NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1849.

On souscrit aussi

A ANGOULÊME. .	chez	Perez-Lecler.
BORDEAUX. . .	—	Chaumas.
BOURGES. . . .	—	Vermeil.
BREST.	—	Mme Vve Lefournier.
LILLE.	—	Vanackère.
LORIENT. . . .	—	Leroux-Cassart.
LYON.	—	Perisse frères.
	—	Giberton et Brun.
MARSEILLE. . .	—	Mme Vve Camoin.
METZ.	—	Warion.
MONTPELLIER.	—	Séwalle.
NANCY.	—	G. Grimblot et Cie.
NANTES.	—	Forest aîné.
	—	Guéraud.
	—	Petitpas.
ORLÉANS. . . .	—	Gatineau.
RENNES.	—	Verdier.
ROCHEFORT. .	—	Mme Fleury.
	—	Proust-Branday.
ROUEN.	—	Lebrument.
STRASBOURG. .	—	Treuttel et Wurtz.
	—	Mme Levrault.
	—	Derivaux.
TOULON. . . .	—	Monge et Willamus.
TOULOUSE. . .	—	Mlles Gallon sœurs.
	—	Bon et Privat.
	—	Gimet.

LEIPZIG.	—	Michelsen.
LONDRES. . . .	—	Dulau et Cie, Soho-Square.
	—	Baillière.
MADRID	—	A. Poupart et frère.
	—	Jaymebon et Cie.
	—	Monier.
TURIN	—	Bocca.
VIENNE.	—	Rohmann.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. TERQUEM,

Officier de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur aux Écoles Nationales d'Artillerie,

ET

M. GERONO,

Professeur de Mathématiques

TOME HUITIÈME.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1849.

AVIS DE L'ÉDITEUR.

Nous donnerons aux *Nouvelles Annales*, destinées aux progrès de l'enseignement et dont la continuation nous est confiée, le même soin qu'au *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, destiné aux progrès de la science. Notre Librairie renfermant les principaux ouvrages didactiques tant anciens que modernes, et nos relations commerciales avec l'Europe géomètre, nous donnent les moyens de procurer aux Rédacteurs de ce Recueil les documents précieux, indispensables à leurs travaux.

Nous ne négligerons rien pour que les *Nouvelles Annales*, remplissant le but de leur fondation, paraissent mensuellement avec exactitude, et que l'exécution typographique, ainsi que celle des planches, répondent de plus en plus aux vœux des abonnés.

A partir de janvier 1849, on devra adresser *les demandes d'abonnement* à M. BACHELIER, imprimeur-libraire, quai des Augustins, n° 55.

AVERTISSEMENT DES RÉDACTEURS.

Les *Nouvelles Annales* viennent d'achever leur septième année. Les suffrages honorables d'hommes compétents nous permettent de croire que nous avons été de quelque utilité à la science et à l'enseignement, aux professeurs et aux élèves, double but que nous n'avons jamais perdu de vue. Notre Recueil contient des renseignements instructifs sous le rapport didactique et historique, sur toutes les méthodes anciennes et nouvelles, sur les théories et questions, objets ordinaires des examens. Toutefois, dans le monde intellectuel et politique, tout s'avance devant nous. Et de nos jours, dans les sciences surtout, qui s'arrête, recule. De là, l'accroissement continuel, chez les nations civilisées du globe, des productions périodiques qui enregistrent incessamment tous les progrès du jour. Ainsi l'Allemagne, outre le Journal de Crelle, celui de Poggendorf, le *Journal polytechnique de Vienne*, les *Annales d'Astronomie* de Schumacher, s'est encore enrichie, depuis 1845, d'un journal consacré aux sciences exactes, sous ce titre : *Archiv der Mathematik und Physik, mit besonderer Rucksicht auf die Bedurfnisse der Lehrer an höhern unterrichts anstalten;* herausgegeben von Johann August Grunert, professor an Greifswald, 1845 (*Archives des Mathématiques et de la Physique, ayant égard parti-*

culièrement aux besoins des professeurs aux institutions supérieures, publiées par Jean-Auguste Grunert, professeur à Greifswald). L'Italie possède plusieurs Recueils scientifiques où les Tortolini, les Chelini déposent leurs beaux travaux géométriques. En Angleterre, outre le *Journal de Mathématiques de Cambridge et de Dublin,* publié par Thomson, et qui a pour collaborateurs les frères Roberts, les Hamilton, les Cayley, et autres grands géomètres contemporains; outre les journaux scientifiques d'Oxford, d'Édimbourg, il y a encore pour la partie élémentaire : *The Mathematician,* edited by Messrs Rutherford and Fenwick of the royal military Academy, 1845, vol. I et II (*Le Mathématicien,* publié par MM. Rutherford et Fenwick de l'Académie royale militaire). Le Journal de Dublin vient de commencer une seconde série, et le mouvement mathématique est tellement fort chez nos voisins au delà du détroit, qu'on réimprime une seconde édition de la première série. La géométrie surtout ancienne et moderne y est cultivée avec beaucoup d'ardeur. On y voit paraître de fréquentes traductions d'Euclide à l'usage des classes : qui en France achèterait une telle traduction? Les neuf dixièmes de nos élèves ignorent le nom d'Euclide, et l'on compterait facilement le nombre de professeurs qui le lisent. Nous possédons un seul journal consacré aux parties transcendantes de la science et dirigé par un célèbre géomètre, journal qui est l'émule de celui de Crelle; mais tandis que le journal prussien jouit de la haute protection de son gouvernement, celui de la France est bien loin d'avoir joui d'une telle protection sous le Gouvernement déchu; au contraire. La République réparera-t-elle les torts de la monarchie? Peut-être. Mais la justice nous oblige de dire que l'ancien Gouvernement, peu avant sa chute, se disposait à encourager les *Nouvelles Annales* par des souscriptions. Ces dispositions bienveillantes seront-elles maintenues? nous l'espérons.

Quoi qu'il en soit, la huitième année, nous ferons de nouveaux efforts pour mériter l'approbation du public géomètre : nous voulons que les *Nouvelles Annales* deviennent en quelque sorte un bureau de consultations pour ceux qui se livrent avec amour à l'étude de la sainte doctrine. Ainsi tous les professeurs des départements et de la capitale pourront s'adresser par écrit ou verbalement aux rédacteurs pour obtenir des renseignements bibliographiques sur l'objet de leurs investigations. Dans cette même vue, nous donnerons les énoncés mensuels des articles des journaux étrangers ci-dessus mentionnés, et avec des développements pour ceux qui en auraient besoin.

Les élèves *abonnés* peuvent nous consulter sur les difficultés qu'ils rencontreraient dans les questions d'examen, et nous nous engageons à leur en communiquer la solution.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

QUESTION D'EXAMEN SUR LE CONE DROIT;

Par M. Ét. BIGOURDAN,
Professeur de Mathématiques au lycée Monge.

1. *On a un cône droit circulaire* SAB (fig. 1, Pl. I); *d'un point* O *pris sur la surface comme centre, avec un rayon* r, *on décrit une courbe* DM′N′ *sur la surface du cône; on développe ensuite la surface sur un plan, et l'on demande l'équation de cette courbe après le développement* (*que l'on appelle la transformée de* DM′N′).

Soit SAA′ le développement de la surface du cône sur le plan des deux génératrices opposées SA, SB, dont l'une passe par le point O. Soient DMN la transformée de DM′N′; M′, M deux points correspondants, l'un sur la courbe DM′N′, l'autre sur son développement : de telle sorte que si l'on enroulait la surface SAA′ autour du cône, la courbe DMN s'appliquerait sur DM′N′, et le point M sur le point M′. Nous appellerons a la longueur constante SO, b la génératrice SA, R le rayon IA de la base, et r la droite OM′, longueur du rayon avec lequel on a décrit la courbe. Pour trouver l'équation de la transformée DMN, nous la rapporterons à des coordonnées polaires dont S sera le pôle, et SA l'axe polaire. En menant les droites SMQ, SM'K, on aura donc

$$SM = \rho, \qquad DSM = \omega.$$

Cela posé, en menant AK, on aura

$$\overline{AK}^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos ASK.$$

Comme $SM' = SM = \rho$, on déduira du triangle OSM',

$$\overline{OM'}^2 \quad \text{ou} \quad r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos ASK;$$

d'où l'on tire

$$\cos ASK = \frac{a^2 + \rho^2 - r^2}{2a\rho}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de $\overline{AK}^2$, on aura facilement

$$AK = b\sqrt{\frac{r^2 - (a-\rho)^2}{a\rho}}.$$

Si l'on mène IK et que l'on fasse $AIK = \alpha$, le rayon IA étant R, il est clair que l'on aura

$$(1) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{2R} = \frac{b}{2R}\sqrt{\frac{r^2 - (a-\rho)^2}{a\rho}},$$

les arcs AK et AQ étant des arcs de même longueur appartenant à des cercles dont les rayons sont R et b; en appelant α et ω les nombres de degrés de ces arcs, il est clair que ces nombres sont en raison inverse de ces rayons, et que l'on a

$$\alpha : \omega :: b : r;$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = \frac{b}{R}.\omega \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2R}.\omega.$$

En substituant cette valeur de $\frac{\alpha}{2}$ dans l'équation (1), on aura enfin, pour l'équation du lieu demandé,

$$\sin\left(\frac{b}{2R}.\omega\right) = \frac{b}{2R}\sqrt{\frac{r^2 - (a-\rho)^2}{a\rho}}.$$

2. *Puisque la transformée est évidemment indépendante de la longueur b de la génératrice du cône, comment se fait-il que cette quantité se trouve dans son équation?*

b se trouve, dans l'équation, toujours divisé par R; or on a

$$\frac{\mathrm{R}}{b} = \sin \mathrm{ASI}, \quad \text{ou} \quad \frac{b}{\mathrm{R}} = \operatorname{cos\acute{e}c} \mathrm{ASI},$$

et il est clair que l'on pouvait prévoir à priori que l'équation de la transformée dépendrait de l'angle ASI, générateur du cône. En représentant $\frac{b}{\mathrm{R}}$ par μ, l'équation devient

$$(2) \qquad \sin\left(\frac{\mu\omega}{2}\right) = \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{r^2 - (a-\rho)^2}{a\rho}}.$$

3. *Disposer comme on voudra des constantes a, r et μ, pour simplifier l'équation de la transformée.*

En développant, il vient

$$\sin\left(\frac{\mu\omega}{2}\right) = \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{r^2 - a^2 - \rho^2 + 2a\rho}{a\rho}},$$

et il est clair qu'en faisant $r = a$, et ensuite $a = 1$, ce qui donne

$$(3) \qquad \sin\left(\frac{\mu\omega}{2}\right) = \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{2\rho - \rho^2}{\rho}},$$

on aura une des équations les plus simples que l'on puisse déduire de l'équation générale. Comme μ représente la cosécante de l'angle générateur du cône, on ne peut pas supposer que l'on ait $\mu = 1$, mais on peut faire $\mu = 2$; et alors, en supprimant le facteur ρ, commun aux deux termes de la fraction qui est sous le radical, il vient

$$(4) \qquad \sin \omega = \sqrt{2 - \rho}.$$

4. *Quelle est la signification géométrique des hypothèses $a = r = 1$ et $\mu = 2$?*

Faire $a = r$, c'est supposer que la courbe soit décrite sur la surface du cône d'un point O comme centre, avec un rayon égal à la distance de ce point au sommet du cône. Comme l'unité était complétement arbitraire jusqu'ici, faire $a = 1$, c'est prendre pour unité la distance du point O au sommet du cône, en sorte que cette dernière hypothèse ne change rien aux données géométriques; elle ne fait que simplifier l'équation. Puisque l'on a $\frac{b}{R} = \mu$, faire $\mu = 2$, c'est supposer $\frac{b}{R} = 2$ ou $b = 2R$, ce qui change le cône donné en un cône équilatéral. Il est visible encore que de l'ensemble de ces hypothèses, il résulte que la courbe DM'N' peut être considérée comme l'intersection de la surface d'un cône équilatéral, et de celle d'une sphère passant par son sommet et dont le centre serait sur la surface du cône, et que l'équation (4) est celle de la transformée de cette intersection, en supposant que la longueur du rayon de la sphère soit prise pour unité.

5. *A-t-on le droit de supprimer sans aucun examen le facteur* ρ *commun aux deux termes de la fraction qui est sous le radical dans l'équation* (3)?

En faisant disparaître le radical et le dénominateur de l'équation (3), on peut s'assurer que $\rho = 0$ satisfait à l'équation; dans ce cas, on n'a pas le droit de supprimer un tel facteur avant de s'être assuré qu'il ne représente rien. Or, dans la question présente, le point isolé situé au pôle, représenté par $\rho = 0$, est un point convenable, puisque la sphère passe par le sommet du cône; on aurait donc tort de supprimer le facteur ρ sans en tenir compte.

6. *Discuter la courbe* $\sin \omega = \sqrt{2 - \rho}$.

On a déduit

$$\rho = 2 - \sin^2 \omega. \tag{5}$$

Avec les hypothèses présentes, le cône étant équilatéral, sa surface développée sera un demi-cercle, tel que $AB'A'$ (*fig.* 2), dont le rayon sera SA, génératrice du cône, tandis que la transformée sera une courbe telle que DND', qu'il s'agit de discuter.

En faisant $\omega = 0$ dans l'équation (5), il vient

$$\sin \omega = 0 \quad \text{et} \quad \rho = 2.$$

En prenant $SD = 2$, c'est-à-dire $SD = 2SO$, le point D sera un des points du lieu; ω croissant, $\sin^2 \omega$ croît, tandis que ρ décroît sans cesse, jusqu'à ce que l'on ait $\omega = 90^\circ$, qui donne $\rho = 1$. En élevant SN perpendiculaire sur SA, et prenant $SN = SO = 1$, N sera un des points du lieu, et l'on aura ainsi obtenu la partie DMN de la courbe.

ω continuant de croître jusqu'à 180 degrés, on obtiendra une seconde partie $NM'D'$ de la courbe qui sera symétrique de la première. En donnant à ω des valeurs plus grandes que 180 degrés, on obtiendrait à la gauche de DD' une autre partie de courbe $D'LD$, symétrique de DND'; mais si l'on ne veut construire que la transformée de l'intersection du cône et de la sphère, la partie DND' suffira.

7. *Pourrait-on interpréter géométriquement la partie* $D'LD$ *de la courbe?*

Pour cela, il suffit de remarquer que, si l'on avait un cercle $AB'A'B''$ (*fig.* 2), dont la surface serait coupée selon le rayon AS, et qu'ensuite on enroulât cette surface sur un cône équilatéral, on aurait une double surface conique qui serait coupée par la sphère précédente, selon une courbe dont la transformée aurait pour équation

$$\rho = 2 - \sin^2 \omega,$$

et qui serait représentée par la courbe complète $DND'LD$.

En continuant de donner à ω des valeurs croissantes depuis $\omega = 360^\circ$ jusqu'à $\omega = \infty$, on obtiendrait une série de courbes égales à DND′L, et qui se recouvriraient exactement; ces courbes supposées pourraient être considérées comme la transformée de l'intersection d'un cône équilatéral formé d'une surface continue, qui ferait une infinité de circonvolutions sur elle-même, avec une sphère passant par son sommet, et dont le centre serait sur la surface conique.

8. *Pouvait-on prévoir à priori que la perpendiculaire à l'axe polaire, passant par le pôle, rencontrerait la courbe à une distance égale à l'unité?*

Puisque le cône est équilatéral, si l'on mène ON′ parallèle à AB (*fig.* 2), on aura ON′ = OS = 1; la sphère dont le centre est en O, et dont le rayon est l'unité, passera donc par le point N′, ainsi que la section qu'elle détermine sur la surface du cône. Or, dans le développement de la surface du cône, il est visible que la génératrice SN′, opposée à SO, se placera sur une perpendiculaire à SO passant par S; comme la distance de N′ à S ne change pas pendant le développement, le point N′ se trouvera sur cette perpendiculaire en N, à une distance égale à l'unité. Ce qu'il fallait faire voir.

9. *Discussion de la tangente.*

En appelant V l'angle SMT que la tangente en M forme avec le rayon passant par le point de contact, on sait que l'on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\lim.\left(\frac{k}{h}\right)}.$$

Or on a

$$\rho = 2 - \sin^2\omega, \qquad \rho + k = 2 - \sin^2(\omega + h);$$

d'où l'on déduit successivement

$$k = [\sin\omega + \sin(\omega + h)][\sin\omega - \sin(\omega + h)],$$

$$k = 2\sin\left(\omega + \frac{h}{2}\right)\cos\left(-\frac{h}{2}\right).2\cos\left(\omega + \frac{h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{k}{h} = -2\sin\left(\omega+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right).\cos\left(\omega+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)},$$

$$\lim.\left(\frac{k}{h}\right) = -2\sin\omega\cos\omega.$$

On aura donc

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sin^2\omega - 2}{2\sin\omega\cos\omega}.$$

Au point D on a $\omega = 0$, et par suite $\operatorname{tang} V = \frac{-2}{0}$; en ce point, la tangente est donc perpendiculaire sur le rayon SD. ω croissant, le numérateur de tang V est négatif, le dénominateur est positif; la tangente de l'angle V est donc négative, en sorte que l'angle SMT est obtus depuis le point D jusqu'au point N exclusivement. Pour ce dernier point, on a

$$\omega = 90^\circ \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} V = \frac{-1}{0}.$$

Au point N, la tangente est donc encore perpendiculaire sur le rayon SN, c'est-à-dire qu'en ce point elle est parallèle à l'axe polaire.

10. *Y a-t-il d'autres points de la courbe pour lesquels la tangente soit parallèle à l'axe polaire?*

Pour les découvrir, il suffit d'observer qu'en ces points l'angle V est évidemment le supplément de ω, ou que l'on a

$$\operatorname{tang} V = -\operatorname{tang}\omega.$$

En posant donc

$$(6) \qquad \frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \frac{2-\sin^2\omega}{2\sin\omega\cos\omega},$$

les valeurs de ω qui satisferont à cette équation indiqueront les directions des rayons qui rencontrent la courbe aux points où la tangente est parallèle à l'axe polaire.

On en déduit

$$\sin \omega = \frac{2 - \sin^2 \omega}{2 \sin \omega}, \qquad \sin \omega = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

En appelant β le plus petit arc positif dont le sinus est $\sqrt{\frac{2}{3}}$, il est visible que les points M, M′, m', m (*fig.* 2), correspondants à $\omega = \beta$, $\omega = 180 - \beta$, $\omega = 180 + \beta$, $\omega = 360 - \beta$, sont des points où la tangente est parallèle à l'axe polaire. D'après ce que l'on connaît de la courbe, on voit aussi que ces quatre points, également distants de l'axe polaire, sont ceux qui en sont le plus éloignés. Si l'on demande la distance commune de ces quatre points à l'axe polaire, on a

$$\text{MP} = \rho \sin \beta = (2 - \sin^2 \beta) \sin \beta = \left(2 - \frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}},$$

quantité plus grande que A.

11. *En cherchant les points auxquels la tangente est parallèle à l'axe polaire, comment se fait-il que l'on n'ait pas retrouvé les points* N, L, *qui jouissent de cette propriété?*

C'est parce que, pour résoudre l'équation (6), à laquelle on avait été conduit pour trouver tous les points jouissant de cette propriété, on a supprimé, sans en tenir compte, le facteur $\frac{1}{\cos \omega}$, ce que l'on n'avait pas le droit de faire. En effet, pour $\omega = 90^\circ$, ce facteur devient infini. Le premier membre de l'équation (6), qui représente tang ω, devient donc infini, ainsi que le second membre, qui représente — tang V. Pour $\omega = 90^\circ$, on a donc

$$\text{tang}\, V = - \text{tang}\, \omega,$$

et l'on sait que c'est une condition suffisante pour qu'à cette valeur de ω il corresponde dans la courbe un point auquel la tangente soit parallèle à l'axe polaire. On voit de même qu'il doit correspondre un deuxième point analogue à $\omega = 270^\circ$.

En poursuivant cette discussion, on verrait que la courbe présente une inflexion I entre les points N et M; en sorte que, de N en I, elle tourne sa convexité vers l'axe polaire, et sa concavité de I en M, et que le point N est un point minimum, et M un point maximum, par rapport à ce même axe polaire.

12. *On a dit précédemment* (n° 3) *que l'on ne pouvait supposer* $\mu = 1$ *dans l'équation* (3); *que donnerait-elle si l'on y faisait cependant* $\mu = 1$?

On aurait

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2 - (a-\rho)^2}{a\rho}}:$$

et comme

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}},$$

en substituant, élevant au carré et réduisant, il viendra enfin

$$\rho^2 - 2a\cos\omega.\rho + a^2 - r^2 = 0.$$

En discutant cette équation, on trouvera facilement qu'elle représente un cercle dont le centre est sur l'axe polaire, à une distance du pôle représentée par a, et dont le rayon est r.

13. *Peut-on interpréter géométriquement ce résultat?*

Pour cela il suffit d'observer que, μ étant la cosécante de l'angle générateur du cône, à mesure que μ approche de l'unité, cet angle augmente et approche de 90 degrés, valeur qu'il atteint pour $\mu = 1$. Or il est visible qu'à cette limite la surface du cône est devenue un plan, que la courbe DM'N' (*fig.* 1) est un cercle de rayon r, dont le centre est en O, distant de s d'une quantité a, et qu'enfin cette courbe doit être identique avec sa transformée; ce qui est conforme à ce que l'on a trouvé par l'analyse.

14. *En considérant le plan de la base du cône comme un plan horizontal, et le plan* SAB *comme un plan vertical, trouver les équations des projections horizontales et verticales de la courbe* DM′N′ *du* n° 1.

Cette question peut être considérée comme un nouveau problème ainsi conçu :

Un cône droit circulaire est coupé par une sphère de rayon r dont le centre est situé sur la surface du cône; on projette l'intersection de ces deux surfaces, 1° sur le plan de la base du cône; 2° sur le plan des deux génératrices opposées passant par le centre de la sphère, et l'on demande les équations de ces deux projections.

Nous emploierons les mêmes données que précédemment, et, en outre, nous appellerons h la hauteur SI du cône (*fig.* 3). M′ étant un point quelconque de l'intersection des deux surfaces, si l'on mène la génératrice SM′K, le rayon IK et la droite M′m parallèle à l'axe SI, il est clair que le point m est un des points de la projection horizontale dont il faut trouver l'équation. Pour cela, nous prendrons des coordonnées polaires dont IA sera l'axe et I le pôle; en sorte que l'on aura

$$\mathrm{I}m = \rho, \quad \mathrm{AIK} = \omega.$$

Cela posé, comme Im est la projection de SM′ sur le plan horizontal, en appelant α l'angle générateur du cône, on a successivement

$$\mathrm{I}m \text{ ou } \rho = \mathrm{SM}' \sin\alpha, \quad \mathrm{IK} \text{ ou } \mathrm{R} = b\sin\alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{SM}' = \rho\frac{b}{\mathrm{R}}.$$

En joignant OM′ dans le triangle OSM′, on aura

$$\mathrm{OM}'^2 = \mathrm{SO}^2 + \mathrm{SM}'^2 - 2\mathrm{SO}\,.\,\mathrm{SM}'\,.\cos\mathrm{OSM}',$$

ou

$$r^2 = a^2 + \frac{\rho^2 b^2}{\mathrm{R}^2} - \frac{2ab}{\mathrm{R}}\rho\cos\mathrm{OSM}'. \tag{7}$$

Si l'on conçoit une sphère de rayon 1 ayant son centre en S, les trois plans ISK, ISA, KSA détermineront sur sa surface un triangle sphérique dont deux côtés seront chacun la mesure de l'angle α générateur du cône, dont le troisième côté sera la mesure de l'angle OSM', et dont l'angle opposé à ce dernier côté sera visiblement l'angle ω. Par une formule connue, on aura donc

$$\cos \mathrm{OSM}' = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \omega.$$

Comme $\sin \alpha = \frac{\mathrm{R}}{b}$, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{b^2 - \mathrm{R}'}{b^2}} = \frac{h}{b}$, il vient

$$\cos \mathrm{OSM}' = \frac{h^2 + \mathrm{R}^2 \cos \omega}{b^2}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (7), il viendra, toute réduction faite,

$$(8) \qquad \rho^2 - \frac{2a\mathrm{R}}{b}\left(\frac{h^2 + \mathrm{R}^2 \cos \omega}{b^2}\right)\rho + (a^2 - r^2)\frac{\mathrm{R}^2}{b^2} = 0.$$

Telle sera l'équation de la projection horizontale de l'intersection des deux surfaces.

Pour trouver l'équation de la projection verticale, nous conserverons les mêmes données que précédemment, et nous observerons que si l'on abaisse $\mathrm{M}'m'$ perpendiculaire sur le plan ASB, le lieu des points tel que m' est celui dont il faut trouver l'équation. Pour cela, nous prendrons SO pour axe polaire, le pôle étant en S, en sorte que l'on aura

$$\mathrm{S}m' = \rho, \quad \mathrm{OSM}' = \omega.$$

On voit ensuite que l'on a

$$\mathrm{S}m' = \mathrm{SM}' \cos m'\mathrm{SM}',$$

d'où

$$\mathrm{SM}' = \frac{\rho}{\cos m'\mathrm{SM}'};$$

on a aussi

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = \overline{\mathrm{SM}}^2 + \overline{\mathrm{SO}}^2 - 2\mathrm{SM}'.\mathrm{SO}.\cos \mathrm{OSM}',$$

d'où

$$(9) \qquad r^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2 m'\,\mathrm{SM}'} + a^2 - \frac{2a\rho.\cos\mathrm{OSM}'}{\cos m'\,\mathrm{SM}'}.$$

Si, comme précédemment, on conçoit une sphère de rayon 1 dont le centre soit en S, les plans des trois angles OSM′, m'SM′, OSM′ détermineront sur sa surface un triangle sphérique dont un côté sera la mesure de l'angle ω, le second la mesure de l'angle m'SM′, et le troisième la mesure de l'angle OSM′. L'angle du triangle sphérique opposé à ce dernier côté sera évidemment droit, puisque le plan SM′m' qui passe par M′m' est perpendiculaire sur le plan OSm'. On aura donc, par un théorème connu,

$$\cos\mathrm{OSM}' = \cos\omega \ \cos m'\,\mathrm{SM}';$$

d'où

$$\frac{\cos\mathrm{OSM}'}{\cos m'\,\mathrm{SM}'} = \cos\omega.$$

Cette même sphère, dont le centre est en S, déterminera un second triangle sphérique dont les côtés seront les mesures des angles $m'\mathrm{SI} = \alpha - \omega$, m'SM′ et α. L'angle de ce triangle sphérique opposé au côté α étant droit, pour la même raison que précédemment, on aura

$$\cos\alpha = \cos m'\,\mathrm{SM}' \cos(\alpha - \omega);$$

d'où

$$\cos m'\,\mathrm{SM}' = \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\omega)}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (9), on aura

$$r^2 = \frac{\rho^2.\cos^2(\alpha-\omega)}{\cos^2\alpha} + a^2 - 2a\rho\cos\omega.$$

En développant $\cos(\alpha - \omega)$, on en déduira facilement

$$(\rho\cos\omega + \tang\alpha.\rho\sin\omega)^2 - 2a\rho\cos\omega + a^2 - r^2 = 0.$$

Telle sera l'équation de la projection verticale de l'intersection des deux surfaces. Si l'on passe aux coordonnées rectilignes rectangulaires, elle deviendra

$$(10) \qquad (x + \tan\!g\,\alpha . y)^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0.$$

La projection verticale est donc une courbe du second degré; on voit même que c'est une parabole, puisque les termes du second degré forment un carré parfait par rapport aux variables. M. Binet a démontré que, lorsque deux surfaces du second ordre ont un plan principal commun, leur intersection se projette toujours sur ce plan principal suivant une courbe du second degré. Le plan ASB pouvant visiblement être considéré comme un plan principal commun à nos deux surfaces, on pouvait prévoir, d'après le théorème de M. Binet, que leur intersection se projetterait dans ce plan selon une courbe du second degré.

15. *Faire subir aux équations des deux projections les simplifications du* n° 3.

Si l'on introduit dans (8) l'hypothèse $a = r = 1$ et $\frac{R}{b} = \frac{1}{2}$, comme $h^2 = b^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$, l'équation de la projection verticale sera

$$\rho^2 - \frac{(3 + \cos\omega)}{4}\rho = 0,$$

qui se décompose en

$$\rho = 0, \qquad \rho = \frac{3 + \cos\omega}{4}.$$

L'équation $\rho = 0$ représente un point isolé situé au pôle 1, ce qui est convenable. Quant à la courbe $\rho = \frac{3 + \cos\omega}{4}$, nous la laissons à discuter, ce qui ne présente pas de difficulté.

Si l'on fait $a = r = 1$ dans l'équation (10) de la projection verticale, elle deviendra d'abord

$$(x + \tan\alpha y)^2 - 2x = 0\,;$$

et, comme avec l'hypothèse $\frac{R}{6} = \frac{1}{2}$, on a évidemment

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dans ce cas particulier, l'équation de la projection verticale sera

$$\left(x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2x = 0.$$

En discutant cette courbe dans sa véritable position, on trouve que c'est une parabole DNS (*fig.* 2) qui passe par les points D, N′, S; qu'en ce dernier point elle est tangente à SB′ perpendiculaire sur SA; que son axe est parallèle à AB, et que son foyer est situé sur la génératrice SB (*).

THÉORÈME SUR LES SURFACES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. LEBESGUE.

Si, autour d'un point fixe, on fait tourner une transversale, qui rencontre une surface géométrique en autant

---

(*) 1°. Le théorème cité de M. Binet est évident; prenant le plan principal commun pour plan des xy, les équations des surfaces sont

$$z^2 + P = 0, \qquad z^2 + Q = 0;$$

P et Q sont des fonctions en x, y du second degré: donc $P - Q = 0$ est l'équation de la projection de l'intersection sur le plan principal commun.

