte que le nombre n peut s'écrire $n.1$, où l'unité est le sujet, et la multiplication par m est désignée par $mn.1$ (Euclide, liv. VII, déf. 15); on a

$$mn.1 = nm.1.$$

De même, u étant une fonction de deux variables x, y, on a

$$D_x D_y.u = D_y D_x.u;$$

ainsi les symboles de différentiation satisfont à cette loi.

Donc toutes les propriétés des nombres uniquement fondées sur la loi commutative existent aussi pour tous les symboles opératoires qui satisfont à cette loi.

Si l'on a

$$\varphi_1\varphi_2.u = \varphi_2\varphi_1.u,$$

posant

$$u = \varphi_1,$$

on a

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_1 = \varphi_2\varphi_1^2 = \varphi_1\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1^2\varphi_2$$

et, en général,

$$\varphi_1^m\varphi_2^n = \varphi_2^n\varphi_1^m.$$

De même qu'on a

$$a^m b^n = b^n a^m$$

et de là

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^m . u = \left(\varphi_1^m + m . \varphi_1^{m-1}\varphi_2 + m . \frac{m-1}{2}\varphi_1^{m-2}\varphi_2 + \ldots\right) . u.$$

Ceci n'aurait pas lieu sans la loi de commutation.

En effet

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^2 = \varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1 + \varphi_2^2,$$

qui ne se réduit à

$$\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2$$

que lorsque $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$.

Les symboles étant commutatifs, on a l'équivalence

$$e^{\varphi_1+\varphi_2} . u = e^{\varphi_1} e^{\varphi_2} . u.$$

Il suffit de développer les fonctions, on obtient

$$\left[1 + (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{1.2} + \ldots\right] . u$$

$$= \left(1 + \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + \varphi_2 + \frac{\varphi_2^2}{1.2} + \ldots\right) . u.$$

La coïncidence est évidente.

2. *Loi distributive.* u et v étant des sujets quelconques, lorsqu'on a

$$\varphi . u + v = \varphi . u + \varphi . v,$$

le symbole φ est dit soumis à la loi distributive.

Les nombres satisfont à cette loi. On a

$$a . b + c = a . b + a . c;$$

de même les dérivées de

$$D . u + v = D . u + D . v.$$

De

$$\varphi.u+v=\varphi.u+\varphi.v,$$

on déduit

$$\varphi^n.u+v=\varphi^n.u+\varphi^n.v,$$

ou

$$\varphi^2.u+v=\varphi.(\varphi u+\varphi v)=\varphi^2.u+\varphi^2.v,$$

et de suite et de même

$$\varphi^{-n}.u+v=\varphi^{-n}.u+\varphi^{-n}.v,$$

et, en général,

$$\mathrm{F}(\varphi).u+v=\mathrm{F}(\varphi).u+\mathrm{F}(\varphi).v.$$

F étant une fonction algébrique,

$$\frac{1}{\mathrm{F}(\varphi)}.u+v=\frac{1}{\mathrm{F}\varphi}.u+\frac{1}{\mathrm{F}(\varphi)}v.$$

3. *Loi des indices.* Lorsqu'on a

$$\varphi^m.\varphi^n.u=\varphi^n.\varphi^m.u=\varphi^{m+n}.u,$$

le symbole φ satisfait à la loi des indices.

Exemple :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

u étant une fonction de x seul, on a

$$\mathrm{D}_x^m.\mathrm{D}_x^n.u=\mathrm{D}_x^n.\mathrm{D}_x^m.u=\mathrm{D}_x^{m+n}.u.$$

Le *Chapitre III* traite de l'intégration des différentielles totales linéaires et débute par ce théorème :

$$(x\mathrm{D}_x)^p.\mathrm{A}_m x^m=m^p.\mathrm{A}_m x^m,$$

car

$$(x\mathrm{D}_x).\mathrm{A}_m x^m=m\,\mathrm{A}_m x^m,$$
$$(x\mathrm{D}_x)^2.\mathrm{A}_m x^m=m^2\,\mathrm{A}x^m,$$

et ainsi de suite.

Donc

$$\mathrm{F}(x\mathrm{D}x).\mathrm{A}_m x^m=\mathrm{F}(m).\mathrm{A}_m x^m;$$

où F est une fonction algébrique de $x\mathrm{D}x$.

Si l'on a $U = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$,

$$F(xDx)\,U = F(0)A_0 + F(1).A_1 x + F(2)A_2 x^2 + \ldots + F(n)A_n x^n$$

et aussi $\dfrac{U}{F(xDx)} = \dfrac{1}{F(0)}A_0 + \dfrac{1}{F(1)}A_1 x + \ldots + \dfrac{1}{F(n)}A_n x^n$,

$$a^{xDx}U = A_0 + aA_1 x + a^2 A_2 x^2 + \ldots + a^n A_n x^n,$$

$$\frac{U}{a^{xDx}} = A_0 + \frac{1}{a}A_1 x + \frac{1}{a^2}A_2 x^2 + \ldots + \frac{1}{a^n}A_n x^n,$$

$$F(xDx).e^{A_n x^n} = F(0).1 + F(n)A_n x^n + \frac{F(2n)}{1.2}(A_n x^n)^2 + F(3n).\frac{(A_n x^n)^3}{1.2.3};$$

il suffit de développer $e^{A_n x^n}$.

$$xD_x(xD_x - 1)(xD_x - 2)\ldots(xD_x - n + 1).u = x^n D_x^n.u.$$

$$F(xD_x).x^m v = x^m F(xD_x + m)v.$$

Si $u = x^m$,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &xD_x(xD_x - 1)(xD_x - 2)\ldots(xD_x - n + 1).x^m \\ &= m.m - 1\ldots m - n + 1\,x^m. \end{aligned} \right.$$

Nous indiquons les relations suivantes faciles à trouver :

$$F(D).uv = uF(D).v + \frac{Du}{1}.F'(D)v + \frac{D^2u}{1.2}.F''(D)v + \frac{D^3u}{1.2.3}.F'''(D)v,$$

$$u\,F(D)v = F(D).uv - F'(D).Du.v + F''(D).\frac{D^2u}{1.2}.v - \ldots$$

Les accents sont des dérivations par rapport à D.

Applications.

$$x^2 D_x^2 y = ax^m + bx^n,$$

équation à intégrer.

Cette équation est équivalente à

$$x\,\mathrm{D}_x\,(x\,\mathrm{D}_x - 1)\,y = ax^m + bx^n,$$

dont la solution symbolique est

$$y = \frac{1}{x\,\mathrm{D}_x(x\,\mathrm{D}_x - 1)}\,(ax^m - bx^n) + \frac{1}{x\,\mathrm{D}_x(x\,\mathrm{D}_x - 1)}\cdot 0$$

Le premier terme est, d'après ce qui précède,

$$\frac{ax^m}{m(m-1)} + \frac{bx^n}{n(n-1)}\ [\textit{voir}\,(1)];$$

or

$$\frac{1}{x\,\mathrm{D}_x\,(x\,\mathrm{D}_x - 1)} = \frac{1}{x\,\mathrm{D}_x - 1} - \frac{1}{x\,\mathrm{D}_x},$$

$$x\,\mathrm{D}_x - 1\,.\,\mathrm{A}x = 0,\quad \mathrm{A}x = \frac{0}{x\,\mathrm{D}_x - 1},$$

$$x\mathrm{D}_x.\mathrm{B} = 0,\quad \frac{0}{x\,\mathrm{D}_x} = \mathrm{B}.$$

Ainsi l'intégrale est

$$y = \frac{ax^m}{m(m-1)} + \frac{bx^n}{n(n-1)} + \mathrm{A}x + \mathrm{B};$$

A et B sont deux constantes arbitraires, m et n ne doivent être égaux ni à zéro, ni à l'unité

Le *Chapitre IV* applique le calcul des symboles aux équations à différentielles partielles. Ce qui est très-long, embarrassé, par les procédés ordinaires, devient court, facile et *mnémonique*.

Par exemple, étant donnée l'équation

$$x^n\,\mathrm{D}_x^n z + nx^{n-1}y\,\mathrm{D}_x^{n-1}\,\mathrm{D}_y z$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}\,x^{n-2}y^2\,\mathrm{D}_x^{n-2}\,\mathrm{D}_y^2 z + \ldots = \theta_a + \theta_b,$$

où z est une fonction de x, y; θ_a, θ_b des fonctions homogènes de x, y, z de degré a et b, on trouve de suite

$$z = \frac{\theta_a}{a(a-1)\ldots(a-n+1)} + \frac{\theta_b}{b(b-1)\ldots(b-n+1)} + u_0 + u_1 + \ldots u_{n-1},$$

u_0, u_1, u_2, etc., sont des fonctions homogènes arbitraires de degré o, 1, 2, etc.

Le *Chapitre V* traite diverses équations remarquables aux différentielles totales et partielles.

Le *Chapitre VI* est consacré à l'intégration de systèmes d'équations différentielles simultanées, totales et partielles. On y intègre d'une manière prompte les équations qui déterminent : 1° les petits mouvements des gaz élastiques, des solides homogènes élastiques et des liquides homogènes incompressibles; 2° les relations entre la vitesse angulaire de rotation et le temps; 3° le mouvement azimuthal du plan d'oscillation du pendule. La seconde section renferme des considérations sur la réduction d'intégrales définies.

Le *Chapitre VII* contient des interprétations de symboles ou les résultats de certains symboles agissant sur des fonctions données.

Le *Chapitre VIII* renferme des applications très-intéressantes à la géométrie et que nous donnerons ailleurs (voir *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 221).

L'équation symbolique

$$e^{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y}\mathrm{F}(x, y) = 0$$

équivaut à l'equation

$$\mathrm{F}(x+a, y+b) = 0$$

ou à un changement d'origine; l'équation symbolique

$$e^{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z}\mathrm{F}(x, y, z) = 0$$

équivaut à

$$\mathrm{F}(x+a, y+b, z+c) = 0;$$

l'équation symbolique

$$e^{\omega(x\mathrm{D}_y - y\mathrm{D}_x)}\,\mathrm{F}(x, y) = 0$$

équivaut à

$$\mathrm{F}(x\cos\omega - y\sin\omega,\ x\sin\omega + y\cos\omega) = 0,$$

ou à une rotation ω de la courbe $\mathrm{F}(x, y) = 0$.

Le *Chapitre IX* contient diverses applications sur des opérations symboliques et sur des intégrations.

Le *Chapitre X* et dernier donne les diverses formules du calcul aux différences finies. Voici un spécimen :

$$e^{h\mathrm{D}}.fx = f(x+h), \quad e^{\mathrm{D}}\,fx = f(x+1),$$

d'où

$$(e^{\mathrm{D}} - 1).fx = f(x+1) - f(x) = \Delta fx,$$

et, par des opérations successives, on obtient

$$(e^{\mathrm{D}} - 1)^n.f(x) = \Delta^n.fx = f(x+n) - nf(x+n-1)$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2} f(x+n-2) + \ldots,$$

ou

$$\Delta^n u_x = u_{x+n} - nu_{x+n-1} + \frac{n.n-1}{1.2}\,u_{x+n-2} - \ldots,$$

et de là

$$\mathrm{F}(\Delta).u_x = \mathrm{F}(e^{\mathrm{D}} - 1).u_x;$$

F est une fonction algébrique quelconque.

$$e^{\mathrm{D}} = 1 + \Delta, \quad e^{n\mathrm{D}}.u_x = (1+\Delta)^n.u_x,$$

d'où

$$u_{x+n} = u_x + n.\Delta u_x + \frac{n.n-1}{1.2}\,\Delta^2 u_x.$$

L'ouvrage est terminé par deux appendices où l'on rencontre une très-belle et ingénieuse démonstration d'un théorème de Gauss sur l'action attractive d'une masse placée soit entre deux surfaces fermées qui ne se coupent pas, soit en dehors de ces surfaces.

Cette analyse ne donne qu'une idée incomplète des richesses de cet excellent ouvrage. Puisse bientôt une traduction faire revivre en France le calcul symbolique d'Arbogast et de Servois, calcul qui condense et mnémonise une foule de théorèmes. Telle doit être la tendance de l'enseignement, car la vie est courte, la besogne longue et les ouvriers paresseux. C'est l'opinion du Talmud. Dans un autre endroit il dit :

Mange du pain avec du sel, bois de l'eau dans une écuelle, dors sur la dure et applique-toi avec ardeur à l'étude de la science [Torah (*)]. Exhortation peu goûtée de notre siècle.

Cours de cosmographie ou Éléments d'Astronomie, comprenant les matières du nouveau *Programme* arrêté pour l'enseignement des Lycées et l'admission aux Ecoles spéciales; par *Charles Briot*, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, docteur ès sciences, etc. Paris, 1853; in-8 de 304 pages, 3 planches (sans préface.)

Au temps jadis, lorsqu'on faisait encore des *ouvrages*, chaque auteur expliquait son dessein dans une préface et apprenait au lecteur en quoi l'ouvrage différait en mieux d'autres sur le même sujet. Aujourd'hui que nous ne faisons que des *livres*, toute préface est inutile. Il suffit, pour assurer le débit, chose essentielle, la seule essentielle, d'écrire sur le titre que le livre est conforme aux programmes. *Faites-nous des Lettres persanes*, demandaient les libraires au siècle de Montesquieu. *Faites-nous des livres à programmes*, demandent les libraires au siècle

(*) Le θεωρία des Grecs dérive peut-être de l'hébreu *torah*, qui veut dire enseignement, doctrine.

utilitaire. Nous avons ici une excellente réponse, et l'âme commerciale du livre est dans la page finale (293) où l'on donne le *programme arrêté pour les examens du Baccalauréat ès Sciences et pour l'admission à l'École spécialemilitaire de Saint-Cyr et à l'École Polytechnique, avec les renvois aux pages du livre.*

La cosmographie, en se tenant au sens strict de ce mot, ne doit contenir que la description des corps qui composent l'univers, tout comme la *géographie* est la description de la terre, et c'est ce qu'on peut faire en peu de pages. Mais ce mot a reçu une grande extension. Ainsi la cosmographie comprend les mouvements des corps célestes, les moyens de les constater et de les mesurer, et même la connaissance des forces qui produisent ce mouvement. En d'autres termes, la cosmographie est devenue un Traité élémentaire d'astronomie. Pour ne pas éloigner les gens du monde, on évite quelquefois les dénominations scientifiques; mais de telles considérations ne devraient pas subsister dans l'enseignement sérieux universitaire. Le second nom *Éléments d'Astronomie,* que M. Briot a adopté, est le véritable, et c'est le seul qui devrait être adopté.

Le savant professeur auquel nous devons un Traité remarquable de Géométrie analytique et de bellesdémonstrations des théorèmes de mécanique de M. Poinsot, était très-apte à nous expliquer les positions mutuelles et les mouvements relatifs des divers rouages et ressorts du *char céleste,* comme s'exprime la Bible.

Selon la méthode ordinaire, l'auteur part des mouvements *apparents* pour venir aux *mouvements réels.* Lacaille suit une méthode opposée. Il suppose tout de suite un spectateur placé au centre du soleil et autour duquel *valsent* les planètes. La méthode Lacaille me paraît préférable etsurtout auprès des personnes étrangères aux sciences exactes. Après avoir expliqué les apparences à notre usage, il faudrait décrire les apparences pour un spectateur placé sur un satellite, sur la lune et même sur un satellite de Jupiter; et ensuite sur une planète inférieure et supérieure (*). On n'insiste pas assez sur ce qu'il faut entendre par le *sens* du mouvement. Le soleil décrit sur la calotte céleste une hélice sphérique. Cette hélice est-elle *dextrorsum* ou *sinistrorsum*? C'est une question à laquelle beaucoup d'élèves ne savent pas répondre, parce que les explications ne sont pas assez nettes. Autre question pour un spectateur placé sur le pôle : Quel est le mouvement de la lune, combien a-t-elle de phases ?

Les théories et les faits cosmiques consignés dans l'*Astronomie* de sir Herschel et dans le *Cosmos* de M. Alexandre de Humboldt sont fidèlement et clairement exposés dans la présente Cosmographie, qui est ainsi au parfait courant de la science. On y trouve les orbites de quelques étoiles doubles calculées récemment par M. Yvon Villarceau (page 292), et les expériences dynamiques de M. Foucault, avec une description du *gyroscope* que M. Briot avait déjà publiée dans la *Revue de l'Instruction publique* (6 janvier 1853). L'explication n'est pas tout à fait à la portée des non-géomètres. M. Yvon Villarceau a eu la bonté de nous remettre depuis longtemps une théorie mathématique de cet admirable instrument, que le défaut d'espace ne nous a pas encore permis d'insérer dans les *Nouvelles Annales*, et que nous donnerons incessamment.

A l'occasion de ces expériences, l'auteur parle du *mécanisme* de Cardan (page 273). Or Cardan ne donne pas ce

(*) J'en ai parlé il y a quelques années à Arago, qui m'a dit qu'en effet la méthode de Lacaille était très-bonne, mais qu'on doit se conformer à la marche suivie par Laplace. Je lui ai répondu que le *Jurare in verba magistri* n'est admis qu'en théologie.

mécanisme, comme étant de son invention. Voici ce qu'on lit dans Cardan, sur une voiture où l'empereur Charles-Quint pouvait rester assis tranquillement sur son siége, quels que fussent les mouvements de la voiture :

Simili ratione inventum est ut Cæsaris sedes ita disponeretur ut, quocunque situ constituatur, ille immobilis ac commode, dum vehitur, sedeat. Hoc tractum ex armillarum ratione. Cum enim circuli tres chalybæi constituentur, polis sursum, deorsum, ante, retro, dextra et sinistra mobilibus cum plures non possent esse situs, necesse est ipsum in essedo quomodocunque agatur quiescere perpetuo. Habet hoc aliquid non absimile lucernis a quorum exemplo ducta est ratio : circumvolutæ enim patulæ oleum nequaquam effundunt. (De subtilitate, lib. XVII, de artibus, artificiosisque rebus, p. 612, Card. Opera, tome III. Lugduni, 1663.)

On voit que cette voiture a été précédée de la lampe inversable. Le célèbre Januelo, horloger de Charles-Quint et qu'il a mené avec lui à sa retraite de Yuste, est, dit-on, l'inventeur de la voiture.

Nous soumettons une observation à tous nos cosmographes.

Il n'est pas d'usage en France de citer les auteurs. On pourrait cependant s'écarter de cet usage dans la composition de cosmographies destinées à la jeunesse. Parlant constamment de l'horloge, n'est-il pas convenable de diriger la pensée du lecteur vers l'horloger. Newton et Euler, têtes assez fortes, n'y manquent pas. Écoutons d'ailleurs ce que dit là-dessus un philosophe du XVIII[e] siècle, ami et partisan enthousiaste de Voltaire :

« Les corps semblent assujettis dans leurs mouvements
» à deux sortes de lois essentiellement différentes. Les
» unes sont des conséquences nécessaires de l'idée que
» nous avons de la matière ; les autres paraissent l'effet

» de la volonté libre d'*un être intelligent* qui a voulu » que le monde fût comme il est plutôt que de toute autre » manière. » (Le marquis de Condorcet à M. d'Alembert, sur le système du monde et sur le calcul intégral; page 4. Paris, 1768; in-4.)

Ceci me rappelle une anecdote de la vie de Képler. Dans une réunion de professeurs chez Képler, la conversation roulait sur des questions de philosophie. Lorsque tous furent partis, la femme de Képler, dit à son mari : « J'ai entendu le professeur un tel soutenir que l'univers pouvait être le résultat du hasard. Je t'ai entendu dire souvent qu'il règne partout un ordre admirable; comment peut-on dire que cela provient d'un coup de dé; c'est une grosse absurdité. — Pas si grosse que tu penses. Voyons, lorsque tu veux faire une salade, tu prends des feuilles de chicorée, de l'huile, du vinaigre et du sel. Supposons que tu jettes tous ces ingrédients en l'air, en retombant à terre, ils peuvent se mêler de manière à faire une salade. — Cela n'est pas absolument impossible, j'en conviens, reprit Madame Képler, mais tu es bien convaincu que la salade ne sera jamais aussi bonne que si je l'avais faite moi-même. »

Cette philosophie domestique a bien son prix.

Sopra gli integrali generali di alcune equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti. Memoria del socia attuale prof. *Barnaba Tortolini*, inserita nella parte secunda del tomo XXV delle *Memorie della Società italiana delle scienze in Modena*. Modena, 1854; in-4 de 34 pages.

Le savant analyste, connu par tant de beaux travaux, se sert ici de la méthode des *symboles* pour intégrer facilement et avec beaucoup de généralité des équations aux différences partielles qu'on rencontre fréquemment dans la physique mathématique. Essayons de donner une idée de ce remarquable travail.

Soit
$$u = f(x),$$
alors
$$f(x + at) = u + at\,D_x + \frac{a^2 t^2}{1 \cdot 2} D_x^2 + \ldots = e^{at\,D_x},$$
équation symbolique.

Soit maintenant
$$u = f(x, y),$$
alors
$$f(x + at, y + bt) = u + \begin{matrix} t \,.\, a\,D_x \\ t \,.\, b\,D_y \end{matrix} + \frac{t^2}{1 \,.\, 2}\left|\begin{matrix} a^2 D_x^2 \\ 2ab\,D_x\,D_y \\ b^2 D_y^2 \end{matrix}\right| + \ldots$$
$$= e^{t\square} \,.\, u$$
ou
$$\square = a\,D_x + b\,D_y,$$
et ainsi de suite.

Étant donnée l'équation aux différences partielles
$$(D_t - a\,D_x - b\,D_y - c\,D_z \ldots - m) = f(x, y, z \ldots T);$$
x, y, z,..., t sont des variables indépendantes, les dérivées étant prises sur la fonction principale u; a, b, c d,..., m sont des constantes.

On a
$$u = e^{mt}\,e^{t\square}\,\psi(x, y, z, \ldots)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} e^{m(t-T)}\,e^{(t-T)\square} f(x, y, z, \ldots T)\,dT,$$
ψ est la fonction arbitraire à quoi se réduit f en faisant $t = T$.