2°. La courbe représentée par l'équation $4\rho = 3 + \cos\omega$ est une *podaire*, c'est-à-dire la projection d'un point sur les tangentes à une conique (t. IV, p. 496). TM.

de points A, B, etc., qu'elle a de dimensions, et qu'on prenne sur cette transversale, dans chacune de ses positions, un point M tel que la valeur inverse de sa distance au point fixe soit moyenne arithmétique entre les valeurs inverses des distances des points A, B, etc., à ce point fixe, le point M aura pour lieu géométrique un plan.

On voit, dans l'*Aperçu historique* de M. Chasles, que Cotes a énoncé le théorème pour les courbes algébriques, ou, comme on dit, géométriques.

La démonstration se donne en peu de mots, même pour le cas des surfaces.

Soit

$$(1)\quad A+(Bx+Cy+Dz)+\ldots+(\ldots+Px^n+Qy^n+Rz^n)=0$$

l'équation d'une surface géométrique du $n^{ième}$ degré ou de n dimensions. Prenons d'abord pour point fixe l'origine, et menons la transversale $x=pz$, $y=qz$; l'équation (1) donnera de suite, en substituant et divisant par z^n,

$$(2)\quad \left(\frac{1}{z}\right)^n+\left(\frac{Bp+Cq+D}{A}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}+\ldots+(\ldots Pp^n+Qq^n+R)=0,$$

et si l'on représente par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les n valeurs de z, on aura

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}=-\left(\frac{Bp+Cq+D}{A}\right).$$

Si l'on représente par X, Y, Z les coordonnées du point M, et par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les distances à l'origine des points d'intersection de la surface et de la transversale, et enfin par R la distance de M à l'origine, l'équation indiquée par l'énoncé

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}=\frac{n}{R}$$

donne de suite

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}=\frac{n}{Z},$$

puisque l'on a

$$r_1 = z_1\sqrt{1+p^2+q^2+\ldots} = Z_1 k,$$

et ainsi des autres. La suppression d'un facteur commun donne donc

$$\sum_1^n \frac{1}{z} = -\frac{Bp+Cq+D}{A} = \frac{n}{Z},$$

ou bien

$$BpZ + CqZ + DZ + nA = 0,$$

et comme l'on a

$$X = pZ, \quad Y = qZ,$$

on aura enfin

$$(3) \qquad BX + CY + DZ + nA = 0,$$

équation d'un plan.

Si le point fixe n'est pas à l'origine, et que ses coordonnées soient a, b, c, on prendra ce point pour origine de nouveaux axes parallèles aux premiers, en posant

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z';$$

et si l'équation (1) est $f(x, y, z) = 0$, elle deviendra

$$f(x'+a,\ y'+b,\ z'+c) = 0,$$

ou bien, en développant,

$$f(a, b, c) + \left(\frac{df}{da}x' + \frac{df}{db}y' + \frac{df}{dc}z'\right) + \ldots = 0.$$

Le lieu cherché sera donc

$$X'\frac{df}{da} + Y'\frac{df}{db} + Z'\frac{df}{dc} + nf(a, b, c) = 0,$$

ou, en repassant aux premiers axes,

$$(4) \quad (X-a)\frac{df}{da} + (Y-b)\frac{df}{db} + (Z-c)\frac{df}{dc} + nf(a, b, c) = 0.$$

Il est à remarquer que cette équation serait celle du plan tangent si l'on avait $f(a, b, c) = 0$, ou si le point fixe était sur la surface.

Si, dans l'équation (1), on remplace x, y, z par $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$, elle devient homogène et peut se mettre sous la forme

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} + u.\frac{df}{du} = 0 = nf(x, y, z, u);$$

alors l'équation (4) devient

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{X}\frac{df}{da} + \mathrm{Y}\frac{df}{db} + \mathrm{Z}\frac{df}{dc} + u\frac{df}{du} = 0.$$

(*Voyez* à ce sujet les *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 5.)

Pour $n = 2$, ou le cas des surfaces du second degré, l'équation (4) n'est autre que le plan polaire du pôle (a, b, c). Il paraît assez naturel de prendre ce théorème pour point de départ de la théorie des pôles et polaires, ainsi que l'a fait M. Terquem dans ses relations d'identité.

Comme $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\mathrm{R}}$ revient à $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{r_2}$, ou bien encore à

$$\frac{\mathrm{R} - r_1}{r_1} = \frac{r_2 - \mathrm{R}}{r_2},$$

on reconnaît que les cordes issues du point fixe sont divisées harmoniquement par le point fixe et par le point M.

Voici une autre propriété du plan polaire pour les surfaces du second degré.

Par un point fixe, prenons trois transversales coupant la surface, la première aux points α, α', la deuxième aux points β, β', la troisième aux points γ, γ'. Les trois transversales n'étant point dans un même plan, si l'on cherche les intersections des plans $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$; $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$; $\beta\alpha'\gamma'$, $\beta'\alpha\gamma$; $\gamma\alpha'\beta'$, $\gamma'\alpha\beta$; $\alpha\beta\gamma'$, $\alpha'\beta'\gamma$; $\alpha\gamma\beta'$, $\alpha'\gamma'\beta$,

$\beta\gamma\alpha'$, $\beta'\gamma'\alpha$, on verra qu'ils se croisent quatre à quatre sur le plan polaire.

Prenons, en effet, les trois transversales pour les axes, et soient x_1, o, o; x_2, o, o les coordonnées des points α, α'; de même, o, y_1, o; o, y_2, o les coordonnées des points β, β'; et enfin o, o, z_1; o, o, z_2 les coordonnées des points γ, γ'. Les plans $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$ auront pour équations

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} + \frac{z}{z_2} = 1, \qquad \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1.$$

Ajoutant membre à membre

$$x\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + y\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) + z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) = 2,$$

ce plan contiendra l'intersection des deux premiers; or, d'après l'équation

$$A + Bx + Cy + Dz + \ldots = o,$$

on a

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{B}{A}, \quad \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = -\frac{C}{A}, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -\frac{D}{A};$$

de là

$$Bx + Cy + Dz + 2A = o,$$

équation du plan polaire. Les autres systèmes $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, etc., donnent le même résultat.

Pour trois transversales qui ne passeraient pas par l'origine, on poserait

$$x = a + mx' + ny' + pz', \quad y = b + m'x' + n'y' + p'z',$$
$$z = c + m''x' + n''y' + p''z',$$

pour rentrer dans le premier cas.

Alors l'équation de la surface deviendrait

$$A_1 + B_1 x' + C_1 y' + D_1 z' + \ldots = o,$$

et le lieu des points de croisement

$$(6) \qquad B_1 x' + C_1 y' + D_1 z' + 2A_1 = 0,$$

et comme le développement de

$$f(x, y, z) = f(a + mx' + ny' + pz, \quad b + m'x' + n'y' + p'z,$$
$$c + m''x' + n''y' + p''z) = 0$$

donne

$$A_1 = f(a, b, c),$$
$$B_1 = m\frac{df}{da} + m'\frac{df}{db} + m''\frac{df}{dc},$$
$$C_1 = n\frac{df}{da} + n'\frac{df}{db} + n''\frac{df}{dc},$$
$$D_1 = p\frac{df}{da} + p'\frac{df}{db} + p''\frac{df}{dc}.$$

l'équation (6) deviendra

$$\frac{df}{da}(mx' + ny' + pz') + \frac{df}{db}(m'x' + n'y' + p'z')$$
$$+ \frac{df}{dc}(m''x' + n''y' + p''z') + 2f(a, b, c) = 0,$$

ou encore

$$(x - a)\frac{df}{da} + (y - b)\frac{df}{db} + (z - c)\frac{df}{dc} + 2f(a, b, c) = 0,$$

équation du plan polaire.

Ces propositions sur le plan polaire sont le fondement des autres, que notre but n'est pas d'exposer; nous nous contenterons d'ajouter que la méthode des homogènes, citée plus haut, simplifie la théorie analytique des polaires réciproques. C'est ce que nous verrons sans doute dans la suite de l'article de M. Terquem (t. VII, p. 5 et 410).

DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

Usage que l'on fait en algèbre des signes + et —; règles des signes du calcul algébrique; utilité des conventions relatives au calcul des quantités négatives;

PAR M. EL. GUILLON,

Maître surveillant à l'École Normale.

La résolution des problèmes dépend de celle des équations, et la résolution des équations exige que l'on sache effectuer sur les polynômes (parmi lesquels nous comprendrons toujours les monômes) les transformations ou opérations qui constituent le calcul algébrique.

On appelle *polynôme* un assemblage de quantités réunies entre elles par les signes + et —. Chacune de ces quantités, prise avec son signe, s'appelle *un terme du polynôme;* nous appellerons *termes positifs* ceux qui ont le signe +, et *termes négatifs* ceux qui ont le signe — (*). Nous parlerons aussi de valeur absolue d'un terme; nous entendrons par là la valeur de ce terme, abstraction faite de son signe. Pour plus de simplicité dans les énoncés que nous aurons à donner, nous comprendrons la première quantité quand elle n'aura pas de signe, parmi celles qui sont précédées du signe +.

Il semble tout naturel de regarder un polynôme, tel que $a - b + c - d \ldots$, comme représentant un nombre ou une quantité qui doit être obtenue en retranchant b de a, puis en ajoutant c au résultat, etc.; mais alors il faudrait, pour qu'un polynôme représentât une quantité, que

(*) Nous donnons pour un moment cette définition qu'il sera nécessaire de modifier plus tard l'ordre des termes fût tel, qu'on ne rencontrât pas de soustraction impossible; car, autrement, ce polynôme ne représenterait rien. Or il serait très-gênant, et sans aucune utilité, de s'astreindre à écrire les termes d'un polynôme dans un ordre plutôt que dans tout autre. Ce qu'il importe de considérer dans un polynôme, ce n'est pas l'ordre de ses termes, mais sa valeur; on appelle ainsi la différence entre la somme des valeurs absolues de ses termes positifs et la somme des valeurs absolues de ses termes négatifs. Ainsi, dans un polynôme, les soustractions indiquées peuvent être impossibles, et même un polynôme peut commencer par un ou plusieurs termes négatifs. Si nous ajoutons que l'on fait usage en algèbre, pour les avantages qu'il en résulte, de polynômes dans lesquels la somme des valeurs absolues des termes positifs est moindre que la somme des valeurs absolues des termes négatifs; que ce qu'il y a à considérer dans de pareils polynômes, c'est leur valeur négative, ou la différence entre les deux sommes dont il s'agit précédée du signe —; alors nous serons conduits à dire qu'au lieu de regarder dans un polynôme les signes + et — comme indiquant des additions et des soustractions à effectuer, il est préférable de les regarder comme servant à partager les termes en deux classes, dont chacune fournit l'une des deux sommes desquelles dépend le nombre réel ou fictif, ou, comme on dit, positif ou négatif, que nous avons appelé *la valeur du polynôme*.

La question suivante, extrêmement simple, servira à éclaircir ce qui précède :

Un banquier a payé différentes sommes, et il en a reçu d'autres : on demande la somme que définitivement il a déboursée.

Il est bien clair que cette somme n'est autre chose que la valeur, telle que nous l'avons définie, du polynôme dont les termes positifs ont pour valeurs absolues les sommes payées, et dont les termes négatifs ont pour valeurs absolues les sommes reçues. C'est de cette valeur seulement qu'on doit s'occuper, et nullement de l'ordre dans lequel on écrit les termes du polynôme.

Dans la question précédente on ne pouvait demander quelle était la somme que le banquier avait définitivement déboursée, qu'en supposant que le banquier avait déboursé plus qu'il n'avait reçu; si le contraire avait eu lieu, on aurait eu à se demander quelle était définitivement la somme reçue. Cette somme n'eût été autre chose que la valeur du polynôme dont les termes positifs auraient eu pour valeurs absolues les sommes reçues, et dont les termes négatifs auraient eu pour valeurs absolues les sommes payées. Ce polynôme aurait pu s'obtenir au moyen de celui que l'on a été conduit à considérer dans l'autre problème, en changeant dans ce dernier polynôme les signes de tous ses termes. Si l'un des deux problèmes est possible, l'autre ne l'est pas; si l'un des polynômes a une valeur, l'autre n'en a pas. Si l'on veut s'exprimer de la manière que nous avons fait connaître, on dira : Si l'un des polynômes est positif, l'autre est négatif. Ce que nous voulons surtout faire remarquer ici, c'est que, si le polynôme dont la valeur ferait connaître la somme cherchée, dans le cas où il serait positif, se trouve être négatif, sa valeur est juste égale absolument et de signe contraire à celle du polynôme qu'on aurait dû écrire; d'où résulte qu'on aurait pu se borner à considérer l'un de ces deux polynômes, et l'on eût connu par le signe de sa valeur et par sa valeur absolue, 1° quelle était celle des deux questions qui était possible; 2° quel était le résultat cherché. La question qu'on s'était proposée est possible, si le polynôme qu'elle conduit à considérer est positif, et sa valeur fait connaître la somme cherchée. La question qu'on s'était proposée est impossible, et c'est l'autre qui est possible, si le polynôme considéré est négatif; et, en supprimant le signe de sa valeur, on obtiendra le résultat que l'on devait chercher.

On aurait pu proposer une question plus générale que chacune des deux précédentes et qui les aurait comprises toutes deux : on aurait pu demander, non pas quelle était la somme définitivement déboursée ou reçue, mais quelle était la variation survenue dans la somme possédée par le banquier. Cette variation eût été, pour un ensemble de cas particuliers, la valeur d'un certain polynôme, et, pour d'autres cas, la valeur du polynôme de signes contraires.

Quand on résout des problèmes généralement, il arrive souvent, comme dans l'exemple ci-dessus, que pour un ensemble de cas particuliers on est conduit à considérer certains polynômes, et ces polynômes changés de signes pour d'autres cas particuliers. On peut alors ne considérer qu'une seule espèce de polynômes, et déduire des résultats des calculs effectués comme ils devraient l'être si ces polynômes étaient positifs, les solutions qui conviennent aux cas où ils sont négatifs. Ce qui constitue le calcul algébrique, c'est non-seulement l'ensemble des règles au moyen desquelles on peut trouver un polynôme qui soit en réalité, par rapport à des polynômes positifs, une somme, une différence, etc., mais encore l'ensemble des règles à l'aide desquelles on peut, au moyen des résultats d'opérations effectuées sur certains polynômes, obtenir ceux qui fourniraient d'autres polynômes qui se déduiraient des premiers, soit par le changement des signes de tous leurs termes, soit encore par d'autres changements dont il sera question bientôt. On conçoit qu'il y aura de l'utilité à soumettre les polynômes négatifs aux mêmes calculs que les polynômes positifs, si, des résultats auxquels on sera conduit, on peut facilement déduire ceux que l'on a besoin de connaître. C'est, comme nous le verrons, ce qui a lieu effectivement.

Avant d'apprendre à effectuer des opérations sur les polynômes, il importe de faire connaître quelques propriétés de leurs valeurs. De la définition que nous avons donnée, résulte que la valeur d'un polynôme n'est pas altérée quand on augmente ou qu'on diminue d'un même nombre deux termes, dont l'un est positif et l'autre négatif; par suite, on peut, sans altérer la valeur d'un polynôme, supprimer un terme, positif ou négatif, pourvu qu'on diminue la valeur absolue d'un terme négatif ou positif de la valeur absolue du premier. Ainsi les deux termes $+ 7$ et $- 4$ pourront être remplacés par le terme $+ 3$; les deux termes $- 7$ et $+ 4$ pourraient être remplacés par le terme $- 3$.

Plus généralement, tant de termes d'un polynôme qu'on voudra peuvent être remplacés par un seul, qui est la différence entre la somme des valeurs absolue des termes positifs et la somme des valeurs absolues des termes négatifs, cette différence étant précédée du signe des termes qui ont fourni la plus grande somme.

Nous passons actuellement à l'exposé des règles à suivre pour effectuer les opérations algébriques. On a donné à ces opérations les noms d'*addition*, *soustraction*, etc., parce que les résultats qu'elles fournissent, lorsque l'on ne considère que des polynômes positifs, sont analogues à ceux que l'on obtient par les opérations de l'arithmétique.

De l'addition.

On appelle *somme de plusieurs polynômes positifs*, un autre polynôme qui a pour valeur la somme des valeurs des premiers.

Il est facile de déduire de cette définition la règle suivante :

Pour obtenir la somme de plusieurs polynômes positifs, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres, en conservant à chaque terme son signe. Il faut se rappeler que le premier terme d'un polynôme, quand il n'a pas de signe, est rangé parmi ceux qui ont le signe +.

Cette règle on l'étend, soit à l'addition de polynômes dont les uns sont positifs et les autres négatifs, soit à l'addition de polynômes tous négatifs; c'est-à-dire que l'on convient de regarder dans tous les cas comme la somme de plusieurs polynômes, un autre polynôme déduit de ceux-ci selon la règle énoncée.

Il résulte évidemment de cette convention et des remarques que nous avons faites sur la valeur d'un polynôme, qu'un polynôme qui est la somme de plusieurs autres, parmi lesquels il s'en trouve de négatifs, a pour valeur la différence entre la somme des valeurs absolues de ceux qui sont positifs et la somme des valeurs absolues de ceux qui sont négatifs, cette différence étant précédée du signe des polynômes qui ont fourni la plus grande somme. Si les polynômes ajoutés étaient tous négatifs, on trouverait pour leur somme un polynôme négatif, dont la valeur absolue serait la somme des valeurs absolues des polynômes ajoutés.

De la soustraction.

La soustraction a pour but, étant donnés la somme de deux polynômes et l'un de ceux-ci, de trouver l'autre. On donne au résultat de cette opération le même nom qu'en arithmétique.

On obtiendra un polynôme qui soit la différence de deux autres, en écrivant à la suite du polynôme dont on veut soustraire, le polynôme à soustraire, après avoir changé les signes de tous les termes de ce dernier. Il est clair, en effet, que, si au résultat ainsi obtenu, on ajoute le polynôme soustrait, on obtiendra le polynôme dont on soustrait. On peut remarquer que, soustraire un polynôme, revient à ajouter le polynôme de signes contraires, et, comme l'on sait, les résultats auxquels conduit l'addition, cette remarque permettra de dire ceux auxquels conduit la soustraction.

De la multiplication.

La multiplication a pour but, deux polynômes étant donnés, d'en trouver un troisième qui soit le produit des deux premiers. On appelle produit de deux polynômes positifs un autre polynôme dont la valeur soit le produit des valeurs des deux premiers.

Soit d'abord proposé de trouver le produit d'un binôme $a+b$ ou $a-b$ par un monôme m; que m soit entier, fractionnaire ou incommensurable, il est facile de voir que le produit est $am+bm$ dans le premier cas, et $am-bm$ dans le second.

Soit actuellement proposé de multiplier un polynôme positif $a-b-c+d-e$ par un monôme m; le produit s'obtiendra en multipliant dans ce polynôme chacun des nombres a, b, c, etc., par m. En effet, soit P la valeur du polynôme proposé: le produit que nous cherchons doit être égal à Pm; mais si l'on représente par P' la valeur de l'ensemble des termes du polynôme P, à l'exception d'un seul, $-e$, de telle façon que P soit égal au binôme $P'-e$, le produit cherché sera égal à $(P'-e)m=P'm-em$. De même, si l'on désigne par P'' la valeur de l'ensemble des termes de P', à l'exception d'un seul, $+d$, de façon que $P'=P''+d$, on aura

$$P'm = P''m + dm,$$

et, par suite,

$$Pm = P''m + dm - em.$$

En continuant ainsi, on finira par obtenir la relation

$$Pm = am - bm - cm + dm - em,$$

qui est celle à laquelle nous voulions parvenir.

Nous nous sommes appuyés, dans la démonstration précédente, sur ce que le produit du binôme $a - b$ par m, et, par suite, le produit du binôme $-b+a$ par m, est $am - bm$, dans le cas où b est plus petit que a. Dès lors, pour que cette démonstration ne soit pas en défaut, il est nécessaire que les binômes $P' - e$, $P'' + d$, etc., soient tous positifs; mais c'est ce qui a lieu nécessairement quand on suppose, comme nous l'avons fait, que le polynôme multiplicande est positif, puisque ces binômes ont tous pour valeur celle de ce polynôme. Donc il est toujours vrai de dire que le produit d'un polynôme positif $a - b - c + d - e$ par un monôme positif m s'obtient en multipliant dans ce polynôme chacun des nombres a, b, etc., par m.

Si l'on remarque qu'on peut, sans altérer la valeur d'un produit, changer l'ordre de ses facteurs, on conclura que le produit d'un monôme m par un polynôme positif $a - b - c + d - e$ s'obtiendra en multipliant dans le polynôme chacun des nombres a, b, etc., par m.

Supposons maintenant qu'on ait à multiplier un polynôme positif $a - b - c + d - e$ par un polynôme positif $m - n + p - q$. Si P représente la valeur du polynôme multiplicande, le produit cherché sera égal à $P(m - n + p - q) = Pm - Pn + Pp - Pq$; mais le produit Pm s'obtiendra en multipliant dans le multiplicande les valeurs absolues de ses termes par m. Le produit Pn s'obtiendra d'une manière analogue, et $-Pn$ ne sera autre chose que la valeur de ce produit changé de signe; de sorte que, dans l'expression trouvée plus haut du produit cherché, on peut remplacer $-Pn$ par le polynôme qu'on obtient en multipliant dans le polynôme de signes contraires à ceux du multiplicande, les nombres a, b, etc., par m. En continuant ainsi, on arrive à cette règle générale :

Les termes du produit de deux polynômes positifs s'obtiennent, quant à leurs valeurs absolues, en multipliant les valeurs absolues des termes du multiplicande par les valeurs absolues des termes du multiplicateur; quant à leurs signes, ce sont les signes des termes du multiplicande ou les signes contraires, *selon que le terme du multiplicateur*, par la valeur absolue duquel on a multiplié, *a le signe + ou le signe —*.

La partie de cette règle relative aux signes des termes du produit peut être exprimée autrement; on peut dire : Selon que la valeur absolue d'un terme du produit est le produit des valeurs absolues de deux termes qui ont le même signe ou des signes différents, ce terme du produit a le signe + ou le signe —. On énonce souvent cette partie de la règle d'une manière abrégée, comme il suit :

+ par + donne +,
+ par — donne —,
— par + donne —,
— par — donne +.

De même que nous sommes convenus de regarder comme la somme de plusieurs polynômes, parmi lesquels il s'en trouve de négatifs, un autre polynôme obtenu au moyen des premiers, comme si tous ceux-ci étaient positifs, de même nous conviendrons de regarder comme le produit de deux polynômes, quand l'un d'eux est négatif ou qu'ils le sont tous deux, un troisième polynôme déduit des premiers, selon la règle énoncée plus haut. Il faudra en outre, de même aussi qu'à propos de l'addition, pour que l'on puisse tirer parti de cette nouvelle convention, étudier les résultats auxquels elle conduit, dans le but de connaître la relation qui existe entre ces résultats et ceux que l'on obtiendrait si les polynômes négatifs étaient remplacés par ceux de signes contraires.

L'étude dont nous parlons se borne à peu près à remarquer que, en acceptant la convention dont il s'agit, un produit de deux facteurs change de signe et conserve la même valeur absolue, lorsqu'on change les signes de tous les termes de l'un de ces facteurs ; de là on déduit que, si l'on change les signes des deux facteurs, le produit ne change pas du tout. On peut énoncer ce résultat autrement et dire que le produit de deux facteurs a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues de ces facteurs, et qu'il est positif ou négatif, selon que les deux facteurs ont le même signe ou des signes différents.

On déduit facilement de là que le produit de tant de facteurs qu'on veut a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues des facteurs, qu'il est positif s'il n'y a aucun facteur négatif ou s'il y en a un nombre pair, et qu'il est négatif dans le cas où le nombre des facteurs négatifs est impair.

De la division.

La division a pour but, étant donnés le produit de deux polynômes et l'un de ceux-ci, de trouver l'autre.

La division n'étant que l'opération inverse de la multiplication, la règle des signes pour la division est une conséquence immédiate de celle qui est relative à la multiplication. Nous nous dispenserons dès lors d'entrer ici dans aucun détail.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent permettra, lorsqu'on sera arrivé à un résultat par des opérations effectuées sur des polynômes négatifs, d'en déduire celui qu'on aurait obtenu avec des polynômes de signes contraires. Ce sont surtout les remarques faites dans la multiplication et celles analogues qu'on aurait pu faire dans la division, qui, pour cet usage, ont des applications. Il est très-facile de déduire des résultats fournis par ces deux opérations effectuées sur des polynômes, parmi lesquels il s'en trouve de négatifs, ceux que l'on aurait obtenus avec des polynômes tous positifs, car il ne peut y avoir de différence entre les premiers et les seconds résultats que dans les signes, nullement dans les valeurs absolues.

Quand on résout des problèmes généralement, non-seulement il arrive, comme nous l'avons dit, qu'on doit considérer à la fois des polynômes et les polynômes de signes contraires, mais il arrive aussi très-souvent qu'après avoir considéré certains polynômes, et effectué sur eux des transformations telles que des réductions de termes semblables, des additions, etc., on doit considérer d'autres polynômes qui se déduiraient des premiers par le changement de signe d'une ou de plusieurs des lettres qui y entrent, et effectuer sur ces nouveaux polynômes les mêmes calculs que sur les premiers. Dans ce cas, on peut aussi se dispenser de recommencer les calculs; car il suffira, pour obtenir les résultats correspondants aux nouveaux polynômes, de changer, dans les résultats fournis par les premiers, le signe de la quantité ou des quantités qui doivent en être changées pour que les premiers polynômes deviennent égaux aux seconds. Nous entendons par changer une lettre de signe, la lettre a par exemple, remplacer partout $+a$ ou a simplement par $-a$, et inversement, ou, ce qui revient au même, comme il est facile de le vérifier, nous entendons remplacer partout a par $-a$. Cela revient encore à changer les signes de tous les termes où a entre à des puissances impaires, et à conserver ceux de tous les termes qui ne contiennent pas a, ou qui le contiennent à des puissances paires. Il est bon de remarquer que, si deux polynômes ne diffèrent que par le signe d'une lettre, ils se réduiront à la même expression quand on remplacera cette lettre, dans l'un par un certain nombre, et dans l'autre par le même nombre, précédé du signe —.

Occupons-nous de la démonstration de la proposition ci-dessus énoncée. Nous examinerons successivement la réduction des termes semblables, l'addition et la soustraction, la multiplication et enfin la division.

1°. Soient P un polynôme renfermant des termes semblables, P' ce polynôme réduit; soient P_1 ce que devient P (qui est supposé renfermer la lettre a) quand on y change a en $-a$; P'_1 le polynôme P_1 réduit : je dis qu'on obtiendrait P'_1 en changeant dans P'_1 a en $-a$. En effet, supposons qu'il y ait dans P plusieurs termes semblables renfermant a à une même puissance paire; en changeant dans P a en $-a$, on obtiendra le polynôme P_1, où tous ces termes se retrouveront identiquement, et ils donneront, par leur réduction, dans P' et dans P'_1, deux termes identiques; mais celui de ces termes qui se trouve dans P' ne changera pas si l'on change a en $-a$ dans ce polynôme, et il fournira, par conséquent, le terme qui doit se trouver dans P'_1. Il résulte de ce raisonnement que tous les termes de P'_1 qui renferment a à des puissances paires seront fournis par ceux de P' quand on y change a en $-a$. Supposons, en second lieu, qu'il y ait dans P des termes semblables renfermant tous a à une même puissance impaire; en changeant dans P a en $-a$, tous ces termes changeront de signe, et le terme réduit de P' se trouvera, dans P'_1, changé de signe; mais si l'on change dans P' a en $-a$, le terme réduit dont il s'agit donnera celui qui doit se trouver dans P'_1. On voit par là que tous les termes de P'_1 qui renferment a à des puissances impaires seront fournis par ceux de P' quand on y changera a en $-a$. Donc, en définitive, le polynôme P'_1 n'est autre chose que le polynôme P', quand on a changé dans ce dernier a en $-a$.

2°. Soient P, Q, R, etc., différents polynômes, S leur somme, P', Q', R', etc., ce que deviennent P, Q, R, etc., quand on y change a en $-a$, S' la somme des nouveaux polynômes; je dis que S' n'est autre chose que ce que devient S quand on y change a en $-a$. La proposition serait évidente, d'après la règle qu'on suit pour trouver la somme de plusieurs polynômes, si dans S et S' ne se trouvait effectuée aucune réduction; mais il résulte de la démonstration précédente que, s'il en est ainsi avant la réduction, il en est encore ainsi après. Donc, etc.

La soustraction revenant à l'addition, nous croyons inutile de démontrer la proposition pour le cas où la transformation opérée serait une soustraction.

3°. Soient P et Q deux polynômes, V leur produit, P' et Q' ce que deviennent P et Q quand on y change a en $-a$, V' le produit des nouveaux polynômes; je dis que V' n'est autre chose que ce que devient V quand on y change a en $-a$. Pour démontrer ce résultat, nous considérerons dans chaque facteur deux espèces de termes, ceux qui ne renferment pas a ou qui renferment cette lettre à des puissances paires, et ceux qui renferment a à des puissances impaires. Nous désignerons, pour le polynôme P, l'ensemble des premiers termes par A, et l'ensemble des autres par B, de sorte que le premier polynôme ne sera autre chose que $A+B$; de même, nous représenterons le polynôme Q par $C+D$. Il est clair que les polynômes P' et Q' seront représentés, l'un par $A-B$, et l'autre par $C-D$. Dès lors le produit V sera représenté par $AC+BC+AD+BD$, et le produit V' par $AC-BC-AD+BD$. Or, si l'on change dans V, a en $-a$, les termes du groupe représenté par AC, ne renfermant pas la lettre a, ou la renfermant à des puissances paires, ne changeront pas de signe et donneront le même groupe de termes qui se trouve dans V'. On peut dire la même chose des termes du groupe BD. Les termes du groupe AD renferment a à des puissances impaires et changent de signe par le changement de a en $-a$; ils fourniront donc les termes du groupe $-$AD, qui se trouvent dans V'. De même, le groupe $+$BC de V fournira le groupe $-$BC de V'. Donc V' n'est autre chose que ce que devient V quand on y change a en $-a$.