Posons
$$F(T) = f[x + a(t - T)y, \quad b(t - T), \quad z(t - T), \ldots T],$$

on a

$$u = e^{mt}\psi(x + at,\ y + bt,\ z + ct,\ldots) + \int_{t_0}^{t} e^{m(t-T)}\,F(T)\,dT.$$

Si l'on a

$$(D_t - aD_x - bD_y - cD_z \ldots - m)\,u = 0,$$

alors

$$u = e^{mt}\psi(x + at,\ y + bt,\ z + ct,\ldots).$$

Voici les principales équations intégrées dans ce Mémoire :

1°. $(aD_x + bD_y + cD_z)^n . u = f(x, y, z)$;

2°. $(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) . u = f(x, y, z)$;

3°. $(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)^2 . u = f(x, y, z)$;

et, en général,

$$(AD_x^m + BD_y^m + CD_z^m)^n . u = f(x, y, z).$$

L'intégrale est débarrassée d'imaginaires qui se trouvent dans l'intégrale donnée par Poisson.

L'on donne les fonctions arbitraires à ajouter à chaque intégration et toujours par une marche uniforme. Nous regrettons que les limites imposées au *Bulletin* ne nous permettent pas d'entrer en plus de détails.

BIOGRAPHIE.

QUERRET (Jean-Joseph).

Querret (Jean-Joseph) naquit à Saint-Malo, en 1783, de parents sans fortune. Son père, entrepreneur de bâtiments, soutenait par son travail une famille composée de trois enfants dont Querret était le plus jeune. Le père mourut pendant que ses enfants étaient encore en bas âge, et sa veuve eut à passer plusieurs années laborieuses et pénibles, jusqu'à ce que son fils pût être en âge de venir au secours de sa famille par sonpropre travail. Ce moment ne tarda pas à arriver; dès l'âge de onze ans, Querret était admis à l'école d'hydrographie de sa ville natale, et ses progrès y furent si rapides, que, deux ans plus tard, M. Lecerf, son professeur, le jugeait capable de le suppléer.

C'est ainsi que Querret, à l'âge de treize ans, entrait dans la carrière de l'enseignement. Il s'y livra avec une ardeur qui ne se démentit jamais, et, outre une classe publique qu'il faisait deux fois par jour, il donnait un grand nombre de lecons particulières. Cependant son temps n'y était pas entièrement consacré; il trouvait encore le moyen de se livrer à des études approfondies et acquit des connaissances très-étendues sur l'histoire des sciences qu'il enseignait.

Ces études annonçaient un esprit sérieux et distingué. M. Lecerf pressa Querret de se présenter pour entrer à l'École Polytechnique, où les admissions étaient alors gratuites.

Mais Querret était le seul soutien de sa famille; son absence aurait été pour elle une cause de privations. Il sacrifia à cette considération toute-puissante le brillant avenir que lui aurait ouvert une admission certaine à l'École.

Parvenu à l'âge de vingt ans, Querret sentit la nécessité d'apprendre les langues anciennes et voici comment il y parvint. Au commencement de ce siècle, il s'était formé à Saint-Malo une société de plusieurs jeunes gens : les uns enseignaient les mathématiques aux autres, qui, à leur tour, devenaient professeurs de langues. Le dimanche était ordinairement consacré à ces réunions; les progrès furent rapides. Querret était le professeur de mathématiques; il avait pour élèves dans les sciences, puis pour maîtres de langues, dans cette espèce d'enseignement mutuel, deux frères, devenus plus tard diversement célèbres : l'un, longtemps administrateur spirituel du diocèse de Saint-Brieuc, est aujourd'hui à la tête des Frères de la Doctrine chrétienne, qui rendent tant de services à l'instruction primaire; l'autre était l'illustre auteur de l'*Essai sur l'Indifférence* et des *Paroles d'un Croyant*. Des liaisons d'amitié entre Querret et ces hommes ont duré toute la vie.

En 1812, Querret avait été mis à la tête du collége de Saint-Malo, avec le titre de chef d'institution, qu'il conserva pendant onze ans. Vers la fin de cette administration, il avait acheté, aux environs de Saint-Malo, une propriété où il se retira en 1823, à l'époque où des discussions survenues avec le conseil municipal le forcèrent d'abandonner ses fonctions. Déjà plusieurs écrits l'avaient fait connaître. En 1822, il avait publié un petit *Traité d'Arithmétique*, destiné à l'enseignement pour les écoles primaires, et dont il a été fait plusieurs éditions; il avait adressé au *Journal de Mathématiques*, rédigé par M. Gergonne (*), depuis recteur de l'Académie de Montpellier, plusieurs articles qui l'avaient fait avantageusement remarquer des hommes spéciaux; aussi, en 1824, M. l'abbé Jean-Marie de Lamennais, alors vicaire général de la grande aumônerie de France, l'engagea-t-il vivement à faire un voyage à Paris. A peine arrivé, Querret se trouva en relation avec Cauchy, Binet, Poisson, Ampère, Francœur, Arago, Thenard, etc., qui apprécièrent l'étendue de ses connaissances et conçurent pour lui une haute estime.

Malgré les instances qui lui furent faites pour qu'il restât à Paris, Querret n'y résida que le temps nécessaire

(*) Tomes XII, XIII, XIV, XV. Au tome XII, p. 362 (1823), sa belle démonstration sur l'équivalence des tétraèdres. TM.

pour subir avec distinction les épreuves du doctorat ès Sciences. Sa thèse de mathématiques fut surtout remarquée. « C'est un bon ouvrage, » disait Legendre.

Tous les jeunes gens de nos écoles connaissent, en effet, aujourd'hui cette ingénieuse et élégante démonstration des pyramides équivalentes, due à Querret; elle sert de base à une foule de démonstrations pour la solidité des corps, et Legendre, comme on le sait, l'a insérée avec les plus grands éloges dans son *Traité élémentaire de Géométrie*.

Docteur ès Sciences, officier de l'Université, Querret fut nommé professeur de Mathématiques transcendantes à la Faculté des Sciences de Montpellier. Il y arriva en 1825.

Malgré les succès de son enseignement, Querret resta peu à Montpellier; il désirait vivement se rapprocher de sa famille, et, le 14 décembre 1826, il fut appelé à la chaire de Physique du collége royal de Nantes, avec l'autorisation de conserver le titre de professeur de Faculté et la moitié des appointements qu'il avait à Montpellier. Pendant son séjour à Nantes, il fut admis au nombre des membres de la Société royale académique de cette ville.

L'année suivante, et toujours par le désir de se rapprocher encore davantage de sa famille, il alla occuper au collége royal de Rennes une place semblable à celle qu'il remplissait à Nantes, et il joignit à ses fonctions de professeur des sciences mathématiques et physiques un cours de géométrie et de mécanique appliquées aux arts, établi à Rennes par l'administration municipale.

M. Charles Dupin vint examiner à Rennes cet enseignement, et, sur son Rapport, M. le Ministre de l'Instruction publique envoya à Querret un grand ouvrage de mathématiques en témoignage de sa haute estime.

C'est en ce moment qu'éclata la révolution de juillet. Le gouvernement nouveau supprima le cumul et Querret eut à choisir entre les fonctions qu'il remplissait à Rennes et celles qu'il avait remplies à Montpellier. Naturellement il opta pour ces dernières.

A peine arrivé à Montpellier, les fatigues du voyage, le climat du Midi, l'éloignement de sa femme et de ses nombreux enfants, et peut-être aussi d'honorables regrets politiques, altérèrent sensiblement la santé de Querret. Un congé d'un an lui avait été accordé; mais, en 1832, l'état de sa santé ne lui permettait pas encore d'aller reprendre ses travaux à Montpellier, et il demanda au Ministre de l'Instruction publique l'autorisation de rester, avec des appointements modiques, dans ses foyers jusqu'en 1834, époque à laquelle il aurait complété le temps nécessaire pour avoir droit à une pension de retraite. Sa demande ne fut point accueillie, et, par un arrêté en date du 19 avril 1833, le Ministre déclara sa place vacante à la Faculté de Montpellier. Cet arrêté doit paraître au moins bien rigoureux envers un professeur dont les travaux méritaient assurément d'autres égards.

Toutefois Querret se résigna et se retira à la campagne, rentrant dans la solitude de ses études, ne songeant plus à s'occuper que de l'éducation de sa nombreuse famille. Dans sa retraite, les jeunes gens qui se livraient aux sciences étaient sûrs de trouver auprès de Querret toutes les ressources dont ils avaient besoin. Il se rendait souvent chez les Frères de la Doctrine chrétienne.

Trois ans avant sa mort, il songea à fonder à Dinan un établissement qui réunît à la fois, sous la surveillance de l'autorité municipale et universitaire, sous son administration et celle de M. l'abbé de Lamennais, les avantages de l'instruction secondaire et ceux de l'enseignement primaire. Le Ministre avait donné son assentiment au projet présenté, lorsque des intrigues et des tracasseries, suscitées dans un intérêt tout matériel, vinrent en empêcher la réussite. Querret avait oublié les persécutions récentes aussi bien que les anciennes, lorsque la mort vint l'enlever à la science, à sa famille et à ses amis, le 8 décembre 1839, à l'âge de cinquante-six ans.

Il nous reste à indiquer, en quelques mots, ses principaux ouvrages.

Outre le petit Traité méthodique d'Arithmétique déjà indiqué, il avait publié :

1°. En 1819, des *Leçons d'Hydrographie,* dont il fut fait une seconde édition dix ans plus tard avec la collaboration de Michelle, professeur d'hydrographie, prédécesseur de M. Delafoie, professeur actuel. C'est à l'usage des capitaines de cabotage. Imprimerie de Hovins, à Saint-Malo.

2°. Un *Traité d'Arithmétique,* plus étendu, suivi d'une *Exposition des principes fondamentaux de l'Algèbre, avec leur application à l'Arithmétique et au Commerce.* Il y a eu également deux éditions de cet ouvrage.

3°. Des *Tables de Logarithmes* et des sinus et cosinus de seconde en seconde, et des tangentes et cotangentes de minute en minute pour tous les degrés du quart de cercle; suivies d'une *Table des Logarithmes des nombres,* depuis 1 jusqu'à 10800, avec une introduction en français et en anglais, dans laquelle on ramène à l'usage des sinus et cosinus seulement tous les problèmes usuels de l'astronomie nautique. Un gros volume in-8; Saint-Malo; L. Hovins, imprimeur libraire; 1830.

4°. Des *Leçons élémentaires d'Algèbre,* approuvées par le Conseil royal.

5°. Des *Leçons élémentaires de Géométrie plane*, qui devaient être complétées par la publication de la géométrie à trois dimensions.

Tels sont les principaux ouvrages publiés par Querret;

mais il reste dans ses papiers des recherches beaucoup plus longues et des travaux bien plus étendus encore. Un homme spécial y puiserait sans doute de précieux renseignements.

Nous devons citer, parmi ses travaux, des mélanges d'arithmétique, d'algèbre, d'hydrographie, de mécanique et d'astronomie; des Notices sur les travaux et la vie de plusieurs mathématiciens célèbres : L'Hôpital, Jean Bernoulli, Lacroix, Bezout, etc.; des Cours et des Programmes de Chimie et de Physique, mais surtout une grande entreprise que la mort de Querret n'a pas permis de mener à fin : la traduction du *Calcul intégral* d'Euler, ouvrage en trois gros volumes in-4, dont Querret n'a eu le temps de traduire que les deux premiers. On doit faire des voeux pour qu'un homme, ami de la science, entreprenne de terminer et de publier ce grand travail, dont l'apparition ferait sans doute sensation dans le monde savant. (*Communiqué par* M. CABARET, *docteur en médecine, ami de Querret*)

Note du Rédacteur. La traduction du *Calcul différentiel et intégral* d'Euler est encore aujourd'hui l'ouvrage le plus clair qu'on puisse mettre entre les mains des élèves, et, en y ajoutant les progrès faits depuis, ce serait le meilleur manuel pour les professeurs. On ne saurait trop engager la famille à faire cette publication qui consolerait de tant de productions sans nom, sans valeur scientifique que chaque jour voit éclore et disparaître. Il y a quelques années, il s'est agi, à Bruxelles, de traduire les œuvres d'Euler. L'entreprise n'a pas abouti. Les ouvrages publiés sont : *Lettres à une princesse d'Allemagne, l'Algèbre, l'Arithmétique, Essai sur la Théorie de la musique ;* en tout cinq volumes. Un éditeur acquerrait un grand crédit, par un tel travail, mériterait les encouragements du gouvernement et la reconnaissance de la postérité.

NEPER.

Né à 1550 à Merchiston, non loin d'Édimbourg, il est mort le 3 avril 1617, âgé de soixante-sept ans.

Un de ses ancêtres, Donald, second fils du comte de Lennox sous le règne de David le second (XIV^e siècle), ayant fait une très-belle action, sans égale, *pair less*, la famille fut surnommée *Nepair*. Du reste, ce nom est différemment orthographié : *Neper*, *Neperus*, *Napeir*, *Naper*, *Napier*. C'est ce dernier nom que la famille porte maintenant.

Il a hérité de la baronnie de Merchiston, en 1605, par la mort de son père, mais il n'était pas *pair d'Écosse* et ne portait pas le titre de *lord*. C'est son fils et héritier, Archibald, qui a été élevé à cette dignité en 1626.

Neper fit son éducation au collége de Saint-Andrews où il entra en 1563, à l'âge de treize ans. Sorti de ce collége, il fit une tournée sur le continent, et, revenu en 1571 à Merchiston, il s'y maria à l'âge de vingt et un ans. Il ne quitta plus l'Écosse, et, zélé puritain, il fut membre de plusieurs synodes presbytériens; il fut un de ceux que l'assemblée générale d'Édimbourg députa vers Jacques pour demander l'excommunication contre certains seigneurs catholiques, parmi lesquels figure le père de la seconde femme de son père. Il avait perdu la première en 1579.

Étant encore étudiant à Saint-Andrews, il conçut l'idée, à ce qu'il raconte lui-même, de dévouer sa vie à l'interprétation des prophéties, étant excité à cette entreprise, dit-il, par l'aveuglement des catholiques qui ne voulaient pas voir que leur croyance était vouée à la destruction dans le livre de l'*Apocalypse*; et il dit même, vers la fin de sa vie, que cette entreprise exégétique a toujours été sa principale occupation, et les mathématiques seulement un délassement. La première édition de son ouvrage sur l'*Apocalypse* est d'Édimbourg, 1593, in-4, et la dernière édition qu'il a donnée lui-même est de 1611, sous ce titre :

A plaine discovery of the whole revelation of S. John, set down in two treaties: the one searching and proving the true interpretation thereof; the other applying the same paraphrasticallic and historicallic to the text; set forth by John Napeir (sic), *L. of Merchiston and now revised, corrected and inlarged by him, with a resolution of certain doubts moved by some wellaffected brethren; whereunto are annexed certain oracles of Sibylla agreing with the revelation and other places of Scripture. London, printed for John Norton*; 1611, *cum privilegio Regiæ Majestatis.* In-4 de VIII-375 pages.

Neper fixe la fin du monde entre 1688 et 1700, et, après nous avoir donné les prophéties sibyllines qui nous restent, il termine son ouvrage par cette singulière invocation :

O toi Rome, si tu veux te réformer et croire au vrai christianisme, crois en cette révélation qui proclame publiquement ta ruine; et si tu persistes à rester païenne, crois les anciens oracles de la Sibylle, si longtemps vénérée dans ta capitale; repens-toi à ton heure suprême si tu aimes ton salut éternel. Amen.

Quelle aberration! Pascal dit que jamais on ne fait le mal si pleinement, si gaîment que quand on le fait par conscience; il en est de même des folies Jamais on ne les dit avec tant d'abondance et d'assurance que lorsqu'on les puise dans ce qu'on appelle sa conscience. *Folie* est le nom que donne Newton à cette exégèse apocalyptique appliquée à deviner l'*avenir*. Que fait-il lui-même? Il remplace cette folie par une autre et se sert de cette exégèse pour expliquer le *passé*. A cette occasion on se rappelle encore cet admirable chapitre où Pascal décrit l'homme comme un composé de grandeur et de misère, et Pascal lui-même, sublime géomètre, sectaire digne de pitié, est une preuve éclatante de cette composition binaire. Il sait parfaitement que la terre n'est qu'une molécule de l'univers, et sans cesse il rattache le sort de l'univers à l'histoire de cette molécule, soumettant tout au problème des *parties*, tout excepté cette histoire.

Toutefois cet ouvrage de Neper, dont le plan est géométrique, a fait une assez grande sensation. Il y en a eu deux éditions presque consécutives en 1641 et 1645 à Édimbourg, format in-4. Il a été traduit en français à la Rochelle, en 1662, format in-8, sous ce titre :

Ouverture de tous les secrets de l'Apocalypse de saint Jean, par deux Traités : l'un recherchant et prouvant la vraie interprétation d'icelle ; l'autre appliquant au texte cette interprétation paraphrastiquement et historiquement ; par Jean Napeir, c'est-à-dire *non pareil*, sieur de Merchiston, *revue par lui-même* et mise en français par Georges Thomson, Escossais.

Il y a une seconde édition aussi in-8 de 1605. Du reste, il en existe plusieurs traductions en allemand. Il semble que l'esprit humain a aussi son oïdium qui l'infecte de temps à autre. Ainsi aujourd'hui les tables tournantes et parlantes, les tendances mystiques et thaumaturgiques, les efforts pour remplacer les classiques païens par les écrivains pieux du moyen âge, sont à coup sûr les effets d'un tel oïdium.

Neper n'est pas le premier protestant qui ait converti l'œuvre de saint Jean en arme offensive et ce n'est pas à ce titre que l'immortalité est acquise à son nom. Il doit cette immortalité à son second ouvrage *Mirifici logarithmorum*, qui s'adresse non à une secte, mais au genre humain ; nous en avons parlé longuement (*voir* p. 1 et 40).

La même idée de raccourcir les calculs se retrouve encore dans son troisième et dernier ouvrage :

Rabdologiæ seu numerationis per virgulas libri duo : cum appendice de expeditissimo multiplicationis promptuario, quibus accessit et arithmeticæ localis liber unus; authore et inventore Joanne Nepero, barone Merchistoni, etc. Scoto., Edimbur., 1617; in-12.

Dans la dédicace, *Alexandro Setonio.... supremo regni Scotiæ Cancellario*, Neper dit qu'il a publié, l'année précédente, des logarithmes pour faciliter les calculs et que depuis il avait découvert une meilleure espèce de logarithmes; mais, à cause de sa mauvaise santé, il abandonne le soin de calculer ces logarithmes à d'autres et principalement à *Henrico Briggio, Londini publico geometriæ professori*. Il aurait dû ajouter que l'idée de ces nouveaux logarithmes appartient à Briggs.

Voici, en peu de mots, la construction de cet instrument rabdologique (*) connu sous le nom de *bâtons de Neper*. Il se compose de neuf planchettes rectangulaires séparées. La hauteur de chaque rectangle contient neuf fois la largeur. On divise par des traits chaque rectangle en neuf petits carrés. Dans un premier rectangle, on écrit 1 dans le premier carré, 2 dans le second carré, 3 dans le troisième carré, et ainsi de suite jusqu'à 9; c'est le rectangle *régulateur* qui sert de guide. Dans un second rectangle, on écrit 2 dans le carré supérieur et on divise ensuite chacun des huit autres carrés par des diagonales tirées de gauche à droite en deux triangles. Dans le second carré on écrit 4 dans le triangle supérieur et rien dans le triangle inférieur; de même 6 dans le troisième carré et 8 dans le quatrième carré; pour le cinquième carré on a 10, on écrit 0 dans le triangle supérieur et la dizaine 1 dans le triangle in-

(*) ῥάβδος, *bacillus;* le *Reiffe* des Allemands dérive de ῥάβδος.

férieur; pour le sixième carré, on a $12 = 2.6$, on écrit 2 dans le triangle supérieur et 1 dans le triangle inférieur, et ainsi de suite jusqu'à $18 = 2.9$. On arrange de même la troisième planchette, en écrivant 3 dans le carré supérieur et 6, 9, 12, 15, 18, etc., multiples successifs de 3, dans les autres carrés, ayant soin de mettre les dizaines dans le triangle inférieur; on agit de même pour les planchettes restantes. Supposons maintenant qu'on veut multiplier 9875 par 6; on met à côté les unes des autres, en allant de gauche à droite, les quatre planchettes 9, 8, 7, 5 et à côté le rectangle *régulateur*. Alors sur la ligne qui répond à 6 du rectangle régulateur, on lit les produits 6.5, 6.7, 6.8, 6.9; il suffit d'ajouter les dizaines d'un triangle inférieur aux unités du triangle supérieur suivant. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, on obtient ainsi les produits partiels. Cet instrument n'est pas sans utilité; Lambert dit en avoir fait quelquefois usage; Servois, un des premiers promoteurs de la géométrie segmentaire, a construit un semblable instrument perfectionné et amplifié. Nous pourrons peut-être en donner la description (*).

SUR LA MALADIE DE NEWTON.

Dans le volume XII des *Transactions de la Société royale d'Édimbourg,* publié en 1852, il y a une Notice de M. James Crantor Gregory, professeur de physique au collége de cette ville, sur un manuscrit autographe de Newton, offrant des notes sur le troisième livre des *Principes,* manuscrit découvert dans les papiers de David

(*) Cet instrument est à Besançon en la possession de M. Simonnot, capitaine d'artillerie en résidence fixe, neveu et héritier du géomètre, mort célibataire.

Gregory. L'auteur a pour but de réfuter les assertions de M. Biot, relatives à l'accès de folie de Newton en 1692.