S'il s'agissait d'un produit de plus de deux facteurs, la proposition serait également vraie, et la démonstration précédente serait facile à généraliser.

4°. La division n'étant que l'opération inverse de la multiplication, il en résulte que la proposition est vraie aussi pour un quotient. Toutefois il y a lieu d'examiner le cas où la division ne se ferait pas exactement.

Soient M, N deux polynômes, Q leur quotient, et R le reste de division; soient M', N' ce que deviennent M, N quand on y change a en $-a$, Q' et R' le quotient et le reste correspondants à ces nouveaux polynômes : je dis que Q', R' ne sont autre chose que ce que deviennent Q, R quand on y change a en $-a$. En effet, de la relation

$$M = NQ + R$$

il résulte

$$M' = N'Q'' + R'',$$

en désignant par Q'' et R'' ce que deviennent Q, R quand on y change a en $-a$; mais alors Q'' et R'' sont le nouveau quotient et le nouveau reste, c'est-à-dire que ces polynômes sont les mêmes que Q' et R'. C. Q. F. D.

Une puissance n'étant qu'un produit, on doit regarder comme démontré que, si deux polynômes se déduisent l'un de l'autre par le changement de signe d'une lettre, il en est de même de leurs puissances de même degré; par suite, il en est de même aussi de leurs racines d'un même degré.

Les démonstrations précédentes supposent que les nouveaux polynômes se déduisent des primitifs par le changement de signe d'une seule des lettres qui y entrent; mais les démonstrations correspondantes au cas où plusieurs lettres seraient changées de signe ne différeraient guère de celles que nous avons données, et nous croyons inutile de nous y arrêter.

La proposition qui nous occupe est donc actuellement démontrée pour tous les résultats obtenus par des réductions de termes semblables, des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, des élévations à des puissances, des extractions de racines. Elle est très-importante à cause de ses applications. Dans les questions où l'on aurait dû considérer des polynômes de deux espèces, on pourra, à l'aide de cette proposition, n'en considérer que d'une seule; ceux-ci représenteront les deux espèces : l'une, en y considérant certaines lettres comme représentant simplement des quantités; l'autre, en y considérant ces mêmes lettres comme représentant des quantités précédées du signe —, ou des quantités négatives. On pourra souvent ainsi réduire plusieurs formules en une seule, et plusieurs opérations du même genre aussi en une seule. On pourra encore réduire le nombre des équations à résoudre pour avoir la solution complète d'un problème. Imaginons que les solutions d'un problème général soient données en partie par une équation et en partie par une autre équation qui ne différerait de la première que par le signe de l'inconnue (*):

(*) Cela arrive dans un grand nombre de problèmes, en particulier dans le problème des courriers, où les solutions sont données, pour un ensemble de cas particuliers, par une certaine équation, et, pour d'autres cas particuliers, par une autre équation qui ne diffère de la première que les solutions négatives de l'une de ces questions étant débarrassées du signe —, satisferont à l'autre, et réciproquement; de sorte que, si l'on connaît les solutions positives et négatives de l'une, il sera inutile de considérer l'autre, car on connaîtra les solutions positives des deux. Or toutes les transformations que l'on effectuera sur l'une des équations, et qui n'altéreront pas les solutions positives, n'altéreront pas non plus les solutions négatives. Pour le prouver, considérons les deux équations dont on doit chercher les solutions positives, ces équations ne différant l'une de l'autre que par le signe de l'inconnue, il en sera de même de leurs équivalentes obtenues par des transformations analogues; les solutions négatives de l'une des transformées seront toujours, après la suppression du signe —, les solutions positives de la transformée correspondante, et, par conséquent, les transformations qui n'altèrent pas les solutions positives d'une équation n'altèrent pas non plus les solutions négatives. De là on conclut que, si l'on parvient, par ces transformations, à trouver une formule qui donne la valeur de l'inconnue, cette formule fera aussi bien connaître les valeurs négatives que les valeurs positives de cette inconnue. Ceci sera facilement compris quand on aura résolu quelques équations, car alors on connaîtra quelles sont les transformations dont il est question.

Pour avoir un énoncé abrégé de la proposition précédente, et en même temps plus approprié aux usages que l'on fait des quantités négatives, nous dirons :

Si certaines lettres doivent être regardées comme néga-

---

par le signe de l'inconnue. Cela arrive aussi dans le problème suivant : *Trouver sur une droite les points tels que leurs distances à deux points de cette droite soient, l'une moyenne proportionnelle entre l'autre et la distance de ces derniers.*

tives dans certains polynômes, il en est de même dans les résultats obtenus avec ces polynômes.

Remarque. Avec cette extension que nous donnons à la notation algébrique, et qui consiste à faire représenter à une lettre aussi bien une quantité négative qu'une quantité positive, un terme qui a le signe + ne représente pas toujours une quantité positive, et un terme qui a le signe — n'est pas toujours un terme négatif. Un terme sera dit *positif* ou *négatif*, selon qu'il se réduira à un nombre positif ou négatif, après avoir remplacé les lettres qui y entrent par les valeurs particulières, positives ou négatives, qu'on leur attribue. Du reste, tous les énoncés que nous avons donnés précédemment subsistent, en entendant ainsi les expressions de terme positif, terme négatif (*voir* tome III, pages 318-321).

QUESTIONS.

199. Expliquer *clairement* ce qu'il faut entendre par *tétraèdres semblablement situés*, dans la théorie des polyèdres semblables.

200. Si un point P se meut dans un plan de manière à ce que la somme des carrés des tangentes PA_1, PA_2, PA_3, ..., $PA_{n(n-1)}$, menées de ce point à une courbe algébrique de degré n, située dans ce plan, soit constante, la normale en P, au lieu géométrique de P, passe par le centre de moyenne distance des centres de courbure de la courbe, correspondants aux points de contact A_1, A_2,..., A_n.

201. Soient P, P′ deux points appartenant respectivement à deux ellipses homofocales, tels que les tangentes qu'on mène à ces courbes, à P et P′, se coupent à angles droits ; en désignant par I le point de leur intersection, et par C le centre commun des ellipses, la droite CI divisera en parties égales les distances P, P'. (STREBOR.)

202. Étant donnés un point et une droite : Soient deux paraboles ayant toutes deux pour tangente la droite donnée et le point donné pour foyer commun, en supposant qu'elles se coupent toujours sous le même angle ; leur point d'intersection décrira un cercle. (STREBOR.)

203. Dans un pentagone, si l'on considère comme sommets d'un pentagone : 1° les points milieux des cinq diagonales ; 2° les centres de gravité des cinq triangles formés par deux diagonales et un côté, on obtient deux pentagones semblables et inversement placés.

(A. WATELET.)

SOLUTION DE LA QUESTION 191

(t. VII, p. 368);

PAR M. H. ÉMERY,
Élève du lycée de Versailles.

Trouver la $n^{ième}$ dérivée de $x^n(x-1)^n$, et démontrer que cette dérivée, égalée à zéro, a n racines réelles comprises entre 0 et 1.

I. L'équation $x^n(x-1)^n = 0$, ayant toutes ses racines réelles, savoir : n racines égales à zéro et n égales à l'unité, il suit du théorème de Rolle que toutes les racines des dérivées sont aussi réelles et comprises entre 0 et 1 ; mais la $n^{ième}$ dérivée est la première qui n'ait aucune racine, soit nulle, soit égale à l'unité.

Recherche de la dérivée.

II. — *Première méthode.* On a, par le développement binomial,

$$x^n(x-1)^n = x^{2n} - \frac{[n]}{[n-1]}x^{2n-1} + \frac{[n]}{[2][n-1]}x^{2n-2} - \ldots + (-1)x^n$$

où les crochets indiquent un produit continuel.

Prenant la dérivée $n^{ième}$ de chaque terme, on a pour la dérivée $n^{ième}$ cherchée :

$$\frac{d^n[x(x-1)]^n}{dx^n} = [2n]x^n - \frac{[n]}{[n-1]}\frac{[2n-1]}{[n-1]}x^{n-1}$$
$$+ \frac{[n]}{[2][n-2]}\frac{[2n-2]}{[n-2]}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n[n].$$

III. — *Lemme.* F et φ étant des fonctions de x, on obtient la $n^{ième}$ dérivée du produit $F\varphi$ en faisant le développement binomial de $(F+\varphi)^n$, mais en prenant les exposants comme des indices de dérivation, et écrivant pour premier terme $\varphi F^{(n)}$, et pour dernier terme $F\varphi^{(n)}$.

Démonstration. On a, pour

Première dérivée, $\varphi F' + F\varphi'$;
Deuxième dérivée, $\varphi F'' + 2F'\varphi' + F\varphi''$;
Troisième dérivée, $\varphi F''' + 3\varphi' F'' + 3\varphi'' F' + F\varphi'''$;

et, par induction, la dérivée d'indice p sera

$$\varphi F^{(p)} + p.\varphi' F^{(p-1)} + \frac{p.p-1}{1.2}\varphi'' F'^{(p-2)} + \ldots + F\varphi^{(p)}.$$

Prenant la dérivée de ce développement, on obtient une même loi de formation pour la dérivée suivante d'indice $p+1$; donc cette loi est générale.

IV. — *Deuxième méthode.* Faisons $\varphi = x^n$, $F = (x-1)^n$; on aura, en appliquant le lemme et divisant le résultat égalé à zéro par $[n]$,

$$[x-1]^n + n^2 x[x-1]^{n-1} + \left[\frac{n.n-1}{1.2}\right]^2 x^2(x-1)^{n-1}$$
$$+ \left[\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right]^3 x^3(x-1)^{n-2} + \ldots + x^n = 0.$$

Cette équation n'a évidemment aucune racine négative; car prenant x négatif, tous les termes sont positifs, n étant pair, et tous les termes sont négatifs, n étant impair, et x ne peut surpasser l'unité : donc, comme on l'a vu à priori, toutes les racines sont comprises entre 0 et 1.

THÉORÈME SUR LES CARRÉS DES COTÉS D'UN TRIANGLE RECTILIGNE (*).

I. *Lemme*. Soient A, B, C les trois sommets, et a, b, c les trois côtés respectivement opposés, et S l'aire du triangle ABC; on a la relation

$$4S(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Démonstration. On a $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cot A$, et encore deux équations analogues; ajoutant les trois équations membre à membre, on obtient la relation indiquée.

II. *Théorème*. Sur chaque côté du triangle ABC on construit extérieurement un carré. Soient A′, B′, C′ les centres des carrés construits sur BC, AC, AB; on aura

$$\frac{\text{aire } A'B'C'}{\text{aire } ABC} = 1 + \tfrac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C).$$

Démonstration. Conservons la même notation que dans le lemme. L'aire de l'hexagone AC′BA′CB′ est évidemment $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + S$: on a $AC' = \frac{c}{\sqrt{2}}$; $AB' = \frac{b}{\sqrt{2}}$; $C'AB' = 1^d + A$: donc l'aire du triangle C′AB′ est égale à $\frac{bc}{4} \cos A = \frac{S}{2} \cot A$; de même,

$$\text{aire } B'CA' = \frac{S}{2} \cot C; \quad A'BC' = \frac{S}{2} \cot B;$$

donc

$$\text{aire } A'B'C' = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + S - \tfrac{1}{2}S(\cot A + \cot B + \cot C),$$

(*) Programme de l'université de Dublin, 1848.

et, d'après le lemme,

$$\text{aire } A'B'C' = S\left[1 + \tfrac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C)\right].$$

C. Q. F. D.

III. Si l'on construit extérieurement un carré sur chaque côté d'un triangle rectangle, l'aire du triangle qui a pour sommets les centres des trois carrés est égale au carré formé sur la demi-somme des côtés de l'angle droit.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

QUESTION D'EXAMEN SUR LES FRACTIONS CONTINUES (*).

I. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre nombres positifs entiers rangés par ordre ascendant; on a les relations d'inégalités suivantes :

1°. $a_1 a_2 - a_3 a_4 < 0$.

2°. $a_3 a_4 - a_1 a_2 > 1$. En effet, soit $a_3 = a_1 + m$, $a_4 = a_2 + n$, $a_3 a_4 - a_1 a_2 = m a_2 + n a_1 + mn > 1$.

3°. $a_1 a_3 - a_2 a_4 < 0$.

4°. $a_2 a_4 - a_1 a_3 > 1$, comme pour 2°.

II. Supposons qu'on a la relation

$$a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1. \tag{1}$$

Posons l'équation indéterminée $a_4 y - a_3 x = 1$; les plus petites valeurs positives entières de y et de x sont a_1 et a_2 : s'il existait des valeurs α et β plus petites, on aurait donc

$$a_4 \alpha - a_3 \beta = 1; \quad \text{donc } a_4(\alpha - a_1) = a_3(\beta - a_2);$$

ce qui est évidemment impossible.

(*) M. Serret examinateur.

L'équation $a_3 x - a_4 y = 1$ est satisfaite, en posant $x = a_4 - a_3$, $y = a_3 - a_1$. On démontre de même que ces valeurs positives sont les plus petites qu'on puisse avoir.

Observation. Ces résultats s'énoncent brièvement de cette manière : la congruence $a_4 y - 1 = \dot{a}_3$ a pour racine unique a_1, et la congruence $a_3 x - 1 = \dot{a}_4$ a pour racine a_2; le point leibnitzien placé au-dessus d'un nombre indique un multiple quelconque de ce nombre.

III. Soient $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ deux réduites consécutives d'une fraction continue, et soit p le dernier dénominateur correspondant à la réduite $\frac{t}{u}$. Si p est remplacé par $p - 1$, on a pour réduite $\frac{t-r}{u-s}$; car le quotient entier de $\frac{t}{r}$ est p : donc le quotient entier de $\frac{t-r}{r}$ est $p - 1$; de même pour les dénominateurs.

IV. Conservant la relation (1), réduisons $\frac{a_3}{a_4}$ en fraction continue. Soit $\frac{r}{s}$ l'avant-dernière réduite; il y a deux cas : 1° $\frac{r}{s} > \frac{a_3}{a_4}$, ou bien $ra_4 - sa_3 = 1$. Donc r et s satisfont à l'équation $a_4 y - a_3 x = 1$; mais $r < a_3$, $s < a_4$; donc, d'après II, on a

$$r = a_1 \text{ et } s = a_2.$$

Ainsi l'avant-dernière réduite est $\frac{a_1}{a_2}$; 2° $\frac{r}{s} < \frac{a_3}{a_4}$, ou bien $sa_3 - ra_4 = 1$. r et s satisfont à l'équation $a_3 x - a_4 y = 1$, donc, d'après II, $r = a_4 - a_2$, $s = a_3 - a_1$: l'avant-dernière réduite est donc $\frac{a_3 - a_1}{a_4 - a_2}$. Si l'on diminue d'une unité le dernier dénominateur de la fraction continue, la valeur de cette fraction devient égale (III) à $\frac{a_1}{a_2}$.

V. On parvient à des conclusions analogues, si l'on a la relation $a_2 a_3 - a_1 a_4 = 1$, ou bien encore si l'on réduit en fraction continue $\frac{a_2}{a_4}$.

RECHERCHE

Du nombre des chiffres que fournit à la période une fraction ordinaire réduite en fraction décimale;

PAR M. J. SORNIN,

Professeur de mathématiques au lycée de Reims.

On sait déterminer, en général, le nombre des chiffres que donne une fraction ordinaire réduite en décimales, quand le quotient a un nombre fini de chiffres; on sait également déterminer le nombre des chiffres qui précèdent la période, quand le quotient est périodique mixte : nous nous proposons ici de déterminer le nombre des chiffres de la période, quand la fraction ne se convertit pas exactement en décimales.

Remarquons d'abord que, lorsqu'une fraction ordinaire donnera lieu à un quotient périodique mixte, on pourra facilement déduire de cette fraction celle qui donnerait lieu à la partie périodique simple; il suffira pour cela de multiplier la fraction proposée par une puissance de 10 égale à la plus haute puissance de 2 ou de 5 qui entre dans le dénominateur.

Nous n'avons donc à nous occuper que des fractions qui donnent lieu à un quotient périodique simple, c'est-à-dire dont le dénominateur ne contient aucun des facteurs 2 ou 5.

Le dénominateur des fractions que nous considérons ne pouvant être terminé ni par un chiffre pair, ni par un 5, sera de l'une des formes

$$10k+1, \quad 10k+3, \quad 10k+7, \quad 10k+9.$$

D'ailleurs la forme $10k+9$ est la même que $10k-1$; et la forme $10k+7$ est la même que $10k-3$.

On peut donc dire que le dénominateur sera de l'une ou de l'autre des formes

$$10k \pm 1, \quad 10k \pm 3.$$

Soit, en général, $\frac{C}{D}$ la fraction irréductible que l'on veut convertir en décimales, en désignant par $abcd\ldots$ la période, m le nombre de ses chiffres: on aura

$$\frac{C}{D} = \frac{abcd\ldots}{10^m - 1}, \quad \text{d'où} \quad abcd\ldots = \frac{C(10^m - 1)}{D};$$

ce qui montre que D doit diviser 10^m-1, quel que soit C, et le nombre des chiffres de la période sera la plus petite valeur de m qui rendra $10^m - 1$ divisible par D.

On conclut d'abord de là ce théorème, que *le nombre des chiffres de la période d'une fraction irréductible est le même, quel que soit son numérateur.*

Nous considérons donc seulement ici la fraction $\frac{1}{D}$.

Nous examinerons successivement les différentes formes sous lesquelles D peut se présenter.

I. $$D = 10k + 1.$$

Soit $$x = \frac{10^m - 1}{10k + 1}.$$

Posons $x = 10y - 1$; il viendra

$$10^m - 1 = (10y - 1)(10k + 1).$$

Réduisant, on en tire

$$y = \frac{10^{m-1} + k}{10k + 1}.$$

Faisons de nouveau $y = 10z + k$; on aura

$$10^{m-1} + k = (10z + k)(10k + 1);$$

d'où

$$z = \frac{10^{m-2} - k^2}{10k + 1}.$$

Soit encore $z = 10u - k^2$, et un calcul semblable donnera

$$u = \frac{10^{m-3} + k^3}{10k + 1}.$$

On posera $u = 10t + k^3$, et ainsi de suite.

Comme il est facile de suivre la loi des valeurs de y, z, etc., on en conclura que l'on arrivera nécessairement à l'égalité

$$v = \frac{10^{m-m} + k^m}{10k + 1} = \frac{1 + k^m}{10k + 1} \quad \text{si } m \text{ est impair};$$

ou à

$$v = \frac{10^{m-m} - k^m}{10k + 1} = \frac{1 - k^m}{10k + 1} \quad \text{si } m \text{ est pair}.$$

Si v est entier, en remontant de proche en proche on verra aisément que x sera entier. Or je dis que la réciproque est également vraie. En effet, si x est entier, ou bien y sera entier, ou bien il ne contiendra en dénominateur que 2 ou 5; c'est ce qui résulte de l'égalité $x = 10y - 1$.

En raisonnant de même sur l'égalité suivante, on verra que si y n'était pas entier, z contiendrait au dénominateur les facteurs 2 ou 5, et ne pourrait d'ailleurs contenir que ces facteurs. En continuant ce raisonnement, on arriverait à conclure que v contiendrait en dénominateur les seuls facteurs 2 ou 5: mais v, d'après la valeur à laquelle on est parvenu, ne peut contenir en dénominateur ni 2 ni 5 : donc y, z, ..., ν sont entiers. Ainsi toute valeur de m qui rend x entier rend aussi ν entier, et réciproquement. Donc la plus petite valeur de m qui rendra ν entier sera le nombre des chiffres de la période.

En prenant $k^m - 1$ au lieu de $1 - k'^n$, qui est négatif, on est conduit à la règle suivante :

« Former les différentes puissances des dizaines du dénominateur, augmenter de 1 les puissances impaires, diminuer de 1 les puissances paires ; et le premier résultat, qui est divisible par le dénominateur donné, correspond à une puissance égale au nombre de chiffres de la période. »

Exemples.

1°. $D = 11, \quad k = 1.$

Les puissances impaires de 1, augmentées de 1, donnent 2 qui n'est pas divisible par 11 ; il ne peut donc y avoir qu'un nombre pair de chiffres à la période. D'ailleurs la deuxième puissance, c'est-à-dire la première puissance paire, diminuée de 1, donne zéro, nombre divisible par 11 ; donc il il y a deux chiffres à la période.

2°. $D = 21, \quad k = 2.$

On formera le tableau suivant :

Puissances de 2	:	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128...
— impaires + 1	:	3,		9,		33,		129,
— paires — 1	:		3,		15,		63.	

Le premier nombre divisible par 21 est 63, qui correspond à la sixième puissance de 2 ; il y aura donc six chiffres à la période.

3°. $D = 111, \quad k = 11.$

Puissances de 11	:	11,	121,	1331...
— impaires + 1	:	12,		1332,
— paires — 1	:		122....	

1332 étant le premier nombre divisible par 111, on conclut que la période a trois chiffres.

II. $$D = 10k - 1.$$

x étant le quotient $\frac{10^m - 1}{10k - 1}$, posons $x = 10y + 1$; d'où

$$y = \frac{10^{m-1} - k}{10k - 1}.$$

Puis $y = 10z + h$, ce qui donne

$$z = \frac{10^{m-2} - k^2}{10k - 1}, \text{ etc.}$$

La loi étant facile à suivre, on arrivera, que m soit pair pair ou impair, à l'égalité

$$v = \frac{1 - k^m}{10k - 1},$$

et l'on montrera, comme dans le premier paragraphe, que la plus petite valeur de m qui rendra v entier déterminera le nombre des chiffres de la période.

En prenant $k^m - 1$ au lieu de $1 - k^m$, on a donc la règle suivante :

« Former les puissances de k ; la première qui, diminuée de 1, donne un résultat divisible par le dénominateur donné, fait connaître le nombre des chiffres de la période. »

Exemples.

1°. $$D = 9, \quad k = 1.$$

Comme la première puissance de 1, diminuée de 1, donne zéro, on conclut qu'il n'y aura qu'un chiffre périodique.

2°. $$D = 39, \quad k = 4.$$

Puissances de 4 : 4, 16, 64, 256, 1024, 4096....
— dimin. de 1 : 3, 15, 63, 255, 1023, 4095....

4095 étant le premier de ces nombres divisible par 39, et 4095 correspondant à la sixième puissance de 4, on conclut que la période a six chiffres.

III. $$D = 10k \pm 3.$$

En multipliant D par 3, il devient de la forme $10k \pm 1$.

Considérons, au lieu de la fraction $\frac{1}{D}$, la fraction $\frac{1}{3D}$; on pourra déterminer le nombre des chiffres de la période fournie par cette dernière. Or nous allons faire voir qu'en multipliant une fraction par un nombre entier, le produit étant encore une fraction, on ne peut que diminuer le nombre des chiffres de la période sans pouvoir l'augmenter; d'où nous conclurons que la fraction $\frac{1}{D}$, qui est égale à $\frac{1}{3D} \times 3$, ne peut avoir plus de chiffres périodiques que $\frac{1}{3D}$. On aura donc ainsi une limite maximum du nombre cherché. Pour prouver le théorème énoncé, considérons la fraction $\frac{a}{b}$ qui a m chiffres à la période; p étant cette période, on aura

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{10^m} + \frac{p}{10^{2m}} + \ldots = \frac{p}{10^m - 1},$$

d'où

$$\frac{ra}{b} = \frac{rp}{10^m} + \frac{rp}{10^{2m}} + \ldots = \frac{rp}{10^m - 1},$$

ra étant $< b$, rp est $< 10^m$; ce qui montre que $\frac{ra}{b}$, quel que soit le nombre entier r, peut être converti en fraction périodique de m chiffres, ce qui est le théorème qu'il fallait démontrer. Ce théorème était d'ailleurs prouvé avec une plus grande extension dans le cas où r est premier avec b, car nous avons vu que $\frac{C}{D}$ avait le même nombre de chiffres périodiques que $\frac{1}{D}$. On le restreint ici; car dans le cas qui nous occupe, r a, au contraire, un facteur commun avec D, et nous n'avons ainsi qu'une limite maximum.

On peut cependant chercher si $\frac{ra}{b}$ aura moins de chiffres que $\frac{a}{b}$ par la méthode suivante :

Supposons que la période de $\frac{a}{b}$ puisse se décomposer en plusieurs autres quand on la multiplie par r; la nouvelle période ayant m' chiffres, m' sera un diviseur de m, et l'on aura

$$\frac{rp}{10^m - 1} = \frac{p'}{10^{m'} - 1} \quad (p' \text{ étant cette nouvelle période}),$$

$$p' = \frac{rp(10^{m'} - 1)}{10^m - 1}.$$

Il faut donc déterminer la plus petite valeur de m' qui rend p' entier; ce qui sera facile quand p et m seront connus par la réduction de $\frac{a}{b}$ en décimales.

Exemples.

1°. $\quad D = 3, \quad 3D = 9.$

Il ne peut pas y avoir plus d'un chiffre à la période; il y en aura donc un.

2°. $\quad D = 13, \quad 3D = 39.$

Il ne peut pas y avoir plus de six chiffres à la période. Pour chercher s'il peut y en avoir moins, prenons $\frac{1}{39} = 0,025641025641\ldots$, et appliquons la méthode précédente; on aura

$$p = 25641, \quad m = 6, \quad r = 3.$$

Il faut donc que $\dfrac{3.25641(10^{m'} - 1)}{999999}$ soit entier, ou, en simplifiant, que $\dfrac{2839(10^{m'} - 1)}{37037}$ soit entier.

$37037 = 7.11.13.37$, et 2839 n'est divisible par aucun de ces nombres; il faut donc que $10^{m'} - 1$ le soit. Posons $10^{m'} - 1 = 37037.Q$.

Le premier membre étant terminé par un 9, Q doit être terminé par un 7; on posera donc $Q = 10Q' - 3$, et il vient

$$10^{m'} - 1 = 370370Q' - 111111;$$

d'où

$$Q' = \frac{10^{m'-1} + 11111}{37037}.$$

Q' ne peut être égal ni à 0, ni à 1, ni à 2; car $37037.Q'$ doit être terminé par un 1. La plus simple valeur de Q' sera donc $Q' = 3$. On a alors, si cette valeur convient,

$$3 = \frac{10^{m'-1} + 11111}{37037};$$

d'où l'on déduit

$$10^{m'-1} = 100000, \quad m' - 1 = 5, \quad m' = 6.$$

Il n'y a donc pas moins de six chiffres à la période.

3°. $D = 7, \quad 3D = 21.$

La période ne peut pas avoir plus de six chiffres; on verrait, par un calcul semblable au précédent, qu'elle en a, en effet, six.

4°. $D = 37, \quad 3D = 111.$

La période ne peut pas avoir plus de trois chiffres, et l'on verrait, en effet, qu'elle en a trois.

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHERIQUE;

C. IV.

PAR M. C. FOUCAUT (*),
Élève de l'institution Barbet.

Démonstration. Soit ABC le triangle sphérique donné (*voyez Pl. I*). On connaît les trois côtés et l'angle A opposé à l'un d'eux. Joignons les trois sommets au centre de la sphère et entre eux deux à deux. Menons par le point A un plan perpendiculaire à l'arête OA; l'angle rectiligne APQ formé par l'intersection de ce plan avec les faces AOE, AOB sera égal à A. Cela posé, projetons sur ce plan le triangle plan ABC, et soit APQ la projection demandée; nous aurons

$$(1)\qquad \overline{PQ}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2 - 2\,AP\,.\,AQ\cos A.$$

Mais évidemment

$$AQ = \sin b \quad \text{et} \quad AP = \sin c,$$

$$BC = 2\sin\frac{1}{2}a.$$

En projetant QC et PB sur OA, on voit de suite que $QC = 1 - \cos b$, et $PB = 1 - \cos c$; $QC - PB = \cos c - \cos b$. QC et PB auront toujours des valeurs de cette forme, que les angles b et c soient aigus ou obtus. Le trapèze birectangle PQBC donne

$$\overline{BQ}^2 = 4\sin^2\frac{1}{2}a - (\cos c - \cos b)^2.$$

En remplaçant les lignes PQ, AQ, AP par leurs valeurs dans (1), il vient, en observant que $4\sin^2\frac{1}{2}a = 2(1 - \cos a)$,

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A.$$

C. Q. F. T.

(*) *Voir* tome I, page 33.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ;

Par M. J.-N. LEBON (*).

On démontre habituellement dans les cours ce théorème :

I. *Toutes les méthodes d'élimination appliquées à deux équations du premier degré à deux inconnues, conduisent au même résultat.* Et cela, en démontrant cet autre théorème :

II. *Deux équations du premier degré à deux inconnues n'admettent qu'un seul système de solutions.*

On peut néanmoins démontrer directement le premier, et en déduire, si l'on veut, le second. Voici comment :

Théorème I. La méthode des coefficients indéterminés comprend toutes les autres comme cas particuliers.

En effet, le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

peut être remplacé par le système équivalent

$$\begin{cases} max + mby = mc, \\ na'x + nb'y = nc'. \end{cases}$$

Mais si dans ces deux dernières équations, nous posons $n = 1$, $m = \frac{a'}{a}$, nous aurons pour système équivalent au premier,

$$\begin{cases} a'x + \dfrac{a'}{a}by = \dfrac{a'}{a}c \quad \text{ou} \quad a'x = \dfrac{a'}{a}c - \dfrac{a'}{a}by; \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

à la seconde ajoutant en croix la première, et la combinant

(*) Nom anagrammatique.

avec la seconde, nous avons

$$\begin{cases} a'\left(\dfrac{c-by}{a}\right)+b'y=c', \\ a'x+b'y=c', \end{cases}$$

c'est-à-dire le système qu'on obtient immédiatement par la *méthode de substitution*.

Posons $m=\frac{1}{a}$, $n=\frac{1}{a'}$; nous aurons

$$\begin{cases} (1) \quad x+\dfrac{b}{a}y=\dfrac{c}{a}, \\ (2) \quad x+\dfrac{b'}{a'}y=\dfrac{c'}{a'}, \end{cases}$$

et, en retranchant l'une de l'autre,

$$\frac{b}{a}y-\frac{b'}{a'}y=\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'} \quad \text{ou} \quad \frac{c'-b'y}{a'}=\frac{c-by}{a},$$

équation qui, jointe à l'équation (2) multipliée par a, donne le système qu'on obtient immédiatement par *voie de comparaison*.

Enfin, posons $n=b$, $m=b'$; il vient

$$b'ax+b'by=b'c,$$
$$ba'x+bb'y=c'b;$$

d'où l'on tire

$$(ab'-ba')x=cb'-bc'.$$

En posant $n=a$ et $m=a'$, on serait arrivé à

$$(ab'-ba')y=ac'-ca',$$

équation qui, avec la précédente, donne le système qu'on obtient immédiatement par la méthode d'addition et de soustraction. Donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème II. Deux équations du premier degré à deux inconnues ne peuvent être satisfaites que par un seul système de solutions.

QUESTION 31

(t. I, p. 394).

Trouver l'équation d'une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique droite;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

L'équation du troisième degré

$$y^2 + z^2 = 2z(p^2 - q^2x^2),$$

où p et q sont des quantités réelles différentes de zéro, satisfait à la condition énoncée. Car, d'abord, on voit que l'axe des x appartient à la surface, puisque l'équation devient identique en faisant $y = 0$, $z = 0$, sans qu'il soit besoin de particulariser x. Supposons maintenant qu'une autre droite, ayant pour équations

$$y = bx + \beta, \qquad z = cx + \gamma,$$

appartienne, s'il est possible, à la même surface. Par la substitution de ces valeurs de y et de z, l'équation ci-dessus devra être rendue identique, x demeurant indéterminé, et, par suite, les coefficients des diverses puissances de cette variable seront nuls. On trouve ainsi les quatre relations

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 + 2q^2\gamma &= 0,\\ b\beta + c\gamma - p^2c^2 &= 0,\\ \beta^2 + \gamma^2 - 2p^2\gamma &= 0,\\ 2cq^2 &= 0. \end{aligned}$$

La dernière donne $c = 0$, et, par suite, la seconde se réduit à $b\beta = 0$ en faisant $b = 0$; on tire de la première et de la troisième $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, c'est-à-dire le système des données qui particularisent l'axe des x. Si l'on fait $\beta = 0$

il vient, par la troisième relation, $\gamma(\gamma - 2p^2) = 0$. L'hypothèse $\gamma = 0$ donne encore l'axe des x. Il ne reste donc plus qu'à faire $\gamma = 2p^2$, d'où $b^2 + 4p^2q^2 = 0$, équation qui n'a pas de racines réelles. Il n'y a donc aucune autre droite que l'axe des x, qui puisse être tracée sur la surface. (*La fin prochainement.*)

LEMMES

Sur les cercles inscrits à un triangle, et solution algébrique du problème de Malfatti ;

PAR M. C. ADAMS,

Professeur à l'École industrielle de Winterthür (Suisse) [*].

I. Il est d'usage, dans les pays germaniques, que les programmes annuels contiennent toujours quelques Mémoires scientifiques, dus aux professeurs de l'établissement. C'est ainsi que le programme de l'École industrielle de Winterthür pour l'année 1848 renferme : 1° le problème de Malfatti, résolu algébriquement par M. C. Adams ; 2° Rapport sur les études de 1847 à 1848. On voit, par ce Rapport, qu'on enseigne dans cet Institut *industriel*, les principaux théorèmes concernant les transversales, etc., tandis que dans nos institutions universitaires, dans nos colléges, ces mêmes théories, fondement de la géométrie moderne, sont enseignées quelquefois, mais comme œuvres surérogatoires non exigibles dans les examens, et, par conséquent, non apprises des élèves. Aussi, les découvertes géométriques de nos Poncelet, de nos Chasles, sont moins répandues en France qu'à l'étranger. Ceci soit dit en passant ; quant à la solution de M. Adams, c'est la plus

---

(*) Programm der Gewerbschule in Winterthür für das Schuljahr 1848 ; in-4° de 26 pages, 1 planche. Winterthür, 1845.

complète que je sache, du célèbre problème. Publiée déjà en 1846, l'édition actuelle est plus générale et embrasse tous les cas. Le travail est précédé de douze lemmes, que nous nous bornerons à énoncer. La plupart sont connus et déjà consignés dans ce journal. Faisant usage de ce lemme, nous donnerons la solution plus tard.

II. *Notation.* ABC le triangle; $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$;
$s = \frac{1}{2}$ périmètre; $s_1 = s - a$; $s_2 = s - b$; $s_3 = s - c$;
α, β, γ, distances du centre du cercle inscrit aux sommets A, B, C; r, rayon du cercle inscrit;
S, centre du cercle inscrit; S_1, S_2, S_3, centres des cercles ex-inscrits; O, point d'intersection des trois hauteurs;
r_1, r_2, r_3, rayons des cercles ex-inscrits S_1, S_2, S_3;
σ_1, σ_2, σ_3, quantités analogues à s_1, s_2, s_3, mais par rapport au triangle $S_1S_2S_3$;
ρ_1, ρ_2, ρ_3, rayons des cercles ex-inscrits au triangle $S_1S_2S_3$; et ρ rayon du cercle inscrit;
R, rayon du cercle circonscrit au triangle ABC;
R_1, rayon du cercle inscrit au triangle formé avec les trois hauteurs du triangle ABC.

III. *Lemme.*
1. $rr_1 = s_2s_3$; $rr_2 = s_1s_3$; $rr_3 = s_1s_2$;
2. $abc = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$;
3. $bcs_1 = \alpha^2 s$; $acs_2 = \beta^2 s$; $abs_3 = \gamma^2 s$;
4. $\beta\gamma s_1 = a\alpha r$; $\alpha\gamma s_2 = b\beta r$; $\alpha\beta s_3 = c\gamma r$;
5. $\alpha^2 s_2 s_3 = bcr^2$; $\beta^2 s_1 s_3 = acr^2$; $\gamma^2 s_1 s_2 = abr^2$;
6. $ab - (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 2\rho\rho_3$,
   $ac - (\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = 2r\rho_2$,
   $bc - (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 2r_1\rho$;
7. $(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) - bc = 2\rho r$;
8. $AO + 2R = r_2 + r_3$;
9. $2RR_1 = s_1^2 - (2R - r_1)^2$;
10. $2RR_1 = s^2 - (2R + r)^2$;
11. $as_1 + bs_2 + as_3 = bs$;
12. $a^2(r_1 - r) = 4Rr^2$.

PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE;

PAR M. DE PISTORIS,
Capitaine d'artillerie.

Ces propriétés sont connues depuis longtemps et remontent même au siècle d'Apollonius. L'ensemble est instructif, et nous les énonçons, non pour en obtenir la trop facile démonstration, mais comme utiles sujets d'exercice. Plusieurs sont déjà démontrées dans les *Nouvelles Annales*.

1°. Le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque est une quantité constante.

2°. Le produit des distances d'un même foyer à deux tangentes parallèles est constant.

3°. Le produit des rayons vecteurs aboutissant à un point quelconque de la courbe est égal au carré du demi-diamètre conjugué à celui qui passe par le point quelconque.

4°. Le produit d'un diamètre, par sa distance à la tangente parallèle, est constant.

5°. La somme inverse des carrés des distances du centre à deux tangentes conjuguées est constante.

6°. Le carré de la distance du centre à une tangente quelconque est égal à la somme des produits des distances des extrémités des axes principaux à cette même tangente.

7°. Le produit des segments d'une tangente quelconque, compris entre le point de contact et les tangentes aux extrémités du grand axe, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente quelconque.

8°. Si par deux points conjugués de l'ellipse, on mène des tangentes, la somme des produits des segments compris entre les points de contact et les tangentes aux extrémités du grand axe est constante.

9°. La somme des produits des distances des foyers à deux normales conjuguées est constante.

NOTE SUR UN THÉORÈME ÉNONCÉ
(t. VII, p. 334),

PAR M. DE PISTORIS,
Capitaine d'artillerie.

Ce théorème me paraît faux. Il est, en effet, contradictoire avec le théorème de M. Joachimsthal (t. VI, p. 149), démontré par M. de Perrodil (t. VI, p. 367); d'ailleurs, le centre de l'ellipse satisfait à la condition $ap = bq$, et les quatre sommets, pieds des normales, ne sont pas cependant sur une même circonférence.

SUR UNE INSCRIPTION GRECQUE;

PAR M. A.-J.-H. V.

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre : Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω.

Telle est l'inscription que l'on dit avoir été placée par Platon sur le fronton de l'Académie. Du reste, il est très-difficile de dire sur quelle autorité cette tradition s'est établie : car aucun écrivain véritablement ancien ne mentionne l'inscription, connue seulement d'après le rapport de quelques auteurs byzantins. Le moins récent d'entre eux est Michel Psellus, célèbre philosophe, qui naquit en l'an 1020. Cet écrivain cite l'inscription de Platon dans une Lettre adressée à l'un des empereurs qui ont porté le nom d'Andronic, lequel doit être Michel Andronic, promu à l'empire en 1067. L'empereur avait demandé à Psellus de lui exposer le but de la géométrie. C'est dans la réponse, éditée pour la première fois par M. Boissonade, à la suite d'un autre écrit de Psellus sur la puissance des démons, que cet écrivain mentionne l'inscription de l'Académie.

Les notes dont notre illustre philologue a enrichi son édition, nous fournissent en outre l'indication des autres auteurs qui ont rapporté la même inscription.

Ainsi, Jean Tzetzès, postérieur d'un siècle à Psellus, la reproduit dans ses Histoires (chiliade VIII, h. 249), en y changeant seulement l'ordre des mots, Μηδ. ε. ἀγ. dans le titre, et Μ. ἀ. ε. dans le texte. Il la commente en disant que, dans l'intention de Platon, l'inscription avait pour but d'éloigner de l'Académie tout homme dont la conduite s'écartait des principes de l'équité: parce que la géométrie, *c'est l'égalité et la justice :* Ἰσότης γὰρ καὶ δίκαιόν ἐστι γεωμετρία.

Nous retrouvons la même inscription dans un Recueil de *proverbes*, réunis par Michel Apostolius vers le milieu du XV^e siècle (*), et dans un autre Recueil plus complet que le premier, composé par Arsénius, fils du précédent auteur, après la mort de son père, sous le titre de : Ἰωνιά, *violetum, bouquet* ou *guirlande de violettes* (**). Ces deux auteurs commentent l'inscription dans le même sens moral que Tzetzès, mais en termes un peu différents.

Un autre Recueil de *proverbes métriques,* intitulé : Στρωματεύς, c'est-à-dire *bigarrure, mosaïque,* reproduit la même inscription sous forme de vers iambique :

Ἀγεωμέτρητος ἐνθάδ' οὐδεὶς εἰσίτω.

(*) *Mich. Apostolii Parœmiæ;* cent. I, n° 95.

(**) *Arsenii Violetum,* p. 16.

Dans ces termes, il y a un solécisme, parce que l'idée de prohibition demande μή et non pas οὐ. Si cette faute est motivée ici par l'exigence de la forme métrique, elle est inexcusable dans le Trésor d'Henri Étienne, où, par circonstance aggravante, l'inscription est attribuée à Pythagore, on ne sait sur quelle autorité.

On peut faire le même reproche d'incorrection à Érasme qui, citant l'inscription dans ses Adages (chil. III, cent. III, nº 60) (*), la donne aussi en ces termes : Α'γ. οὐδεὶς εἰσίτω. Il est remarquable qu'Érasme, qui indique ordinairement la source de ses proverbes, quand leur origine est connue, ne cite ici aucun auteur; seulement il renvoie à Aristide (*in Themistocle* et *in Pericle*) relativement à l'assimilation indiquée plus haut entre l'égalité et la géométrie.

NOTE SUR LE THÉORÈME ÉNONCÉ

(t. VII, p. 458),

PAR M. J. COUPY,

Professeur à l'École militaire de la Flèche.

Depuis longtemps je donne ce théorème à mes élèves de cette manière : On sait qu'on a, tant pour les surfaces totales que pour les volumes, les rapports suivants :

$$\text{Sphère : cylindre} \quad :: 4 : 6,$$
$$\text{Sphère : cône équilatéral} \quad :: 4 : 9;$$

donc

$$\text{sphère : cylindre : cône équilatéral} \quad :: 4 : 6 : 9.$$

Or, 6 est moyen proportionnel entre 4 et 9, donc, etc.; le théorème ne me semble pas nouveau.

(*) *Voir* aussi l'Épitome du même auteur, p. 523; et les *Explicationes* de Ferrand, I, p. 18, et II, p. 184.

Note. Les deux rapports appartiennent à Archimède; la remarque de la moyenne proportionnalité est faite, je crois, dans Viète. C'est à vérifier. Tm.

SUR LES POLYGONES ET LES POLYÈDRES ÉTOILÉS, POLYGONES FUNICULAIRES;

D'APRÈS M. POINSOT.

1. Problème. Les n nombres naturels $1, 2, 3, \ldots, n$ sont écrits en ordre autour de la circonférence d'un cercle; du point 1 on va au point p, de ce point à celui dont la place est marquée par $p + p - 1$, de celui-ci à $p + 2(p - 1)$, de là à $p + 3(p - 1)$, et ainsi de suite: par combien de points aura-t-on passé quand on sera revenu à 1, et combien de fois aura-t-on fait le tour de la circonférence?

Solution. x et y désignant des nombres positifs entiers, on sera évidemment de retour en 1 lorsqu'on aura

$$p + x(p - 1) = ny + 1, \quad \text{d'où} \quad ny = (p - 1)(x + 1),$$

r et s étant les quotients respectifs de n et $p - 1$ par leur plus grand commun diviseur; on a

$$ry = s(x + 1), \quad \text{d'où} \quad y = s, \; x = r - 1;$$

ainsi on passe par r points, le premier compris. Et en supposant que ce premier point aille successivement d'un point au suivant, il aura parcouru s fois la circonférence, en revenant à sa première position.

Corollaire. Si $p - 1$ et n sont premiers entre eux, alors $r = n$, $s = p - 1$; dans ce cas, on passe par tous les points, et le premier se mouvant parcourt $p - 1$ fois la circonférence. Pour connaître son avant-dernière place, il faut faire $x = n - 2$; substituant dans $p + x(p - 1)$, il vient $np - n - p + 2$: ainsi l'avant-dernier point est $2 - p$ ou bien $n + 2 - p$; ce qui est évident à priori. Donc, allant de 1 à p ou bien en allant de 1 à $n + 2 - p$, et prenant toujours les points de p en p, on parcourt le même chemin, mais en sens opposé.

2. *Théorème.* Une circonférence étant divisée en n parties égales, et désignant les points de division par les nombres 1, 2, 3,..., n, le nombre $p - 1$ étant premier à n, si l'on joint par une corde le point 1 au point p, celui-ci au point $2p - 1$, celui-ci au point $3p - 2$, et ainsi de suite; après avoir parcouru $p - 1$ fois la circonférence, on revient au point 1, et on a un polygone *fermé* de n côtés égaux et de n angles égaux.

Ce théorème est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Observation. Par *angle* de polygone, il faut entendre celui que forment deux côtés *consécutifs* décrits par le mouvement continu du point de départ 1; c'est l'angle qui renferme le centre du cercle. Lorsque $p = 2$, on obtient les polygones ordinaires; lorsque $p > 2$, on a les polygones *étoilés:* ainsi il existe donc autant de polygones, décrits dans les *deux sens,* qu'il existe de nombres plus petits que n et premiers à n, et la moitié de ce nombre, en ne prenant que les polygones différents; les polygones étoiles n'ont pas d'angles rentrants, mais sont coupés par une droite en plus de deux points. Lorsque les divisions de la circonférence sont égales, les polygones sont réguliers, c'est-à-dire ont les côtés égaux et les angles égaux; le polygone d'un nombre de côtés n, et formé en allant de 1 à p, est dit polygone de l'*espèce* $p - 1$.

Applications.

n	Nombres de polygones ou *espèces.*				
3	1,				
4	1,				
5	2, savoir : de	1 à 2,	1 à 3,		1re et 2e espèce ;
6	1,				
7	3,	1 à 2,	1 à 3,	1 à 4,	1re, 2e et 3e espèce ;
8	2,	1 à 2,	1 à 4,		1re et 3e espèce ;
9	3,	1 à 2,	1 à 3,	1 à 5,	1re, 2e et 4e espèce ;
10	2,	1 à 2,	1 à 4,		1re et 3e espèce.

3. *Théorème.* Même construction que dans le théorème précédent ; la somme des angles du polygone est égale à $\pi[n - 2(p - 1)]$.

Démonstration. Supposons toujours le polygone décrit par le point 1 d'un mouvement continu ; prolongeons chaque côté, dans le sens du mouvement. A chaque sommet on a un angle intérieur et un angle extérieur ; la somme de tous ces angles, intérieurs et extérieurs, est égale à $n\pi$. Le point 1 a décrit $p - 1$ fois la circonférence ; donc la somme de tous les angles extérieurs seulement est égale à $2(p - 1)\pi$: la somme des angles intérieurs est donc $\pi[n - 2(p - 1)]$.

Observation. Lorsque $p = 2$, on a $\pi(n - 2)$; c'est la règle connue.

Corollaire I. Lorsque $n = 2(p - 1) + 1$, la somme des angles est égale, comme dans le triangle, à deux angles droits ; cela n'est donc possible que dans les polygones d'un nombre impair de côtés. Soit $n = 2q + 1$; il est évident que q est premier avec n. On peut donc faire $p = q + 1$; donc, allant de 1 à $q + 1$, on obtient un polygone dont la somme des angles est égale à deux droits : ainsi pour $n = 5$, $q = 2$. Dans l'espèce de 1 à 3, la somme des angles est égale à deux droits ; pour $n = 7$, c'est l'espèce 1 à 4.

Corollaire. Si $n=2(p+1)+2$, la somme des angles est égale, comme dans le quadrilatère, à quatre droits; il faut donc que n soit pair. Faisons $n=2q$, d'où $q=p$; il faut donc que $q-1$ et $2q$ soient premiers, ce qui exige que q soit pair. Que l'on ait $n=2^m q$; q est impair et $m>1$.

Corollaire II. Dans un polygone régulier, l'angle au sommet est égal à $\frac{\pi}{n}[n-2(p-1)]$.

4. PROBLÈME. Un fil fermé passe à travers n anneaux, entre lesquels il peut glisser; les anneaux sont tirés par des forces égales divisant l'espace angulaire en parties égales. Le fil, dans le cas de l'équilibre, formera un polygone régulier de n côtés de toute espèce: on demande la grandeur de la tension.

Solution. Représentons chaque force par l'unité; l'angle du polygone est $\frac{\pi}{n}[n-2(p-1)]$, et la moitié de cet angle est $\frac{\pi}{2n}[n-2(p-1)]$. Décomposant la force, suivant les côtés du polygone, on trouve facilement que la tension est égale à $\frac{1}{2}\,\text{séc}\,\frac{\pi}{2n}[n-2(p-1)]$. La tension la plus forte répond à $p=2$, c'est le polygone ordinaire; la moindre tension répond à $p=\frac{n-1}{2}$.

5. Nous avons supposé jusqu'ici, pour faciliter l'intelligence, que les n points sont situés sur une circonférence; mais il est évident que les mêmes conséquences subsistent pour des points distribués sur un plan d'une manière quelconque. Mais il peut arriver que tous les polygones aient des angles rentrants, angles plus grands que deux angles droits.

6. Menant une droite à travers un polygone de l'es-

pèce p, il est évident que le point 1, en parcourant $p-1$ fois la circonférence, rencontre cette droite $2(p-1)$ fois; donc une droite coupe les n côtés du polygone de l'espèce p en $2(p-1)$ points.

7. *Lemme.* Le nombre triangulaire $\frac{q(q+1)}{2}$ est premier avec $2q+1$, car le plus grand commun diviseur est le même qu'entre les quantités $q+1$ et $2q+1$, ou entre q et $q+1$; donc, etc.

8. Lemme. — *Théorème.* r étant premier avec $2q+1$, les $2q+1$ premiers termes de la progression arithmétique, ayant pour premier terme r, et pour raison $\frac{q(q+1)}{2}$, donnent, dans un ordre quelconque, pour résidus de la division des termes par $2q+1$, les nombres 1, 2, 3,..., $2q+1$, et le $2q+2^{ième}$ terme est r.

Démonstration. Pour que le résidu r reparaisse, il faut avoir, x et y étant entiers, la congruence

$$r+\frac{xq(q+1)}{2}=(2q+1)y+r,$$

d'où

$$\frac{xq(q+1)}{2}=(2q+1)y;$$

or $2q+1$ et $\frac{q(q+1)}{2}$ sont premiers entre eux; donc $y=\frac{q(q+1)}{2}$ et $x=2q+1$; donc r ne reparaît qu'en $2q+2^{ième}$ terme, et ainsi des autres. C. Q. F. D.

9. Problème. $2q+1$ points sont distribués dans l'espace; partant de l'un de ces points, décrire d'un mouvement continu les $q(2q+1)$ droites qu'on obtient en réunissant ces points deux à deux, et sans décrire deux fois la même droite.

Solution. Désignons les points par les nombres 1, 2.

3,..., $2q+1$, formons la série des nombres $\frac{n^2+n}{2}+1$, en donnant à n toutes les valeurs depuis o jusqu'à q : on aura la suite 1, 2, 4, 7, 10,..., $\frac{q(q+1)}{2}+1$. Ainsi on ira de 1 à 2; de 2 à 4; de 4 à 7,...; de $\frac{q(q-1)}{2}+1$ à $\frac{q(q+1)}{2}+1$; et tous ces nombres sont inégaux. A chaque terme de la première série on ajoute $\frac{q(q+1)}{2}$; on aura $\frac{q(q+1)}{2}+1$; $\frac{q(q+1)}{2}+2$,...; $q(q+1)+1$; on ira de $\frac{q(q+1)}{2}+1$ à $\frac{q(q+1)}{2}+2$, etc.; et les q lignes de cette seconde série sont différentes des q lignes de la première série. On ajoute encore $\frac{q(q+1)}{2}$ à chaque terme de cette deuxième série pour obtenir une troisième série donnant encore q lignes différentes des $2q$ lignes déjà obtenues. En continuant, on forme $2q+1$ séries, dont chacune fournit q lignes, et en tout $(2q+1)q$ lignes différentes; la $2q+2^{ième}$ série reproduit la première $(2q)$; donc les $q(2q+1)$ lignes sont décrites d'un mouvement continu.

Observation. On peut donc envelopper, avec un seul fil et sans duplicature, les côtés et toutes les diagonales d'un polygone d'un nombre impair de côtés, et les arêtes et toutes les diagonales d'un polyèdre d'un nombre impair de sommets. Il est donc possible de décrire d'un seul trait de plume les côtés et les diagonales d'un polygone d'un nombre impair de côtés.

10. Lorsque le nombre de points est pair, le problème précédent devient impossible. En effet, soient les points 1, 2, 3,..., $2q$ en nombre pair; pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse écrire sur une seule ligne toutes les $q(2q-1)$ combinaisons binaires, de telle sorte que le nombre final d'une combinaison soit le nombre initial de la combinaison suivante, et que la ligne commence et finisse par le même nombre : chaque nombre, 1 par exemple, se trouve donc écrit un nombre pair de fois, ou, ce qui revient au même, il part un nombre pair de lignes du sommet 1, chose impossible lorsque le nombre de points est pair.

Ainsi il est impossible de décrire d'un seul trait les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère.

La détermination du *nombre* de solutions possibles pour un nombre impair de points est un problème dont la solution est à désirer. Je l'ai proposé à plusieurs géomètres distingués, sans rien obtenir. Le jeu du domino présente une question de ce genre : de combien de manières peut-on placer sur une seule ligne tous les dominos, en observant la loi du jeu? On peut supposer qu'on ait mis les *doubles* de côté. (*La fin prochainement.*)

PROGRAMME RÉTROGRADE D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1849.

La géographie et la chronologie sont les deux yeux de l'histoire; on peut dire, avec plus de raison encore, que *le nombre et la ligne*, autrement l'algèbre et la géométrie, sont les deux yeux des mathématiques. Vouloir supprimer l'un d'eux, serait éborgner la science. Pourquoi ne pas se servir de ces deux admirables instruments, qu'une bienfaisante providence a mis à notre disposition pour scruter les secrets de l'univers? C'est ce qu'on comprend très-bien dans les universités anglaises, où les deux sciences sont enseignées avec le même soin, et cultivées avec la même ardeur. En France, une tendance exclusive semble se manifester vers la règle et le compas, et un éloignement des formules algébriques; c'est ainsi que nous voyons dans les programmes de l'illustre École, disparaître successivement quelques théories analytiques, remplacées par quelques travaux graphiques. Cette année même, on a supprimé l'élimination entre les équations de degrés supérieurs au *second* (*Moniteur*, 26 janvier 1849), et l'on a augmenté, par contre, le nombre des épures exigées. En admettant cette suppression, comment sera-t-il possible d'exposer la théorie des racines égales, la recherche de l'équation aux carrés des différences, et tant d'autres opérations qui sont pourtant conservées? Je ne me charge pas d'expliquer cette étrange contradiction. Le programme étant suffisamment mauvais, pourquoi l'empirer? Il n'y a qu'un moyen bien simple d'abréger le programme d'analyse; il consiste à l'augmenter. Cette assertion n'a qu'une apparence paradoxale. Admettez la théorie des fonctions symétriques dont l'absence est une déplorable lacune, la théorie générale des dérivées, le symbolisme infinitésimal, et tout se facilite, tout s'abrége, et vous aurez gagné le plus précieux de tous les biens, qu'on nomme le temps, étoffe dont la vie est faite, comme s'exprime Franklin. Les élèves, munis de connaissances nécessaires en entrant à l'école, n'en sortiront plus ignorant même les *fonctions elliptiques*, aussi indispensables que naguère les logarithmes; n'en sortiront plus sans aucune notion historique, n'ayant jamais entendu parler des Gauss, des Jacobi, des Hamilton, des Roberts, et pouvant croire, d'une foi sincère, que tout ce qu'on leur enseigne est issu de la tête du professeur, comme Minerve de celle de Jupiter. Signaler un mauvais état de choses, n'est pas le détruire, il s'en faut; mais on remplit un devoir.

FORMULES GÉNÉRALES DE WARING

Pour trouver la valeur des fonctions symétriques entières et rationnelles des racines d'une équation algébrique (*).

Sommes des puissances entières positives des racines.

1. Soit donnée l'équation

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + (-1)^m A_m = 0,$$
$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m),$$

n étant un nombre entier positif; on a, d'après un symbole connu,

$$S_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_m^n.$$

Il s'agit de trouver S_n en fonction des coefficients de l'équation.

Ordonnons cette fonction par rapport aux puissances décroissantes de A_1; il vient

$$S_n = A_1^n + T_1 A_1^{n-1} + T_2 A_1^{n-2} + \ldots + T_p A_1^{n-p} + \ldots + T_n.$$

Loi de formation.

Le terme général T_p est un polynôme; le terme général de ce polynôme est représenté par

$$R . A_r^\rho A_s^\sigma A_t^\tau \ldots,$$

où $r, s, t, \ldots$, indices inférieurs, sont des nombres entiers plus grands que 1; et $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ des exposants positifs entiers, zéro compris. Pour trouver ces nombres, on résout l'équation indéterminée

$$r\rho + s\sigma + t\tau = \ldots = p,$$

et ayant soin de ne négliger aucune solution.

(*) *Meditationes algebricæ*. Edit. tertia; 1782, p. 1 et 8.

R est un coefficient numérique; les indices et les exposants étant connus, on fait

$$\rho + \sigma + \tau + \ldots = u;$$

et l'on a, abstraction faite de tout signe,

$$R = \frac{n[n-p+1]}{[\rho][\sigma][\tau]\ldots[n-p+u]};$$

les crochets désignent des produits continuels. Si p et u sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, le signe de R est positif; et négatif dans l'autre cas.

D'après cette loi, on trouve

$$T_1 = 0;\ T_2 = -nA_2;\ T_3 = nA_3;\ T_4 = -nA_4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}A_2^2;$$

$$T_5 = nA_5 - n.n-4\,A_2A_3;\ T_6 = -nA_6 + n.n-5.A_2A_4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-5}{2}A_3^2,$$

$$T_7 = nA_7 - n.n-6\,A_2A_5 - n.n-6\,A_3A_4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-6}{2}\cdot\frac{n-5}{1}A_2^2A_3,$$

$$T_8 = -nA_8.n.n-7\,A_6A_2 + n.n-7\,A_5A_3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-7}{2}A_4^2$$

$$-n\cdot\frac{n-7}{1}\cdot\frac{n-6}{2}A_2^2A_4 - n.n-7\cdot\frac{n-6}{2}A_3^2A_2$$

$$+n\cdot\frac{n-7}{2}\cdot\frac{n-6}{3}\cdot\frac{n-5}{4}A_2^4.$$

Waring ne dit pas comment il est parvenu à cette formule; mais il démontre que si elle est vraie pour n, elle est vraie aussi pour $n+1$: d'ailleurs, les sommes des racines forment une série récurrente à échelle de relation connue, dont on sait toujours trouver le terme général.