Voici ce qu'on lit dans une lettre de Huyghens à Leibnitz, en date du 8 juin 1694 :

« Je ne sais si vous avez sceu l'accident arrivé au bon
» M. Newton, sçavoir qu'il a eu une atteinte de phré-
» nésie qui a duré dix-huit mois et dont on dit que ses
» amis, à force de remèdes et de le tenir enfermé, l'ont à
» peu près guéri maintenant. Voilà un grand malheur
» et le plus fâcheux qui puisse arriver à un homme. »

Leibnitz répond (22 juin 1694) :

« Je suis bien aise d'apprendre la guérison de M. New-
» ton aussitost que la maladie qui estait sans doute des
» plus fascheuses. C'est à des gens comme vous, Mon-
» sieur, et luy, que je souhaite une longue vie, préféra-
» blement à d'autres dont la perte ne seroit guère consi-
» dérable en parlant comparativement. »

Et dans la suivante du 14 septembre de la même année, on lit : « N'a-t-on point de nouvelles de la restitu-
» tion entière de M. Newton? Je le souhaite fort (*). »

Une année après, presque jour pour jour, le 21 juin 1695, Leibnitz écrit dans la dernière lettre de cette correspondance avec Huyghens :

« J'ay appris de M. Bonval Basnage que vous avez
» esté malade, mais j'espère que vous vous porterez bien
» présentement. »

Cet espoir ne s'est pas réalisé. Huyghens est mort le 8 juillet 1695, à ce qu'on présume, à la suite d'une maladie *mentale*.

(*) Dans cette même Lettre, on trouve les définitions suivantes :
Diligere, chérir, est se faire un plaisir de la félicité d'autrui.
La bienveillance est un *habitus diligendi*.
La charité est une bienveillance générale.
La sagesse est la science de la félicité.
La justice est une charité conforme à la sagesse.

THÉORÈME DE FERMAT SUR LES NOMBRES POLYGONAUX.

Le théorème de Fermat sur les nombres polygonaux est cité par Descartes qui l'attribue à un M. de Sainte-Croix qui proposait souvent à Descartes des questions sur les nombres.

Voici le passage d'une lettre de Descartes au P. Mersenne, en date du 27 juillet 1638.

« Car supposant le théorème de M. de Sainte-Croix, » à savoir que tout nombre se peut réduire à trois tri- » gones, à quatre carrés, à cinq pentagones, etc, ou à » moins.... Mais, pour ce théorème, qui est sans doute » l'un des plus beaux qu'on puisse trouver touchant les » nombres, je n'en sais point la démonstration. Je la » juge si difficile, que je n'ose entreprendre de la chercher. » (*Œuvres*, t. VII, p. 113; édit. Cousin.)

On lit dans la vie de Descartes par Baillet (tome I, page 146) :

« Il semble qu'on pourroit aussi rapporter au temps » de la demeure de M. Descartes à Paris (1626) l'amitié » qu'il eut avec M. Frenicle l'aîné qu'il appelle souvent » M. de Bessy et M. de Sainte-Croix.... M. de Sainte- » Croix étoit (*) un autre arithméticien insigne, mais » encore plus intime ami de M. Descartes; c'est le même » que nous trouvons appelé par d'autres André Jumeau, » qui étoit prieur de Sainte-Croix et qui avoit été pré- » cepteur de M. le duc de Verneuil. M. Descartes témoi- » gnoit estimer très-particulièrement la connoissance » profonde que M. de Sainte-Croix avoit de l'arithmé- » tique et de l'algèbre. »

(*) Racine écrit déjà paraître, connaître; *ai* au lieu de *oi*. Ainsi, Racine suivait en partie l'orthographe que Voltaire a généralisée et fait admettre.

SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE attribué à Archimède, et dit *de bovino*.

On sait que l'Anthologie grecque est une collection de petits poëmes nommés *épigrammes* (*). Parmi ces poëmes il y en a plusieurs qui renferment des énoncés où il s'agit de deviner des nombres. On trouve le texte, la traduction en vers latins et les solutions de quarante-cinq de ces épigrammes dans l'*Histoire des Mathématiques* de Heilbronner (p. 845). Ils se résolvent par une équation du premier degré à une inconnue et quelques-uns à deux inconnues. Une épigramme grecque, renfermant une question d'analyse indéterminée, a été découverte en 1773 par Lessing dans la bibliothèque de Brunswick et il l'a publiée dans le tome I[er], p. 421, de son ouvrage intitulé : *Beitrage zur geschichete und litteratur:* documents pour l'histoire et la littérature. Il y a neuf conditions à remplir. Nous donnons ci-joint le texte grec et une traduction vers pour vers presque littérale et qu'il faut lire avant de continuer. L'épigramme est suivie d'une scolie grecque qui donne les nombres suivants sans dire comment on les a trouvés.

Soient

Nombres.			Nombres.		
B	Taureaux	blancs.	*b*	Vaches	blanches.
N	—	noirs.	*n*	—	noires.
J	—	jaunes.	*j*	—	jaunes.
T	—	tachetés.	*t*	—	tachetées.

(*) L'édition la plus complète et la plus récente est celle qui a été donnée par Frédéric Jacobs (1813-17) en 3 vol. in-8; toutefois, on a omis l'épigramme d'Archimède.

$$1^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} B = 829318560 = \frac{5}{6}N + J \\ b = 576508800 = \frac{7}{12} \text{ de } 2^{\circ} \\ \overline{1405827360} \end{array}\right.$$

$$2^{\circ}.\left\{\begin{array}{ll} N & 596841120 = \frac{9}{20}T + J \\ n & 391459680 = \frac{9}{20} \text{ de } 3^{\circ} \\ & \overline{988300800} \end{array}\right.$$

$$3^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} T = 588644800 = \frac{13}{42}B + J \\ t = 281265600 = \frac{11}{30} \text{ de } 4^{\circ} \\ \overline{869910400} \end{array}\right.$$

$$4^{\circ}.\left\{\begin{array}{l} J = 331950960 \\ j = 435137040 = \frac{13}{42} \text{ de } 1^{\circ} \\ \overline{767088000} \end{array}\right.$$

Total des quatre troupeaux : 4031126560.

Ces nombres ne sont pas les plus simples, mais satisfont aux sept premières conditions. Le scoliaste ajoute que B + N est un carré et T + J un nombre triangulaire ; ce qui serait conforme à la huitième et neuvième condition ; mais cela n'existe pas. On voit de suite que ces nombres sont tous divisibles par 80. Effectuant la division, on trouve

$$1^{\text{er}} \text{ Troupeau} \ldots \left\{\begin{array}{l} B = 10366482 \\ b = 7206360 \\ \overline{17572842} \end{array}\right.$$

$$2^e \text{ Troupeau}\ldots \left\{ \begin{array}{rr} N = & 7460514 \\ n = & 4893246 \\ \hline & 12353760 \end{array} \right.$$

$$3^e \text{ Troupeau}\ldots \left\{ \begin{array}{rr} T = & 7358060 \\ t = & 3515820 \\ \hline & 10873880 \end{array} \right.$$

$$4^e \text{ Troupeau}\ldots \left\{ \begin{array}{rr} J = & 4149387 \\ j = & 5439213 \\ \hline & 9588600 \end{array} \right.$$

$$4149387 = 9^2 . 11 . 4657;$$

4657 est un nombre premier. J n'est divisible ni par 11 ni par 4657; ces nombres sont donc les plus simples qui satisfont aux sept premières conditions.

Le total se monte à 50389082, renfermant :

Taureaux.......	29334443
Vaches	21054639
Total....	50389082

$$29334443 = 6299 \; 4657;$$

deux nombres premiers qui ne divisent pas le nombre des vaches.

La huitième condition est que B + N soit un carré; or

$$B + N = 17826996 = 4 . 11 . 29 . 4657.$$

En multipliant donc tous ces nombres par

$$3 . 11 . 29 . 4657 = 4456749,$$

on satisfait à la huitième condition et l'on trouve

$$1^{\text{er}}\ \text{Troupeau}\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{r}B = 46200808287018\\ b = 32116937723640\\ \hline 78317746010658\end{array}\right.$$

$$2^{\text{e}}\ \text{Troupeau}\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{r}N = 33249638308986\\ n = 21807969217254\\ \hline 55057607526240\end{array}\right.$$

$$3^{\text{e}}\ \text{Troupeau}\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{r}T = 32793026546940\\ t = 15669127269180\\ \hline 48462153816120\end{array}\right.$$

$$4^{\text{e}}\ \text{Troupeau}\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{r}J = 18492776362863\\ j = 24241207098537\\ \hline 42733983461400\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rr}\text{Taureaux}\ldots\ldots & 130736249505807\\ \text{Vaches.}\ \ldots\ldots & 93835241308611\\ \hline \text{Total}\ldots\ldots & 224571490814418\end{array}$$

Il ne reste plus que la neuvième condition à remplir, savoir que J + T égale un nombre triangulaire; mais B + N devant toujours rester un carré, il faut multiplier tous les nombres trouvés par la quantité indéterminée u^2 et nous devrons satisfaire à

$$(J + T)\, u^2 = 51285802909803\, u^2 = \frac{x^2 + x}{2}.$$

$$102571605819606\, u^2 = x^2 + x,$$

$$2x = -1 \pm \sqrt{4 \cdot 102571605819606\, u^2 + 1}.$$

La quantité qui multiplie 4 est paire sans être divisible par 4; donc le coefficient de u^2 n'est pas un carré parfait; par conséquent, il existe une infinité de valeurs rationnelles et entières de u qui donne pour radical un nombre entier nécessairement impair (Legendre, *Théorie des nombres*) et x sera entier et positif; au résumé, il s'ensuit que la question a un nombre infini de solutions.

Si l'on n'avait égard qu'aux taureaux, on aurait pour satisfaire aux trois premières conditions :

$$
\begin{aligned}
B &= 2226,\\
N &= 1602,\\
T &= 1580,\\
J &= 891,\\
B + N &= 3828,\\
T + J &= 2471.
\end{aligned}
$$

Quatre savants se sont occupés de ce problème. Le recteur Christian Leist a montré non-seulement l'exactitude des nombres donnés par le scoliaste, mais a trouvé les nombres les plus simples donnés ci-dessus. Son travail est inséré dans l'ouvrage de Lessing cité ci-dessus.

A l'occasion d'une solennité académique qui devait avoir lieu, MM. Struve père et fils ont publié l'opuscule suivant: *Altes griechisches Epigramm mathematischen Inhalts von Lessing erst einmal zum Drucke befordert jetzt neu abgedruckt und mathematisch und kritisch behandelt:* Ancienne épigramme grecque d'une teneur mathématique, publiée pour la première fois par Lessing ; éditée de nouveau et traitée sous le point de vue mathématique et critique par le Dr J. Struve, directeur du gymnase royal à Altona et le Dr K.-L. Struve, directeur du gymnase communal de Konigsberg, père et fils. Altona, 1821; in-8 de 47 pages.

Le texte original de quarante-quatre vers, alternativement hexamètres et pentamètres, est à la page 7; il est suivi d'une traduction vers pour vers; viennent ensuite des calculs beaucoup trop longs pour les lecteurs auxquels ils s'adressent. Nous les avons rapportés ci-dessus en changeant l'ordre, moyen d'abréviation. Les calculs sont du père; il croit que le nom d'Archimède est une pure invention. En effet, cette épigramme est complétement étrangère à l'esprit des travaux qui appartiennent incontestablement au géomètre sicilien; Struve père pense même que les deux dernières conditions ont été ajoutées depuis. C'est encore probable, car les solutions du scoliaste pour les sept premières conditions sont justes et on lui fait dire une chose fausse pour les deux dernières conditions. D'ailleurs, la neuvième et dernière condition consiste à résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée

$$ax^2 + 1 = y^2,$$

a n'étant pas un carré; solutions que l'on ne connaît que depuis Pell (1666). Struve dit que c'est là le *nœud gordien*. Il n'y a rien là de gordien; le seul embarras est la longueur des calculs qui ne valent pas la peine d'être faits.

L'opuscule est terminé, à partir de la page 38, par les observations critiques qui sont de Struve fils. Nous les avons indiquées au bas du texte. Du reste, il déclare ne rien comprendre aux vers 35 et 36, à cause de l'expression πλίνθου. Car les Grecs avaient diverses dénominations pour les nombres solides (στερεοὶ) résultant du produit de trois facteurs : 1° κυβοί, les trois facteurs étant égaux; 2° σφηνίσκοὶ, coins, les trois facteurs inégaux; 3° δοκίδες, poutres, deux facteurs égaux et le troisième plus grand; 4° πλινθίδες, briques, deux facteurs égaux et le troisième plus petit. Ainsi πλινθοῦ ne peut signifier un carré comme cela devrait être. L'auteur soupçonne que le passage est corrompu ou qu'il y a quelque omission. Nous verrons une autre explication dans la brochure suivante à laquelle donna lieu une autre solennité académique : *Ad memoriam Kregelio-Sternbachianam in auditorio Jureconsultorum die* XVII *julii* MDCCCXXVIII.H.IX *celebrandam invitant ordinum academiæ Lips. Decani Seniores ceterique adsessores. De archimedis problemate bovino.* Brochure in-4 de 12 pages.

Charles de Sternbach, homme généreux, avait institué un prix d'encouragement pour l'étude des mathématiques à l'université de Leipsig. M. Frédéric-Edouard Thieme, jeune homme versé dans ces sciences, lut cette production pour célébrer l'aniversaire de Sternbach. L'auteur critique vivement l'œuvre des Struve et blâme avec raison certaines jovialités qui sont d'un goût un peu hasardé, et il propose une exégèse qui amène des nombres complétement différents de ceux de Struve. Il conserve τετραχῇ, mot final du verset 24 du manuscrit que Struve a remplacé par ατρέκες, ce qui change la sixième condition en celle-ci : Les vaches tachetés formaient les quatre cinquièmes plus les quatre sixièmes de toute la partie jaune. Alors les nombres suivants satisfont aux sept conditions :

1er Troupeau......	B	48066018	
	b	47981940	$= \frac{7}{12}$ de 2e
		96053958	
2e Troupeau	N	34591986	
	n	47673054	$= \frac{9}{20}$ de 3e
		82265040	
3e Troupeau......	T	34116940	
	t	71823180	$= \frac{44}{30}$ de 4e
		105940120	

$$4^{e} \text{ Troupeau} \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} J & 19239363 \\ j & 29730987 = \frac{13}{42} \text{ de } 1^{o} \\ \hline & 48970350 \end{array} \right.$$

Le nombre des vaches est plus grand que celui des taureaux, tandis que c'est le contraire dans le calcul précédent.

Le changement le plus important est dans les vers 35 et 36 que M. Thieme lit et ponctue ainsi :

... Τὰ δ' αὖ περὶ μηκέα, πάντη
Πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.

Le sens est : Quant à ce qui concerne les côtés qui circonscrivent de toutes parts, les plaines de la Sicile étaient remplies de *briques*, c'est-à-dire que chaque côté du carré B + N doit être un *nombre brique ;* de sorte qu'on doit satisfaire, dit M. Thieme, à ces équations

$$(B + N)x = 3828\,x$$
$$= \text{le carré d'un nombre brique} = y^2(y - z)^2,$$
$$(T + J)x = 2471\,x$$
$$= \text{un nombre triangulaire} = \frac{u(u+1)}{2},$$
$$(B + N + T + J)x = 6299\,x$$
$$= \text{un nombre triangulaire} = \frac{v(v+1)}{2}.$$

Pour satisfaire à la première équation, il faut que l'on ait

$$x = 1914\,r^2,$$

et, par conséquent,

$$4942 \cdot 1914\,r^2 = u^2 + u,$$
$$12598 \cdot 1914\,r^2 = v^2 + v.$$

Il est impossible de satisfaire simultanément à ces deux équations, mais la troisième équation n'est pas exigée.

La seconde équation donne un nombre indéfini de solutions; la première équation devient

$$3828r = y(y - z), \quad z = y - \frac{3828r}{y};$$

il suffit de prendre

$$y = r \quad \text{et} \quad r > 3828;$$

il y a donc une infinité de solutions.

M. Thieme croit que l'épigramme est d'Archimède, parce qu'elle est citée sous ce nom dans une scolie sur le *Charmide* de Platon et dans l'ouvrage de Héron d'Alexandrie sur la nomenclature des vocables géométriques. Ce sont de bien faibles arguments. M. Thieme tient de son collègue M. Molweide, que Gauss avait résolu le problème, mais en adoptant les énoncés du scoliaste et de ses interprètes; ces énoncés étant faux, à ce que pense M. Thieme, cette solution ne se rapporte pas à la pensée d'Archimède; c'est ce qui l'a engagé à ne pas s'adresser à Gauss pour demander sa solution. Cette abstention est regrettable.

Nous devons la communication de cette brochure et de l'opuscule de MM. Struve à M. Vincent, membre de l'Institut, qui fait un usage si libéral des ouvrages d'érudition qui composent sa précieuse bibliothèque.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ὅπερ ἈΡΧΙΜΗΔΗΣ ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ
περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν,
εν τῇ πρὸς ἘΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ τὸν ΚΥΡΗΝΑΙΟΝ.

ἐπιστολῇ.

Πληθὺν ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
Φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,

Πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σιχελῆς ποτ' ἐβόσχετο νήσου
Θρινακίης, τετραχῆ στίφεα δασσμένη,
Χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
Κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
Ἄλλογε μὲν ξανθὸν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἑκάστῳ
Στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
Συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες. Ἀργότριχας μὲν
Κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ,
Καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσως, ὦ ξεῖνε, νόησον.
Αὐτὰρ χυανέους τῷ τετράτῳ μερεῒ
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσι τὲ πᾶσι.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
Ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει, ἑβδομάτῳ τὲ,
Καὶ ξανθοῖς αὖτις πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τὰ δ' ἔπλετο· λευκότριχης μέν
Ἦσαν συμπάσης κυανεης ἀγέλης
Τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεχὲς ἶσαι.
Αὐταρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν.
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο,
Σὺν ταύροις πασῶν εἰς νομον ἐρχομένων.
Ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδε καὶ ἕκτῳ
Ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον ἀτρεκές (*).
Ξανθαὶ δ' ἠριθμευντο μέρους τρίτον ἡμίσει ἶσαι
Ἀργεννὴς ἀγέλης ἑβδομάτω τὲ μερεί.
Ξεῖνε, σὺ δ' ἠελοιο βόες πόσαι ατρεκες εἴπων.
Χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
Χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ἴσαί κατὰ χρῶμα ἕκασται.
Οὐκ ἄϊδρις κε λέγοι, οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
Οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιας, ἀλλ' ἴθι φράζευ
Καὶ τάδε τάντα βοῶν ὑελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπει μιξαίατω πληθὺν
· Κυανέοις ἴσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
Εἰσ βάθος εἰς εὖρος τέ τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
Πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ εἰς ἓν κχι ποικίλοι ἀθροισθέντες

(*) Dans le manuscrit il y a τετραχῆ.

Ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
Σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον· οὔτε προσόντων
Ἀλλοχρόων ταυρων, οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίας,
Καὶ πληθέων ἀποδοὺς, ὦ ξένε, πάντα μέτρα
Ἔσχεο κυδιόων νικηφόοος· ἴσθι τε πάντως
Κεκριμένος ταύτῃ ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Notes philologiques.

Πραγματευομένοις, le manuscrit a πραγματυμενοὶς.

Vers 8. Il faut πλήθεϊ.

Vers 13 et 21. Μίκτοχρόων, probablement des fautes d'impression; peut-être στὶκτοχρόων, pointillé, piqueté de diverses couleurs, tacheté.

Vers 14. Ποικὶλοχρωτας, c'est ainsi dans le manuscrit. Lessing a mal corrigé en écrivant ποικὶλοχρὸας, il ne s'est pas aperçu que c'est un vers pentamètre.

Vers 16. Αὐτίς; Lessing met αοτοῦς; probablement une faute d'impression.

Vers 22. Lessing met πασὴς . . . ερχομόνης.

Vers 23. L. αγελης; il faut δ'αγελης.

Vers 24. Lessing met εχον. τετραχῆ, ce qui ne présente pas de sens, car le vers finit au dernier mot; on propose de lire ατρεκης.

Vers 29. L. χροίαν.

Vers 31. L. ἐν αριθμοίς.

TRADUCTION.

Problème que, dans une lettre adressée à Ératosthène de Cyrène, Archimède a proposé à ceux qui s'occupent de ces matières à Alexandrie.

O ami! calcule-moi le nombre de bêtes à cornes de Hélios,
mais penses-y sérieusement si tu prétends à la science.
En quel nombre paissaient-elles dans les plaines de la Sicile,
l'île aux trois angles? Elles se partageaient en quatre troupeaux
divers en couleur. L'un était blanc comme du lait,
l'autre brillait d'une couleur noire,
un autre était jaune et encore un tacheté. Chaque troupeau
renfermait des taureaux en grand nombre et ils étaient
les uns aux autres dans ces rapports : I. Les blancs étaient autant
que la moitié et le tiers ensemble des noirs

plus tous les jaunes; ainsi remarque bien cela.
II. Ensuite les noirs égalaient la quatrième
et cinquième part des tachetés, plus encore tous les jaunes.
III. Considère les tachetés encore restants;
au sixième et au septième des taureaux blancs,
plus au nombre total des jaunes, ils sont égaux.
Il y a encore les vaches. IV. Les blanches
étaient du troupeau noir entier
exactement le tiers plus le quart.
V. Les vaches noires autant qu'un quart
et un cinquième de tout le troupeau tacheté,
lorsque ce troupeau paît ensemble avec les taureaux.
VI. Les vaches tachetées faisaient un cinquième plus un sixième
de toute la partie jaune.
VII. Les vaches jaunes autant qu'un demi-tiers
et un septième de toute la partie blanche du troupeau.
Ainsi, si tu me dis maintenant nettement le nombre des bêtes à cornes de
à part le nombre des taureaux bien nourris, . [Hélios,
à part les vaches et combien de chaque couleur,
on ne t'appellera pas maladroit ni inexpert dans les nombres,
cependant on ne te comptera pas encore parmi les savants. Car, viens
ce qu'on rencontrait chez les bêtes à cornes de Hélios. [et dis-moi encore
VIII. Si la foule des taureaux blancs se réunissait
aux noirs, ils présentaient une surface égale
en longueur et en largeur. Alors leur grande étendue
remplissait de son aire toutes les plaines de l'île aux trois angles.
IX. Ensuite, si les taureaux jaunes réunis aux tachetés
se formaient avec un en tête et croissaient successivement de un,
ils formaient la figure d'un triangle, sans qu'il y eût avec eux
des taureaux d'une autre couleur et sans remarquer leur abscense.
Si tu trouves cela et le mets dans ton esprit,
si tu peux, ô ami, indiquer la mesure de tous ces nombres,
alors avance glorieux, triomphant; sois convaincu
que tu es un homme accompli en cette science.

Note. Les chiffres romains indiquent les neuf conditions.

BIBLIOGRAPHIE DU JEU DES ÉCHECS.

Beaucoup de géomètres jouent aux échecs; tous du moins connaissent ce jeu, qui exige mentalement des solutions continuelles et successives de problèmes de la géométrie de situation (*).

Nous croyons que cette Note peut n'être pas sans intérêt et réclamons l'indication d'ouvrages omis, d'éditions omises et des renseignements divers.

1512. Damiano : Libro imparare Giuocase. Roma (italien et espagnol).

1551. Lopez : Libra de la invencion liberale y arte de juego del Axedres en A'cara.

1617. Selenus (Gustavus) : Das Schach und Königspiel. Leipzig; in-folio. Le nom véritable de l'auteur est Augustus Huneburgicius devenu duc de Wolfenbuttel, prince très-savant.

1663. Gustavus Selenus, id est Augustus herzog zu Braunschwey und lünen, Schach ader Königs-Spiel. Frankfurt, in-12.

1664. Christophorus Weickman : Neu erfundenes grosses Königs-Spiel, welches sich mit dem Schach-Spiel in etwas zwar verglicht, jedoch aber von demselben darin unterschieden, das vie jenes nor selb andern, dieses selb dritt, wiert, sechls und selbacht gesppieltwerdenkann, etc. Grand jeu royal nouvellement inventé, qui ressemble en

(*) Les jeux de cartes ne sont que des combats de nombres de l'Arithmomachie. Remplacez les figures par des nombres et les couleurs par des indices, personne ne voudrait jouer.

quelque chose au jeu des échecs, mais en diffère en ce que celui-ci ne se joue qu'à deux, tandis que l'autre peut se jouer à trois, à quatre, à six et même à huit, etc. Ulm; in-folio.

1667. Carera: Del giuoco d egli scacchi. Piossi.

1673. Holli : Osservationi teoriche pratiche sopra il giuoco degli scacchi. Bologna.

167.... Barbier: Game of Chess play, being a princely exercise, wherein the learner may profit more by reading this small book, than by playing a thousand matches Lond.; in-8.

1679. Palamedes redivivus, das ist, unterricht von dem stimm oder Schach-Spiel, Picquet-Spiel, und Thum-Spiel, Rumpfordnung und Regeln von Billard. Leipzig, 1679; in-12.

1694. Th. Hyde : De ludis orientalibus, lib. II. Oxonii; in-8.

1699. Greco (Calabrois) : Le jeu des échecs, traduit de l'italien. Paris.

1725. Joannis Rezzetti : Ludorum scientia. Venetiis; in-4°.

1737. Stamma : Essai sur le jeu des échecs. Paris.

1750. Dal Rio : Osservazioni pratiche sopra il giuoco degli scacchi. Modena.

1759. Euler: Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse sur la marche du cavalier sur l'échiquier (Mémoires de l'Académie de Berlin, tome XV, page 310).

1766. Cozio : Il giuoco degli scacchi; deux volumes. Torino.

1771. Vandermonde, Académie des Sciences, problème du cavalier, p. 566.

1773. Colini : Solution du problème du cavalier au jeu des échecs. Mannheim.

1775. *Voir* 1786.

1777. Philidor : Analyse du jeu des échecs. Londres.

1782. Pouziani : Il giuoco incomparabile degli scacchi. Modena.

1786. Traité théorique et pratique du jeu des échecs par une société d'amateurs. Paris. La première édition est de 1775.

1792. Zuyland de Niewelth : Supériorité aux échecs, mise à la portée de tout le monde; in-8.

1808. Sarrat : Treaties on the game of chess. London; deux volumes.

1811. Allgaico : Neue theorische pracktsche anweisung zum schachspiel. Wien.

1812. Anonyme : Il giuoco incomparabile degli scacchi. Venezia.

1817. Kenny's chess grammar. London.

1818. Chess exercise. London.

1818. The games of the match at chess played between the London and the Edinburgh chess club with back games.

1818. The games of the match, etc., with back games by the comity of Edinburgh.

1821. New treaties on the game of chess upon a plan of progressive improvement hitherto unattempted. London.

1822. Cochrane : A treaties on the game of chess. London.

1823. Nouvelle notation de parties et coups d'échecs, etc., par une société d'amateurs et Philidor. Paris; in-8.

1825. Anonyme : Studies of chess. London.

1825. Reinganum (Benoni) : Oder die Vertheidigungen gegen die gambitzuge. Francfort.

1826. Silberschmidt : Die neue endeckten geheimnisse im gebiethe des schachspiels. Braunschweig.

1826. Ciccolini : Del cavallo degli scacchi. Paris.

1829. Silberschmidt : Angriff in Vertheidigung gegen gambitzuge. Braunschweig.

1830. Problème du cavalier. Théorie des nombres de Legendre .3e édition. t. II, p. 151.

1831. Lewis: A series of progressive lessons on the game of chess. London.

1832. Lewis : A second series of lessons on the game of chess. London.

1832. Fift games at chess. London.

1833. L.-C. de la Bourdonnais : Nouveau traité du jeu des échecs; deux volumes (rare).

1833. G. Walker : A new treaties of chess. London.

1834. Philidor and his contemporaries. London.

1835. Chess made easy. London.

1835. Chess for beginners. London.

1836. Greenwood Walker : A selection of games at chess played in London by the late A. M. d'Ounel and de la Bourdonnais. London.

1837. The match played by the chess-club of Paris and Westminster. London.

1837. A. Alexandre : Encyclopédie des échecs, ou Résumé comparatif en tableaux synoptiques des meilleurs ouvrages écrits sur ce jeu par les auteurs français et étrangers tant anciens que modernes, mis à l'usage de toutes les nations par le langage universel des chiffres. Paris et Londres.

Format atlantique; les explications sont données en quatre langues : française, anglaise, allemande et italienne. Prix : 30 francs broché; et 36 francs cartonné.

184.... On the knights move at chess, Cambridge and Dublin mathemtic journal, 1re série. Vol III, page 333; par le révérend Moon.

1849. Introduction pratique au jeu des échecs, comprenant le Gomito de Damiano, l'Anonyme de Modène, la Centurie de Lolli, etc., publiée par Poirson, Prugneaux, Commercy; in-12.

1849. Kling (J) : The chess Euclid : a collection of 200 chess problems and end-games. In-8; with 26 pl.; London.

1836 à 1851. Le Palamède, revue mensuelle des échecs et autres jeux.

1[re] série, par M. de la Bourdonnais, de 1836 à 1840; 31 mois in-8 et 4 mois in-12.

2[e] série, par M. Saint-Amant, 1841 à 1847; in-8, grand raisin.

3[e] série, La Régence, faisant suite au Palamède 1849, 1850 et 1851. 3 vol. in-12.

1851. Volpicelli : Sur le problème du cavalier (*Comptes rendus des séances de l'Académie*, t. XXXI, p. 314).

1854. Sur le problème du cavalier au jeu des échecs (*Nouvelles Annales*, tome XIII, page 181).

.... Rabiano (comte de) : Les échecs simplifiés et approfondis, ouvrage entièrement neuf, dans lequel une théorie générale et facile ramène à l'unité rigoureuse les préceptes de détails, règles, etc., épars dans le traité in-8.

184.... Witcomb : Traité du jeu des échecs, par M. Lewis, traduit de l'anglais par H. Witcomb et arrangé selon le système lexicographique de M. Kieseritzky (*). In-8. (*Voir* 1831.)

1852. Ferdinand Minding : Sur la marche du cavalier (*Journal de Crelle*, t. XLIV, p. 73; en allemand).

(*) Mort à Paris en 1853 ou 1854.

PROBLÈME DE BOVINO (RECTIFICATION).

(voir page 119).

L'opuscule dont il est question (p. 119) est de M. Hermann (Godefroi) (*) et non de M. Edouard Thieme qui a seulement prononcé le discours d'apparat pour la solennité académique. C'est à l'obligeance de M. Vincent que je dois encore cette correction.

Nesselmann (G.-H.-F), dans son célèbre ouvrage sur l'histoire de l'Algèbre chez les Grecs (**), consacre les cinq dernières pages à notre problème. Adoptant l'opinion de Klügel et de S. Struve, il fait ressortir l'impossibilité d'attribuer une telle production à Archimède, et, d'après le mauvais goût que l'on remarque dans le style et la facture poétique, Nesselmann pense que cela peut être le travail d'un écrivain du XIV^e siècle, et même plus récent. Car Planude et Krephalas, auteurs du XIV^e siècle, qui recherchaient avec ardeur de semblables bagatelles, n'ont pas admis ce problème dans leurs collections. La huitième et la neuvième condition sont, selon l'opinion de MM. Hermann et Nesselmann, une superfétation faite postérieurement à la solution donnée par le scoliaste. Car cette solution est exacte pour les sept premières conditions et fausse pour les deux dernières, qui paraissent avoir été ajoutées par quelqu'un entièrement étranger à la science des nombres, et qui s'est amusé à proposer une difficulté dont il ne comprenait pas la portée. MM. Struve, Hermann, Nesselmann font à ce sujet des raisonnements sur l'étendue de la Sicile, sur le

(*) Voir *Bibliothèque des auteurs classiques grecs et romains*, par Guillaume Engelmann. Paris, 1847 ; in-8.

(**) *Die algebra der Griechen*. Berlin, 1842 ; in-8.

nombre des bêtes à cornes qu'elle peut contenir, nourrir, sur le rapport entre les bœufs et les vaches, etc. Comment des esprits aussi sérieux, aussi distingués, peuvent-ils se livrer à de semblables considérations à propos d'un badinage littéraire où l'auteur n'a eu pour but que de donner une forme dramatique à une question d'arithmétique (*) !

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Arithmétique théorique et pratique en rapport avec les *nouveaux Programmes* d'enseignement, terminé par une petite Table de logarithmes disposée comme les Tables de Callet; chaque théorie est suivie d'un choix d'exercices gradués de calcul et d'un grand nombre de problèmes; par le P. *P. Faton,* de la Compagnie de Jésus. Paris, 1854; in-12 de VIII-328 pages. Avec l'épigraphe : *Deus scientiarum dominus est* (I Reg. II) (**).

L'auteur anonyme de l'ouvrage : *Arithmetices introductio ex variis authoribus concinnata*, 1546, in-4, a pris pour épigraphe le distique suivant :

Ingenuas ridens artes mercator avarus,
Negligit hanc minime, provenit unde lucrum.

En effet, ceux même qui font le moins de cas des arts libéraux, ne négligent pas la connaissance du calcul, autant qu'elle est nécessaire à leurs intérêts; ils cultivent volontiers les procédés sans s'enquérir des principes logiques. N'ayant égard qu'à ces dispositions mercantiles, les arithmétiques ont été dans le moyen âge purement *descrip-*

(*) Le catalogue imprimé (1740) des manuscrits de la Bibliothèque impériale porte l'épigramme *de bovino* sous le numéro 2448. Il y a peut-être des variantes. (Breton de Champ.)

(**) Chez Mallet-Bachelier. Prix : 2f 75c.

tives et les arithmétiques *raisonnées* ne commencèrent que vers la fin du XVII^e siècle. C'est une preuve évidente du progrès de l'esprit humain qu'aujourd'hui tous les Traités d'Arithmétique les plus usuels ont le caractère démonstratif. Toutes ces opérations, en dernière analyse, se réduisent à avoir des procédés pour compter, soit en avant, soit en arrière, le plus rapidement possible ; les moyens logiques sont restreints, et il n'y a de diversité que dans l'exposition, dans l'ordre de succession.

A commencer par les définitions, nous croyons qu'en thèse générale il ne faut jamais définir un objet avant que le cours du raisonnement ait amené la nécessité de définir cet objet. D'après ce principe, les définitions que donne l'auteur dans son Introduction nous paraissent déplacées : *grandeur, continuité, discontinuité, entier, fraction* ; toutes ces notions ne devraient apparaître que plus loin. *Unité* et *nombre* sont les deux seuls objets à définir. Ce n'est qu'après la division que se manifeste la nécessité de faire la distinction des entiers et des fractions. On a omis la définition de *compter*, définition capitale ; toute l'arithmétique n'est que l'art de compter promptement en avant vers $+\infty$ (addition), en arrière vers $-\infty$ (soustraction) (*). Pour faciliter l'étude, on devrait mettre à la fin une table des objets définis avec renvoi aux pages du livre, et, pour le même motif, une table des principes et des théorèmes telle qu'elle a été donnée par Bezout et reproduite récemment dans la petite arithmétique de M. Rambosson.

Les quatre opérations sont si bien analysées, qu'il paraît impossible de ne pas comprendre ; toutefois, on s'est trop étendu sur la division : l'exposition de M. Faucheux (*Nouvelles Annales*, p. 51) paraît préférable. Les exemples sont généralement bien choisis et souvent instruc-

---

(*) L'oubli de cette distinction a conduit M. Bertrand à introduire gratuitement dans l'Algèbre des *conventions* scabreuses (*Algèbre*, 2^e éd., p. 9).

tifs; la divisibilité des nombres, si nécessaire à la théorie, est traitée avec soin, et on fait usage de notations littérales; on aurait désiré y rencontrer la méthode des tranches (*Nouvelles Annales*, p. 118). Il paraît utile de faire précéder les fractions de quelques considérations sur les séries des nombres consécutifs fractionnaires, par exemple $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$, etc., $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, etc., et de montrer les termes égaux qui se rencontrent simultanément dans ces séries, ce qui conduit à la théorie des nombres premiers, etc. Le calcul décimal est la description de notre système métrique. On y fait l'observation instructive que la vraie mesure du mètre n'est pas $3^{\text{pieds}}\ 11^{\text{lignes}},296$, mais $3^{\text{pieds}}\ 11^{\text{lignes}},335$ ou bien $0^{\text{toise}},513118$. Dans un ouvrage uniquement destiné aux classes, est-il convenable de donner les mesures anciennes? C'est douteux. On aurait mieux fait de rejeter ceci à la fin et en petit texte.

L'exercice sur la longueur des ondulations lumineuses (p. 175) est-il bien adapté aux connaissances présumées des lecteurs?

Les fractions périodiques sont développées, selon l'importance du sujet, avec beaucoup de clarté. Le théorème de Fermat étant la base implicite de tout ce qu'on peut dire là-dessus, n'y aurait-il pas une économie de paroles à introduire ce théorème dans les éléments?

Le chapitre XI (p. 205) est consacré aux opérations abrégées et le chapitre XII aux approximations numériques. Il semble que le chapitre XII devrait précéder le XI^{e}. Les estimations de degrés d'erreurs sont l'âme du calcul pratique, qui roule toujours sur des données essentiellement affectées d'erreurs, et, soit dit en passant, toutes nos trigonométries sont défectueuses. Elles donnent des formules littérales sans nous apprendre les degrés d'erreurs des applications numériques. C'est ainsi que Gauss a trouvé que le *Thesaurus logarithmorum* de Vega renferme plus de cinq mille résultats *inexacts*.

Pour ces deux chapitres si importants, l'auteur a consulté l'ouvrage de M. Vieille : *Théorie générale des approximations*. L'ouvrage est cité p. 222 ; c'est une rareté *in regionibus nostris*.

La proportion géométrique, base des opérations commerciales, fournit de nombreuses applications. Les solutions reposent sur la méthode du baron Reynaud, la *réduction à l'unité*.

Aux pages 263 et 265, on parle de mélanges et d'alliages *directs* et *inverses*. En quoi consiste ici l'inversion?

On donne comme question (p. 280) la course entre Achille et la Tortue; question célèbre dans les annales de la philosophie et qui présente une difficulté réelle, lorsqu'on ne compare pas le *flux* simultané des deux continuités, extérieure et intérieure, *objective et subjective*, espace et temps; le dx et le dt fluent simultanément. C'est pour n'avoir pas fait cette comparaison que M. le docteur Beaux (Jean-Jacques) est parvenu à cette étrange assertion, que l'*espace* n'est pas divisible à l'infini (article *Atome* dans le *Dictionnaire de Médecine* de Nysten, 1814). Le chapitre des logarithmes est terminé par une Table de 1 à 4000 disposée comme celle de Callet. C'est une bonne idée. Nous recommandons comme modèle de simplicité, de rigueur, sans cesser d'être élémentaire, ce qu'on lit sur les logarithmes dans l'*Arithmétique* de Querret, ouvrage précieux, imprimé en province (Saint-Malo, 1822 ; in-8 de 292 pages) et très-rare à Paris (*).

(*) L'idée du *logarithme-limite* est très-commode. Du reste, comme nous verrons, la véritable nature du logarithme n'a été connue que de Kepler. Tout logarithme est essentiellement *infini*. Le rapport de deux de ces infinis est *fini*.

Dans *deux* pages (308-310), M. Faton donne une description claire et suffisante de la règle à calcul, instrument très-utile dans la vie domestique, commerciale, industrielle et d'atelier. Un moyen certain de déprécier cet instrument est d'en exagérer l'utilité et d'en vouloir préconiser l'emploi hors de ses limites naturelles. Par quelle fatalité ne pouvons-nous rien faire en France sans dépasser les bornes, sans pousser les meilleures choses jusqu'à ce qu'elles deviennent mauvaises?

Si nous avions l'arithmétique à enseigner, nous adopterions comme guide le Traité que nous venons d'analyser.

Invention nouvelle en l'Algèbre, par *Albert Girard*, mathématicien; tant pour la solution des équations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science. A Amsterdam, chez Guillaume Jansson Blaeuw; MDCXXIX; petit in-4.

Au milieu du titre est une sphère armillaire à axe incliné; à la droite de la sphère, on voit Hercule avec sa massue et la peau du lion de Némée; à gauche, le Temps avec sa faux. Au-dessous de la sphère on lit: Indefessus agendo.

L'ouvrage n'a aucune pagination. Au bas, le registre va de A en H; chaque lettre renferme huit pages: ainsi en tout soixante-quatre pages.

L'ouvrage est dédié à M. Henri de Bergaigne, capitaine d'une compagnie de cavalerie pour messeigneurs les Estats-Généraux des Provinces-Unies des Pays-Bas. Il dit qu'il lui offre trois petits Traités. Le premier est une briève introduction à l'arithmétique, et les deux autres contiennent quelques nouveautés en l'algèbre et la géométrie inconnues des modernes et des anciens.

Le premier Traité débute ainsi : Complément mathématique. Les commencements de l'arithmétique. Prælation des nombres.

1re *masse*. Nombre, mil, milion, mil milions.

2e *masse*. Bilion, mil bilions, milion de bilions, mil milion de bilions.

3e masse. Trilion, mil trilions, milion de trilions, mil milions de trilions.

4e *masse*. Quadrilion, etc.

Chaque masse renferme douze chiffres. On voit que le bilion de Girard n'est pas le même que notre billion, de même le trilion, etc.

De là, il passe aux quatre *conjugaisons*. Dans la soustraction, le nombre supérieur est le *subject* et le nombre inférieur l'*exacteur*. Dans la division, il remarque que le diviseur étant 19, le chiffre du quotient est la moitié du premier chiffre à gauche du diviseur s'il est pair, et la plus grande moitié s'il est impair. Cela n'est pas exact. Le chiffre du quotient peut être aussi la petite moitié, par exemple dans $\frac{37}{19}$.

Comme préparation aux fractions, il indique comment on trouve le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple de deux nombres donnés. Il donne en deux pages les quatre *conjugaisons* des fractions et finit par la règle de trois.

Il a les mots *numérateur* et *dénominateur*; ce sont, dit-il, les deux *notes*, note supérieure et note inférieure.

L'algèbre commence par les *caractères des puissances et racines*.

(2), (3), (4) dénotent les puissances secondes, tierces, quartes, etc.

$\left(\frac{3}{2}\right)$ 49 dénote la puissance tierce de la seconde de 49 ou la racine carrée du cube de 49; *c'est toujours* 343.

Il ajoute : Comme $\sqrt{\ }$ est en usage, on le pourra prendre au lieu de $\left(\frac{1}{2}\right)$, et de même $\sqrt[3]{\ }$ au lieu de $\left(\frac{1}{3}\right)$, etc.; il indique aussi ce signe *œ*.

Des caractères de conjonctions et disjonctions appelez signes.

$+$ s'appelle *plus*, vaut autant à dire que *et*, ou bien *encore;*

$-$ ou $\div$ signifie *moins ;*

$=$ *signifie différence entre les quantités* où il se trouve ;

ff signifie *plus que ;*

§ signifie *moins que.*

Viennent ensuite les quatre conjugaisons des signes $+$ et $-$.

Tous les exemples sont numériques.

La racine carrée de $+ 9$ est $+ 3$ ou bien $- 3$; la racine carrée de $- 9$ est *indicible.*

Dans la division, Gilbert distingue deux sortes de quotients, par excès et par défaut. *Pour en donner matière d'exercices aux apprentifs*, il donne une Table d'exemples d'additions de radicaux carrés. Pour la division $\frac{a}{c + \sqrt{d}}$, il multiplie haut et bas par $c - \sqrt{d}$; il est inutile de répéter que ses exemples sont toujours numériques. De là il passe à l'*extraction des racines des multinômes radicaux* et d'abord des binômes. *Exemple* :

$$\sqrt{7 + \sqrt{48}} = 2 + \sqrt{3},$$

par la méthode en usage, sans explication. Il distingue avec Euclide six espèces de binômes conjoints $(\sqrt{a + \sqrt{b}})$ et six disjoints $(\sqrt{a - \sqrt{b}})$.

Racine cubique d'un binôme. Il dit que sa *reigle* n'a encore été inventée par personne et que celle de Bombelli est fausse. Voici cette règle.