Fonction symétrique entière des racines en fonction des sommes des racines.

2. Même équation que ci-dessus, et représentons la somme à chercher par $\Sigma x_1^a x_2^b \ldots x_n^t$, n des m racines entrant dans chaque terme; a, b, c,.... d sont des expo-

sants entiers positifs et *inégaux*. Voici la notation de Waring :

$$s_a = x_1^a + x_2^a + \dots + a_n^a,$$
$$s_b = x_1^b + x_2^b + \dots + x_n^b,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A = s_a \,.\, s_b \,.\, s_c \dots s_l,$$
$$B = A\left[\frac{s_{a+b}}{s_a \,.\, s_b} + \frac{s_{a+c}}{s_a \,.\, s_c} + \dots + \frac{s_{b+c}}{s_b \,.\, s_c} + \dots\right],$$
$$C = A\left[\frac{s_{a+b+c}}{s_a \,.\, s_b \,.\, s_c} + \frac{s_{a+b+d}}{s_a \,.\, s_b \,.\, s_d} + \dots\right],$$
$$D = A\left[\frac{s_{a+b+c+d}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d} + \dots\right],$$
$$BB = A\left[\frac{s_{a+b} \,.\, s_{c+d}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d} + \dots\right],$$
$$E = A\left[\frac{s_{a+b+c+d+e}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d\, s_e} + \dots\right],$$
$$BC = A\left[\frac{s_{a+b+c} \,.\, s_{d+e}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d\, s_e}\right],$$
$$F = A\left[\frac{s_{a+b+c+d+e+f}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d\, s_e\, s_f} + \dots\right].$$

Dans cette relation, B, C, D, E présentent des sommes à 2, 3, 4, 5 exposants s_{a+b}, s_{a+b+c}, $s_{a+b+c+d}$, $s_{a+b+c+d+e}$, etc. Mais 4 se décompose en $2+2$: c'est à quoi répond BB, où l'on trouve $s_{a+b}\, s_{c+d}$; 5 se décompose en $2+3$, on a ainsi BC ; de même $6 = 2+4 = 3+3$; ce qui donne BD, CC et BBB, ou $s_{a+b}\, s_{c+d+e+f}$ et $s_{a+b+c}\, s_{d+e+f}$ et $s_{a+b}\, s_{c+d}\, s_{e+f}$. Cela posé, on a

$$\begin{aligned}
\Sigma x_1^a x_2^b \dots x_n^l = A - B + 1.2.C - 1.2.3.D + 1.2.3.4.E, \\
1.1 \quad BB - 1.2. \qquad BC, \\
-1.2.3.4.5.F + 1.2.3\,4.5.6.G, \\
-1.2 \qquad BD - 1.1.2.3.4.BE, \\
1.2\;\;1.2 \quad CC - 1.2\;\;1.2.3\;\;CD, \\
1\;\;1.1. \quad BBB + 1.1\;\;1\;\;1.2.BBC.
\end{aligned}$$

Loi de formation.

a. Chaque lettre apporte un coefficient et un signe déterminés, dans cet ordre. Ainsi :

B, -1 ; C, $+1.2$; D, $-1.2.3$; E, $+1.2.3.4$; F, $-1.2.3.4.5$, et ainsi de suite.

b. Les termes de même dimension sont dans la même colonne verticale. Waring démontre encore que si la formule existe pour n racines, elle existe aussi pour $n+1$ racines.

Lorsque des exposants deviennent égaux, il faut diviser les termes A, B, C, D, etc., par les produits continuels convenables.

BIBLIOGRAPHIE.

Mécanique moléculaire.

L'année quadratique 1849 commence sous d'heureux auspices, *géométriques* bien entendu. Dans le premier numéro des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome XXVIII, page 2, on lit : *Je me propose de publier bientôt un Traité de mécanique moléculaire.* Cette promesse exauce les vœux de tous ceux qui aspirent à étudier les beaux et nombreux théorèmes dont le plus illustre de nos analystes a enrichi la physique mathématique ; théorèmes qui, dispersés en plusieurs recueils, sont pénibles à suivre et souvent même inaccessibles. L'ouvrage exposera les principes généraux, et les applications à la dynamique de l'éther, de la lumière, du fluide électrique, etc. Puissions-nous bientôt jouir de ce monument, digne du génie d'un géomètre dont notre pays s'enorgueillit à si juste titre !

Question. Pourquoi l'auteur de tant d'ouvrages didactiques, d'une célébrité européenne, qu'Abel étudiait avec prédilection et qui ont probablement développé cette intelligence créatrice; pourquoi l'illustre professeur ne figure-t-il jamais parmi ces Commissions dites d'enseignement, nombreuses comme des bataillons, que chaque jour voit naître *con brio* et s'en aller *morendo*?

Réponse. Ces Commissions sont chargées et seront éternellement chargées de marier l'empire universitaire avec l'autorité ecclésiastique, avec la liberté de penser et d'empêcher que l'un des conjoints ne dévore les deux autres. Dès lors, elles n'ont à s'occuper qu'à élever des digues, construire des parapets, qu'à créer des hiérarchies, des attributions, des honneurs, des honoraires, etc.; choses essentielles auprès desquelles l'enseignement est un insignifiant accessoire. On conçoit que de telles Commissions d'enseignement peuvent fort bien se passer de l'homme le plus éminent de l'enseignement mathématique. Récemment, on a même exclu les naturalistes, les chimistes, les physiciens, les géomètres, en général, les hommes éminents dans les carrières scientifiques, et on a réuni une Commission polychrome, formée uniquement d'hommes distingués dans la politique. C'est très-ingénieux.

Éléments d'arithmétique suivis de la théorie des logarithmes; par *E. Lionnet*, professeur de mathématiques au lycée Descartes. Deuxième édition, 1848.

Nous n'avons rien à changer au compte détaillé de ce bon travail (t. VII, p. 439); la nouvelle édition est améliorée, c'est-à-dire que l'ouvrage a été raccourci. L'auteur a fait disparaître ce qui concerne les divers systèmes de numération. Ceci et d'autres parties plus relevées font partie d'un autre ouvrage qui paraîtra incessamment sous ce titre : *Compléments d'arithmétique*.

EXTRAIT DES EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE;

PAR M. LEBESGUE.

I. PROBLÈME. *Résoudre en nombres entiers l'équation multiple*

$$(1) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots,$$

a, b, c,..., étant des nombres entiers donnés.

Nota. Pour abréger, nous appellerons *équation multiple* une suite d'égalités telles que l'équation (1); $\frac{x}{a}$ sera le premier membre, $\frac{y}{b}$ le deuxième, $\frac{z}{c}$ le troisième, et ainsi de suite.

Nous représenterons par $D(ab)$ le plus grand diviseur commun aux nombres a et b, de même par $D(abc)$ le plus grand diviseur commun aux nombres a, b, c; de sorte qu'on aura

$$D(abc) = D[D(ab)c], \quad D(abcd) = D[D(abc)d], \ldots.$$

Ceci posé, la résolution générale du système (1) est donnée par le système

$$(2) \qquad \frac{U}{D(abc\ldots)} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \ldots;$$

d'où résulte

$$(3) \quad x = \frac{a}{D(abc\ldots)}\cdot U, \quad y = \frac{b}{D(abc\ldots)}\cdot U, \quad z = \frac{c}{D(abc\ldots)}\cdot U, \ldots,$$

valeurs dans lesquelles U est un entier indéterminé.

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'en égalant les deux premiers membres de l'équation (1), on a $bx = ay$

ou bien

$$\frac{b}{D(ab)} \cdot x = \frac{a}{D(ab)} y;$$

et comme $\frac{b}{D(ab)}$, $\frac{a}{D(ab)}$ sont premiers entre eux, l'entier x devra être divisible par $\frac{a}{D(ab)}$: on fera donc $x = u \cdot \frac{a}{D(ab)}$; par conséquent, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{u}{D(ab)}$.

Égalant $\frac{u}{D(ab)}$ au troisième membre $\frac{z}{c}$ de l'équation (1), on aura semblablement

$$\frac{u}{D(ab)} = \frac{z}{c} = \frac{v}{D(abc)}.$$

Continuant de même, on aura finalement le système (2), et, par suite, le système (3).

Applications.

II. Problème. Soient

(1) $$\frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{a}, \ldots$$

des fractions de même dénominateur, et soit proposé de trouver tous les systèmes de fractions équivalentes aussi réduites au même dénominateur, savoir :

(2) $$\frac{y}{x}, \quad \frac{z}{x}, \quad \frac{t}{x}, \ldots$$

Solution. On tire de là

(3) $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d} \ldots$$

La valeur commune étant $\frac{U}{D(abcd\ldots)}$, la solution complète sera

$$x = \frac{a}{D(abcd...)} . U, \quad y = \frac{b}{D(abcd...)} . U, \ldots.$$

S'il arrive que a, b, c, d,..., n'aient pas de diviseur commun, $D(abcd...) = 1$, et $x = a.U$, $y = b.U$, $z = c.U$....

En d'autres termes, pour obtenir le système (2), il faut multiplier tous les termes des fractions (1) par un même nombre U. Ce théorème est assez simple pour entrer dans l'arithmétique vulgaire.

III. Les deux équations

$$aA + bB + cC = 0,$$
$$aA' + bB' + cC' = 0,$$

donnent, par la résolution,

$$\frac{BC' - B'C}{a} = \frac{CA' - C'A}{b} = \frac{AB' - A'B}{c};$$

de sorte que si l'on pose $m = D(abc)$, on aura

$$BC' - B'C = \frac{a}{m} . U,$$

$$CA' - C'A = \frac{b}{m} . U,$$

$$AB' - A'B = \frac{c}{m} . U.$$

Ces équations sont utiles dans différentes recherches sur les nombres; en voici une application.

IV. Si la fonction

$ax^2 + 2bxy + cy^2$ de déterminant $b^2 - ac = d$

se transforme en la fonction

$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2$ de déterminant $B^2 - AC = D$,

par deux substitutions

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$
$$x = \alpha' x' + \beta' y', \quad y = \gamma' x' + \delta' y',$$

on aura les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ \mathrm{B} = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ \mathrm{C} = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2; \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} = a\alpha'^2 + 2b\alpha'\gamma' + c\gamma'^2, \\ \mathrm{B} = a\alpha'\beta' + b(\alpha'\delta' + \beta'\gamma') + c\gamma'\delta', \\ \mathrm{C} = a\beta'^2 + 2b\beta'\delta' + c\delta'^2. \end{array}\right.$$

De ces deux systèmes, on déduit

$$\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (b^2 - ac)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')^2.$$

On suppose que D n'est pas nul; il faut donc que l'on ait

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \pm 1.$$

Nous prendrons ensemble, soient les signes supérieurs $+$, soient les signes inférieurs $-$, et nous dirons que les deux transformations sont semblables.

Cela posé, les systèmes (1), (2) donneront cet autre système :

$$\begin{gathered} a(\alpha^2 - \alpha'^2) + 2b(\alpha\gamma - \alpha'\gamma') + c(\gamma^2 - \gamma'^2) = 0, \\ a(\alpha\beta - \alpha'\beta') + b(\alpha\delta + \beta\gamma - \alpha'\delta' - \beta'\gamma') + c(\gamma\delta - \gamma'\delta') = 0, \\ a(\beta^2 - \beta'^2) + 2b(\beta\delta - \beta'\delta') + c(\delta^2 - \delta'^2) = 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma'. \end{gathered}$$

La quatrième équation donnant

$$\alpha\delta - \alpha'\delta' = \beta\gamma - \beta'\gamma',$$

nous prendrons le système

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a(\alpha^2 - \alpha'^2) + 2b(\alpha\gamma - \alpha'\gamma) + c(\gamma^2 - \gamma'^2), \\ \left\{\begin{array}{l} a(\alpha\beta - \alpha'\beta') + 2b(\beta\gamma - \beta'\gamma') + c(\gamma\delta - \gamma'\delta') = 0, \\ a(\alpha\beta - \alpha'\beta') + 2b(\alpha\delta - \alpha'\delta') + c(\gamma\delta - \gamma'\delta') = 0, \end{array}\right. \\ a(\beta^2 - \beta'^2) + 2b(\beta\delta - \beta'\delta') + c(\delta^2 - \delta'^2) = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination de b entre les deux premières équations donne, en supprimant le facteur $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma$ qui ne peut être nul (*voyez* plus bas),

$$\frac{\delta\gamma' + \delta'\gamma}{a} = \frac{\beta\alpha' - \beta'\alpha}{c}.$$

De même, l'élimination de a entre les troisième et quatrième équations du système (3) donne, en supprimant le facteur $\beta\delta' - \beta'\delta$, qui ne saurait être nul,

$$-\frac{\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma'}{2b} = \frac{\beta\alpha' - \beta'\alpha}{c};$$

on a donc l'équation multiple

$$\frac{\delta\gamma' - \delta'\gamma}{a} = \frac{\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma'}{2b} = \frac{\beta\alpha' - \beta'\alpha}{c}:$$

de sorte qu'en représentant par m le plus grand commun diviseur des nombres a, $2b$, c, on aura, U étant un entier,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} a\mathrm{U} &= m(\delta\gamma' - \delta'\gamma),\\ 2b\mathrm{U} &= m(\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma'),\\ c\mathrm{U} &= m(\beta\alpha' - \beta'\alpha);\end{aligned}\right.$$

et comme l'on a identiquement

$$\begin{aligned}&(\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')^2 - 4(\beta\alpha' - \beta'\alpha)(\delta\gamma' - \delta'\gamma)\\ &= (\alpha\delta' + \alpha\delta' - \beta'\gamma - \beta\gamma')^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma'),\end{aligned}$$

en posant

$$2\mathrm{T} = m(\alpha\delta' + \alpha'\delta - \beta'\gamma - \beta\gamma'),$$

on aura, à cause de $b^2 - ac = \mathrm{D}$,

$$(5)\qquad \mathrm{T}^2 - \mathrm{D}\mathrm{U}^2 = m^2.$$

La combinaison des valeurs de $2\mathrm{T}$ et $2b\mathrm{U}$ donne

$$\mathrm{T} + b\mathrm{U} = m(\alpha\delta' - \beta\gamma'),\quad \mathrm{T} - b\mathrm{U} = m(\alpha'\delta - \beta'\gamma).$$

Si l'on joint à ces équations

$$a\mathrm{U} = m(\delta\gamma' - \gamma\delta'),\quad c\mathrm{U} = m(\beta\alpha' - \alpha\beta'),$$

la résolution de deux couples d'équations du premier degré, où les inconnues sont α' et β' pour l'un, et γ' et δ' pour l'autre, donnera, en ayant égard à l'équation $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \pm m\alpha' = \alpha T - (b\alpha + c\gamma)\, U, \\ \pm m\beta' = \beta T - (b\beta + c\delta)\, U, \\ \pm m\gamma' = \gamma T + (a\alpha + b\gamma) U, \\ \pm m\delta' = \delta T + (a\beta + b\delta)\, U. \end{array}\right.$$

Ces formules ont été données par M. Gauss, dans le n° 162 de ses *Recherches arithmétiques;* le calcul précédent paraîtra plus simple à beaucoup de lecteurs.

V. On a supposé plus haut qu'on ne pouvait avoir $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$. En effet, d'après

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \pm 1,$$

α et γ sont premiers entre eux, aussi bien que α' et γ'. Or l'équation $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ donnant $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'}$, il faudrait que l'on eût $\alpha' = \pm\alpha$, $\gamma' = \pm\gamma$. L'équation $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \pm 1$ deviendrait $\alpha\delta' - \gamma\beta' = \pm 1$; on aurait donc nécessairement $\delta' = \pm\,\delta + K\gamma$, $\beta' = \pm\beta + K\alpha$, K étant entier.

De là $B = a\alpha'\beta' + b\,(\alpha'\delta' + \beta'\gamma') + c\gamma'\delta'$ devient

$$B = a\alpha\beta + b\,(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \pm K\,(a\alpha^2 + 2\,b\alpha\gamma + c\gamma^2)\,,$$

ou

$$B = B \pm KA, \quad \text{d'où} \quad K = 0,$$

car A n'est pas nul; ainsi, les deux substitutions seraient $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm\delta)$, c'est-à-dire les mêmes, ou opposées, ce qui est contre l'hypothèse faite plus haut.

On prouve tout à fait de même qu'on ne saurait avoir $\beta\delta' - \beta'\delta = 0$.

EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE, formant un *Traité de la Théorie des nombres;* par *V.-A. Lebesgue,* professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, membre correspondant de l'Institut (*).

Ces *Exercices* contiendront dans un ordre et avec des démonstrations simplifiées, les recherches contenues dans la *Théorie des Nombres,* de Legendre, et les *Disquisitiones arithmeticæ,* de Gauss. Les travaux de M. Cauchy, notamment ceux qui ont rapport à l'équation binôme, et de nombreux Mémoires de MM. Jacobi, Dirichlet, Eisenstein, Kummer, etc., entreront en substance dans ces *Exercices,* qui commenceront en janvier 1849, et paraîtront de mois en mois par livraisons de 2 ou 3 feuilles in-8°, avec tableaux.

THÉORÈME SUR LE SYSTÈME DE DROITES CONJUGUÉES A UNE CONIQUE ET PASSANT PAR UN MÊME POINT;

PAR M. LUCIEN GILLES,
Élève du lycée Monge (**).

Toutes les circonférences circonscrites aux triangles formés par des systèmes de droites conjuguées passant par un même point pris sur le plan d'une ellipse, et par

(*) Prix de la souscription :

Pour Paris et les départements.....	15 francs par an.
Pour l'Étranger....................	20

A Paris, chez M. BACHELIER, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, etc., quai des Augustins, n° 55.

(**) Maintenant élève de l'École Polytechnique.

une droite parallèle au diamètre conjugué du diamètre qui passe par le point O, se coupent en un même point situé sur le diamètre qui passe par le point O (*fig.* 5, *Pl. I*).

En effet, soit A le centre de l'ellipse, prenons AO et son conjugué pour axes coordonnés; l'équation de la courbe sera

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

Soit DD' la parallèle à l'axe des Y. Posons

$$\text{OA} = d \quad \text{et} \quad \text{AB} = p.$$

Soit $y = m(x - d)$ l'équation de OE; celle de OD sera

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2 m}(x - d).$$

Remplaçons dans ces équations $x - d$ par $-q = \text{OB}$, il viendra

$$\text{BE} = -mq \quad \text{et} \quad \text{BD} = \frac{b'^2}{a'^2 m}q.$$

Nous avons donc

$$\text{EB} \times \text{BD} = +\frac{b'^2}{a'^2}q^2.$$

Soit M le point où le cercle qui passe par les trois points E, O, D rencontre OA. Nous avons

$$\text{MB} \times \text{BO} = \text{BE} \times \text{BD}.$$

En remplaçant ces quantités par leurs valeurs, nous trouvons

$$\text{MB} = \frac{b'^2}{a'^2}q.$$

La quantité BM étant constante, il s'ensuit que le théorème est démontré.

Tous ces cercles ayant une corde commune MO, il s'ensuit que le lieu de leur centre est la perpendiculaire élevée sur le milieu de MO.

Si l'on place le point O au centre, et qu'en même temps on prenne la directrice pour la ligne DD', on trouve alors que le point M est situé sur le grand axe, à une distance de la directrice, troisième proportionnelle à l'excentricité et au demi-petit axe; et le lieu des centres devient une perpendiculaire au grand axe menée à une distance du centre égale à $\frac{b^2}{2c}$. De cette propriété on déduit le théorème suivant :

« Si d'un point quelconque de la perpendiculaire au » grand axe menée à une distance du centre, troisième » proportionnelle au double de l'excentricité et au demi- » petit axe, on décrit une circonférence passant par le » centre de l'ellipse, cette circonférence coupera la di- » rectrice en deux points tels, qu'en les joignant au » centre, on aura un système de diamètres conjugués. »

L'hyperbole jouit des mêmes propriétés.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 151

(t. VI, p. 388);

PAR M. A. MANNHEIM,

Élève du lycée Charlemagne, classe de M. Catalan (*).

D'un point A (*fig.* 6, *Pl. I*), extérieur à une courbe du second degré, on mène deux tangentes AB et AC; d'un point G de la courbe on mène une tangente DE et un diamètre GO; on joint le point A au point de rencontre de ce diamètre avec la corde de contact BC: cette droite partagera en deux parties égales la portion de tangente DE comprise entre les deux tangentes AB et AC.

(*) Maintenant élève de l'École Polytechnique.

Menons du point A la droite AL parallèle à la tangente DE. Le pôle de cette droite est le point de rencontre F du diamètre GO et de la corde BC. La corde BC, qui passe au point F, est divisée harmoniquement par ce point et par la droite AL. Les droites AL, AB, AF, AC forment un faisceau harmonique, et la droite DE, parallèle au rayon vecteur AL, est partagée en deux parties égales par les trois autres AB, AC, AF; ainsi DH = HE.

La démonstration est exactement la même pour l'hyperbole et pour la parabole. Dans le cas de l'hyperbole, si le point A est au centre de la courbe, les tangentes AB, AC sont les asymptotes, et l'on retombe sur un théorème connu.

Dans le cas de la parabole, on a AH = HF (*fig.* 7, *Pl. I*), car le point F étant le pôle AL, on a GF = GM.

La figure AEFD est donc un parallélogramme; on voit donc que si, par le point A, on mène deux tangentes AB et AC à une parabole, si, d'un point F de la corde de contact de ces tangentes, on mène des parallèles FD et FE aux tangentes AB et AC, la droite DE, qui joint les points de rencontre de ces parallèles avec les tangentes est elle-même tangente à la parabole.

Les triangles DBF et EFC sont équiangles, et, par conséquent, semblables, et l'on a

$$\frac{DF}{EC} = \frac{DB}{EF} \quad \text{ou} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{DB}{AD}:$$

d'où l'on voit que la tangente DE divise en parties inversement proportionnelles les tangentes AC et AB.

ÉQUATION

De la courbe que décrit un chien à la poursuite de son maître qu'il voit constamment parcourir une droite : le rapport m des vitesses est constant ;

PAR UN ÉLÈVE DE L'INSTITUTION BARBET.

La tangente à la courbe $y = \varphi(x)$ au point occupé par le chien passe par le point où se trouve l'homme au même moment. Si A′ et A sont deux positions du chien, B′ et B sont les deux positions correspondantes du maître.

De plus

$$\mathrm{BB}' = m \text{ arc } \mathrm{AA}' \quad (\textit{fig. } 8, \textit{ Pl. I}),$$
$$\mathrm{OB} = y - x\varphi'(x).$$

Posons

$$z = x\varphi'(x),$$

et soient l et k les accroissements de z et de y correspondants à un accroissement h de x, nous aurons

$$\mathrm{OB}' = y + k - (z + l),\quad \mathrm{BB}' = k - l,\quad \text{corde } \mathrm{AA}' = \sqrt{k^2 + h^2},$$

$$\frac{1}{m} = \frac{\text{arc AA}'}{\text{cord. AA}'} \times \frac{\text{cord. AA}'}{\mathrm{BB}'},$$

ou

$$\frac{1}{m} = \frac{\text{arc AA}'}{\text{cord. AA}'}\,\frac{\sqrt{\frac{k^2}{h^2} + 1}}{\frac{k}{h} - \frac{l}{h}}.$$

Puis, en passant à la limite

$$\frac{\text{arc AA}'}{\text{cord. AA}'} = 1,\quad \sqrt{\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 1} = \sqrt{\varphi'(x)^2 + 1},$$

$$\frac{l}{h} = \varphi'(x) + x\varphi''(x),\quad \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\varphi'(x)^2 + 1}{x\varphi''(x)}};$$

d'où

$$x^2\varphi''(x)^2 = [\varphi'(x)^2 + 1]\,m^2.$$

Cherchons à déterminer $\varphi'(x)$ que nous supposerons algébrique. Prenons les dérivées des deux membres de l'équation (1),

$$m^2\varphi'(x)\,\varphi''(x) = x^2\varphi''(x)\,\varphi'''(x) + x\varphi''(x)^2,$$

ou

$$(2)\qquad m^2\varphi'(x) = x^2\varphi'''(x) + x\varphi''(x).$$

Soit Ax^n un terme de $\varphi'(x)$. Les termes correspondants de $\varphi''(x)$ et $\varphi'''(x)$ seront nAx^{n-1} et $n(n-1)Ax^{n-2}$; l'identité (2) exige donc que l'on ait

$$nA + n(n-1)A = m^2A, \quad \text{ou} \quad n = \pm m.$$

$\varphi'(x)$ sera donc de la forme $Ax^m + Bx^{-m}$.

De plus, par l'équation (1) on a

$$m^2[1 + (Ax^m + Bx^{-m})^2] = x^2(mAx^{m-1} - mBx^{-m-1})^2,$$

d'où

$$1 + 4AB = 0.$$

Alors

$$(3)\qquad \varphi'(x) = Ax^m - \frac{1}{4A}x^{-m};$$

d'où il suit:

$$\text{Si } m \gtrless 1,$$

$$\varphi(x) = \frac{A}{m+1}x^{m+1} - \frac{1}{4A(m-1)}x^{1-m} + c;$$

$$\text{Si } m = 1,$$

$$\varphi(x) = \frac{A}{2}x^2 - \frac{1}{4A}lx + c.$$

Restent deux constantes arbitraires que l'on détermine par les positions initiales du maître et du chien.

Discussion.

1°. $m > 1$.

$m = \frac{p}{2n}$, fraction irréductible. La courbe est symétrique par rapport à $y = c$, et n'a aucun point à gauche de Oy; chacune des deux branches se compose d'une branche asymptotique à Oy, et d'une autre branche parabolique.

$m = \frac{p}{2n+1}$, fraction irréductible. La courbe aura deux branches symétriques par rapport à l'axe des y; si p est impair, chacune de ces branches se compose de deux autres, l'une asymptotique à Oy, l'autre parabolique.

Si p est pair, il y aura une seule branche de même nature que les précédentes.

2°. $m = 1$.

Une seule branche analogue aux précédentes.

3°. $m < 1$.

$m = \frac{p}{2n}$. La courbe est symétrique par rapport à $y = c$; elle touche Oy au point $x = 0$, $y = c$; tous ses points sont placés à droite de Oy.

Si $m = \frac{p}{2n+1}$, la courbe touche encore l'axe des y au point $x = 0$, $y = c$; mais ce point de contact est en même temps un point d'inflexion comme le montre la forme de la dérivée seconde qui change alors de signe.

Dans le cas de $m < 1$, la courbe n'a pas d'asymptote rectiligne et n'offre qu'une seule branche distincte composée de deux branches infinies.

Note sur la courbe de poursuite.

On lit dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* tome II, page 275, 1814 :

« Un ancien élève, directeur des douanes à Fuligno, » département de Trasimène (M. Dubois-Aymé), se pro- » menait sur le bord de la mer : il aperçut à quelque dis- » tance une personne de sa connaissance, et se mit à » courir pour l'atteindre. Son chien, qui s'était écarté, » courut vers lui en décrivant une courbe dont l'em- » preinte resta sur le sable. M. Dubois, revenant sur ses » pas, fut frappé de la régularité de cette courbe, et il » en chercha l'équation en supposant, 1° que le chien se » dirigeait toujours vers le lieu que le maître venait de » quitter; 2° que le maître parcourait une ligne droite; » 3° que les vitesses du maître et du chien étaient uni- » formes. »

On donne ensuite une équation de cette courbe dont l'inexactitude a été établie par M. Thomas de Saint-Laurent, alors lieutenant au 7e régiment d'artillerie à pied (*Gergonne,* tome XIII, page 145, 1822). M. Saint-Laurent parvient d'abord à la même équation (1); mais, au lieu de supposer que $\varphi'(x)$ est algébrique, espèce de divination, il *intègre* l'équation (1) et parvient directement à l'équation (3); ensuite on prend pour axe des x, la tangente perpendiculaire à l'axe des y, et l'on désigne par a la distance du point de contact à l'origine; de sorte que l'on a

$$\mathrm{A}\,a^m - \frac{1}{4\mathrm{A}}a^{-m} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}a^{-m} \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{x}\right)^m\right],$$

et enfin

$$\frac{2y}{a} = \frac{1}{m+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{m+1} - 1\right] + \frac{1}{m-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{m-1} - 1\right];$$

car pour $x = a$, on doit avoir $y = 0$.

La courbe est rectifiable, ce qui est évident à priori; l'intégration donne, pour la longueur de l'arc s compté depuis le point de contact avec l'axe des x,

$$\frac{2s}{a} = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1\right] - \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Quand x diminue, s croît positivement, comme le remarque M. Querret (même volume, page 390).

Si l'on transporte l'origine au point de l'axe des y, où l'on a $y = -\frac{ma}{m^2-1}$, l'équation de la courbe prend cette forme

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{a}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+1} + \frac{a}{m-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{m-1}\right].$$

On peut donc construire la courbe à l'aide de deux autres courbes, l'une parabolique et l'autre hyperbolique; pour $m = 1$, y devient constamment infini, ce qui annonce un changement dans la forme de la fonction $\varphi(x)$, qui cesse d'être algébrique et devient logarithmique. Dans le même volume on trouve la solution du problème plus général, où le chien, traversant une rivière pour rejoindre son maître, est à chaque instant détourné par le courant constant de l'eau. On doit une première solution à MM. de Saint-Laurent et Sturm (page 289); mais la plus belle, d'une admirable simplicité et fondée sur la considération des mouvements relatifs, a été donnée par M. Querret (p. 391).