On a

$$(a + \sqrt{b})^3 = a^3 + 3ab + \sqrt{b}\,(b + 3a^2),$$

or

$$(a^3 + 3ab)^2 - \left[\sqrt{b}\,(b + 3a^2)\right]^2 = (a^2 - b)^3.$$

Ainsi, étant donné $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$, pour que l'extraction soit réalisable, il faut que $A^2 - B$ soit un cube parfait et que l'on ait

$$\sqrt[3]{A^2 - B} = a^2 - b\,;$$

c'est ainsi qu'on trouve

$$\sqrt[3]{72 + \sqrt{5120}} = 3 + \sqrt{5}.$$

Construction algébrique sur les questions.

Il représente l'inconnue par un petit cercle, ainsi

$$③ = x^3,$$

mais nous nous servirons toujours de la notation actuelle.

Pour donc résoudre une question, il faut la remettre en question de nombres abstract, sans parler (si on peut) de matière, comme d'escus, pieds, etc. Finalement, il y a la position, les conditions (dont la dernière fait l'équation si la question n'est défaillante), la réduction, puis la solution de l'équation ordonnée. Voyez les questions de Diophante, réduites en six livres dans l'Arithmétique de Stevin, qu'avons fait depuis peu réimprimer en l'an 1625, *avec quelques augmentations, corrections et explications.*

De la réduction algébrique. Il s'agit de la manière de préparer une équation, de faire disparaître les dénominateurs, les multiplicateurs, les radicaux, etc.; il renvoie pour cela à la page 250 de l'*Arithmétique* de Stevin, nouvelle édition, et se contente de donner le tableau suivant :

L'addition	sert contre	le désordre, redondance et défaut.
La soustraction	—	les fractions des nombres et des quantités en général.
La multiplication	—	des grands nombres, aussi des quantités.
La division	—	l'assymétrie et trop grande dépression.
La puissance	—	les exaltations excessives des quantités.
L'extraction	—	l'intempérance des nombres seulement.
L'isomère		

Il n'explique que l'isomère.

Isomère. *On opère non-seulement par multiplication pour se dépestrer des fractions, mais aussi par division pour s'affranchir des grands nombres.*

Exemple :

$$x^3 \text{ esgale à } 1\frac{1}{2}x + 5;$$

on met les quantités *obmises*. Ainsi

$$x^3 \text{ esgale } 0.x^2 + 1\frac{1}{2}x + 5,$$

on écrit dessous les *proportionnaux*

$$1.2.4.8,$$

les produits sont

$$x^3 \text{ esgale à } 6x + 40.$$

Exemple contre les grands nombres.

$$9x^2 \text{ esgale à } 72x + 1456,$$

on divise par les nombres proportionnaux

$$9.12.16,$$

les quotients sont

$$x^2 \text{ esgale à } 6x + 91,$$

où x vaut 13 et -7; il faut diviser par $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$: ainsi les solutions requises sont $17\frac{3}{2}$, *encor* $-9\frac{1}{3}$.

$$x^3 \text{ esgale à } 14x - \sqrt{228},$$

il y a *défaut des* x^2.

	x^3 esgale à $0.x^2$	$+ 14x$		$- \sqrt{288}$
Divis. prop[aux]..	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{8}$
Quotients.....	x^3 esgale à		$7x$	-6

la valeur de x vaut

$$1,$$
$$2,$$
$$-3,$$

lesquels, divisés par $\frac{1}{\sqrt{2}}$, donnent pour les valeurs requises

$$\sqrt{2},$$
$$\sqrt{8},$$
$$-\sqrt{18}.$$

Ces procédés reviennent à ceux qui sont en usage.

Il ne connaît pas le signe d'égalité et ne s'en sert jamais.

Des équations ordonnées. Quand il n'y a pas assez de conditions pour mener à une équation, la question est *défaillante* et recevra autant de solutions qu'on voudra, si l'on admet les *moins,* et, si l'on n'admet les *nullités* et les *moins,* elle sera plus *restrainte.* Si l'on peut résoudre la proposition sans se servir de toutes ces conditions, elle sera *excédente* et il faut *retrancher* la dernière condition, si elle répugne. Dans tout autre cas, la proposition sera *pleine et entière.* Une équation préparée, *preste à recevoir la dernière main*, est dite une équation ordonnée.

Par exemple,

$$5x^2 = 18x + 72,$$

il résout à la manière ordinaire et trouve pour valeurs 6 et $-\frac{12}{5}$.

Notez aussi qu'où les (0) (c'est ainsi qu'il désigne les quantités toutes connues) *sont* —, *il y a plus de solutions par + qu'autrement*, *et ce en toutes les équations : or les solutions par — ne se doivent omettre.*

On voit que Girard savait que lorsque le dernier terme tout connu de l'équation est négatif, il y a des racines positives. Il n'emploie pas les mots *positifs, négatifs.*

$$x^3 = 6x + 40,$$

$$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4;$$

il suit la règle de Cardan, sans citer ; ne donne pas les deux autres racines.

$$x^3 = 13x + 12,$$

solution par la Table des sinus ; donne les trois racines

4, — 3, — 1 ; indique une construction géométrique qui n'est autre que la trisection de l'angle, et prend une certaine quantité comme *raid* (rayon).

$$x^3 = 30x - 36,$$

quantité connue négative; il dit que le moyen de solution est le même ; les trois racines sont :

$$-6, \quad 3+\sqrt{3}, \quad 3-\sqrt{3}.$$

Il s'étend beaucoup sur divers cas de solutions ; le suivant est le plus remarquable et s'applique aux solutions entières. Soit

$$x^3 = 7x - 6, \quad x^2 = 7 - \frac{6}{x},$$

il cherche les diviseurs de 6 ; et c'est la méthode encore en usage. Chez lui les diviseurs sont des *efficients*.

$$x^3 = 3x - 1;$$

par l'isomère, on amène celle-ci à

$$x^3 = 300x - 1000;$$

la racine est entre 15 et 16, donc la racine cherchée est entre $\frac{15}{10}$ et $\frac{16}{10}$.

Girard donne ensuite *douze définitions* relativement aux signes, aux coefficients et au rapport des termes des équations, définitions qui lui servent dans l'énoncé de ses théorèmes. Dans la onzième définition, il nomme *première faction* la somme de plusieurs nombres pris un à un, *deuxième faction* la somme des mêmes nombres pris deux à deux, et ainsi de suite.

La douzième définition explique le triangle arithmétique, qu'il nomme *triangle d'extraction*, probablement parce qu'il sert à l'extraction des racines.

Premier théorème. La multitude des produits dans une faction peut s'exposer par le triangle d'extraction; c'est-à-dire, selon nos notations, le nombre de produits différents de m lettres prises n à n est

$$\frac{m(m-1)\ldots m-n+1}{1.2.3\ldots n}$$

Deuxième théorème, exprimé selon le langage actuel. Une équation a autant de racines qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant; le coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines; le coefficient du troisième terme pris avec son signe, etc.

Girard laisse le premier terme dans un membre et place tous les autres termes dans l'autre membre, ce qui l'oblige, pour énoncer son théorème, à faire beaucoup de distinctions. Il montre que son théorème subsiste même avec des racines imaginaires, par exemple

$$x^4 = 4x - 3,$$

les racines sont

$$1, \quad 1, \quad -1+\sqrt{-2} \quad -1-\sqrt{-2}.$$

Il connaît les racines égales.

On pourrait dire: A quoi sert ces solutions qui sont impossibles? Je réponds: Pour trois choses: pour la certitude de la reigle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité.

Il apprend à former une équation correspondante aux factions données, mais il ne faut pas confondre les *meslés* (combinaison) avec la somme des puissances des solutions (racines). Soient

A premier meslé,
B deuxième meslé,
C troisième meslé,
D quatrième meslé,
etc.;

on a

A	sera la somme des solutions.	
$A^2 - 2B$	—	carrés.
$A^3 - 3AB + C^3$	—	cubes.
$A^4 - 4BA^2 + 4AC + 2B^2 - 4D$	—	carrés-carrés.

Pas plus loin que les bicarrés.

Ces théorèmes et ces formules sans démonstrations : il est évident que Girard avait des démonstrations.

Connaissant une solution, il indique le moyen de trouver les coefficients de l'équation débarrassés de cette solution. Il n'a pas recours à la division; uniquement à la composition des coefficients qu'il nomme les *meslés*.

Jusques icy nous n'avons encore expliqué à quoy servent les solutions par — quand il y en a. La solution par — s'explique en géométrie en rétrogradant, et le — recule là où le + avance.

C'est la première trace d'une interprétation géométrique des quantités négatives; la géométrie de Descartes n'a paru qu'en 1637.

Problème d'inclinaison. ABOF est un carré donné, $AB = 4$. Il s'agit de mener par le point A une droite ANC de manière que la droite NC, interceptée dans l'angle droit adjacent à O, soit égale à $\sqrt{153}$. On demande la longueur de FN.

Solution. Soit

$$FN = x;$$

sans dire comment, il dit qu'en a l'équation

$$x^4 = 8x^3 + 120x^2 + 128x - 256,$$

les quatre valeurs sont

$$1,\ 16,\ -4\tfrac{1}{2} + \sqrt{4\tfrac{1}{4}},\ -4\tfrac{1}{2} - \sqrt{4\tfrac{1}{4}}.$$

N est entre F et O; il porte FN $=$ 1, FD $=$ 16 du même côté et les deux autres dans le sens opposé. Les données sont choisies de manière à avoir des racines rationnelles, ce qu'on ne fait pas dans les traités modernes qui tous ont adopté cet exemple.

Des postposées quantités en Algèbre. Ce titre obscur renferme la résolution de cette équation

$$xy = ay + b,$$

d'où

$$y = \frac{b}{x - a}.$$

Il énonce ici six théorèmes de l'*Arithmétique* de Stevin dont je ne puis deviner le sens, n'ayant pas cet ouvrage à ma disposition; ils sont relatifs à la trigonométrie, il y est question de *sécante*.

C'est pour n'avoir pas connu ce mode de solution, dit Girard, que Cardan et Stevin ont donné, souvent sans nécessité, des solutions embarrassées. Il choisit pour exemple une question qui mène aux équations suivantes:

$$x + y + z = 26,\quad y^2 = xz,\quad z^2 = 2yz + 6z.$$

C'est icy où ils se sont arrestez, mais nous achèverons et nous passerons à travers ce nuage.

Par voie d'élimination, il trouve

$$x = 2,\quad y = 6,\quad z = 18.$$

Après ce problème, on lit : *Fin de l'Algèbre*, au bas de la page, recto. Sur le verso, on lit : *De la mesure de la superficie des triangles et polygones sphériques, nouvellement inventée par Albert Girard.*

Il dit qu'il va découvrir des choses qui n'avaient jamais été *cogneues*, sinon avant le déluge (*).

Il commence par faire des réflexions judicieuses sur l'emploi des mesures. Le *pied* sert à mesurer lignes, aires et solides ; mais ce mot *pied* ne conserve pas même signification : c'est successivement un pied linéaire, superficiel, solide ; de même le mot *degré*, quand il s'agit d'un arc, est un degré circulaire, et quand il s'agit d'un angle, c'est un degré angulaire. Il donne une plus grande extension à ce mot *degré* et s'en sert pour mesurer des angles solides et des aires sphériques ; à cet effet, il suppose que l'angle solide trirectangle a 90 degrés ; les huit angles solides qu'on obtient par le prolongement des faces, remplissant tout l'espace, contiennent 720 degrés. Assignant autant de degrés à l'aire de la sphère, alors toute aire sphérique peut être exprimée en degrés, minutes, secondes, etc. Il adopte ces nombres, dit-il, parce que la circonférence est divisée en 360 parties égales ; mais il aurait mieux valu adopter la division par *dixme*.

Il procède ensuite à des définitions et à des propositions que nous allons rapporter dans le même ordre, mais avec les notations modernes.

Définitions. Cercle *majeur, mineur* ; grand cercle et petit cercle de la sphère ; *fibule* = triangle sphérique ayant deux côtés chacun de 90 degrés.

Lemme I. ABC *étant un triangle sphérique et* A *le pôle ; cercle* BC *majeur ou mineur, l'aire* ABC *est à l'aire*

(*) Il paraît que Girard admet avec Stevin qu'il a existé avant le déluge un peuple très-sage, très-instruit, très-heureux. Opinion poétique.

enlevée par le cercle BC *comme l'angle* A *à quatre droits.*

Lemme II. a *et* b *étant deux angles moindres chacun qu'un quadrant, on a*

$$\frac{\text{tang}\,a}{\text{tang}\,b} > \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b};$$

*il démontre la première inégalité et, pour la seconde, il s'en réfère à la fin du chapitre IX du livre Ier de l'*Almageste *et au théorème VI du livre Ier de* Copernique *en ses Révolutions.*

Lemme III. *La* somme *des angles intérieurs d'un polygone rectiligne est égale à autant d'angles droits que le double du nombre des côtés moins* 4.

Théorème. *Tout polygone sphérique compris d'arcs de cercles majeurs tient autant de degrés superficiels que la somme de tous ses angles intérieurs excède la somme des angles intérieurs d'un polygone rectiligne de même nom, quand la superficie de la sphère est posée estre de* 720 *degrés superficiels.*

Suivent des explications numériques sur le triangle, l'heptagone. *OEil* et *yeux* au pluriel, dénomination pittoresque, est ce que nous appelons *fuseau.* Soit un *œil* de 30 degrés; l'aire est de 60 degrés superficiels, car le polygone rectiligne de même nom est *biligne* et n'est pas *polygone.* Il ne faut donc rien ôter de 60 degrés.

Ainsi le théorème subsiste pour les *yeux.*

Ce sont de simples énoncés, les démonstrations sont plus loin.

Mixte = triangle sphérique formé par deux arcs de grands cercles égaux et par un petit cercle.

Aire du mixte. Soit ABC un triangle mixte, AB = AC, et BC un petit cercle. Si l'on pose le rayon égal à 1, on aura

$$\text{aire ABC} = \text{A sin verse AB}.$$

Girard ne suppose jamais le rayon (*raid*) égal à 1.

Soit

$$\text{AB} = 36^\circ\, 52', \quad \text{A} = 15^\circ,$$

$$\text{sin verse AB} = \frac{1}{5} \text{ environ},$$

donc

$$\text{aire ABC} = \frac{1}{120} = 3^\circ \text{ environ}.$$

Problème. *Construire un triangle sphérique rectangle équivalent à ce mixte et ayant même angle* A.

Solution. Soit ADE ce triangle,

$$\text{A} = 15^\circ, \quad \text{D} = 90^\circ;$$

de là, d'après le théorème, on conclut qu'on doit avoir $\text{E} = 78^\circ$, car

$$90 + 78 + 15 - 180 = 3.$$

Par les formules de la trigonométrie sphérique, Girard calcule les côtés et trouve

$$\text{AE} = 37^\circ\, 59';$$

ainsi

$$\text{AE} > \text{AB} \quad \text{et} \quad \text{AD} = 36^\circ\, 33', \quad \text{aire AD} < \text{AB}.$$

$$\text{DE} = 9^\circ\, 4';$$

les 15 degrés du petit cercle BC ne valent que 9 degrés environ d'un grand cercle. Ainsi BC < DE.

Proposition. *Un triangle sphérique de trois arcs majeurs tient autant de degrez de superficie, que l'excez des trois angles sur* 180 *degrez*.

I. *Démonstration particulière ès fibulles*. Soit la fibulle ABC, AB = 90°, AC = 90°; la somme des trois angles est $180^\circ + A$; donc, d'après le théorème, l'aire ABC égale A, ce qui est évident.

II. *Démonstration ès triangles rectangles sphériques ayant un chacun costé défaillant : en conclusion probable.*

Défaillant = aigu; *conclusion probable.* Girard ne donne pas sa démonstration comme rigoureuse.

Soit BDN un triangle sphérique rectangle en N, prolongeons BD en Q et BM en C, de manière qu'on ait $BDQ = BNC = 90^\circ$; l'arc CQ mesure l'angle B. Prolongeons CQ en R de manière que $CQR = 90^\circ$, on aura $RQ < D$, car $D > 90^\circ - B$; portons l'arc qui mesure D de R en F de sorte que l'on ait

$$RQF = D, \quad QF = B + D - 90^\circ, \quad CF = 90^\circ - D;$$

ainsi, si le théorème est vrai, QF représente en degrés superficiels l'aire du triangle BDN.

Posons

$$BD = n, \quad DN = b, \quad NB = d,$$

$$\text{séc}\, n = \text{tang}\, B \; \text{tang}\, D;$$

d'après le lemme II,

$$\frac{\text{tang}\, B}{\text{tang}\, 90^\circ - D} > \frac{B}{90^\circ - D};$$

donc

$$\text{séc}\, n > \frac{B}{90^\circ - D}, \quad \cos n < \frac{90^\circ - D}{B};$$

$$\cos n = \sin DQ, \quad \sin DQ < \frac{90^\circ - D}{B}.$$

Augmentons l'arc QD,

$$QDG = QD + DG = 90^\circ - n + z,$$

tel que

$$\sin 90^\circ - n + \alpha = 0 = \cos(\alpha - a) = \frac{90^\circ - D}{B} = \sin QDG,$$

G tombe entre D et B.

$$\text{séc}\, d = \sin B \,\text{séc}\, D.$$

Par le lemme II,

$$\frac{B}{90^\circ - D} > \frac{\sin B}{\sin 90^\circ - D}, \quad \frac{B}{90^\circ - D} > \text{séc}\, d,$$

$$\cos d > \frac{90^\circ - D}{B}, \quad \cos d = \sin CN;$$

donc

$$\sin CN > \frac{90^\circ - D}{B}.$$

Diminuons l'arc CN,

$$CP = CN - NP = 90^\circ - d - \beta,$$

et tel que

$$\sin(90^\circ + \beta) = \cos(d + \beta) = \frac{90^\circ - D}{B} = \sin CP.$$

Le point T tombe entre C et N;

$$d + \beta = \alpha - n,$$

donc

$$a - n > d, \quad BG > BN, \quad BG = BP.$$

Si donc, du point B comme centre et d'un rayon sphérique BG, on décrit un arc GP, contenu dans l'angle B, le point P tombe entre N et C.

L'aire du mixte

$$BGP = B \sin \text{verse},$$

$$BG = B \sin \text{verse}\, \alpha - n = B[1 - \cos(\alpha - n)]$$
$$= B + D - 90^\circ = QF;$$

or *l'arc* GP *croisant toujours l'arc* DN, *l'aire du mixte* *est équivalente à celle du triangle* BDN. Donc l'aire de ce triangle est CF ou B + D + 90 — 180; ce croisement est la seule raison que Girard allègue. Aussi il regarde cette raison comme donnant une probabilité et non comme démonstrative. Il finit même par dire: *Notez que j'ai esprouvé en deux divers exemples que* GD *estoit plus que double à* NP, *etc.* Il a dû recourir à un moyen empirique.

Il serait intéressant d'avoir une démonstration rigoureuse de l'équivalence des aires BDN et BGP, bien entendu sans connaître l'aire de BDN, puisque cette équivalence doit servir à trouver cette aire.

III. *Démonstration en tous triangles sphériques.* Il décompose chaque triangle en deux triangles rectangles.

IV. *Démonstration de tous les polygones sphériques.* Il les décompose en triangles. Il termine par ces paroles remarquables auxquelles on n'a pas fait attention :

Mais le lecteur se contentera présentement de la démonstration contingente, jusques à ce qu'ayant plus de loisir, je la donne à sa perfection.

De la mesure des angles solides lesquels sont circuits de superficies planes. Pour faire cela, on mesure les inclinaisons des plans, on les ajoute ensemble, et de la somme on retranche la somme des angles d'un polygone rectiligne de même nom que la base. C'est ici la première idée de la mesure d'un angle solide. Il indique la mesure des angles solides des secteurs sphériques, et l'ouvrage est terminé par la mesure de l'angle solide d'un cône isocèle.

On voit, d'après ce résumé, que Girard a le premier :

1°. Fait connaître les relations combinatoires entre les coefficients des équations et des racines, ordinairement attribué à Newton;

2°. Donné l'interprétation des racines négatives, ordinairement attribué à Descartes.

3°. Fait sentir l'utilité des racines imaginaires;

4°. Donné des formules pour les sommes des puissances des racines;

5°. Donné l'aire du triangle et des polygones sphériques;

6°. Donné la mesure des angles solides.

Girard doit être placé au premier rang parmi les grands géomètres du XVII^e siècle, ce qui ne l'a pas empêché de mourir en 1638 dans un état très-voisin de la misère.

L'*Invention nouvelle, etc.*, est un ouvrage excessivement rare. Il n'existe pas dans les bibliothèques publiques de Paris. J'en dois la communication à l'obligeance de M. Chasles (*).

NOTE HISTORIQUE SUR L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE.

(Extrait d'une Lettre de M. PROUHET.)

Lagrange dit au sujet de ce théorème (*Journal de l'École Polytechnique*, p. 275, 1798) :

« On l'attribue communément à Albert Girard qui
» l'énonce, en effet, dans l'ouvrage intitulé : *Invention*
» *nouvelle en l'Algèbre*, et imprimé à Amsterdam en
» 1629; mais comme la preuve qu'il en donne n'est pas
» rigoureuse et qu'elle ne peut pas même être regardée
» comme une induction, on devrait plutôt l'attribuer à
» Cavaleri qui l'a donnée dans le *Directorium generale*
» *uranometricum*, imprimé à Bologne en 1632, avec la
» belle démonstration rapportée par Wallis et insérée
» depuis dans la plupart des trigonométries. »

(*) Il l'a trouvé dans un paquet de livres qu'il a fait venir en bloc d'Allemagne.

On doit ajouter que Girard ne donne pas sa démonstration comme rigoureuse, mais comme une probabilité provisoire et promettant une démonstration rigoureuse.

Euler a rapporté la démonstration de Girard dans son Mémoire *De mensura angulorum solidorum acta*, Ac. Sc. Petrop. pro 1778, pars posterior, p. 33, et le nomme *acutissimum geometram*.

Evidemment Euler n'a pas lu l'ouvrage de Girard. Il lui attribue une démonstration que l'on doit à Cavaleri.

Le titre complet de l'ouvrage de Cavaleri est :

Directorium generale uranometricum in quo trigonometriæ logarithmicæ fundamenta ac regulæ demonstrantur, astronomicæque supputationes ad solam fere vulgarem additionem reducentur, opus utilissimum astronomis, arithmeticis, perspectivis, architectis principue militaribus, mechanicis, geographicis, nec non ipsis philosophis naturalibus; authore Fr. Bonav. Cavalerio, Mediolanensi ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, priore titulati ac in almo Bononiensi gymnasio primario mathematicorum professore. Bononiæ, 1632; in-4.

L'ouvrage est composé de trois Parties :

1re. Introduction historique, notions préliminaires sur les lignes trigonométriques et les Tables de logarithmes;

2e. Trigonométrie rectiligne;

3e. Trigonométrie sphérique.

L'ouvrage est suivi d'une Table de sinus et d'une Table de logarithmes des nombres de 1 à 10000.

Le théorème sur l'aire du triangle sphérique est donné dans la troisième Partie, chapitre VIII, page 315.

Après quelques mots sur la nouveauté et l'utilité de l'invention, il ajoute cette singulière comparaison :

Pulcherrimum igitur hoc inventum aliis quoque communicandum esse censui, illudque hoc postremo capite non incongrue fuit reservatum, quo sublatis dapibus qui-

bus in mensa communiter vesci consuescimus, his exempta fames novo hoc cibo restituta, famelici potius quam saturi ab astromica mensa decedamus.

Cette métaphore culinaire a été reproduite dans le titre suivant : *Freundchaftliche Bewirthung meiner mathematischen Bruder mit einem Traetament von sechs gerüchten, oder curieuse math. aufgabe nebst ihren auflosung.* Hospitalité amicale offerte à mes frères en mathématiques ; repas en six plats, ou problèmes de mathématiques curieux avec leurs solutions, par Jacques Jacobsen. Sleswig, 1790 ; in-8.

Cavaleri (B.) est né à Milan en 1598. Il entre dans l'ordre des Jésuates (*), s'adonne aux mathématiques, devient élève de Galilée, se distrait de violentes attaques de goutte par l'étude, et meurt le 3 décembre 1667.

BIBLIOGRAPHIE.

Licence ès Sciences Mathématiques. — Résolution des questions relatives a l'épreuve pratique, d'après le *Programme officiel* du 20 avril 1853 ; par *E. Reynaud*, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, 1855, in-8 de VII-120 pages.

L'auteur a résumé en ce petit nombre de pages les solutions de trente-huit questions les plus difficiles de la partie mathématique du programme de la licence. On y

---

(*) Fondé pour des frères lais au XIV[e] siècle, devient un ordre régulier; porte le nom des Hiéronymites, de son patron saint Jérôme ; fut supprimé en 1668.

trouve les formules de résolution, l'exposition des théories qui servent à établir ces théorèmes.

Les dix premières questions concernent l'enseignement des lycées. Nous signalons la cinquième question relative à la recherche d'une racine réelle d'une équation transcendante par la méthode des différences ; vu l'exigence du moment et la pénurie des moyens, cette indication est précieuse. Les questions 12 à 26 se rapportent à la mécanique rationnelle et pratique. Pour cette dernière, on a résumé les formules répandues dans les ouvrages de MM. Poncelet, Morin ; bien entendu que ces calculs supposent des connaissances physiques comme préliminaires. L'astronomie sphérique, planétaire, stellaire est l'objet des questions 26 à 38. Dans la question 34, on établit les relations entre l'ascension droite, la déclinaison, la longitude et la latitude d'un astre, ayant égard à la précession, la nutation et l'aberration.

En traitant dans les colléges des changements de coordonnées linéaires et polaires, il serait convenable d'apprendre aux élèves les noms que portent ces changements chez les astronomes ; cela donnerait quelque intérêt à ces opérations et préparerait aux études astronomiques. Plusieurs de ces questions auraient pu être simplifiées d'après les travaux consignés dans les *Astronomischen nachrichten* (*), journal qu'il est désormais indispensable de consulter en écrivant sur l'astronomie. Ce journal et celui de M. Crelle sont deux monuments impérissables que l'Allemagne élève à la science. Quand connaîtrons-nous les travaux de Hansen, Encke, Brunow sur le calcul des perturbations planétaires ? Combien de temps resterons-nous encore le seul peuple civilisé qui soit

(*) *Voir* l'excellent Mémoire de M. Gœtz, nº 752, t. XXXII, p. 144, 1051.

privé d'un journal d'astronomie? C'est une manière de se distinguer qui n'est pas très-flatteuse.

M. Reynaud a voulu faire un travail utile. Le but est atteint.

Éléments de Géométrie, par *S.-F. Lacroix*, membre de l'Institut. Dix-septième édition, rédigée conformément aux *Programmes* de l'enseignement scientifique dans les Lycées, par M. *Prouhet*, professeur de mathématiques (*).

Les géomètres éminents de l'école des Lagrange et des Laplace n'ont pas dédaigné de descendre de temps en temps des hautes régions de l'analyse dans le champ plus modeste des éléments de la science. C'est là, dans les éléments, que leur esprit a dû s'exercer non plus à résoudre des problèmes d'un ordre plus ou moins élevé, mais à former une classification méthodique et lumineuse des vérités simples et fondamentales, base du vaste édifice de la science des grandeurs. A côté du *Traité des fonctions elliptiques* et du grand *Traité de calcul infinitésimal*, figurent deux ouvrages élémentaires de géomètres auxquels s'attachent respectivement, comme aux précédents, les noms de Legendre et de Lacroix, et peut-être que ces livres élémentaires ont présenté à leurs auteurs des difficultés non moins grandes que celles qu'ils on eu à vaincre, de diverses manières, dans une sphère plus élevée. Depuis, on ne s'est jamais sensiblement écarté de la marche suivie par ces illustres maîtres. Le groupement général des théories partielles, adopté par Legendre, a peut-être constamment prévalu, mais pour ce qui est de l'exposition en elle-même, il est facile de reconnaître que les procédés de Lacroix sont plus empreints de cet esprit

(*) In-8, avec figures dans le texte. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 4 francs.

d'analyse qui est dans la nature des choses et qui fait passer sans effort d'une vérité à une autre successivement plus complexe. L'expérience et la nécessité des temps ont fait sentir le besoin d'introduire dans l'enseignement un ordre uniforme et déterminé. L'ouvrage de Lacroix devait, en conséquence, recevoir en certains points une distribution différente des matières et dans d'autres quelques développements que l'auteur avait négligés. M. Prouhet s'est chargé de ce double soin. La dix-septième édition de la *Géométrie* de Lacroix qui vient de paraître a été divisée en quatre Parties. La première Partie comprend toute la géométrie plane, c'est-à-dire ce qui se rapporte à l'enseignement de la classe de troisième (sciences). La deuxième répond à l'enseignement de la classe de seconde et comprend conséquemment les propriétés générales de la géométrie de l'espace. Dans la troisième Partie on trouve le complément de ces propriétés en vue de la classe de spéciales. Enfin la quatrième Partie renferme les notions sur les courbes usuelles qui sont destinées à la classe de rhétorique.

Les énoncés du Programme officiel sont intercalés dans le texte, de façon que les leçons se trouvent distribuées dans leur ordre naturel. Il en résulte une économie de temps pour l'élève qui se trouve par là dispensé d'aller rassembler les fragments épars d'une même théorie.

On connaît le mode d'exposition clair, précis et simple qui caractérise les écrits de Lacroix. Dans les endroits, peu nombreux, il faut le dire, où il est devenu indispensable d'introduire quelques nouveaux développements, M. Prouhet s'est montré pour le fond et pour la forme le digne émule de l'illustre auteur. L'ouvrage forme ainsi un tout parfaitement homogène, et, en le livrant à la publicité, M. Prouhet a rendu un véritable service aux élèves et aux professeurs.

Aujourd'hui les livres élémentaires pullulent en quelque sorte. Il semble malheureusement que leur valeur moyenne diminue proportionnellement à leur nombre. On doit donc regarder comme une bonne fortune la réapparition, sous une forme plus appropriée aux besoins actuels, de l'œuvre de l'un des hommes qui ont le plus profondément et le plus efficacement médité sur la philosophie de l'enseignement.

Je dois ajouter en terminant que l'éditeur, M. Mallet-Bachelier, a pris un soin particulier de la partie typographique.

E. Combescure.

Tables des logarithmes et co-logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques, disposées de manière à rendre les parties proportionnelles toujours additives, suivies d'un Recueil de *Tables astronomiques et nautiques*; par *V. Caillet*, examinateur de la Marine, ancien professeur d'astronomie et de navigation aux Écoles Navale et d'Hydrographie. Paris, Mallet-Bachelier, Robiquet, édition stéréotype, 1854. Grand in-8 de 331 pages; 47 Tables.

Du moment qu'une question est ramenée au calcul numérique, tout ouvrage qui permet une plus grande rapidité dans l'exécution rend service à la science. De ce nombre est l'ouvrage dont nous allons rendre compte. Composé de quarante-sept Tables, il contient les principales Tables nécessaires au calculateur, à l'astronome et au navigateur. La première Table contient une série de quelques nombres usuels avec leurs logarithmes dont l'emploi simplifie les calculs. La seconde Table donne les mêmes expressions pour tous les nombres, et, dans le cadre, trois colonnes de divisions de la circonférence décuples les unes des autres. Une colonne de parties proportionnelles est jointe aux logarithmes. L'auteur donne une règle pour rendre les parties proportionnelles toujours additives, règle dont l'emploi est surtout commode, dans la Table III des lignes trigonométriques qui sont données de 15 en 15 secondes.

On prend toujours le logarithme inférieur à celui que l'on cherche, et si l'argument et le logarithme croissent dans le même sens, on lit la partie proportionnelle à gauche, et à droite de la page en cas contraire. Comme dans les grandes Tables de l'Observatoire, on donne en outre les cinq premiers degrés des logarithmes de $\frac{\sin a}{a}$ et $\frac{\operatorname{tang} a}{a}$ qui, se suivant d'unités en unités, ne nécessitent pas d'autre solution. De manière que pour avoir le logarithme de $\sin a$ ou de $\operatorname{tang} a$, il suffit d'ajouter le logarithme de l'arc pris dans la Table II à celui du rapport.

La Table IV, qui sert aux marins à faire le point, peut servir aussi à résoudre rapidement les triangles rectangles; elle donne ces deux formules,

$$b = a \cos C \quad \text{et} \quad c = a \sin C.$$

La Table V contient la latitude croissante sur l'ellipsoïde terrestre en prenant l'aplatissement égal à $\frac{1}{103}$; elle est calculée par la formule

$$L_c = \frac{10800'}{\pi M} \log \operatorname{tang}\left(45^\circ \frac{L}{2}\right)$$
$$- \frac{10800'}{\pi}\left(e^2 \sin L + \frac{e^4 \sin 3L}{3}\right).$$

Les autres Tables sont spéciales à l'astronome ou au navigateur. Parmi celles-ci, quelques-unes sont nouvelles et d'autres sont publiées pour la première fois en France. La Table X, qui sert à résoudre immédiatement un triangle, connaissant un côté adjacent à deux angles, est très-commode dans les atterrissages.

Les Tables XI et XII, qui permettent de déterminer à quelle distance on se trouve d'un objet dont la hauteur est connue, sont nouvelles en France. Par leur étendue, elles facilitent singulièrement les moyens de vérifier les chronomètres lorsqu'on est en vue de terre.

Le moyen le plus juste et le plus constamment employé à la mer pour déterminer la latitude est la hauteur méridienne du soleil. Quand il arrive que cet astre n'est pas visible à cet instant précis, le navigateur est obligé d'employer d'autres méthodes longues et moins exactes; parmi celles-ci, la méthode des circumméridiennes est la meilleure. Elle donne la quantité à ajouter à une hauteur pour la rendre méridienne. Delambre a calculé des Tables pour faire ce calcul 16 minutes avant ou après midi. La correction est celle-ci :

$$x = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}\,\frac{\cos L\cos d}{\sin(L-d)} - \frac{1}{2}\cot(L-d)\sin 1'' \times 1^{\text{er}}\ \text{terme};$$

P étant l'angle horaire, L la latitude estimée, d la déclinaison.

La Table XL donne

$$\log\left[\frac{\cos L\cos d}{(\sin(L-d))}\right].$$

Dans la Table XLI, poussée jusqu'à 30 minutes, on trouve les valeurs des deux coefficients m et n nécessaires pour le calcul *comméridien*

$$m = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''} \quad \text{et} \quad m = \frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$$

la deuxième correction est souvent insensible. La première Table est tirée de l'ouvrage anglais : *The practice of navigation...*, by Henry Ruper, et la deuxième a été prise avec correction dans : *Hulfstafeln zur zeit und bestimmungen*, von H.-C Schumacher (1820).

La Table XLIII, qui donne la réduction des heures, minutes et secondes en fractions décimales, est très-utile.

La dernière Table contient les établissements des ports et les unités de hauteur des marées pour les principaux ports. En passant, je ferai remarquer que l'*Annuaire* du Bureau des Longitudes et beaucoup d'autres ouvrages donnent à Dunkerque $11^h\,45^m$ pour établissement, tandis qu'il est de $12^h\,13^m$; de même pour Calais il est de $11^h\,49^m$ et non $11^h\,45^m$. Les quarante-sept Tables sont suivies d'explications détaillées qui permettent d'en faire rapidement usage.

Ce serait une erreur de croire que ces Tables ne sont utiles qu'aux navigateurs; les professeurs des lycées peuvent s'en servir également avec avantage. Ils y trouveront des exercices des deux trigonométries et de cosmographie avec emploi continuel de logarithmes et aussi de co-logarithmes. Ce mot est nouveau, mais la chose est ancienne; c'est ce qu'on appelait jusqu'ici complément des logarithmes, opération très-commode et encore plus quand on n'a pas besoin de la faire, car, dans cet ouvrage, elles sont pour la première fois toutes faites. Lorsque presque toutes les productions du jour ne se distinguent les unes des autres que parce que les unes mettent à droite ce que les autres mettent à gauche, on est heureux de rencontrer un travail où se manifeste une pensée spontanée qui a un mérite intrinsèque et qui porte le cachet d'un perfectionnement réel.

TERQUEM (PAUL),
Professeur d'hydrographie à Dunkerque.

Cours d'Arithmétique, rédigé conformément aux *Programmes officiels;* par M. *Dupain,* ancien élève de l'École Normale. In-8. Prix : 3f 50c.

Cours de Géométrie, rédigé conformément aux *Programmes officiels;* par M. *Dupain,* ancien élève de l'École Normale. In-8. Prix : 1f, 50.

Encore une Arithmétique! Il y en a déjà tant! Elle est, comme la plupart de ses devancières, conforme aux *Programmes officiels* et *utile* aux élèves qui veulent passer des examens.

L'auteur a d'abord fait une arithmétique pour ceux qui se proposent simplement d'*apprendre* l'arithmétique, puis il s'est étendu sur ce lit de Procuste qu'on appelle *programme,* et, à force de s'y débattre, il a pu s'en relever sinon sans meurtrissures, du moins sans mutilations.

Écrire sur un sujet si rebattu, c'est prendre l'engagement de dire autrement que tout le monde; cet engagement, M. Dupain l'a tenu. Tantôt c'est la forme qui se renouvelle: pour démontrer, par exemple, qu'un produit de deux facteurs ne change pas quand on change l'ordre des facteurs; tantôt c'est le fond même de la démonstration : pour trouver, par exemple, l'erreur relative d'un produit.

Le style est en général concis. M. Dupain aime la brièveté; il ne doit pas être bavard. Mais quand il s'agit d'éclairer une question, il en prend son parti et n'économise pas ses phrases. Ainsi la définition de la division est très-détaillée et tient plus de deux pages; il est vrai que l'élève qui aura lu attentivement ces deux pages aura une idée nette du but multiple de cette opération, autrefois l'épouvantail des écoliers.

Quelle analogie y a-t-il entre la multiplication et la division des entiers et celle des fractions? Comment les théorèmes sur les facteurs entiers s'étendent-ils aux facteurs fractionnaires? Quelle est la portée de cette généralisation? Voilà des questions que traite longuement l'auteur et dont la solution jettera plus tard du jour sur la théorie algébrique des quantités négatives.

Ceux qui aiment le *summum jus* trouveront téméraires quelques paragraphes qui ne peuvent être acceptés que par une interprétation libérale de la lettre du Programme. Nous citerons la théorie des chiffres romains, des nombres premiers, la preuve par 9, les mesures de temps, etc.

Pour se faire pardonner cette audace, M. Dupain a fait de larges concessions à l'esprit nouveau. Arrière les proportions! il n'en reste qu'un souvenir. Heureusement que le Programme, qui a pour l'*adjectif* le même faible que les romantiques dont parle Alfred de Musset, nous laisse les quatrièmes *proportionnelles* et les grandeurs *proportionnelles* sur lesquelles M. Dupain a pu consolider les règles de trois qui ont aussi reçu des novateurs un laissez-passer.

Parler des logarithmes à des lecteurs qui ne connaissent ni les progressions ni les exposants fractionnaires est un de ces tours de force imposés par le Programme et dont M. Dupain s'est tiré par une définition empruntée au *Cours d'analyse algébrique* de M. Cauchy.

La théorie de la règle à calcul est une de ces *utilités* introduites récemment. Le sujet est traité en quatre pages qui en disent plus que bien des brochures.

Mais le triomphe des *utilitaires* est dans les *exercices*, gâteau de farine et de miel que l'auteur jette dans la triple gueule de Cerbère pour franchir le seuil de nos écoles. Le budget, la bourse, les chemins de fer, l'armée, la marine, l'éclairage au gaz, la boucherie, la boulangerie, l'agriculture, l'almanach et jusqu'aux allumettes chimiques y ont trouvé place et étouffent quelques questions de science *pure* que l'incorrigible auteur y a glissées.

Nous signalerons encore dans l'Arithmétique de M. Dupain quelques notes historiques et une table de matières très-développée qui facilite beaucoup les recherches.

En géométrie, l'auteur avait moins de concurrents, mais aussi moins de guides; il a interprété largement le Programme, et, à l'aide de notes, d'appendices, d'introduction, d'exercices, il a trouvé moyen d'initier les élèves studieux (il y en a encore) à l'étude sérieuse des sections coniques.

Pour racheter cette hardiesse, il a fallu sacrifier à l'*utile;* aussi est-il question de vis ordinaires, de vis d'Archimède, d'escaliers, de bateaux à vapeur, de solénoïdes, d'orbites planétaires, d'aplatissement du méridien, de projectiles, de miroirs, de jardinage, de voûtes à construire, d'alignements de routes à raccorder, etc.

PAR UN PROFESSEUR.

Note du Rédateur. La *science* n'est plus qu'un instrument accessoire dans l'enseignement: les applications sont le point essentiel. C'est à qui entassera le plus de questions disparates sur la mécanique, l'agriculture, la physique, le commerce, la chimie, l'astronomie, la métallurgie, les voies de fer, etc; sorte d'exposition mathématique de bric-à-brac. Descartes ne l'entendait pas ainsi. Voici ce qu'il nous dit: « Mais je ne m'arrête point à » expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais » le plaisir de l'apprendre de vous-même et l'utilité » de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à » mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette » science » (*Géométrie*, édit. de Cousin, t. V, p. 316).

C'est précisément à cette *principale* utilité qu'on fait la guerre. On n'en voit d'autre que celle dont les résultats peuvent se coter à la Bourse. Contradiction singulière! ils préconisent une philosophie spiritualiste et un enseignement matérialiste. Cela rappelle les dernières paroles du juste :

οὐ γὰρ οἴδασι τί ποιοῦσι.

SUR LE PROBLÈME DES BŒUFS ATTRIBUÉ A ARCHIMÈDE

(voir page 113).

Monsieur le Rédacteur,

Puisque vous m'avez donné l'occasion de m'occuper du Problème des Bœufs attribué à Archimède, je vais vous faire part de quelques remarques que m'a suggérées votre article curieux.

Je crois comme Struve, non-seulement que les deux dernières conditions ont été ajoutées, mais qu'il en est de même de tout ce qui est relatif aux vaches, depuis le vers 17^e^ jusqu'au 26^e^ inclusivement, plus les vers 28 et 29 qui me paraissent interpolés, de manière à séparer en deux le dernier distique où je lirais πόσοι au vers 27.

Ainsi les vers 1 à 16 me semblent présenter un énoncé complet, auquel les vers 27 et 30 forment un épilogue très-convenable.

Le problème ainsi réduit a pour solution la plus simple ou principale les quatre nombres que vous donnez à la page 117, savoir :

2226 bœufs blancs

(je pense que le rédacteur primitif n'avait pas songé à distinguer les sexes, et qu'il prenait ταῦροι tout simplement dans le sens de βόες);

Ensuite :

1602	bœufs noirs,
1580	bigarrés,
891	roux.

On obtient toutes les autres solutions du problème en multipliant ces divers nombres par un entier quelconque.

L'auteur concluait en disant : « Mon cher ami, si tu » nous dis exactement d'après cela le nombre des bœufs » d'Hélios, tu n'as pas à craindre de passer pour inha- » bile ou ignorant en arithmétique. »

Cette conclusion est évidemment complète et n'indique aucune restriction de la part de l'interrogateur.

C'est donc bien un nouveau rédacteur qui ajoute : « Mais je ne te tiens pas quitte : il faut encore, si tu veux » passer pour vraiment savant, etc. »

Or, quelles sont les nouvelles conditions auxquelles sont assujettis les nombres demandés? il y en a deux. Voici comment je comprends la première : je ne pense pas que la somme des nombres de bœufs blancs et noirs doive être un carré parfait; je suppose que l'auteur a voulu dire simplement : si les bœufs blancs et noirs réunis étaient rangés en carré, en comptant tous ceux du circuit, la somme des premiers rangs sur tout le périmètre du carré, τὰ περιμήκεα, égalerait la mesure des plaines de la Sicile; et je lis en conséquence πλῆθος au lieu de πλίνθου qui n'a pas de sens en cet endroit.

(Peut-être aussi faut-il lire ἔμβαδον au lieu de ἔμπεδον.)

En deux mots, *le quadruple de la racine carrée* du nombre des bœufs blancs et noirs serait *la mesure de la Sicile*.