La courbe considérée dans le premier problème est aussi celle que décrirait un vaisseau qui en poursuivrait un autre, en se dirigeant constamment sur lui. C'est là le problème que Bouguer a résolu; en parvenant à la même équation donnée ci-dessus, il nomme la courbe *ligne de poursuite* (*Mémoires de l'Académie*, 1732, page 1), et Maupertuis en a donné une solution plus courte. TM.

NOTE SUPPLÉMENTAIRE AU THÉORÈME HOMOGRAPHIQUE

(t. VII, p. 447).

I. La valeur de z'' donnée page 448, ligne 7, est fautive. Il faut lire

$$z'' = \frac{F(a+1) - aN\rho}{M\rho(1-a)}.$$

Substituant cette valeur corrigée et passant aux coordonnées rectangulaires, on trouve pour équation du lieu cherché,

$$(1)\quad F(a^2+1)[Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F]$$
$$+a[Dy+Ex]^2 - 2aF[Ay^2+Bxy+Cx^2-Dy-Ex-F]=0.$$

II. Si l'on remplace a par $\frac{1}{a}$, le lieu ne change pas, ce qu'on peut prévoir à priori; car le lieu est coupé par une droite passant par le pôle O en deux points N et N': l'un répond au rapport a et l'autre au rapport $\frac{1}{a}$. Il suffit donc de considérer les courbes correspondantes aux valeurs de a comprises entre $+1$ et -1; nous avons supposé le point N entre M et M', et a est positif: lorsque le point N n'est pas entre M et M', alors a est négatif.

III. Pour $a=1$, le lieu se réduit à la droite double $(Dy+Ex-2F)^2=0$; c'est la polaire de l'origine, comme cela doit être: le rapport devient harmonique.

IV. Faisant $a=0$, on trouve la conique donnée. En effet, alors N se confond avec N′; de même en faisant $a = \frac{1}{0} = \infty$; alors F se confond avec M.

V. Posons $a = -1$; l'équation se réduit à

$$ly^2 - 2nxy + l'a^2 = 0.$$

C'est qu'alors le point N se confond avec l'origine O, et le lieu est ce point lorsque le point O est dans l'intérieur, ou bien les deux tangentes à la conique donnée lorsque le point est extérieur.

VI. Les intersections de la conique avec le lieu géométrique sont sur la polaire $Dy + Ex + 2F = 0$; donc, quelle que soit la valeur de a, toutes les courbes qui sont données par l'équation passent par les deux points réels ou analytiques.

VII. La polaire de la conique (1) relativement à l'origine est $Dy + Ex + 2F = 0$; donc, quelle que soit a, le pôle O a la même polaire, et comme toutes les coniques passent par deux mêmes points situés sur cette polaire, il s'ensuit que toutes ces courbes se touchent en ces points, et par conséquent leurs centres sont sur la même droite. De là le théorème suivant :

VIII. *Théorème.* Si deux coniques ont un double contact, et que par le pôle O de la corde de contact on mène une transversale, coupant la première conique en A et B, et la seconde en A′ et B′, le rapport anharmonique des quatre points O, A, A′, B est réciproque au rapport anharmonique des quatre points O, A, B′, B; ces rapports sont respectivement constants pour toutes les transversales issues de O.

QUESTION D'EXAMEN SUR LE TRAPÈZE ET LE QUADRILATÈRE INSCRITS.

I. Problème. *Inscrire dans le cercle donné un trapèze dont l'aire et les côtés non parallèles, nécessairement égaux, sont donnés.*

Solution. Soit ABCD le trapèze inscrit; faisons

$$AD = BC = a,\quad AB = x,\quad CD = y,$$
$$AC = BD = z,\quad S = \text{aire},\quad D = \text{diamètre}.$$

La distance des deux bases AB, CD est égale à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (y-x)^2};$$

donc

$$S = \tfrac{1}{4}(x+y)\sqrt{4a^2 - (y+x)^2 + 4xy}.$$

Or dans le trapèze inscrit, l'on a

$$a^2 + xy = z^2;$$

donc

$$(1)\qquad S = \tfrac{1}{4}(x+y)\sqrt{4z^2 - (x+y)^2}.$$

Soient s et s' les aires des triangles ABC, ACD; on a

$$axz = Ds,\quad ayz = Ds';\quad \text{d'où}\quad az(x+y) = DS.$$

Remplaçant dans l'équation (1) $x+y$ par sa valeur, et faisant disparaître le radical, on déduit

$$(2)\qquad 4a^2(D^2 - a^2)z^4 = D^4S^2;$$

on peut donc construire *géométriquement* z, et par conséquent le trapèze.

Au moyen de l'équation (2), connaissant trois des quatre quantités a, z, S, D, on peut construire la quatrième. S croissant proportionnellement au carré de z, il s'ensuit que S est un maximum lorsque z est un diamètre, et alors le trapèze devient un rectangle inscrit.

On trouve aussi

$$a^2(x+y)^4 = 4S^2(D^2-a^2),$$

ce qui donne la valeur de $x+y$, facile à construire de plusieurs manières. Soit A′ le point diamétralement opposé à A; on aura

$$DA' = \sqrt{D^2-z^2} = b;$$

et faisant $S = 2al$, on obtient

$$bz^2 = D^2 l,\quad (x+y)^2 = 4bl.$$

Observation. Pour le cas général du quadrilatère, *voir* tome VII, page 69.

II. Soient a, b, c, d les quatre côtés consécutifs d'un quadrilatère inscrit, m la diagonale qui va de l'angle ab à l'angle cd, et n la seconde diagonale : on aura

$$ac+bd = \frac{m^2(ab+cd)}{ad+bc} = \frac{n^2(ad+bc)}{ab+cd};$$

$$\cos(a,d) = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)};\quad \cos(a,b) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,ab+cd};$$

$$\sin(a,d) = \frac{2S}{ad+bc};\quad \sin(a,b) = \frac{2S}{ab+cd};$$

$S =$ aire (*v.* t. VII, p. 70); $\quad D^2 = \dfrac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{4S^2};$

$D =$ diamètre du cercle circonscrit; $\quad \sin(a,m) = \dfrac{d}{D};$

$$\sin(b,m) = \frac{c}{D};\quad \sin(a,n) = \frac{b}{D};\quad \sin(b,n) = \frac{a}{D};$$

$$\sin(m,n) = \frac{2S}{ac+bd};\quad S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d);$$

$$2s = a+b+c+d.$$

TRIGONOMÉTRIE.

THÉORÈME I. Dans un triangle rectiligne ABC, on a la relation

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$$
$$+ 2 \sin A \sin C \cos B + 2 \sin B \sin C \cos A.$$

Démonstration. Circonscrivons une circonférence au triangle : on a

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C;$$

a, b, c sont les côtés et R le rayon. Or

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cos A;$$

donc

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A.$$

On a deux autres équations analogues; les ajoutant, on trouve la relation énoncée.

THÉORÈME II. Soit un triangle sphérique ABC; a, b, c les côtés, et A′, B′, C′ les angles du triangle rectiligne formé par les cordes; on a la relation

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c + \sin^2 \tfrac{1}{2} b + \sin^2 \tfrac{1}{2} c = 2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \cos C'$$
$$+ 2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} c \cos B' + 2 \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A'.$$

Démonstration. Les trois cordes formant le triangle rectiligne sont égales à

$$2 \sin \tfrac{1}{2} a, \quad 2 \sin \tfrac{1}{2} b, \quad 2 \sin \tfrac{1}{2} c,$$

et l'on a dans ce triangle

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} b + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} c - 8 \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A'.$$

On a deux autres équations analogues; ajoutant à celle-ci, on trouve la relation indiquée.

PROPRIÉTÉ DES NOMBRES;

Par M. G.-J. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

Théorème. *Dans tout nombre, la somme de plusieurs diviseurs est à celle des quotients correspondants, dans le rapport inverse de la somme des valeurs inverses des diviseurs et de celle des valeurs inverses des quotients.*

Soient $d_1, d_2, d_3,\ldots, d_n$ plusieurs diviseurs du nombre N; $q_1, q_2, q_3,\ldots, q_n$ les quotients correspondants, de sorte que

$$N = d_1 q_1 = d_2 q_2 = d_3 q_3 = \ldots = d_n q_n;$$

je dis qu'on a

$$(d_1 + d_2 + \ldots + d_n) : (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$
$$:: \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n}\right) : \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n}\right).$$

En effet, les relations de condition donnent

$$d_1 = \frac{N}{q_1}, \quad d_2 = \frac{N}{q_2}, \ldots, \quad d_n = \frac{N}{q_n},$$
$$\frac{1}{d_1} = \frac{q_1}{N}, \quad \frac{1}{d_2} = \frac{q_2}{N}, \ldots, \quad \frac{1}{d_n} = \frac{q_n}{N};$$

donc

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = N\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n}\right),$$
$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} = \frac{1}{N}(q_1 + q_2 + \ldots + q_n);$$

d'où l'on déduit la proportion énoncée.

Remarque. Dans cette relation, on peut changer en même temps le signe de l'un quelconque ou de plusieurs des diviseurs et celui de la valeur inverse du quotient ou de celles des quotients correspondants.

Ainsi, on a aussi

$$(d_1 - d_2 + \ldots + d_n)\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n}\right)$$
$$= (q_1 - q_2 + \ldots + q_n)\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n}\right).$$

Corollaire. Dans une hyperbole rapportée à ses asymptotes, la somme d'un nombre quelconque d'ordonnées est à la somme des abscisses correspondantes, comme la somme des abscisses inverses est à la somme des ordonnées inverses.

JOURNAL DE M. CRELLE, t. XXXII (1846).

(Voyez t. VI, p. 341.)

PREMIER CAHIER.

1. *Théorèmes généraux sur les dérivées d'un ordre quelconque de certaines fonctions très-générales;* par M. O. Schlömilch, docteur ès sciences, lecteur de mathématiques à l'Université d'Iéna. 1-7 (en français).

Connaissant $f(y)$ et tous ses coefficients différentiels par rapport à y, on peut trouver d'une manière indépendante $\frac{d^n f(y^\lambda)}{dy^n}$, λ étant une constante arbitraire.

2. *Sur la valeur que prend l'intégrale déterminée* $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - A\cos\varphi - B\sin\varphi}$ *pour des valeurs imaginaires quelconques de* A *et* B; par M. le professeur C.-G.-J. Jacobi, à Berlin (13 février). 8-13.

Soient

$$A = a + a'\sqrt{-1}, \quad B = b + b'\sqrt{-1}.$$

Si $(ab' - a'b)^2 > a'^2 + b'^2$, l'intégrale définie est nulle; si $(ab' - a'b)^2 < a'^2 + b'^2$, la valeur de l'intégrale définie est $\frac{2\pi}{\sqrt{1 - A^2 - B^2}}$; mais il faut que la partie réelle du radical soit positive.

3. *Mémoire sur les différentes manières de se servir de l'élasticité de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer;* une de ces manières constitue les chemins de fer *atmosphériques* proprement dits; par l'éditeur. 14-58 (en français) [*].

4. *Sur la théorie des fonctions elliptiques;* par M. Eisenstein, docteur en philosophie à Berlin. 59-70; continuation du n° 14 du tome XXX. *Observations sur les formules transformatoires.*

5. *Sur les fractions partielles;* par M. Eisenstein, à Berlin. 71-74.

Soit $\Omega = 0$ une fonction entière en x de degré n; x^n a pour coefficient l'unité, et les autres coefficients sont des fonctions de y; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant racines, on a

$$\log \Omega = \Sigma \log (x - x_\mu),$$

et, en différentiant,

$$\frac{1}{\Omega}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = - \Sigma \frac{dx_\mu}{dy} \frac{1}{x - x_\mu}.$$

De là l'auteur déduit les quatre théorèmes relatifs aux fractions partielles, qui sont le sujet d'une dissertation spéciale de M. Jacobi, publiée en 1825; système de théorèmes dont l'illustre analyste dit: « E theorematis, quæ » in elementis algebraicis traduntur, vix exstat aliud ma- » gis utile in æquationibus maxime diversis. »

(*) Imprimé à Paris, chez M. Bachelier.

Les auteurs français d'éléments connaissent une manière très-courte d'établir des propositions que M. Jacobi déclare être des plus importantes de l'algèbre élémentaire; ils ne les donnent pas.

6. *Théorèmes dont les propositions connues sur les courbes parallèles sont des cas particuliers;* par M. le professeur J. STEINER. 75-79.

Soient deux courbes quelconques A et B dans le même plan, a un point sur la courbe A, et b un point *correspondant* sur la courbe B, où la tangente en a à la courbe A est parallèle à la tangente en b à la courbe B; supposons que les deux tangentes s'enroulent sur les courbes, mais en restant toujours parallèles, et soit a_1 et b_1 une autre position : aa_1 et bb_1 sont des arcs correspondants. Prenons pour pôle un point quelconque P dans le plan des courbes et concevons un rayon vecteur Pb mené à un point de la courbe B; par le point correspondant a, menons vers la convexité une parallèle ac à Pb, telle qu'on ait $ac =$ Pb: le lieu du point c sera une troisième courbe C formée de l'arc cc_1. Quelle que soit la position du pôle P, on aura toujours un arc cc_1 *congruent* et *homothétique,* c'est-à-dire qu'un arc pourra être placé sur l'autre par un mouvement de translation sans aucune rotation. Si on mène les rayons vecteurs aux points de l'arc aa_1 et qu'on fasse la même construction, on aura une quatrième courbe *congruente* et *symétrique* à la troisième ; c'est-à-dire que, pour opérer la superposition, il faudra une rotation de 180 degrés. Si l'on joint deux points correspondants a et b, et qu'on mène par un pôle P une parallèle P$d = ab$, le lieu du point d est une cinquième courbe égale à cc_1 et homothétique ou symétrique, selon le sens suivant lequel on mène la parallèle. Dans chacune de ces trois courbes, les tangentes aux points correspondants sont parallèles, et la longueur de l'arc est égale à la différence des deux arcs aa_1, bb_1. Si, dans la construction de la troisième courbe, on mène la parallèle du côté de la convexité, on obtient une courbe dont la longueur est égale à la somme $aa_1 + bb_1$. Si la courbe B est un cercle et qu'on prenne son centre pour pôle P, on est ramené aux propriétés des courbes parallèles. Des constructions semblables ont lieu pour des surfaces.

Ce Mémoire a été lu dans la séance du 26 mars 1846 de l'Académie de Berlin, et, à la même séance, M. Steiner a établi les propositions importantes suivantes: A deux coniques A et B dans un plan correspondent toujours quatre coniques C telles, que la conique B est, par rapport à C, la polaire réciproque de A; ces quatre coniques ont des relations telles, que l'une détermine les trois autres. Pour les surfaces du second degré, il y a huit solutions, entre lesquelles existent encore des relations mutuelles.

7. *Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque homogène ou hétérogène; par* M. G. Lejeune-Dirichlet. 80-84 (en français).

On sait qu'on appelle maintenant *potentiel* l'intégrale triple qui exprime la somme des éléments d'une masse, divisés chacun par sa distance à un point quelconque; les propriétés de cette fonction si importante dans la théorie newtonnienne de l'attraction ont été étudiées par l'immortel Gauss, auquel on doit le nom qui désigne la fonction. L'objet de ce Mémoire est de démontrer que ces propriétés n'appartiennent qu'à cette fonction, et pas à aucune autre.

8. *Sur la stabilité de l'équilibre; par* M. G. Lejeune-Dirichlet. 85-88.

L'auteur montre l'insuffisance des démonstrations de

Lagrange et Poisson fondées sur la théorie des critériums du maximum; il en donne une indépendante de ces critériums, et il termine par signaler une erreur commise par plusieurs géomètres (Poisson, *Traité de Mécanique*, tome II, page 491). Nous donnerons la traduction de ce Mémoire instructif.

9. *Observation sur la théorie des nombres; par* M. le professeur Stern, à Gottingue. 89-90.

1. p nombre premier de la forme $8n+1$, de sorte qu'on a $p=c^2+2d^2$;

$$\pm 2c - \frac{4n+1.4n+2\ldots 5n}{1.2.3\ldots n} = \dot{p} \text{ (théor. de M. Jacobi)[*]},$$

$$\pm 2c - \frac{2n.2n-1\ldots n+1}{1\ldots n} = \dot{p} \text{ (théorème de M. Stern)},$$

le signe supérieur lorsque c est de la forme $\dot{8}+1$ ou $\dot{8}+3$, et le signe inférieur lorsque c est de la forme $\dot{8}+5$ ou $\dot{8}+7$.

10. *Approximation de la quadrature du cercle*. 91-92.

Soient AOB le diamètre d'une circonférence et COD le diamètre perpendiculaire; par C on mène une parallèle au diamètre AB, et, par conséquent, une tangente au cercle. Dans le quadrant AC inscrivons la corde AS = AO = 1; prolongeons le rayon OS jusqu'à ce qu'il rencontre la tangente menée en C, en T; prenons sur la tangente TZ = 3 AO, de manière que C soit entre T et Z. La différence entre la longueur de la demi-circonférence ACB et la droite DZ = 3,141533 sera un peu moindre que le $\frac{1}{17000}$ du rayon AO. Si l'on prend sur la tangente ZCK = ZD, alors l'aire du triangle ZDK, lorsqu'on a

[*] Le point placé sur cette lettre indique le multiple de la quantité qu'elle surmonte; notation leibnitzienne que j'ai adoptée pour éviter l'écriture incongrue des congruences.

$\cos x = \text{tang}\, x = 38 . n'\frac{1}{2}$ et $\cos n$, est à peu près égale au $\frac{1}{8}$ de la circonférence.

On trouve cette construction simple dans une brochure publiée à Hambourg, par M. Nicolaï Nawretzky, membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg.

Fac-simile d'une Lettre de Maupertuis, datée de Potsdam, le 18 août, sans millésime, et adressée à M. de Prémontval.

On y trouve encore *j'ay*, et vous *envoyerez*, luy, feriés.

(*La fin prochainement.*)

QUESTIONS.

100. Inscrivant une droite dans l'angle des asymptotes d'une hyperbole, de telle sorte qu'elle intercepte un triangle dans cet angle et un segment dans l'hyperbole; la droite allant en s'éloignant du centre parallèlement à elle-même, la limite de l'aire du segment divisée par l'aire du triangle est égale à l'unité.

101. Soient PT (*fig.* 9, *Pl. I*) une courbe sphérique, O un point fixe sur la sphère, et PQ un grand cercle tangent à la courbe en P. Menons un grand cercle par O faisant avec OP un angle POR, complément de OPQ; abaissons de M, milieu de OP, un arc MN perpendiculaire à OR, et prenons le point R de manière que OR soit divisé en parties égales à N. Le grand cercle RS, tangent à la courbe, lieu de R, fera avec OR un angle ORS égal à OPQ.

Remarque. En faisant dériver d'une courbe donnée quelconque une série de courbes se succédant d'après la loi indiquée, le théorème qu'on vient d'énoncer nous fournira une formule pour la rectification d'une quelconque des courbes de cette série. (STREBOR.)

102. Trouver des nombres rationnels satisfaisant aux deux équations

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2,$$
$$x^2 - y^2 - 1 = u^2$$ (Lilavati, sect. IV, règle 59-60).

103. Étant donné un triangle plan, soient trois paraboles, ayant même foyer, dont chacune est touchée par deux côtés du triangle; si l'on mène à la première de ces paraboles la tangente qui coupe perpendiculairement le troisième côté du triangle, et, de même pour les deux autres, les trois droites qu'on obtient ainsi, seront toutes tangentes à la même parabole, homofocale avec les trois autres. (Strebor.)

CUBATURE D'UN POLYÈDRE A FACES TRAPÈZES,

D'APRÈS M. C. KOPPE, à Soest.

(Crelle, t. XVIII, p. 275, 1838.)

I. *Lemme.* L'aire d'un polygone est la somme de termes dont chacun est le demi-produit de deux côtés du polygone par le sinus de l'angle qu'ils comprennent (*voir* tome VII, page 348).

II. Théorème. *Un corps ayant pour bases deux polygones parallèles, et pour faces des trapèzes, est équivalent à un prisme ayant pour hauteur la distance des deux polygones, et pour base l'aire de la section parallèle faite à égale distance des deux bases, augmentée de la douzième partie de l'aire d'un polygone qui a les mêmes angles que les polygones, et qui a pour côtés les différences de leurs côtés homologues.*

Démonstration. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les côtés successifs du polygone supérieur, et $b_1, b_2, \ldots, b_k$ les côtés correspondants de la base inférieure; a_1 et b_1, a_2 et b_2, etc., sont parallèles. Soit h l'intervalle des bases. Désignons par $(a_p a_q)$ l'angle de deux côtés a_p, a_q; on a $(a_p a_q) = (b_p b_q)$. A une distance x de la base supérieure, faisons une section parallèle aux bases, et soient $z_1, z_2, \ldots, z_4$ les côtés correspondants à $a_1, a_2, \ldots, a_4$; on aura

$$(z_p z_q) = (a_p a_q)$$

et

$$z_p = a_p - (a_p - b_p)\frac{x}{h}, \quad z_q = a_q - (a_q - b_q)\frac{x}{h}.$$

A, B désignant les aires respectives des bases, et Z l'aire de la section, on a, d'après le lemme,

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\Sigma_4^1 a_p a_q \sin(a_p a_q), \\ B &= \tfrac{1}{2}\Sigma_4^1 b_p b_q \sin(a_p a_q), \\ Z &= \tfrac{1}{2}\Sigma_4^1 z_p z_q \sin(a_p a_q), \end{aligned}$$

ou mettant les valeurs de $z_p z_q$, il vient

$$Z = \tfrac{1}{2}\Sigma \left[\begin{array}{l} a_p a_q - (2a_p a_q - a_p b_q - a_q b_p)\dfrac{x}{h} \\ + (a_p - b_p)(a_q - b_q)\dfrac{x^2}{h^2} \end{array} \right] \sin a_p a_q.$$

V désignant le volume des corps, on a

$$V = \int_0^h Z\,dx = \tfrac{1}{12} h\Sigma(2a_p a_q + a_p b_q + 2b_p b_q)\sin a_p a_q.$$

Soit V′ le volume du prisme qui a pour hauteur h et pour base la section parallèle passant par le milieu de h; on a

$$\begin{aligned} V' &= \tfrac{1}{8} h\Sigma(a_p + a_q)(b_p + b_q)\sin a_p a_q, \\ V - V' &= \tfrac{1}{24} h\Sigma(a_p - b_p)(a_q - b_q)\sin a_p a_q; \end{aligned}$$

or cette différence est la douzième partie d'un prisme ayant pour hauteur h et pour base un polygone équiangle aux bases, et dont les côtés sont $a - b$, $a_p - b_p$ et $a_q - b_q$. C. Q. F. D.

Corollaires. 1°. *Cône tronqué à bases circulaires.* Soient h la hauteur d'un cône tronqué, r et ρ les rayons des bases; on aura

$$V = \pi h\left[\left(\frac{r+\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}(\rho - r)^2\right].$$

2°. *Cône tronqué elliptique.* Soient h la hauteur, a_1, a_2 les demi-axes principaux d'une base, b_1, b_2 les demi-axes principaux de l'autre base; on aura

$$V = \pi h\left[\frac{a_1+b_1}{2}\cdot\frac{a_2+b_2}{2} + \frac{1}{12}(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\right].$$

3°. *Hexaèdre trapézoïde.* Les bases étant aussi des trapèzes, soient a_1, a_2 les côtés parallèles d'une base et c leur distance, b_1, b_2 les côtés parallèles de l'autre base et d l'intervalle; on aura

$$V = h\left[\frac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}\cdot\frac{c+d}{2} + \frac{1}{12}(a_1 - b_1 + a_2 - b_2)\frac{c-d}{2}\right].$$

RESOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DES QUATRE PREMIERS DEGRÉS;

Par M. P.-G. EISENSTEIN.

(Journal de M. Crelle, t. XXVI, p. 81.)

Traduit par M. Lebesgue.

Dans la résolution des équations de degré élevé, on se contente à l'ordinaire, à ce qu'il semble, de démontrer leur possibilité, tandis qu'on se laisse détourner de la détermination effective du résultat final, par la prolixité du calcul; je donne ici le résultat final complétement développé pour les quatre premiers degrés. Je prends une équation tout à fait générale, sans ces restrictions que le coefficient du premier terme est l'unité, et que celui du second terme est nul, ce qui ne fait que nuire à l'élégance et à l'expression du vrai caractère du résultat final.

I. L'équation du premier degré $ax + b = 0$ donne

$$x = -\frac{b}{a}.$$

II. Pour la résolution des équations des deuxième, troisième et quatrième degrés, il faut introduire deux nouvelles fonctions $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ déterminées par les équations $\varphi^2(\lambda) = \lambda$, $\varphi^3(\lambda) = \lambda$.

La fonction $\varphi(\lambda)$ a deux valeurs $\pm\varphi(\lambda)$ tandis que l'autre prend trois valeurs qui se déduisent d'une seule de la manière suivante :

$$\psi(\lambda), \quad \rho\psi(\lambda), \quad \rho^2\psi(\lambda),$$

où ρ représente l'expression $\frac{1}{2}[-1 + \sqrt{(-3)}]$.

Si l'on représente, pour abréger, par A, B, C, D, E, F les fonctions homogènes qui suivent :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A} = b^2 - ac, \quad \mathrm{B} = 3abc - a^2d - 2b^3, \\
&\mathrm{C} = a^2d^2 - 3b^2c^2 - 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd, \\
&\mathrm{D} = ae + 3c^2 - 4bd, \quad \mathrm{E} = ad^2 + b^2e - ace - 2bcd + c^3, \\
&\mathrm{F} = 27a^2d^4 + 27b^4c^2 + 18a^2c^2e^2 - 36b^2c^2d^2 - 54a^2cd^2e \\
&\qquad - 54abc^2e^2 - 108abcd^3 - 108b^3cde + 6ab^2d^2e \\
&\qquad + 54ac^3d^2 + 54b^2c^3e + 180abc^2de - 81ac^4e - a^3e^3 \\
&\qquad + 64b^3d^3 + 12a^2bde^2,
\end{aligned}$$

les racines de l'équation quadratique générale

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

seront

$$x = \frac{1}{a}[-b \pm \varphi(\mathrm{A})].$$

III. Pour l'équation cubique générale

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

on trouvera

$$x = \frac{1}{a}[-b + \psi(\alpha) + \psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho\psi(\alpha) + \rho^2\psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho^2\psi(\alpha) + \rho\psi(\beta)],$$

où

$$\alpha = \tfrac{1}{2}[B + a\varphi(C)], \quad \beta = \tfrac{1}{2}[B - a\varphi(C)];$$

et les valeurs correspondantes des deux fonctions $\psi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ seront complétement déterminées par l'équation

$$\psi(\alpha) \cdot \psi(\beta) = A = b^2 - ac.$$

IV. L'équation générale biquadratique

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

donne

$$x = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b - \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{x}[-b - \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

où

$$\gamma = A + \tfrac{1}{2}a[\psi(\zeta) + \psi(\eta)],$$
$$\delta = A + \tfrac{1}{2}a[\psi(\zeta) + \rho^2\psi(\eta)],$$
$$\varepsilon = A + \tfrac{1}{2}a[\rho^2\psi(\zeta) + \rho\psi(\eta)],$$
$$\zeta = \frac{9E + \varphi(3F)}{9}, \qquad \eta = \frac{9E - \varphi(3F)}{9}.$$

Pour la détermination des valeurs correspondantes, on emploie les deux équations

$$\psi(\zeta) \cdot \psi(\eta) = \tfrac{1}{3}D \quad \text{et} \quad \varphi(\gamma) \cdot \varphi(\delta) \cdot \varphi(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}B.$$

Les racines de l'équation générale du cinquième degré prennent une forme toute semblable quand, outre les fonctions $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$, on introduit encore une nouvelle fonction $\chi(\lambda)$ déterminée par l'équation

$$\chi^5 + \chi = \lambda\ (^*).$$

Je reviendrai, dans une autre occasion, sur les propriétés remarquables et la formation des fonctions homogènes qui se présentent dans les formules pour la résolution des équations algébriques, et je montrerai leur usage dans la théorie des nombres.

THÉORÈMES D'HOMOGÉNÉITÉ.

I. M. Otto Hesse, professeur à Kœnigsberg, a eu l'ingénieuse idée de représenter les coordonnées d'un point sur un plan, non pas par x et y, mais par $\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}$; de même un point dans l'espace par $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$; z et u sont des dénominateurs quelconques. Pour exprimer qu'un point a pour coordonnées $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, on écrit (x', y', z'); ces conventions établissent dans les formules une symétrie qui n'existe pas dans les conventions usitées, et rendant *homogènes* les équations descriptives des lignes, permettent de leur appliquer les propriétés des fonctions homogènes.

II. *Exemple.* 1°. L'équation ordinaire d'une droite est $ay + bx + c = 0$; si l'on remplace y et x par $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$,

(*) $$\chi(\lambda) = \lambda - \lambda^5 + 10.\frac{\lambda^9}{2!} - 15.14.\frac{\lambda^{13}}{3!} - 20.19.18\frac{\lambda^{17}}{4!} - \ldots,$$
$$= \sqrt[5]{\lambda - \sqrt[5]{\lambda - \ldots}}\ .\ .\ .\ .$$

elle devient $ay + bx + cz = 0$, homogène en x, y, z.

2°. L'équation ordinaire d'une droite passant par deux points est $y(x' - x'') + x(y'' - y') + y'x'' - x'y'' = 0$; remplaçant y, x, y', x', y'', x'' par $\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, \frac{y'}{z'}, \frac{x'}{z'}, \frac{y''}{z''}, \frac{x''}{z''}$, on obtient

$$x(y'z'') + y(z'x'') + z(x'y'') = 0, \text{ homogène et symétrique.}$$

Les quantités entre parenthèses sont des binômes alternés ou des *déterminants* à deux éléments.