Du reste, cette condition ne me paraît pas devoir être prise en rigueur, c'est-à-dire exiger une racine carrée exacte : quel que soit le nombre des hommes d'une troupe, on peut toujours proposer de les disposer en bataillon carré ou supposé tel. L'auteur dit simplement : « quand ils étaient placés de manière à avoir la même » mesure en largeur et en profondeur. »

Je reviendrai tout à l'heure sur la manière de satisfaire à cette condition ; je dois auparavant examiner la seconde. Celle-ci ne comporte pas la même tolérance que la première ; il y est dit expressivement que les bœufs roux joints aux bigarrés doivent former un nombre triangulaire, *sans qu'il en manque ni qu'il en reste aucun*. Or, tout nombre triangulaire devant être de la forme $\frac{1}{2}x(x+1)$, il faut donc faire en sorte que le nombre 2471, qui représente la somme des nombres cités, (T + J), dans la plus simple des solutions de la question primitive, ou que le facteur 353, nombre premier qui est le septième de 2471, puisse être identifié à l'un des nombres x, $x+1$, ou à leurs moitiés. Les hypothèses qui se présentent le plus naturellement sont celles-ci :

$$x = 2471, \qquad \frac{1}{2}(x+1) = 1236,$$

$$x + 1 = 2471, \qquad \frac{1}{2}x = 1235,$$

$$\frac{1}{2}x = 2471, \qquad x + 1 = 4943,$$

$$\frac{1}{2}(x+1) = 2471, \qquad x = 4941,$$

$$\frac{1}{2}x = 353, \qquad x + 1 = 707 = 7 \cdot 101.$$

Pour chaque cas, le nombre qui multiplie 2471 dans le produit $\frac{1}{2}x(x+1)$ est le facteur par lequel il faut multiplier tous les nombres de la solution principale.

Ainsi, dans la cinquième hypothèse ci-dessus, le multiplicateur sera 101.

Maintenant, il faut, en revenant à la première condition supplémentaire, que le multiplicateur adopté puisse conduire à la mesure de la Sicile, ce qui déterminerait complétement le problème. Deux nombres se présentent en premier lieu de manière à satisfaire approximativement à cette condition. Ce sont les nombres 12354950 et 12355050. En effet, d'abord chacun d'eux fournit un nombre triangulaire quand on le multiplie par 2471, puisque le premier donne pour produit

$$\frac{247\,099 . 247\,100}{2},$$

et le second

$$\frac{247\,101 . 247\,100}{2}.$$

Ensuite, si on les multiplie respectivement par 3828, ils donnent pour produit

$$47\,294\,748\,600 \quad \text{et} \quad 47\,295\,131\,400,$$

dont les racines carrées sont (à une unité près)

$$217\,473 \quad \text{et} \quad 217\,474,$$

et les quadruples de ces racines

$$869\,892 \quad \text{et} \quad 869\,896.$$

Maintenant, si nous cherchons dans Strabon (liv. VII) les dimensions de la Sicile, nous voyons qu'il attribue à sa forme triangulaire un périmètre de 4400 stades qui se distribuent ainsi :

1720 st. pour le grand côté,
1550 st. pour le moyen côté,
1130 st. pour le petit côté.

Total... 4400

Or, si l'on calcule l'aire de ce triangle par la formule de Héron d'Alexandrie, on obtient d'abord, pour le carré de cette aire, le nombre 734 448 000 000, lequel serait un carré parfait si le chiffre 8 s'y trouvait remplacé par 9, et la racine de ce carré serait 857 000, nombre représentant des stades carrés.

On conçoit d'ailleurs que cette évaluation est nécessairement au-dessous de la vraie valeur du territoire de l'île, à cause des sinuosités du contour, dont la formule fait abstraction.

On peut donc considérer les deux nombres ci-dessus trouvés, 869 892 et 869 896, comme représentant approximativement l'aire totale de la Sicile, conformément à l'énoncé. En conséquence, on a pour solution de la première et de la troisième partie de la question, les formules

$$\begin{aligned} B &= 2226\,k, \\ N &= 1602\,k, \\ T &= 1580\,k, \\ J &= 891\,k, \end{aligned}$$

dans lesquelles $k = 12\,355\,000 \pm 50$.

On peut d'ailleurs arriver à un résultat plus rapproché de 857 000 en multipliant 2471 par 99, ce qui donne 244 629, et posant

$$T + J = \frac{244629 \times 244628}{2}.$$

Alors, faisant

$$B + N = 3828 \times 99 \times \frac{244628}{2} = 46\,353\,581\,208,$$

on a pour la racine carrée 215 298 qui, multiplié par 4, donne 861 182, ce qui est bien près du résultat cherché.

Enfin, on aurait un résultat trop faible en multipliant 2471 par 98, ce qui donne 242 158, et posant

$$T + J = \frac{242\,158 \pm 242\,159}{2}.$$

Il faut alors faire

$$B + N = 3828 \times 49 \times 242\,159 = 45\,422\,247\,948;$$

la racine carrée est 213124 et le quadruple de cette racine donne 852496 (*).

Au surplus, l'incertitude qui reste ici quant au chiffre exact du résultat, ne doit pas étonner, et elle ne suffirait pas pour permettre de conclure que la voie proposée ne peut conduire à la bonne solution. Un nombre tel que l'évaluation de la surface totale de la Sicile n'a jamais pu être donné que comme approximation; et il est d'ailleurs vraisemblable que si l'auteur avait eu en vue un nombre exact, il n'eût pas ajouté la condition du nombre triangulaire qui rendait alors le problème plus que déterminé, à moins toutefois que ce ne fût comme simple vérification. Mais il arrive justement que les hypothèses qui

---

(*) Les géographes modernes donnent à la Sicile 1350 lieues carrées de superficie, ce qui, en supposant le degré de 25 lieues et de 700 stades, porte cette même surface à 1 058 400 stades carrés. En multipliant 2471 par 121, on a 298 991; en multipliant ensuite 3828 par 121 et par 298 992 : 2, on a pour résultat 1 052 576. Mais en multipliant 2471 par 122, on a 301 462; et multipliant alors 3 828 par 61 et par 301 461, on obtient 1 061 268. Entre cette limite et les nombres proposés précédemment, je n'ai trouvé aucun carré parfait.

remplissent cette dernière condition d'une manière satisfaisante ne paraissent nullement de nature à donner le carré parfait exigé par l'hypothèse que je combats.

Restent maintenant les vers 17 à 26, plus les vers 28 et 29 dont je n'ai pas encore parlé.

Ces douze vers me paraissent avoir été ajoutés tout à fait après coup; et même il me semble probable que le distique composé des deux vers 25 et 26 constitue une interpolation faite encore en surcharge et tout en dernier lieu. Faisons donc pour un instant abstraction de ce distique, et ne considérons que les huit vers compris de 17 à 24. Ici je crois que les traducteurs et commentateurs se sont complétement trompés en supposant aux mots σὺν ταύροις, au vers 22, cette signification que le nombre des taureaux devait être ajouté à celui des vaches. Je lis avec Lessing πάσης... ἐρχομένης; mais je place le point à la fin du vers précédent, en faisant dépendre σὺν ταύροις de ἐρχομένης, ce qui alors signifie simplement : *Les vaches rousses qui paissent avec les taureaux;* en un mot, je vois ici ce qu'en terme d'école on nomme une *cheville*. J'ajoute, en outre, que je lis ἔχοντ' ἀτρεκές à la fin du vers 24. Alors, les conditions du nouveau problème, tout à fait indépendant du premier quant à la solution, seront celles-ci : 1° le nombre des vaches blanches forme le *tiers* et le *quart* de celui des vaches noires; 2° le nombre des vaches noires est le *quart* et le *cinquième* de celui des vaches bigarrées; 3° le nombre de ces dernières est le *cinquième* plus le *sixième* de celui des vaches rousses.

Je suis d'autant plus porté à interpréter ainsi l'énoncé, que j'y crois voir une imitation des conditions du premier problème, où : 1° le nombre, des bœufs ou des taureaux *blancs* était la *moitié* et le *tiers* du nombre des noirs (en faisant abstraction des roux); le nombre des bœufs noirs était le *quart* plus le *cinquième* des bigarrés;

et 3° celui des bigarrés, le *sixième* plus le *septième* des blancs.

Avec ces trois conditions, auxquelles sont soumis les nombres des vaches de diverses couleurs, ces nombres sont indéterminés, bien que leurs rapports soient determinés. Mais si l'on ajoute une *quatrième* condition, savoir, comme dans les vers 25 et 26, que le nombre des vaches rousses doit être le sixième plus le septième de celui des vaches blanches, alors il est clair que le problème devient absurde. Il me semble voir là une addition maladroite faite par un scholiaste inintelligent, qui, n'entendant pas la question, aura jugé nécessaire de compléter ainsi l'énoncé où il croyait apercevoir un oubli.

Rejetant donc cette dernière condition comme entièrement apocryphe, on a pour les nombres les plus simples qui satisfont à la nouvelle question :

$$b = 231,$$
$$n = 396,$$
$$t = 880,$$
$$j = 2400;$$

et l'on obtiendra toutes les autres solutions en multipliant par un nombre entier quelconque.

Telles sont, Monsieur le Rédacteur, les remarques que m'a suggérées votre intéressant article. Elles ne lèvent sans doute pas toutes les difficultés; peut-être jugerez-vous néanmoins qu'elles peuvent encore présenter quelque intérêt à vos lecteurs.

J'aurais bien aussi quelques observations à vous adresser sur le texte grec que vous avez édité; mais je ne veux pas me faire de mauvaises affaires.

Au surplus, c'est là une de ces questions auxquelles on consacre volontiers quelques heures de loisir, mais on se reprocherait d'y sacrifier une trop notable fraction de cette précieuse étoffe de la vie humaine que l'on nomme le temps : car

Fugit interea, fugit irreparabile tempus.

Agréez, Monsieur le Rédacteur, etc.,

A.-J.-H. Vincent,
Membre de l'Institut.

LÉONARD BONACCI DE PISE (XIII[e] siècle).

Les coordonnées du centre de gravité de l'homme rapportées à trois plans fixes varient à chaque instant. Lors même que nous nous tenons en repos, la circulation, la respiration, tous les mouvements involontaires de la vie organique déplacent ce point sans cesse. La ligne décrite par ce centre de gravité, depuis la naissance jusqu'à la mort, est la trajectoire vitale géométrique de chaque individu. La vitesse, le $\frac{de}{dt}$ en chaque point de cette trajectoire est sans doute très-variable. Mais si l'on divise la longueur totale de la trajectoire par le temps, soit par le nombre de secondes qu'on a vécu depuis l'entrée dans le monde jusqu'à la sortie, on obtient une vitesse moyenne qui diffère beaucoup d'un individu à l'autre, d'un peuple à l'autre. Il en est ainsi de la trajectoire de la vie intellectuelle. Cette trajectoire se compose de *pensées* qui se comptent par le *nombre* et se mesurent par le *temps*. Ce nombre et surtout le temps établissent une grande différence entre les esprits; c'est surtout la durée de la pensée qui caractérise les esprits supérieurs. Buffon définit le génie: une aptitude à la patience, c'est-à-dire la faculté de faire durer la pensée, de la maintenir longtemps et avec intensité sur le même sujet. Souvent cette faculté de concentration intellectuelle rend impropre aux occupations vulgaires qui exigent des pensées fugaces et multiples. Il résulte de là que des hommes supérieurs passent souvent pour des *niais* chez les hommes inférieurs. C'est ainsi que les négociants de Pise, compatriotes de Léonard, lui ont donné le sobriquet de *Bighelone* (*) ; toutefois, c'était un des plus profonds penseurs du siècle de saint Louis et comme tel jusqu'à ce jour presque inconnu. Les érudits savaient que Léonard avait promulgué et propagé la numération et apporté en Occident l'algèbre des Arabes. Ce sont sans doute d'immenses services, mais qui n'ont que le mérite de l'importation première. Mais on ne se doutait guère qu'un géomètre du XIII^e siècle eût dépassé beaucoup Diophante et les Arabes et n'a été dépassé que par Fermat au XVII^e siècle. Découverte historique que nous devons aux persévérantes investigations du célèbre prince Boncompagni ; découverte infiniment supérieure à ces travaux sur des écrivains obscurs qu'on se plaît à tirer des ténèbres du moyen âge et qui, pour être publiés et illustrés, n'en restent pas moins obscurs. La mise au jour des trois écrits de Léonard enrichit de faits précieux les annales de l'esprit humain. Ce sont les seuls ouvrages qui soient complétement publiés. On en connaît sept :

1°. *Liber abaci* (1202 et corrigé en 1228) ; c'est un Traité d'Arithmétique et d'Algèbre. Le XV^e chapitre concerne l'algèbre et a été publié par M. Libri (*Histoire des sciences mathématiques,* tome II, page 307, note III, 1838).

(*) *Bighelone* est peut-être le synonyme de Bonacci qui revient au *bonace* français. Il est connu sous le nom de Fibonacci par contraction de Filius Bonacci.

2°. *Practica geometriæ* (1220 à 1221); théorique et pratique.

3°. *Liber quadratorum* (1225); c'est l'œuvre principale (publié).

4°. *Flos super solutionibus quarundam questionum ad arithmeticam et ad geometriam vel ad utramque pertinentium* (publié).

5°. *De modo solvendi questiones avium et similium* (publié).

6°. Un commentaire sur le livre X des *Éléments* d'Euclide.

7°. *Libro di merchatanti detto di minor guisa*; n'existe plus, à ce qu'on sache, dans aucune bibliothèque; renfermait des règles d'alliage des métaux.

Les trois écrits 3°, 4°, 5° sont réunis dans un manuscrit du XV^e siècle, sur parchemin, appartenant à la bibliothèque ambrosienne de Milan (E. 75, *parte superiore*). La description de ce manuscrit et des détails bibliographiques sur tous les écrits de Léonard sont exposés dans l'ouvrage suivant avec une érudition et une exactitude auxquelles nous ne sommes plus guère accoutumés :

Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da Baldassare Boncompagni, socio ordinario dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma, tipografia delle Belle Arti, 1854. In-8, VIII-400 pages.

C'est là que nous puiserons des renseignements sur la vie et les œuvres de l'illustre Pisan (*).

(*) M. Boncompagni, dans l'Avertissement, page III, fait savoir que tout ce qu'on trouve dans cet écrit doit être reproduit dans un ouvrage plus vaste qu'il se propose de faire sous le titre : *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano* et dont une partie a déjà été publiée dans les *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, tomo V, anno V (1851-52), pages 5-91, 208-246.

Nous ne connaissons d'autres circonstances de la vie de Léonard que ce qu'il nous apprend lui-même au commencement de son *Traité de l'Abaque* et qu'on trouve dans l'ouvrage de M. Libri (*Histoire des sciences mathématiques,* t. II, p. 287, 1838). En voici la traduction :

« Ici commence le livre de l'*Abacus* composé par » Léonard, fils de Bonacci de Pise, dans l'année 1202.

» Mon père était constitué à Bougie par les marchands » de Pise comme greffier public (*publicus scriba*) (*) à la » douane de Bougie. Comme il y avait continuellement » affluence de commerçants chez lui, il me fit venir dès » mon enfance, et voulut que je restasse pendant quelque » temps pour m'appliquer à l'étude de l'abaque en vue d'un » avantage, d'une utilité à venir. Un admirable maître » m'ayant initié dans l'art des figures indiennes, je pris » tant de plaisir à l'esprit de cet art, que je voulus savoir » tout ce qu'on enseignait là-dessus en Egypte, en Sy- » rie, dans la Grèce, en Sicile et dans la Provence » (*Proventiam*), avec les diverses variétés. Ayant par- » couru auparavant ces contrées, je m'y instruisis par » beaucoup d'études et de discussions, mais je considérai » tout ceci et même l'Algorisme de Pythagore (*Picta- » gorœ*) comme défectueux en comparaison de la méthode » indienne. C'est pourquoi ayant serré de plus près » cette méthode et étudié plus attentivement, y ajoutant » quelque chose de mon propre fonds et y appliquant » quelques artifices géométriques d'Euclide, j'ai travaillé » à la composition de cet ouvrage, et pour être le plus » intelligible qu'il m'est possible, je l'ai divisé en quinze » chapitres distincts. J'ai tout donné avec des raisonne- » ments démonstratifs, afin que ceux qui aspirent à

(*) *Scriba.* Il y en a qui voient là un notaire : c'est probablement une espèce de consul commercial.

» cette science seulement parce qu'elle est plus parfaite
» que les autres, puissent s'instruire et qu'à l'avenir la
» gente latine ne s'en trouve pas dépourvue comme jus-
» qu'à présent.

» Si par hasard je n'ai pas dit assez ou trop et plus
» qu'il n'est nécessaire, je prie qu'on ait de l'indulgence
» pour moi, car il n'y a personne qui n'ait quelques dé-
» fauts et qui soit circonspect en toutes choses et par-
» tout. »

Léonard avait au moins une vingtaine d'années en écrivant son abaque en 1202, ce qui porte l'année de sa naissance vers 1170 ou 1180; on ignore l'année de sa mort. Il y en a qui le font voyager vers Constantinople à la fin du XIII^e siècle, ce qui est impossible. Quoi qu'il en soit, il est certain que notre géomètre était à Pise en 1225, lors du passage de l'empereur Frédéric II.

Ce souverain, dédaignant les idées régnantes, ennemi des croisades, projeta l'indépendance de l'Italie, sa patrie. Il eut à combattre d'ambitieux compétiteurs, d'audacieux pontifes romains, et mourut à la peine. Malgré ces tribulations, il cultivait les lettres, la poésie, et composa un ouvrage sur la chasse estimé encore aujourd'hui. Aimant aussi les sciences, il encouragea les savants et avait dans sa suite deux géomètres de mérite, à en juger par le choix des questions qu'ils adressèrent à Léonard et dont les réponses ont donné naissance aux trois écrits mentionnés (3°, 4° et 5°).

L'un de ces géomètres est Jean de Palerme. Le lieu de sa naissance est la seule chose qu'on en connaisse. Il a proposé trois questions en présence de l'empereur, sorte de tournois scientifiques qui se sont maintenus jusqu'au XVII^e siècle.

Le second savant est un nommé Théodore. Il eut à soutenir une joute philosophique contre un docteur de l'ordre des frères Prêcheurs, premier nom des Dominicains, fondé à Toulouse en 1215. Voici comment le fait est raconté par le P. Thomas Malvenda, *lui-même Dominicain*, dans son *Histoire des frères Prêcheurs sous l'année* 1238. (*Annalium sacri ordinis Prædicatorum centuria prima*, A. R. P. F. Thoma Malvenda. Neapol., MDCXXVII.) C'est un trait curieux des mœurs du temps.

« Le frère Roland, Crémonais de nation, qui passait pour grand philosophe dans ce siècle, était le premier des frères Prêcheurs qui fut licencié et docteur de l'Université de Paris. Il composa avec beaucoup de finesse un résumé de philosophie, car il était très-érudit en matières théologiques et philosophiques. Étant une fois à Crémone, il apprit de quelques frères Prêcheurs qui revenaient de l'armée de Frédéric II, assiégeant alors Brescia (1238), que le philosophe de l'empereur les avait embarrassés de questions au sujet de la philosophie de Roland, sur lesquelles ils ne savaient pas répondre. Enflammé de zèle pour son ordre, il dit : « Préparez-moi un âne. » Car il était goutteux et ne pouvait aller à pied. Cela étant fait, assis sur l'âne, il entra, accompagné de quelques frères Prêcheurs, dans le camp et commença par demander où était le philosophe. Beaucoup d'hommes considérables qui connaissaient et honoraient le philosophe s'étant réunis, et le philosophe étant appelé, Roland lui dit : « Afin que tu saches, toi, maître Théodore, que l'ordre des frères Prêcheurs a des philosophes, je te donne le choix, en présence de ceux-ci, de faire des objections ou de préparer des réponses sur quelque partie de la philosophie que tu veuilles. » Comme Théodore choisit les *objections* de préférence aux *réponses*, Roland remporta dans cette lutte remarquable une victoire qui fut pour l'ordre un grand honneur et une grande gloire. » (*Intorno ad alcune opere, etc.*, p. 47.)

Ce résultat serait moins contestable, s'il était raconté par une personne étrangère à l'*ordre*, car les corporations, système d'esprits concentrés en un seul esprit, possèdent à un degré éminent l'art d'arranger les faits et ne se font pas faute d'exercer cet art.

En janvier 1855, nous donnerons l'analyse complète des trois écrits (*Tre scritti, etc.*,) et des considérations de MM. Boncompagni, Genocchi et Lebesgue sur cette mémorable production qui inaugura le grand siècle de saint Louis.

BIBLIOGRAPHIE.

Eléments de Géométrie, rédigés d'après les *nouveaux Programmes* de l'enseignement scientifique des Lycées; par M. *A. Amiot,* professeur de Mathématiques au Lycée Saint-Louis, à Paris. Paris, 1855; in-8 de 144 pages; figures dans le texte. (Cours de troisième scientifique.)

C'est un fait généralement admis, nullement contesté, que les études, tant littéraires que scientifiques, baissent dans les institutions et colléges universitaires; que les examens, gagnant sans cesse d'étendue, par suite même de cette étendue, diminuent sans cesse d'intensité. Les ouvrages qui prennent le titre de *conformes* sont, en effet, conformes à cet état maladif, à cette asthénie qui mine l'enseignement. Lorsqu'on prescrit aux auteurs la forme, le fond et même l'ordre logique des matières; lorsque, enfermés dans ce cercle de Popilius, ils ne peuvent en sortir, s'en écarter pas plus que le soldat de ses *théories,* la pensée frappée d'hémiplégie, n'enfante que des œuvres malingres, rabougries, sans espoir aucun de vitalité. Toutefois, il serait injuste de ranger dans la même catégorie tous les écrits *conformistes*. Le manteau que le Programme jette sur l'esprit et le talent ne les empêche pas de percer lorsqu'ils existent. C'est ce qu'on aperçoit en lisant ce cours de troisième. Le savant professeur a publié naguère un Traité, excellente introduction à la géométrie segmentaire, dite supérieure. On ne dépouille jamais le vieil homme, et on retrouve dans cet opuscule plusieurs qualités qui distinguent le *Traité*. Les trente-trois leçons roulent sur les figures planes. Chaque leçon, précédée d'un énoncé du Programme, développe cet énoncé.