3°. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une ligne; l'équation ordinaire de la tangente est $yD_{y'} + xD_{z'} - y'D_{y'} - x'D_{z'} = 0$, où $D_{y'}$ représente ce que devient la dérivée de $F(x, y)$ par rapport à y, quand on remplace x et y par x', y' coordonnées du point de contact. Remplaçant donc, dans l'équation $F(x, y) = 0$, x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, elle devient $\varphi(x, y, z) = 0$, homogène en x, y, z; et l'équation de la tangente prend la forme symétrique $xD_{x'} + yD_{y'} + zD_{z'} = 0$: $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$ sont les coordonnées du point de contact; $D_{x'}$ est la dérivée de φ par rapport à x, etc. Ainsi, l'équation rendue homogène d'une conique est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dyx + Exy + Fz^2 = 0;$$

l'équation de la tangente est

$$\begin{aligned} x[2Cx' + By' + Ez'] + y[2Ay' + Bx' + Dz'] \\ + z[2Fz' + Dy' + Ex'] = 0. \end{aligned}$$

4°. Soit $Ax + By + Cz + Du = 0$ l'équation homogène d'un plan; celle d'un plan passant par trois points donnés est

$$x(y'z''u''') + y(z'u''x''') + z(u'x''y''') + u(x'y''z''') = 0.$$

Dans cette équation, les quantités entre parenthèses sont des *déterminants* à trois éléments. On sait qu'on appelle aujourd'hui *déterminants* à n éléments, les dénominateurs communs aux n inconnues de n équations du premier degré, les coefficients étant tous représentés par des lettres.

5°. $F(xyzu) = 0$ étant l'équation homogène d'une surface, l'équation du plan tangent est

$$xD_{x'} + yD_{y'} + zD_{z'} + uD_{u'} = 0;$$

$D_{x'}$ est la dérivée de F par rapport à x, dans laquelle les coordonnées variables sont remplacées par les coordonnées du point de contact.

III. *Lemme.* Étant données n équations littérales, homogènes du premier degré à n inconnues et de cette forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$, le *déterminant* est nul, de degré n, et chaque coefficient est du premier degré dans chaque terme.

Démonstration. On a n équations entre les $n - 1$ rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$; donc, etc.

IV. *Théorème fondamental.* Soit

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ldots, \ F_n = 0$$

un système de n équations *homogènes, littérales* entre les n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$; F_1 est du degré p_1, F_2 du degré $p_2, \ldots$, F_n du degré p_n. Soit $p_1p_2p_3\ldots p_n = P$. En éliminant les inconnues, on parvient à une équation homogène entre les coefficients. Les coefficients de F_1 montent dans chaque terme au degré $\frac{P}{p_1}$, les coefficients de F_2 au degré $\frac{P}{p_2}$, etc.; conséquemment le degré de l'équation est $P\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right)$.

Démonstration. On peut éliminer entre ces n équations les $n - 1$ rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots$, et l'on parvient ainsi à une équation nécessairement homogène entre les coefficients, équation désignée sous le nom de *résultante*. Concevons la fonction F_1 décomposée en p_1 facteurs de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$, de même F_2 en p_2 de ces facteurs, et ainsi des autres. Prenons un facteur de F_1, un deuxième de F_2, un troisième de F_3, etc.; les égalant à zéro, on aura n équations du premier degré, homogènes entre n inconnues. D'après le lemme III, on aura un déterminant nul de degré n, dans lequel chaque coefficient entre au premier degré : on obtient ainsi P déterminants; le produit de ces P déterminants est identique avec la *résultante*. Pour fixer les idées, soit $p_1 = 3$, de sorte que

$$F = Ax_1^3 + Bx_1^2 x_2 + \ldots,$$

et

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n)(b_1 x_1 + \ldots b_n x_n)(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots c_n x_n);$$

il est évident que dans le produit des P déterminants, a_1 entrera à la puissance $\frac{P}{p_1}$, de même b_1 et c_1; donc $a_1 b_1 c_1$ ou A ne peut entrer qu'à la puissance $\frac{P}{p_1}$, et on démontre de même qu'en général les termes de la résultante sont de degré $\frac{P}{p_n}$ par rapport au coefficient de F_1, et ainsi des autres; donc, etc.

Nota. Ce thèorème important est énoncé sans démonstration dans un Mémoire de M. Cayley (CRELLE, t. XXXIV, p. 90; 1846).

V. PROBLÈME. *Trouver l'équation du système de droites tirées d'un point donné, dans le plan de deux courbes aux points d'intersection.*

Solution. Soient

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

les équations données des deux courbes planes. F est du degré n, et f du degré m; x', y', z' sont les coordonnées du point donné, et x'', y'', z'' les coordonnées d'un point quelconque pris sur une de ces droites : l'équation de cette droite est donc

$$x[y'z''] + y[z'x''] + z[x'y''] = 0.$$

Éliminant x, y, z entre cette équation et les équations (1) et (2), on obtient, d'après le théorème fondamental, une équation homogène θ de degré mn par rapport à $[y'z'']$, $[z'x'']$, $[x'y'']$; cette équation peut se décomposer en mn facteurs linéaires par rapport à z'', x'', y'', et dont les coefficients sont des fonctions irrationnelles de x', y', z'. Chaque facteur égalé à zéro appartient à une des droites en question : donc l'équation représente le système de ces lignes; de sorte que x'', y'', z'' sont les coordonnées courantes de ces droites.

VI. *Trouver l'équation du système des tangentes menées d'un point donné dans le plan d'une courbe à cette courbe.*

1[re] *Solution.* Même notation; $F(x, y, z) = 0$, équation de la courbe de degré n. Si l'on élimine x, y, z entre les trois équations

$$(1) \qquad F = 0,$$

$$(2) \qquad x'\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz} = 0,$$

$$(3) \qquad x[y'z''] + y[z'y''] + z[x'y''] = 0,$$

le résultat est une fonction homogène de degré $n(n-1)$ par rapport à $[y'z'']$, $[z'y'']$, $[x'y'']$; car l'équation (1) est de degré n, l'équation (2) de degré $n-1$, et cette fonction est de l'ordre n par rapport à x', y', z'. Les coefficients de F se trouvant dans l'équation (1) et dans l'équation (2), ils sont donc dans chaque terme du degré n

et du degré $n-1$, c'est-à-dire du degré $2n-1$; mais l'équation résultante, d'après sa nature, renferme un facteur rationnel linéaire par rapport aux coefficients de F, et qu'on obtient en remplaçant dans $F=0$, x, y, z par x', y' z', car on a l'identité

$$x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}+z\frac{dF}{dz}=nF=0.$$

Otant donc ce facteur, la résultante n'est plus que du dégré $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de F : c'est ce qu'on nomme la *résultante réduite.*

Observation. Faisons $X=[y'z'']$, $Y=[z'x'']$ et $Z=[x'y'']$; substituant dans la résultante réduite, on obtient une équation de degré $n(n-1)$ par rapport à X, Y, Z, et qui n'est autre que celle de la polaire réciproque de $F=0$ par rapport à la conique $x^2+y^2+z^2=0$; l'équation (2) est celle d'une droite tangente à la courbe $F=0$. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du pôle relativement à la conique, on a

$$n=k=k'=0,\quad l=l'=-4,\quad m=-4,$$
$$d=\frac{dU}{dy},\quad e=\frac{dF}{dx},\quad f=\frac{dF}{dz};$$

donc

$$x_1=e,\quad y_1=d,\quad z_1=f \text{ (t. II, p. 305)},$$

d'où

$$xx_1+yy_1+zz_1=0.$$

Ainsi X, Y, Z sont les coordonnées du pôle de la tangente.

2^e^ *Solution.* x'', y'', z'' étant sur la tangente, on a

$$(4)\qquad x''\frac{dF}{dx}+y''\frac{dF}{dy}+z''\frac{dF}{dz}=0,$$

et cette équation peut tenir lieu de l'équation (3); ainsi, d'après le théorème fondamental, la *résultante* est de l'ordre $n(n-1)$ par rapport à x', y', z', et de même par rapport à x'', y'', z''. Et quant aux coefficients de F, qui se trouvent aussi dans l'équation F, ils sont de l'ordre $(n-1)^2 + n(n-1) + n(n-1) = (n-1)(3n-1)$; mais on a vu ci-dessus que la résultante est de l'ordre $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de F : il doit donc se trouver ici un facteur à ôter de l'ordre

$$(n-1)(3n-1) - 2(n-1) = 3(n-1)^2.$$

En effet, on trouve ce facteur en posant

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0;$$

ces valeurs satisfont aux équations (1), (2), (4); car

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz} = nF,$$

et la *résultante* de ces équations est de l'ordre $3(n-1)^2$ par rapport aux coefficients de F.

3^e^ *Solution*. L'équation (3) est satisfaite en y remplaçant x, y, z, soit par x', y', z', soit par x'', y'', z''; donc on y satisfait en écrivant $x = sx' + tx''$, $y = sy' + ty''$, $z = sz' + tz''$; s et t étant des quantités quelconques. L'équation $F = 0$ peut être remplacée par celle-ci :

$$(5) \qquad x''\frac{dF}{dx} + y''\frac{dF}{dy} + z''\frac{dF}{dz} = 0;$$

de sorte que nous avons le système des trois équations (2), (3), (5). Représentons par (F) ce que devient F en y remplaçant x, y, z par les valeurs en s et t; nous aurons

$$\frac{d(F)}{ds} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds} = x'\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz}.$$

Donc l'équation

$$(6) \qquad \frac{d(F)}{ds} = 0$$

peut remplacer l'équation (2); de même l'équation

$$(7) \qquad \frac{d(\mathrm{F})}{dt} = 0$$

tient lieu de l'équation (5). Éliminant s et t entre ces deux équations, on obtient l'équation résultante. Soit $\mathrm{M}x^p y^q$ un terme de F et $p+q=n$, ce terme devient $\mathrm{M}(lx'+mx'')^p\ (lx'+mx'')^q$; prenant la dérivée par rapport à l, on obtient $p\mathrm{M}(lx'+mx'')^{p-1}[lx'+mx'']^q$, et encore deux autres termes analogues: celui-ci fournit le terme $pl^{p-1+q}[\mathrm{M}x'^{p+q}]$: ainsi cette équation résultante est de degré $n-1$ par rapport à l. Il en est de même en prenant la dérivée par rapport à m; donc les coefficients sont de degré $2(n-1)$ dans la résultante, c'est-à-dire le coefficient (M) de F sont de degré $2(n-1)$, et les quantités x', y', z', x'', y'', z'' sont de degré $2n(n-1)$, ou, ce qui revient au même, les binômes $[x'y'']$, $[x'z'']$, $[y'z'']$ sont de degré $n(n-1)$. De là ce théorème :

L'équation du système de tangentes menées du point donné (x', y', z') à la courbe $\mathrm{F}=0$ se trouve en éliminant s, t entre les équations $\frac{d[\mathrm{F}]}{ds}=0$, $\frac{d(\mathrm{F})}{dt}=0$, $[\mathrm{F}]$ étant ce que devient F par les substitutions

$$x = sx' + tx'', \quad y = sy' + ty'', \quad z = sz' + tz''.$$

L'équation résultante est une fonction de degré $n(n-1)$ par rapport aux binômes alternés $[x'y'']$, $[y'z'']$, $[z'x'']$, et représentant ces termes par x, y, z, on obtient l'équation de la polaire réciproque de la résultante par rapport à la conique $x^2+y^2+z^2=0$.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES SUR LE FOYER ET LA DIRECTRICE DE LA PARABOLE.

Remarque. Nous mettrons ici quelques théorèmes qu'on trouve partout, uniquement pour compléter ce travail.

Problème I. *Étant donnés deux points et le foyer d'une parabole, trouver une équation de cette conique.*

Solution. Soient A, B, F les deux points et le foyer donnés, prenons ce foyer pour origine; soient y', x', y'', x'' les coordonnés des points A et B, les axes étant rectangulaires: l'équation de la courbe est

$$(y^2 + x^2)(k^2 + k'^2) = (k'y + kx - l)^2 \text{ (voir t. II, p. 427).}$$

Faisons

$$x'^2 + y'^2 = r'^2, \quad x''^2 + y''^2 = r''^2.$$

Faisons, de plus, $\frac{k}{k'} = v$; nous aurons

$$(1) \qquad y' + vx' - \frac{l}{k'} = r'\sqrt{1 + v^2},$$

$$(2) \qquad y'' + vx'' - \frac{l}{k'} = r''\sqrt{1 + v^2}.$$

Retranchant membre à membre et faisant disparaître le radical, nous obtiendrons

$$v^2[(x' - x'')^2 - (r' - r'')^2] + 2v(y' - y'')(x' - x'') = (r' - r'')^2(y' - y'')^2;$$

d'où

$$v[(r' - r'')^2 - (x' - x'')^2] = (x' - x'')(y' - y'') \pm (r' - r'')\sqrt{2(v'v'' - x'x'' - y'y'')}.$$

1^re^ *Observation.* Lorsque l'angle AFB est aigu, on peut toujours prendre les axes de manière que les quatre coordonnées des deux points soient positives; par conséquent, r' et r'' doivent être de même signe. Donc v n'a que deux valeurs toujours réelles, car $v'v'' > x'x'' + y'y''$, et de même $\frac{l}{k'}$; on parvient au même résultat lorsque l'angle AFB n'est pas aigu.

2ᵉ *Observation.* Si l'on prend FA pour axe des x, les valeurs de v seront données en parties du triangle FAB.

3ᵉ *Observation.* La solution géométrique revient à mener des tangentes communes aux deux cercles décrits des points A et B comme centres, avec les rayons FA et FB; les deux cercles se coupant au point F, il n'y a que deux tangentes, lesquelles sont les directrices des deux paraboles qui répondent à la question.

4ᵉ *Observation.* Lorsque les deux points et le foyer sont sur la même droite, la parabole se réduit à cette droite, et la directrice, perpendiculaire à cette droite, passe par le foyer. Les points de la droite sont alors à égale distance du foyer et de la directrice; ce qui caractérise la parabole.

Problème II. *Étant donnés le foyer et un point d'une parabole, trouver 1° le lieu du sommet; 2° l'enveloppe de la directrice.*

Solution. Conservons la même notation. L'équation de la directrice est $y + vx - \frac{l}{k'} = 0$; l'équation de l'axe principal est $vy - x = 0$. Éliminant v entre ces deux équations, après avoir remplacé $\frac{l}{k'}$ par sa valeur tirée de l'équation (1), on a pour le lieu du point où l'axe rencontre la directrice, l'équation

$$(y^2 + x^2 - yy' + xx')^2 = r'^2(y^2 + x^2),$$

équation d'une *aplanétique* (tome IV, page 426). C'est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point du cercle $(y-y')^2+(x-x')^2=v^2$ sur les tangentes à ce cercle. C'est aussi une épicycloïde (*v.* t. III, p. 124). L'origine est un point conjugué à la courbe, comme cela doit être; ce point disparaît. En passant aux coordonnées polaires, on a

$$z\cos 2\varphi - y'\sin\varphi + x'\cos\varphi = \pm v',$$

équation d'une courbe facile à construire. Il est évident que le lieu du sommet est une courbe semblable à celle-ci, de dimension moitié moindre et semblablement située relativement au foyer.

Directrice. Éliminant $\frac{l}{k'}$ de l'équation de la directrice, on obtient

$$(a) \qquad [y-y'+v(x-x')]^2 = r'^2(1+v^2);$$

prenant la dérivée relativement à v, on a

$$(b) \qquad [y-y'+v(x-x')](x-x') = vr'^2;$$

d'où

$$v = \frac{(y-y')(x-x')}{r'^2-(x-x')^2}.$$

Élevant l'équation (b) au carré et combinant cette nouvelle équation avec l'équation (a), on déduit

$$v^2 = \frac{(x-x')}{r'^2-(x-x')^2}, \qquad 1+v^2 = \frac{r'^2}{r'^2-(x-x')^2};$$

substituant ces diverses valeurs dans l'équation (a), on obtient

$$(y-y')^2+(x-x')^2 = r'^2.$$

L'enveloppe des directrices est donc le cercle décrit du point donné comme centre avec un rayon égal à r'.

Observation. Nous donnons ce calcul comme exercice, car les résultats sont intuitifs et s'obtiennent immédiatement.

Problème III. *Étant donnés le foyer, un point d'une parabole et une droite tangente, trouver une équation de cette conique.*

Solution. Même notation que ci-dessus, et de plus $dy + ex + f = 0$ l'équation donnée de la tangente; on a la relation

$$\frac{l}{k'}(d^2 + e^2) + 2f(d + ve) = 0 \text{ (t. II, p. 108)}.$$

Cette équation et l'équation (1) font connaître, par des équations du second degré, les valeurs de v et de $\frac{l}{k'}$ qui déterminent l'équation de la courbe.

Observation. On peut choisir les axes de telle sorte qu'on ait $e = 0$: l'on trouve alors $\frac{l}{k'} = -\frac{2f}{d}$; c'est l'ordonnée du point où la directrice rencontre l'axe des y, c'est-à-dire la parallèle à la tangente menée par le foyer, ordonnée qui est double de l'ordonnée $-\frac{f}{d}$ du point où la tangente rencontre l'axe des y. Substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$y' + vx' + \frac{2f}{d} = r'\sqrt{1 + v^2},$$

résultats auxquels on peut parvenir immédiatement.

Problème IV. *Étant donnés le foyer et une tangente, trouver l'enveloppe de la directrice et le lieu du sommet.*

Solution. Abaissant du foyer une perpendiculaire sur la tangente, le pied de la perpendiculaire est le point enveloppe des tangentes au sommet; donc le lieu du sommet est une circonférence décrite sur la perpendiculaire comme diamètre. Prolongeant la perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même, on obtient le point enveloppe des directrices.

Problème V. *Étant donnés le foyer et deux tangentes, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Conservons mêmes axes, même origine, même notation qu'au problème I. L'équation de la courbe est

$$(y^2+x^2)(1+v^2)=\left(y+vx-\frac{l}{k'}\right)^2.$$

Soient $dy+ex+f=0$, $d'y+e'x+f'=0$ les équations des deux tangentes; on a donc les deux relations

$$\frac{l}{k'}(d^2+e^2)+2f(d+ve)=0,$$

$$\frac{l}{k'}(d'^2+e'^2)+2f'(d'+ve')=0;$$

ces deux équations du premier degré entre v et $\frac{l}{k'}$ donnent les valeurs de ces inconnues: il n'y a donc qu'une solution.

Solution géométrique. Du foyer on abaisse une perpendiculaire sur une tangente, on la prolonge doublée, ce qui donne un point de la directrice; l'autre tangente donne un second point.

Problème VI. *Étant donnés le foyer, une tangente et le point de contact, trouver une équation de la courbe.*

Solution. En prenant les mêmes notations, soient x', y' les coordonnées du point de contact; on a les deux équations

$$v^2y'^2+2x'v\frac{l}{k'}+\frac{l^2}{k'^2}-2x'y'v+2y'\frac{l}{k'}=0,$$

$$\frac{l}{k'}(d^2+e^2)+2f(d+ve)=0,$$

qui donnent deux valeurs pour les inconnues $\frac{l}{k'}$ et v; on peut choisir les axes de manière qu'on ait $e=0$, ce qui abrége le calcul.

Solution géométrique. La solution géométrique ne présente aucune difficulté.

PROBLÈME VII. *Étant donnés trois points et la direction de l'axe, trouver l'équation de la courbe.*

Solution. Prenons le point A pour origine, le diamètre qui y passe pour axe des x, et les axes rectangulaires. Soient x', y', x'', y'' les coordonnées des deux autres points; l'équation de la courbe est de la forme

$$y^2 + Dy + Ex = 0.$$

On détermine D et E au moyen des deux équations du premier degré

$$Dy' + Ex' = -y'', \quad Dy'' + Ex'' = -y''^2,$$

lesquelles donnent

$$D(y'x'' - x'y'') = x'y''^2 - x''y'^2,$$
$$E(y'x'' - x'y'') = y''x'^2 - y'x''^2.$$

On a

$$k = 2E,\ k' = 0,\ l = D^2,\ l' = E^2,\ L = E^2,\ N = 1;$$

donc α et β étant les coordonnées du foyer, on a

$$\alpha = \frac{D^2 - E^2}{4E},\quad \beta = -\frac{D}{2}$$ (t. II, p. 432) et pour le sommet,

$$\alpha' = \frac{D^2}{4E},\quad \beta' = -\frac{D}{2},$$

$$4Ex + D^2 - E^2 = 0,$$ équation de la directrice.

La solution géométrique s'obtient en faisant passer le diamètre par le milieu d'une des cordes données.

PROBLÈME VIII. *Étant donnés deux points et la direction de l'axe, trouver* 1° *le lieu du foyer;* 2° *le lieu du sommet.*

Solution. Même notation et même système de coordonnées que pour le problème précédent. On a

$$Dy' + Ex' = -y'^2,\quad D = -2\beta,$$
$$E^2 + 4\alpha E = 4\beta^2,\quad Ex' = 2\beta y' - y'^2.$$

Éliminant E, on obtient, pour le lieu du foyer,

$$4\beta^2(y'^2 - x'^2) + 8x'y'\alpha\beta - 4y'^3\beta - 4x'y'^2\alpha + y'^4 = 0,$$

équation d'une hyperbole.

Les coordonnées du centre sont $\frac{1}{2}x'$, $\frac{1}{2}y'$, et les équations des asymptotes sont

$$2\beta - y' = 0,$$
$$2\beta(x'^2 - y'^2) - 4\alpha x'y' + y'(y'^2 + x'^2),$$
$$x'\beta^2 - 2y'\beta\alpha + y'^2\alpha = 0, \text{ hyperbole, lieu du sommet.}$$

Les coordonnées du centre sont $\frac{1}{2}x'$ et $\frac{1}{2}y'$, et les asymptotes sont parallèles aux droites $\beta = 0$, $\beta x' - 2\alpha y' = 0$.

PROBLÈME IX. *Étant donnés deux points, une tangente, la direction de l'axe, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Même notation et même système d'axes qu'au problème précédent. Soit $dy + ex + f = 0$ l'équation de la tangente.

On a pour condition de tangence

$$[Ed - De]^2 + 4efE = 0 \quad \text{(t. II, p. 108)}$$

et

$$Dy' + Ex' = -y'^2.$$

Par l'élimination de D, il vient

$$E^2[dy' + ex']^2 + 2Eey'^2[dy' + ex' + 2f] + e^2y'^4 = 0;$$

d'où

$$E[dy' + ex']^2 = -ey'^2\left[dy' + ex' + 2f \pm 2\sqrt{f(dy' + ex' + f)}\right].$$

PROBLÈME X. *Étant donnés un point, une tangente et la direction de l'axe, trouver* 1° *le lieu du foyer;* 2° *le lieu du sommet.*

Solution. Prenons le point pour origine, la direction de l'axe pour axe des x, et les coordonnées rectangulaires; l'équation de la parabole est

$$y^2 + Dy + Ex = 0.$$

Même notation qu'au problème précédent; ainsi on a, pour condition du contact,

$$(Ed - Dc)^2 + 4efF = 0.$$

On a, en outre (*voir* Problème VII),

$$\alpha = \frac{D^2 - E^2}{4E}, \quad \beta = -\frac{D}{2}.$$

Éliminant D et E entre ces trois équations, on obtient une équation du quatrième degré qui se décompose en ces deux autres,

$$\beta^2 = 0, \quad \beta^2(d^2 - e^2)^2 + 4\alpha\beta(d^2 - e^2)de + 4\alpha^2 d^2 e^2 - 8de^2 f\beta \\ - 4e^3 f\alpha - 4e^2 f^2 = 0.$$

Cette dernière représente une parabole dont la direction de l'axe est donnée par l'équation

$$\beta(d^2 - e^2) + 2\alpha de = 0.$$

Lorsque $f = 0$, l'origine devient un point de contact; la parabole se réduit à cette droite, ce qui est évident à priori, et cette droite fait, avec l'axe des x, un angle double de celui que fait la tangente avec cet axe.

Le sommet (voir Problème VII), $D = -2\beta$; $E = \frac{\beta^2}{\alpha}$.
Substituant ces valeurs dans l'équation de contact, et divisant par β^2, on obtient

$$\beta^2 d^2 + 4de\alpha\beta + 4e^2\alpha^2 + 4def = 0,$$

équation d'une parabole.

Problème XI. *Étant données trois tangentes et la direction de l'axe, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Prenons pour origine le point d'intersection de deux de ces tangentes, et pour axe des x, le diamètre qui passe par ce point. Soient

$$dy + ex + f = 0, \quad d'y + e'x = 0, \quad d''y + e''x = 0$$

les équations des trois tangentes, et

$$y^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Les trois conditions de tangence sont exprimées par les équations

(1) $$E^2 d^2 - 2deDE + (D^2 - 4F)e^2 + 4feF = 0,$$

(2) $$E^2 d'^2 - 2d'e'DE + (D^2 - 4F)e'^2 = 0,$$

(3) $$E^2 d''^2 - 2d''e''DE + (D^2 - 4F)e''^2 = 0.$$

Éliminant $D^2 - 4F$ entre (2) et (3), et faisant disparaître le facteur commun $d'e'' - d''e'$, on obtient

(4) $$E(d'e'' + d''e') = 2e'e''D.$$

Éliminant $D^2 - 4F$ entre (1) et (3), on obtient de même

$$E(d^2e''^2 - d''^2e^2) + 2Dee''[d''e - de''] + 4fee''^2 = 0.$$

Faisons, pour abréger,

$$(de' - d'e)(de'' - d''e) = M;$$

d'où

$$DM + 2fe[d'e'' + d''e'] = 0;$$
$$EM + 4fee'e'' = 0;$$
$$FM^2 - f^2e^2[d''e' - d'e'']^2 = 0;$$
$$\left.\begin{array}{l} \alpha M + fe[d'd'' - e'e''] = 0 \\ \beta M + fe(d'e'' + d''e') = 0 \end{array}\right\}$$ coordonnées du foyer (*voir* t. II, p. 432);

$$Mx + 2fe[d'd'' + e'e''] = 0,$$ équation de la directrice (*voir* t. II, p. 433).

Observation. Lorsque $d'd'' + e'e'' = 0$, les deux tangentes sont perpendiculaires, et l'équation de la directrice se réduit à $x = 0$, ce qui est évident à priori.

SUITE DE LA QUESTION 31

(Voir t. VIII, p. 61);

PAR M. PH. BRETON (DE CHAMP).

Solution générale.

La surface que nous avons discutée ci-dessus est du troisième ordre, et il a fallu donner une forme particulière à son équation pour satisfaire à la condition proposée. Dans les degrés supérieurs, en prenant toujours l'axe des x pour la droite appartenant à la surface, l'équation de cette dernière doit évidemment être de la forme

$$y\psi(x, y, z) + z\varpi(x, y, z) = 0,$$

ψ et ϖ étant des fonctions entières des coordonnées x, y, z. En effet, si l'on suppose $y = 0$, $z = 0$, l'équation est satisfaite quelque valeur qu'on attribue à x, de sorte que l'axe des abscisses appartient, comme on le demande, à la surface.

L'équation

$$(y - bx - \beta)\psi(x, y, z) + (z - cx - \gamma)\varpi(x, y, z) = 0$$

appartient de même à une surface sur laquelle la droite $y = bx + \beta$, $z = cx + \gamma$ est située tout entière. Il s'agit maintenant de voir si cette droite est la seule qui se trouve dans ce cas.

Soit m le degré de la surface, posons généralement $y = b'x + \beta'$, $z = c'x + \gamma'$, et cherchons à faire que la droite représentée par ces équations se trouve sur la surface. Le résultat de la substitution, ordonné par rapport aux puissances descendantes de x, sera de la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

et il faut que cette équation soit satisfaite quelle que soit la valeur de x, ce qui exige qu'on ait

(A) $A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots, A_{m-1} = 0, \quad A_m = 0.$

De là $m + 1$ conditions entre les paramètres de l'équation proposée et les quatre quantités inconnues b', c', β', γ'. En éliminant ces dernières, il restera $m - 3$ conditions entre les paramètres connus.

Les équations d'où dépendent b', c', β', γ' pouvant s'élever au degré m, chacune de ces quantités est susceptible de présenter, d'après le théorème de Bezout, m^4 valeurs. Si m est pair, m^4 le sera aussi, et le nombre des systèmes de valeurs réelles des inconnues sera également pair. Donc il y aura, en général, plusieurs droites sur la surface donnée, puisque, d'après la forme de son équation, elle en admet déjà une. Ces droites pourront se confondre dans le cas des racines égales, et alors on aura une surface de degré pair satisfaisant à la question.

D'après l'hypothèse admise sur la forme de l'équation proposée, il existe au moins un système de valeurs de b', c', β', γ' qui satisfait aux équations (A); donc les $m - 3$ conditions qui restent après avoir éliminé ces inconnues, sont satisfaites identiquement, et, par suite, ne peuvent servir à limiter le nombre des solutions. C'est donc à rendre égales entre elles toutes les racines réelles s'il y en a nécessairement plusieurs, ou à n'en laisser subsister qu'une seule, qu'on doit tendre dans la recherche des surfaces sur lesquelles il n'est possible de tracer qu'une seule droite, sans se préoccuper des équations de condition qui semblent devoir se présenter nécessairement. On disposera des signes des paramètres et de leurs grandeurs, comme nous l'avons fait pour une surface du troisième degré, de telle sorte qu'il n'y puisse être tracé qu'une seule droite, ou plusieurs qui se réduisent à une seule, de même que dans le cas des racines égales.