Nous soumettons à l'estimable auteur quelques observations.

On appelle corps *une portion limitée de l'étendue* (p. 1).

Le corps est un volume impénétrable, et, comme tel, appartient à la mécanique et non à la géométrie, qui ne considère que des volumes, que des figures pénétrables. Dans cette définition, il s'agit de l'*espace* général et non de l'*étendue* qui exprime la manière d'être d'un corps particulier. Il me semble que la vraie définition géométrique est celle-ci : *On appelle* volume *une portion limitée de l'espace* (*).

La surface *d'un corps, c'est-à-dire ce qui le limite en tout sens, n'a que deux dimensions : la longueur et la largeur* (p. 1).

La surface est la partie commune au volume et à l'espace; c'est ce qui sépare le volume de l'espace général, c'est ce qui fait qu'il a une dimension de moins. De même la ligne est la partie commune à deux surfaces, et le point

(*) *Tangere enim et tangi, nisi corpus, nulla potest res.*
(Lucret. lib. I, v. 305.)

la partie commune à deux lignes; cette *communauté* entraîne toujours la perte d'une dimension.

Nous croyons d'ailleurs avec M. Vincent qu'à l'entrée la notion des dimensions est déplacée. D'abord on ne peut en donner une explication nette; ensuite, cette notion est inutile, on peut s'en passer pour le moment.

La ligne droite est la ligne qui tend constamment vers un seul et même point, c'est-à-dire qu'elle va d'un de ses points vers un autre par le chemin le plus court (p. 2).

L'idée d'un chemin, et surtout d'un chemin minimum suppose déjà l'idée d'une droite et ne peut servir à la définir; renoncer à toute définition est encore ce qu'il y a de mieux. Il est à remarquer qu'en latin et en français la droite n'a pas de nom spécial et n'exprime que l'idée de direction. *Linea recta, directa*, ligne droite. Chez les Grecs, elle a un nom spécial, εὐθεῖα, *ligne bien posée.*

Leur somme égale un angle droit (p. 6); ne faut-il pas: *leur somme est égale à un angle droit? Égaler*, c'est rendre égal et non pas être égal. De même pour d'autres locutions de ce genre.

Je trace par le point E *la perpendiculaire* EF *à la droite* AB.

Sur le terrain on *trace*, mais en style géométrique on *élève* des perpendiculaires. Les lignes sont des conceptions mentales sans traces matérielles.

Un triangle est la portion de plan terminée par trois lignes droites qu'on appelle ses côtés.

On évite toute ambiguïté en disant : *Le triangle est une figure plane déterminée par trois lignes droites qu'on appelle les côtés du triangle.*

Nous signalons une démonstration très-simple de cette proposition fondamentale que *si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et les angles compris inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux* (p. 11). L'auteur suppose la bissection d'un angle, supposition très-admissible. Euclide ne pouvait recourir à ce moyen, car il veut d'abord démontrer la possibilité de cette bissection.

On donne comme exercice cette belle propriété : *La somme des trois médianes est moindre que le périmètre du triangle.*

La V^e leçon a pour objet le triangle isocèle.

On prend pour base *d'un triangle un côté de ce triangle, etc., la hauteur du triangle est la perpendiculaire tracée de son sommet sur sa base* (p. 14).

Il me paraît plus convenable de renverser cet énoncé et de dire : La perpendiculaire *abaissée* d'un sommet sur le côté opposé se nomme *hauteur*, et ce côté prend alors, relativement à cette hauteur, le nom de *base*.

A la page 15 on lit ces deux corollaires : *Un triangle équilatéral est équiangle et un triangle équiangle est équilatéral.* Jusqu'ici rien ne démontre la possibilité de tels triangles.

Tracer une perpendiculaire à une droite (p. 17). On ne trace pas *à* une chose.

Dans le théorème I de la VI^e leçon (p. 17), il est question d'une *oblique* sans qu'on ait dit ce qu'on entend par une *oblique*.

Dans un triangle OCD rectangle en C, il est facile de démontrer que OD est plus grand que OC; donc l'angle en D est moindre que l'angle C, et, par conséquent, D est aigu.

Remarque (p. 20). On appelle *lieu géométrique*; il faut ajouter *d'un point*. Alors le lieu géométrique d'un *point* est une ligne dont tous les points jouissent de la même propriété que ce *point*.

A la page 21, on indique un problème de minimum et de maximum fort utile.

VII^e et *VIII^e Leçons*. *Leçon* doit être au singulier; ainsi le veut la grammaire. On dira que ce pluriel est généralement admis; je réponds qu'on a généralement tort. Les lois de la grammaire doivent être respectées surtout par les géomètres. C'est l'observation rigoureuse de ces lois qui, sous la plume de Descartes et de Pascal, a donné à notre langue cette clarté qui établit sa supériorité sur toutes les autres langues (*); supériorité qui tend malheureusement à s'affaiblir.

A la page 22, on définit les parallèles et puis on démontre que deux droites perpendiculaires à une droite sont parallèles; il semble qu'il faut suivre la marche inverse: démontrer qu'il existe deux droites qui ne peuvent se rencontrer; et dire ensuite que de telles droites sont dites parallèles. Principe général: Il ne faut jamais définir un objet avant d'en avoir montré l'existence.

L'auteur a le bon esprit de fonder la théorie des parallèles sur ce postulatum de Gergonne: *Par un même point ne passe qu'une seule parallèle à une droite.*

Dans la IX^e leçon, qui traite des polygones, on fait cette bonne remarque, qu'un polygone convexe n'a pas plus de trois angles intérieurs aigus.

Il y a un bon choix de problèmes à la fin de la X^e leçon.

XI^e Leçon (p. 37). *La circonférence est une ligne courbe dont tous les points sont également éloignés d'un même point qu'on appelle* centre.

Puisqu'on a déjà défini ci-dessus le *lieu géométrique*, on pourrait dire: La circonférence est le lieu géométrique d'un point également éloigné d'un même point fixe nommé *centre*.

On démontre ensuite que cette ligne n'a nulle part

(*) L'étude trop générale des littératures étrangères est nuisible à la littérature nationale. Les Grecs, les Romains nous ont légué des chefs-d'œuvre; chez chacun de ces peuples on ne cultivait que la langue nationale. Les écrivains français du XVII^e nous ont transmis des chefs-d'œuvre, parce qu'ils ne lisaient et ne s'inspiraient que des chefs-d'œuvre grecs et latins.

trois points en ligne droite, donc elle est courbe; mais l'épithète *courbe* ne doit pas se trouver dans la définition.

XII[e] *Leçon* (p. 43). PROBLÈME. *Étant donnés sur une carte quatre points dont trois ne sont pas en ligne droite, tracer sur cette carte une route circulaire qui passe à égale distance de chacun de ces points.*

C'est la question de concours de troisième en 1853 (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 318).

La XIII[e] leçon est terminée par cette belle propriété : Soient ABCD un quadrilatère rectangle en C et en D; E le milieu de BD et $AD = AE = \frac{1}{2} AB$; menant la droite CE, on a

$$\text{angle AEC} = 3 \text{ angles ECB}.$$

Chez les géomètres grecs, on rencontre une trisection mécanique de l'angle fondée sur cette propriété.

Dans la XV[e] leçon, on commence à s'occuper des mesures. Voici le *biais* que prend l'auteur pour établir la proportionnalité des incommensurables. Soient A et B deux grandeurs n'ayant aucune commune mesure possible; divisons B en n parties égales et cherchons combien de fois $\frac{B}{n}$ est contenu dans A. Soit ce quotient m; il y aura toujours un résidu, puisque A et B sont incommensurables; faisons $\frac{mB}{n} = A'$; le résidu est moindre que le diviseur $\frac{B}{n}$; plus n sera grand et plus le résidu sera petit, moins A' différera de A. Prenant donc n infiniment grand, on pourra substituer A' à A, et le rapport de B à A' est $\frac{m}{n}$; on substitue ainsi deux lignes commensurables à deux autres incommensurables. Cette substitution est légitime tant qu'il ne s'agit que des besoins pratiques de l'arithmétique ; il n'en est plus ainsi lorsqu'il s'agit des besoins de la logique. Il ne faut pas confondre les valeurs *approchées* quasi vraies avec des vérités approchées, avec des vérités quasi vraies ; de telles vérités sont sympathiques à l'esprit des programmes, mais antipathiques à l'esprit de la géométrie.

Parmi les beaux problèmes qui terminent cette leçon, on trouve celui-ci :

Si d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.

C'est Servois, dans ses *solutions peu connues,* qui a rappelé l'attention sur cette importante propriété.

Le reste de l'ouvrage roule sur les polygones semblables, sur les polygones réguliers, les aires des figures planes, du cercle, etc. ; les levers de plans, les opérations sur le terrain, etc.

C'est le centre de similitude (Euler) qui devrait être, qui est le vrai point de départ de toute théorie sur la similitude directe et inverse (symétrie). Ce moyen d'exposition réunit facilité et rigueur.

Page 112, on dit que Lambert est un géomètre français ; en effet, il est né à Mulhouse, ville aujourd'hui française, mais en 1728 Mulhouse appartenait à la Suisse.

L'inventeur du rapport $\frac{345}{113}$ se nomme Adrien Metius ; c'est par erreur que Montucla lui donne le prénom de Pierre ; le fils avait le même prénom Adrien.

L'étendue de cette analyse montre l'intérêt que nous attachons à cette estimable production ; nous nous occuperons prochainement du complément de cet ouvrage, destiné aux cours de seconde et de rhétorique scientifiques.

NOTE SUR LA PROPORTION HARMONIQUE; NICOMAQUE et JAMBLIQUE.

(Extrait de NESSELMANN.) (*)

On lit dans Jamblique que cette proportion a été en usage chez les Babyloniens et que Pythagore l'a importée dans la Grèce. Son premier nom était ὑπεναντία, l'*opposé*. Voici la raison de cette dénomination. Soient a, b, c trois grandeurs décroissantes; si elles forment une proportion continue *arithmétique*, on a $\frac{a}{b} < \frac{b}{c}$; si la proportion est *harmonique*, on a l'*opposé*, savoir $\frac{a}{b} > \frac{b}{c}$; dans la proportion géométrique, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Ce sont Archytas (— v[e] siècle) et Hippasus qui ont donné à cette proportion le nom de *harmonique*, à cause de son emploi dans la musique; Jamblique l'appelle même *proportion musicale*.

Euclide (— IV[e] siècle) donne seulement la théorie de la proportion et de la progression géométriques (**). Le premier chez lequel on trouve la théorie de la proportion, des progressions arithmétiques et de la proportion har-

(*) Nesselmann voulait écrire une Histoire générale de l'Algèbre, il n'a publié que la première partie : *L'Algèbre chez les Grecs*; travail consciencieux, fait en consultant les sources, et qui doit faire amèrement regretter que, peu encouragé, l'auteur ait abandonné l'entreprise et même, à ce qu'on dit, la carrière scientifique.

(**) Il démontre qu'on a

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \dots$$

(Liv. IX, prop. 35.)

monique est Nicomaque, qui vivait, à ce qu'il paraît, sous Tibère. Il était de Gerase, ville près de Bostra, en Arabie. On lui doit la théorie complète des nombres polygonaux et cette belle observation sur la suite naturelle des nombres impairs : que la somme donne la série des nombres carrés ; que le premier est le cube de 1 ; que la somme du deuxième et troisième est le cube de 2 ; que la somme du quatrième, cinquième et sixième est le cube de 3 ; du septième, huitième, neuvième et dixième le cube de 4 ; et ainsi de suite. Il énonce ces propriétés sans les démontrer ; son but n'était pas de composer une arithmétique, mais seulement une introduction (Ἀριθμητικῆς εἰσαγωγή) ; mais il n'emploie pas, comme Euclide, des *lignes* pour montrer les propriétés numériques ; il fait partout usage des nombres, ce qui est un progrès. Son ouvrage a été publié par Wechel en 1538 : Νικομάχου Γερασινοῦ ἀριθμητικῆς βιβλία δύο. *Nicomachi Gerasini Arithmeticæ libri duo, nunc primum typis excusi, in lucem eduntur. Parisiis,* 1538 ; in-4°. Il y a une édition de 1554.

On a encore :

Theologumena arithmeticæ, etc., accedit Nicomachi Gerasini instituto arithmetica ad fidem codicum monacensium emendata. Edidit F. Astius. Lips. 1817.

Les deux ouvrages sans traductions.

Jamblique, célèbre pythagoricien du IVe siècle, disciple d'Anatole et ensuite de Porphyre, a composé plusieurs écrits dans l'esprit de cette philosophie arithmético-mystique.

L'ouvrage cité ci-dessus est : *Jamblicus Chalcidensis ex Cœle-Syria in Nicomachi Gerasini Arithmeticam introductionem et de Fato. Nunc primum editus, in latinum sermonem conversus, notis perpetuis illustratus à* Samuele Tennulio. *Accedit Joachimi Camerarii Explicatio in duos libros Nicomachi, cum indice rerum et ver-*

borum locupletissimo. Arnhemiæ. Prostant apud Jah. Frideriam Hagium. Daventræ typis descripsit Wilhelmus Wier. CIↃ IↃCLXVIII (1668); in-4 de 181 pages.

L'Explication de *Camerarius* jointe à cet ouvrage porte la date 1667 et contient 238 pages; mais la première édition de cette Explication est de 1554; in-8, Augus. Vindel. Ces explications se trouvent aussi sous le titre : *Explicatiunculæ Arithmetices doctrinæ Nicomachi*, dans l'ouvrage suivant de J. Camerarius :

De græcis et latinis numerorum notis et præterea Saracenis seu Indicis. Lipsiæ, 1556; 1569.

La traduction et les notes de Tennulius sont mauvaises sous le rapport philologique et scientifique. On peut indiquer aux philosophes de l'École Normale, comme beau et bon travail à entreprendre, une nouvelle édition avec traduction française. C'est un moyen de ramener nos philosophes contemporains vers les études mathématiques. Prétendre professer la philosophie et vouloir rester étranger aux sciences exactes, n'est qu'une plaisanterie, qui aurait fait bien rire, chez les anciens, Platon, Aristote, Nicomaque, Jamblique, Proclus, et, chez les modernes, Descartes, Mallebranche, Gassendi, Spinosa, Leibnitz, Clarke, Locke et Kant. Quand aurons-nous une traduction de Nicomaque? Il ne faut pas confondre son Arithmétique avec l'œuvre mystique suivant qu'on lui a faussement attribué : τὰ θεολογούμενα τῆς ἀριθμετικῆς. *Habes hic, studiose lector, novum opusculum antehac nusquam excusum, in quo ita numerorum ratio explicatur ut non sit obscurum intelligere, hanc arithmeticam ad interiorem illam de philosophia disputationem, quam theologiam veteres vocabant, conferre plurimum.* Parisiis, 1543.

Nicomaque et même son commentateur Anatolius sont cités dans cet ouvrage.

L'ouvrage suivant, tiré à 250 exemplaires, est excessivement rare : Th. Taylor. *Theoric arithmetic in three books, containing the substance of all that has been written on this subject by Theo of Smyrna, Nicomachus, Jamblichus, and Bœtius.* London, 1816; in-8.

On rencontre encore dans Jamblique la solution de deux questions importantes pour l'histoire de la science.

Il résout la première de ces questions au moyen d'une certaine règle qu'il attribue à un nommé Thymaridas, dont il cite aussi ces deux définitions. L'*unité* est la *grandeur déterminée*; c'est en effet par l'unité que toute grandeur se détermine (περαίνουσα ποσότης) (p. 11), et les nombres premiers sont des lignes droites (εὐθυγραμμικοί), parce que ces nombres sont les seuls qui ne peuvent se présenter sous la forme d'un rectangle (p. 36). La règle est nommée *épanthème* ἐπάνθημα, *fleurs*, *ornement ajouté* (p. 88). Le texte est très-corrompu en cet endroit; voici l'explication de M. Nesselmann en style moderne (p. 232).

Soient les n équations suivantes entre les n inconnues $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$:

$$\begin{aligned} x + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} &= a, \\ x + y_1 &= b_1, \\ x + y_2 &= b_2, \\ x + y_3 &= b_3, \\ &\ldots\ldots \\ x + y_{n-1} &= b_{n-1}. \end{aligned}$$

a, b_1, b_2,..., b_{n-1} sont des quantités connues; on obtient

$$x = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} - a}{n-2}.$$

Jamblique applique cette règle à la question suivante d'analyse indéterminée :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2(x_3 + x_4), \\ x_1 + x_3 &= 3(x_2 + x_4), \\ x_1 + x_4 &= 4(x_2 + x_3), \end{aligned}$$

à résoudre en nombres entiers.

On déduit de la dernière équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5(x_2 + x_3).$$

Posons

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2.3.4.5 = 120.$$

La première équation donne

$$3(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 240$$

et

$$x_1 + x_2 = 80,$$

$$4(x_1 + x_3) = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 360,$$

$$x_1 + x_3 = 90,$$

et de même

$$x_1 + x_4 = 96.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 120, \\ x_1 + x_2 &= 80, \\ x_1 + x_3 &= 90, \\ x_1 + x_4 &= 96; \end{aligned}$$

appliquant l'*épanthème*, on obtient

$$x_1 = \frac{80 + 90 + 96 - 120}{2} = 73,$$

de là

$$x_2 = 7, \quad x_3 = 17, \quad x_4 = 23.$$

Ce sont, dit Jamblique, les nombres les plus simples; en les multipliant ou les divisant par un nombre quelconque, les résultats obtenus satisfont aussi au problème.

On voit donc que les Grecs s'occupaient d'*analyse indéterminée* avant Diophante. Celui-ci ne traite principalement que les équations du second degré, mais il est probable qu'il a donné aussi les équations du premier degré et que cette partie a disparu du manuscrit qui nous est parvenu. Il est assez singulier que ce soit la partie la plus facile qui se soit perdue. Dans ce même problème, Jamblique parlant algébriquement se sert du mot ἀόριστος (non déterminé) pour désigner l'inconnue, et du mot ὡρισμένας pour désigner les nombres donnés déterminés, mais sans aucun signe soit littéral, soit opératoire.

Le second point d'intérêt historique est l'énoncé de la propriété suivante : Si l'on ajoute les trois nombres 1, 2, 3, on obtient la somme 6. On obtient la même somme par l'addition de chaque agrégation suivante de trois nombres, sans en sauter un, sans le prendre deux fois, si l'on prend toujours, au lieu des dizaines, les unités correspondantes, ou si l'on considère les dizaines comme des unités d'un ordre supérieur, comme a fait Pythagore, ainsi qu'il a été dit ci-dessus (p. 145-146).

En style moderne, cela veut dire que si l'on a additionné trois nombres consécutifs dont le plus grand soit divisible par 3 et que l'on fasse la somme des chiffres, puis la somme des chiffres de cette dernière somme et ainsi de suite, on parvient finalement au nombre 6.

Exemple :

$$997 + 998 + 999 = 2994,$$
$$2 + 9 + 9 + 4 = 24,$$
$$2 + 4 = 6.$$

On voit, d'après l'énoncé de Jamblique, qu'il avait une idée très-exacte de la composition décimale des nombres, mais aucune notion d'une numération de position, d'une numération topique. D'ailleurs il est certain que si les pythagoriciens avaient connu une telle numération, ils n'auraient pas manqué, d'après la tendance de l'école, à rattacher quelque propriété mystique à la *position* des chiffres. Le théorème de Jamblique n'est qu'un cas particulier. Appliquant la même opération aux nombres de la forme $\dot{9} + p$ où $p < 9$, on parvient enfin au nombre p ; car ces sommes conservent toujours la même forme $\dot{9} + p$, et, allant en diminuant, il faut bien qu'on parvienne à p. Une propriété analogue existe pour le nombre 11; en général, pour tous les nombres qui diffèrent de la base d'une unité, par excès ou par défaut, dans un système quelconque.

1856.

Nous avons la satisfaction d'annoncer pour paraître en 1856 les traductions suivantes :

1°. *Propriétés des lignes du troisième ordre* de Maclaurin, par M. E. de Jonquières, lieutenant de vaisseau.

2°. *Theoria de motu planetarum, etc.*, de Gauss; par M. Dieu, professeur à la Faculté de Grenoble.

3°. Divers Mémoires de Gauss; par M. Bertrand, professeur au lycée Napoléon.

Le *Mémoire sur les Moindres carrés* a déjà paru (*).

4°. *Astronomie sphérique* de M. Brunow; par mon fils, Terquem (Paul), professeur d'hydrographie à Dunkerque.

5°. Mémoires de MM. Encke, Hansen, Brunow *sur le calcul des perturbations planétaires*; par MM. Lafon, attaché à l'Observatoire de Paris, et le Rédacteur des *Nouvelles Annales*.

6°. Mémoire couronné de M. Stern *sur les équations transcendantes*; par M. Levi (Édouard), agrégé, ex-professeur au lycée de Saint-Étienne.

Pour paraître prochainement :

Les *Recherches astronomiques* par le célèbre directeur de l'Observatoire, M. Le Verrier;

Les *Éléments de Calcul infinitésimal*, par M. Duhamel.

L'année s'annonce sous de bons auspices.

(*) Chez Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. — Prix : 4 francs.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

Biographie.

Bibliographie.

Historique.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(*) Mort septuagénaire en décembre 1855, amateur zélé des mathématiques qu'il a cultivées jusqu'à sa dernière heure.

(*) Voir une correction page 130.

ERRATA.

Page 137, ligne 10 en rem., *au lieu de* Gilbert, *lisez* Girard.
138, ligne 7. *au lieu de* a^2, *lisez* a^3.
140, ligne 9, *au lieu de* 228, *lisez* 288.
140, ligne 8, *au lieu de* 228, *lisez* 288.
141, ligne 5 en rem., *au lieu de* $\sqrt{392}$, *lisez* $-\sqrt{392}$.
144, ligne 10, *au lieu de* c^2, *lisez* $3c$.
165, ligne 2, *au lieu de* 120, *lisez* 121.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, RUE DU JARDINET, 12.