POLYÈDRES RÉGULIERS ORDINAIRES ET POLYÈDRES RÉGULIERS ÉTOILÉS

(Voir t. VIII, p. 68),

D'APRÈS M. POINSOT.

11. Soit un polygone plan de n côtés et de l'espèce p; si par un point O pris hors du plan et par tous les côtés du polygone on mène n plans, on forme au point O un angle solide de n faces et de l'espèce p : une droite coupe donc les faces en $2(p-1)$ points. Si on conçoit une sphère ayant O pour centre, les faces de l'angle solide couperont la sphère suivant un polygone sphérique de n côtés et de l'espèce p. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des polygones sphériques réguliers de première espèce, et des angles solides réguliers de diverses espèces.

Le nombre des côtés d'un polygone régulier sphérique n'en détermine pas l'angle; soient donc n le nombre des côtés, a l'angle, et représentons par l'unité l'aire du triangle trirectangle.

L'aire de ce polygone est égale à $na - 2n + 4$; supposons que, f et g étant des nombres entiers positifs, f fois cette aire soit égale à g fois l'aire de la sphère, de sorte qu'on a

$$f(na - 2n + 4) = 8g;$$

il s'agit de savoir si l'on peut couvrir la sphère avec f de ces polygones réguliers égaux, de manière que les angles se réunissent en même nombre autour de chaque point, et y forment un angle solide régulier de même espèce: alors les cordes des côtés du polygone sphérique seront évidemment les arêtes d'un polyèdre régulier. On ne sait démontrer l'existence de cette possibilité que pour un petit nombre de cas, que nous allons examiner.

Soit $p - 1$ l'espèce de l'angle solide régulier, formé de q angles se réunissant en un point, on aura donc

$$qa = 4(p-1);$$

ainsi il faut, avant tout, satisfaire aux deux équations

$$f(na - 2n + 4) = 8g, \quad qa = 4(p-1).$$

f, n, g, q, p sont des nombres entiers positifs; n et q ne doivent pas être au-dessous de 3, et $p - 1$ doit être premier à q:

(A) $$g = 1, \quad p = 2.$$

1°. $n = 3$, $q = 3$, $a = \frac{4}{3}$, $f = 4$, tétraèdre régulier ordinaire.
2°. $n = 3$, $q = 4$, $a = 1$, $f = 8$, octaèdre régulier.
3°. $n = 3$, $q = 5$, $a = \frac{4}{5}$, $f = 20$, icosaèdre régulier.

Avec cette valeur de n, on ne peut faire q égal ou supérieur à 6.

4°. $n = 4$, $q = 3$, $a = \frac{4}{3}$, $f = 6$, hexaèdre régul. ou cube.

Avec cette valeur de n, on ne peut faire q égal ou supérieur à 4.

5°. $n = 5$, $q = 3$, $a = \frac{4}{3}$, $f = 12$, dodécaèdre régulier.

Avec cette valeur de n, on ne peut faire q égal ou supérieur à 4.

6°. $n = 6$.

Aucune valeur de q égal ou supérieur à 3 n'est admissible.

(B) $$p = 3.$$

Le pentagone est le premier polygone qui offre un polygone régulier de seconde espèce; faisons donc $q = 5$.

1°. $n = 3$, $a = \frac{8}{5}$, $f = \frac{20g}{7}$; d'où, en moindre nombre,

$$g = 7, \ f = 20.$$

Ainsi le polyèdre, s'il existe, a vingt faces triangulaires et recouvre sept fois la sphère. Or on peut en effet le construire à l'aide de l'icosaèdre ordinaire. De chaque sommet partent six diagonales; les cinq les plus courtes sont les arêtes égales d'un angle solide quintuple de la seconde espèce, et les douze angles solides fournissent 20 triangles équilatéraux également inclinés l'un sur l'autre: on aura ainsi un premier *icosaèdre étoilé*.

2°. $n=5$, $q=5$, $p=3$, $a=\frac{8}{5}$; d'où $f=4g$. g est au moins égal à 2; car, les angles solides étant de seconde espèce, la sphère doit être recouverte au moins deux fois.

Faisant donc $g=3$, $f=12$, ce solide existe et on le construit encore au moyen de l'icosaèdre ordinaire; de chaque sommet partent cinq arêtes dont les extrémités forment un pentagone régulier, les douze pentagones égaux forment un dodécaèdre étoilé.

12. Si dans le dodécaèdre étoilé précédent, qui recouvre trois fois la sphère, on prolonge de deux en deux les côtés des faces jusqu'à leur rencontre, on obtient douze pentagones réguliers de la seconde espèce, qui se réunissent par *trois* autour de vingt sommets, et forment un nouveau dodécaèdre étoilé, mais formé avec des pentagones de la seconde espèce; il a *vingt* angles solides triples, *trente* arêtes, et recouvre exactement quatre fois la sphère, de manière que sa surface ne peut être coupée par une droite en plus de huit points, et que l'angle solide est de *quatrième espèce*.

13. Si dans le dodécaèdre ordinaire on prolonge de même les côtés des douze pentagones, on obtient encore un nouveau dodécaèdre étoilé formé par des pentagones de la seconde espèce; mais les pentagones se réunissent par cinq autour de chaque sommet, et la surface du polyèdre ne recouvre que deux fois la sphère.

Observation. Les formules précédentes ne s'appliquent pas à ces deux solides, elles supposent des polygones de première espèce.

14. Ces quatre nouveaux polyèdres réguliers, une des plus belles découvertes de M. Poinsot et de la géométrie moderne, sont les seuls dont l'existence soit constatée. Existe-t-il encore d'autres polyèdres réguliers et dont le nombre de faces ne soit pas un de ceux-ci, 4, 6, 8, 12, 20? L'impossibilité est démontrée (Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique,* 16e cahier, page 75, 1813) (*).

La difficulté de se représenter ces solides est sans doute cause de l'abandon de cette étude, qui aurait peut-être un intérêt même pour la physique. Est-il donc impossible que la nature ait employé des polyèdres étoilés dans la formation intégrante des cristaux? Qui répond que des phénomènes de réfraction ne se rattachent pas à cette organisation? En tous cas, il serait utile que ces nouveaux corps réguliers fussent construits et placés dans les cabinets d'histoire naturelle des colléges avec les autres polyèdres, pour aider aux démonstrations cristallographiques.

15. On sait que, sous le rapport analytique, la théorie des polygones réguliers étoilés est un cas particulier de la théorie des racines de l'unité, exprimées trigonométriquement. On en voit des exemples dans les beaux Mémoires de MM. Realis, Amiot et Lebesgue (t. II, p. 3 et 147; t. III, p. 264; t. V, p. 683). On est bien loin d'avoir quelque chose d'analogue pour les polyèdres réguliers étoilés: c'est que les divisions en parties égales de la circonférence sont illimitées, tandis que celles de la sphère sont limitées.

16. Les centres des faces des cinq polyèdres réguliers

(*) Nous verrons que les deux premiers polyèdres de M. Poinsot appartiennent à Képler (*Harmonices Mundi*, lib. II, prop. XXVI).

ordinaires donnent : 1° pour le tétraèdre, un second tétraèdre régulier ; 2° pour le cube, un octaèdre ; 3° pour l'octaèdre, un cube ; 4° dans le dodécaèdre, un icosaèdre ; 5° dans l'icosaèdre, un dodécaèdre ; de même dans les quatre polyèdres de M. Poinsot.

17. Les points milieux des arêtes dans les cinq corps réguliers donnent : 1° tétraèdre, un second tétraèdre ; 2° cube, un corps semi-régulier construit sous huit triangles et six carrés, un des treize corps dits *archimédiques ;* 3° octaèdre, le même corps archimédique que pour le cube ; 4° dodécaèdre, autre corps archimédique construit sous douze pentagones et vingt triangles ; 5° icosaèdre, même que le précédent.

18. *Note historique.* Nous renvoyons à l'*Aperçu historique* (page 476, 1837), où ce sujet est traité avec la sagacité et l'érudition particulières à ce célèbre géomètre. Boëce (VI^e^ siècle) connaissait déjà le pentagone étoilé ; il en parle avec une obscurité que M. Chasles parvient à dissiper. On a fait même, de ce pentagone, des usages sous le nom de *pentalpha* et *hexalpha*, des usages mystiques et *magiques ;* dès lors, comme on s'y attend bien, on attribue le tout à Pythagore, providence des antiquaires. Je dois ajouter que les cabalistes ont fait un emploi extravagant de l'hexagone étoilé (triangle double), sous le nom de *maguen David,* bouclier de David. La première *notion* scientifique de tous les polygones étoilés se trouve dans la Géométrie de Bravardin, publiée en 1496 ; il les nomme *figures à angles égrédients.* Enfin, en 1619, Képler publia son *Harmonices Mundi.* Le but de l'ouvrage est de découvrir des harmonies arithmétiques, géométriques et musicales dans les mouvements des corps célestes. A cet effet, il traite des polygones qu'on peut inscrire géométriquement ; il mentionne le pentagone de deuxième espèce, l'octogone

et le décagone de troisième espèce, le pentédécagone de deuxième, quatrième et septième espèce, et l'étoile de vingt-quatre côtés de cinquième, septième et onzième espèce, et les désigne sous le nom de *stellæ,* étoiles; il ajoute que la *cos* (l'algèbre) donne bien les équations pour tous les polygones réguliers, mais pas la *solution.* Ainsi, d'après un certain algébriste, il rapporte cette équation,

$$7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0\,;$$

et il fait la remarque d'une haute importance, que les racines sont les cordes des polygones *étoilés.* Selon son habitude, après être parvenu à des conceptions sublimes, en écoutant les inspirations de son génie, il tombe dans des excentricités en s'abandonnant à la folle de la maison, son imagination. C'est ainsi qu'il passe de cette doctrine des racines, si étonnante pour le temps, à la distinction entre divers degrés de *cognition,* et soutient que la cognition géométrique de l'heptagone ne saurait faire partie de l'omniscience divine : *Neque scitur a mente omniscia actu simplici æterno, quia suâ naturâ ex inscibilibus est.* On lit en marge qu'un mathématicien, homme d'expérience, avait engagé Képler à ôter cette phrase, qui peut avoir une apparence blasphématoire; à quoi il répond que les théologiens admettent que : *Impossibilia esse quæ contradictionem involvunt, et Dei scientiam ad talia impossibilia se non extendere.* D'où il conclut : *Quæ adulatio, propter imperitos librum non lecturos, defraudare cœteros;* c'est-à-dire qu'il ne faut pas dérober la vérité aux hommes instruits, par ménagement pour des ignares qui ne lisent pas. Cette observation trouve sa place même ailleurs que dans l'*Heptagonie.* Dans le second livre du même ouvrage, Képler décrit les treize corps archimédiques (*corpora archimedea*), et en donne les figures. Ce sont des solides terminés par divers polygones réguliers, et qui probablement sont ainsi nommés parce qu'Archimède a aussi considéré des solides terminés par deux surfaces coniques, par un cône et un cylindre, etc. A la manière dont Képler en parle, il ne paraît pas que ces corps soient de son invention : on n'en connaît pas l'auteur. Ils ont été souvent employés dans la perspective. L'ouvrage le plus curieux de ce genre est du XVI^e siècle; voici le titre, traduit de l'allemand: *Perspectiva corporum regularium, c'est-à-dire indication soignée pour mettre très-artistement en perspective les cinq corps réguliers dont parle Platon dans son* Timée, *et Euclide dans ses* Éléments, *etc.; d'après une voie particulière, neuve, prompte et exacte, qui n'a jamais été mise en pratique; de plus, une belle direction pour trouver et construire sans fin, au moyen de ces cinq corps, beaucoup d'autres corps de diverses espèces et formes, en l'honneur de tous les amateurs des arts libéraux*, par Wentzel Jamitzer (bourgeois et horloger à Nuremberg). Anno M. DLXVIII.

L'ouvrage, d'une magnifique exécution, contient plus d'une centaine de corps mis en perspective. La seconde partie, qui devait contenir les règles, n'a pas paru. L'auteur, né vers 1508 à Nuremberg, y est mort le 15 décembre 1586. On trouve une description détaillée de cet ouvrage, d'une extrême rareté, dans l'*Histoire des Mathématiques* de Kästner (tome II, page 19, 1797). Le même écrivain a donné, je crois, la première classification et la théorie de ce genre de corps dans les *Mémoires de la Société de Gottingue* (*De corporibus polyedris data lege irregularibus et commentationes*, tome VI, 1783; tome VIII, 1785, 86, 87 et 88). Une exposition trigonométrique complète de ces corps se lit dans la *Collection de Problèmes géométriques* de Meier Hirsch (t. II, p. 139, 1807); et, en français, on trouve quelques données et calculs sur ces corps, en 1808, dans l'ouvrage de Lidonne (voir *Nouvelles Annales,* tome I) ; mais les quatre nouveaux polyèdres réguliers sont mentionnés, pour la première fois, dans le célèbre Mémoire de M. Poinsot (*Journal de l'École Polytechnique,* 10^e^ cahier, page 16, 1810). On ne saurait trop engager les élèves à lire cette remarquable production de l'ingénieux géomètre; quant aux professeurs, il n'en existe pas un seul qui ne l'ait lue plusieurs fois.

Nous nous occuperons du Mémoire de M. Cauchy, cité ci-dessus.

SUR L'HEXAGRAMME MYSTIQUE

(Voir t. III, p. 304);

Par M. LEBESGUE.

Cette proposition de Pascal ou de Desargues, suivant M. Gergonne, est bien nommée en ce sens qu'elle est en quelque sorte la figure, ou plutôt la représentation géométrique exacte de l'équation d'une conique qui passe par cinq points fixes. Cette proposition doit donc renfermer toute la théorie des sections coniques, puisque cette théorie n'est qu'un développement des propriétés de l'équation générale des courbes algébriques du second degré.

Avant de démontrer ce que j'avance ici, ce qui d'ailleurs l'a été en d'autres termes, je donnerai, d'après MM. Steiner et Plucker, l'énoncé complet des propriétés de l'hexagone mystique.

« Six points pris arbitrairement sur le périmètre d'une
» conique quelconque sont les sommets de soixante hexa-
» gones inscrits, et les points de contact de soixante hexa-
» gones circonscrits (Carnot, *Géométrie de position*),
» lesquels jouissent des propriétés suivantes :

« 1°. Dans chacun des hexagones » inscrits, les points de concours des » directions des côtés opposés ap- » partiennent tous les trois à une » même droite (D) (Pascal), de » sorte qu'on obtient ainsi soixante » droites D.

» 2°. Ces soixante droites D con- » courent trois à trois dans un » même point p, de sorte qu'on ob- » tient ainsi vingt points p.

» 3°. Ces vingt points p appartien- » nent à quinze droites δ dont cha- » cune en contient quatre, de sorte » que par chacun des vingt points p, » passent trois des quatre droi- » tes δ. »

« 1°. Dans chacun des hexagones » circonscrits, les droites qui joi- » gnent les sommets opposés con- » courent toujours par trois dans » un même point (P) (Brianchon), » de sorte qu'on obtient ainsi » soixante points P.

» 2°. Ces soixante points P ap- » partiennent trois à trois à une » même droite d, de sorte qu'on » obtient ainsi vingt droites d.

» 3°. Ces vingt droites δ concou- » rent dans quinze points ϖ, par » chacun desquels en passent qua- » tre, de sorte que chacune des vingt » droites d contient trois des quinze » points ϖ. »

(Journal de M. Crelle, tome XXXIV, page 338.)

Il suffira de démontrer ici la proposition de Pascal, les autres serviront d'exercices. On peut d'ailleurs consulter les Mémoires de M. Plucker indiqués à l'endroit cité.

L'équation la plus générale des courbes du deuxième degré ou des coniques renferme six coefficients, dont un pourrait être réduit à l'unité; il suit de là qu'en se donnant cinq points de la conique, on aura cinq équations du premier degré pour déterminer les coefficients.

Dans le chapitre IV de son Introduction, Euler prend pour coordonnées des cinq points,

$$\begin{array}{lllll} x = 0, & x = a, & x = 0, & x = c, & x = e, \\ y = 0, & y = 0, & y = b, & y = d, & y = f. \end{array}$$

L'équation de la courbe cherchée

$$\text{(A)} \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

est entièrement déterminée en posant

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{ll} A = ce[f(a-c) - d(a-e)], & D = -bA, \\ B = cf(a-c)(b-f) - de(a-e)(b-d), & E = -aC, \\ C = df[c(b-f) - e(b-d)], & F = 0. \end{array} \right.$$

Il existe donc toujours une conique et une seule passant par les cinq points donnés (on suppose que trois points ne sont pas en ligne droite).

Si l'on met dans (A) les valeurs des coefficients (B), l'équation pourra prendre diverses formes, parmi lesquelles on distinguera la suivante :

$$\text{(C)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & X(y-f)(dx-cy)+Y(x-c)(ey-fx) \\ & \qquad = (dx-cy)(ey-fx). \end{aligned} \right.$$

La comparaison donnerait les valeurs de X et Y, mais il est plus simple de les calculer directement ainsi qu'il suit : L'équation (C) du deuxième degré en x, y coordonnées d'un point variable de la courbe est évidemment satisfaite par $x=0$, $y=0$; $x=c$, $y=d$; $x=e$, $y=f$. Ainsi la conique (e) passe par (c) des cinq points; si on exprime qu'elle passe par les deux autres, en posant successivement $x=0$, $y=b$; $x=a$, $y=0$, on trouvera deux équations qui sont précisément celles des droites passant par les points $(0, 0)$, (c, d), $(0, b)$, (e, f). Pour fixer les idées, nous numéroterons ainsi qu'il suit les cinq points fixes et le point variable :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ (0,\ 0), & (a,\ 0), & (c,\ d), & (x,\ y), & (e,\ f), & (0,\ b); \end{array}$$

l'hexagone sera 123456. On voit donc que X et Y sont les coordonnées du point de rencontre des côtés opposés (2, 3), (5, 6).

D'autre part, l'équation

$$\text{(D)} \qquad \frac{X}{P}+\frac{Y}{Q}=1$$

représente une droite coupant l'axe des x à une distance P de l'origine, et l'axe des y à une distance Q de la même origine. Or l'équation (C) prend la forme (D), si l'on pose

$$P = \frac{ey - fx}{y - f}, \quad Q = \frac{dx - cy}{x - c};$$

comme $y = 0$, $x = P$ sont les coordonnées de l'intersection des côtés opposés (1, 2), (4, 5), de même $x = 0$, $y = Q$ sont celles de l'intersection des côtés opposés (1, 6), (3, 4).

L'équation (C) ou l'équation (D) exprimera donc que les trois points d'intersection des côtés opposés sont en ligne droite. C'est là une des propriétés principales de l'hexagone mystique; c'est, comme l'on voit, l'interprétation géométrique de l'équation (C).

On aurait pu remplacer l'équation (C) par l'équation

$$\begin{aligned} X(y-d)(ey-fx) + Y(x-e)(dx-cy) \\ = (dx-cy)(fx-cy), \end{aligned}$$

et l'on aurait obtenu semblablement un théorème analogue qui donne, ainsi que le précédent, un moyen facile de construire par points et avec la règle, seulement les coniques qui passent par cinq points donnés.

SOLUTION DE LA QUESTION 203

(Voir t. VII, p. 441, et t. VIII, p. 45);

PAR M. E. FERIER,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Catalan).

Dans un pentagone, si l'on considère comme sommets d'un pentagone :

1°. Les points milieux des cinq diagonales;

2°. Les centres de gravité des cinq triangles formés par deux diagonales et un côté, on obtient deux pentagones semblables et inversement placés.

Soit ABCDE (*fig.* 10, *Pl. II*) le pentagone donné.

On construit, d'après l'énoncé, le pentagone FGHIK, qui a pour sommets les milieux des diagonales AC, BD, CE, DA, EB.

Puis le pentagone $F'G'H'I'K'$, qui a pour sommets les centres de gravité, c'est-à-dire les points de rencontre des médianes des triangles BED, ACE, ABD, BEC, ACD.

Il faut démontrer que ces deux pentagones sont semblables et inversement situés, c'est-à-dire que les droites qui joignent les sommets homologues se coupent en un même point, et que les sommets homologues sont de part et d'autre de ce point.

Il suffit de démontrer pour cela que les côtés $F'G'$ et FG, $G'H'$ et GH, etc., sont parallèles, et qu'on a, de plus, la suite des rapports égaux :

$$\frac{F'G'}{FG} = \frac{G'H'}{GH} = \frac{H'I'}{HI} = \frac{I'K'}{IK} = \frac{F'K'}{FK}.$$

La droite $F'G'$ est parallèle à FG. En effet, pour obtenir le point F', on a pris le point de rencontre des médianes du triangle EBD, c'est-à-dire que le point F' se trouve sur la médiane EG, aux deux tiers à partir du sommet E. De même le point G' est sur la médiane EF dans le triangle EAC, aux deux tiers à partir du sommet E; par conséquent

$$\frac{EG'}{EF} = \frac{EF'}{EG};$$

donc la droite $F'G'$ est parallèle à la base FG, et de plus on a

$$\frac{F'G'}{GF} = \frac{2}{3}.$$

On démontrerait de même que dans le triangle DKF, on a F′K′ parallèle à KF, et que, de plus,

$$\frac{F'K'}{FK} = \frac{2}{3},$$

et ainsi de suite pour les autres côtés. Donc ces deux pentagones ont leurs côtés parallèles et proportionnels ; donc ils sont semblables.

On voit, de plus, qu'ils sont inversement situés.

QUESTIONS D'EXAMEN SUR LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES (*).

Il ne s'agit que de constructions avec la règle et le compas, dites *géométriques*.

I. *Lemme*. On sait construire les valeurs de x dans les équations $x = \frac{M}{N}$, $x^2 = \frac{P}{Q}$, M et P étant des monômes de degré n, N et Q des monômes de degré $n - 1$ et $n - 2$.

II. Problème. *Construire la valeur de x dans l'équation $x = \frac{M}{N}$, M étant un* polynôme *rationnel de degré n, et* N *un polynôme rationnel de degré $n - 1$.*

Solution. Prenons deux monômes quelconques A et B, l'un de degré $n - 1$ et l'autre de degré $n - 2$, et considérons A et B comme facteurs communs à tous les termes des polynômes M et N ; on a $M = AM_1$ et $N = BN_1$, d'où $x = \frac{AM_1}{BN_1}$. Mais A et B, monômes du premier degré, peu-

(*) M. J. Bertrand examinateur.

vent être réduits à un seul terme; donc AM_1 et BN_1 devenant des monômes, on revient au cas du lemme.

III. PROBLÈME. *Construire la valeur de x dans l'équation* $x^2 = \frac{M}{N}$; M *étant un polynôme rationnel de degré* n, *et* N *un polynôme rationnel de degré* $n - 2$.

Solution. Prenant deux monômes quelconques A et B de degré $n - 1$ et $n - 3$, et opérant comme au précédent problème, on a $x^2 = \frac{AM_1}{BN_1}$; le numérateur et le dénominateur étant des monômes, on retrouve le lemme.

Observation. Il est presque inutile d'ajouter qu'on doit et qu'on peut former A et B avec les lignes qui se trouvent déjà dans les polynômes.

IV. PROBLÈME. *Construire la valeur de x dans l'équation* $x^{2n} = M$; M *étant un polynôme rationnel de degré* $2n$.

Solution. On réduit d'abord le polynôme à un monôme par ce qui précède. Supposons donc que M soit un monôme de degré $2n$: deux facteurs peuvent être réduits à un carré; donc tout le monôme peut être converti en un produit de n carrés. Extrayant de part et d'autre la racine carrée, on obtient $x^n = M_1$, où M_1 est de degré n; si n est pair, on est amené à une équation de degré $\frac{n}{2}$; et ainsi de suite. Donc, si n est une puissance de 2, la valeur de x est constructible géométriquement; et, en tout cas, on peut parvenir à une équation de degré impair, mais qu'on ne sait pas construire.

Observation. Il est bien entendu que M n'est ni négatif, ni une puissance parfaite d'ordre $2n$.

V. PROBLÈME. *Construire* $x = a\sqrt[p]{m}$; *a est une ligne, p un nombre entier positif et m un nombre.*

Solution. On a $x^p = ma^p$; faisant $ma = b$, on a $x^p = ba^{p-1}$, expression qu'on saura construire si p est une puissance de 2.

VI. Problème. *Construire*

$$x = \frac{a\sqrt[p]{m} + a_1\sqrt[p_1]{m_1} + a_2\sqrt[p_2]{m_2} + \ldots}{\sqrt[q]{n} + \sqrt[q_1]{n_1} + \ldots};$$

a, a_1, a_2,... sont des lignes, p, p_1, p_2,..., q, q_1, q_2,... sont des puissances de 2, et m, m_1, m_2,... des nombres positifs.

Solution. Multipliant haut et bas par une ligne quelconque b, on obtient

$$x = \frac{\sqrt[p]{ma^p b^p} + \sqrt[p_1]{m_1 a_1^{p_1} b^{p_1}} + \ldots}{\sqrt[q]{nb^q} + \sqrt[q_1]{n_1 b^{q_1}} + \ldots}.$$

Chaque monône du numérateur se ramène à un carré, et chaque monôme du dénominateur à une ligne; donc on sait construire x.

Exemple. Partager la longueur a en deux segments qui soient entre eux comme $\sqrt[8]{3} : \sqrt[16]{7}$; les deux segments sont $\dfrac{a\sqrt[8]{3}}{\sqrt[8]{3} + \sqrt[16]{7}}$ et $\dfrac{a\sqrt[16]{7}}{\sqrt[8]{3} + \sqrt[16]{7}}$.

Le premier segment est égal à

$$\frac{\sqrt[8]{3a^{16}}}{\sqrt[8]{3a^8} + \sqrt[16]{7a^{16}}} = \frac{\sqrt[8]{ba^{15}}}{\sqrt[8]{6a^7} + \sqrt[16]{b_1 a^{15}}},$$

ou

$$b = 3a, \quad b_1 = 7a.$$

On sait construire chacun de ces monômes; de même pour le second segment.

VII. **Problème.** *Construire* $x = a\mathrm{P}$; *a est une ligne et* P *une fonction trigonométrique rapportée aux angles* α, β, γ, *etc.*

Solution. L'angle α étant donné, on prend sur un des côtés de cet angle, à partir du sommet A, une longueur arbitraire AB; du point B on abaisse BC perpendiculaire sur l'autre côté; on remplace $\sin\alpha$ par $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$, $\cos\alpha$ par $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$, $\operatorname{tang}\alpha$ par $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$, etc.; de même pour les angles β, γ, etc., et $a\mathrm{P}$ ne renfermant que des lignes connues, on est ramené aux problèmes précédents.

VIII. L'élégance dans les constructions consiste à faire le moins d'opérations possible et à ne se servir que des données de la figure.

Exemple. Partager une longueur AB en deux segments qui soient entre eux comme $\sin\alpha$ est à $\sin\beta$; les deux segments sont $\frac{\mathrm{AB}\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}$, $\frac{\mathrm{AB}\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$. Au point A on fait un angle égal à α, au point B un angle égal à β, on forme un triangle; la bissectrice de l'angle opposé à AB partage AB dans le rapport indiqué. Il est évident qu'on ne saurait donner des règles pour obtenir des constructions élégantes; cela dépend entièrement de la sagacité de l'opérateur.

QUESTION D'EXAMEN SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS (*);

PAR M. TILLOT,
Professeur de mathématiques à Castres.

Théorème. $\varphi(x) = 0$ étant une équation algébrique de degré n et ayant n racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inégales, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{\varphi'(x_1)} + \frac{1}{\varphi'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'(x_n)} = 0.$$

Démonstration. On a l'identité connue

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{1}{\varphi'(x_1)(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi'(x_2)(x-x_2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'(x_n)(x-x_n)};$$

d'où

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x_1}{x}\right)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{1}{\varphi'(x_1)\left(1-\frac{x_1}{x}\right)} + \frac{1}{\varphi'(x_2)\left(1-\frac{x_2}{x}\right)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'(x_n)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)}.$$

Faisant $x = \infty$, on obtient la relation (1).

Vérification. Soit l'équation $x^3 + px + q = 0$; la relation indiquée devient

$$\frac{1}{3x_1^2+p} + \frac{1}{3x_2^2+p} + \frac{1}{3x_3^2+p} = 0,$$

ou, en ôtant le dénominateur commun,

$$3p^2 + 6p(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + 9(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2) = 0.$$

Or, par la théorie des fonctions symétriques, le coeffi-

(*) MM. Bertrand et Hermite examinateurs.

cient de $6p$ est $-2p$, le multiplicateur de 9 est p^2; donc la relation devient

$$3p^2 - 12p^2 + 9p^2 = 0.$$

Interprétation géométrique. Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe parabolique de degré n, les axes étant rectangulaires. Si par les n points (réels ou imaginaires) où la courbe est rencontrée par l'axe des abscisses on mène les n tangentes (réelles ou imaginaires), la somme des cotangentes des angles que font ces n droites avec l'axe des x est nulle.

Nota. Ce théorème est un cas particulier du théorème d'Euler qui sert de fondement à la décomposition des fractions rationnelles (*voir* t. IV, p. 295, et t. VI, p. 127), théorème auquel l'illustre Jacobi a donné une si belle généralisation (t. VII, p. 114), et qui donne lieu à un théorème de géométrie que nous consignerons ailleurs.

QUESTION D'EXAMEN. ÉQUATION DE L'HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE (*);

PAR M. TILLOT,

Professeur de mathématiques à Castres.

Trouver la surface décrite par une droite assujettie à rester à une même distance d'une droite fixe, avec laquelle elle forme un angle constant.

Solution. Prenons la droite fixe pour axe des z, et pour plan des xy celui que décrit la plus courte distance entre la droite fixe et la droite mobile. Soient θ l'angle constant et r la plus courte distance donnée; soient

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

les équations de la droite mobile.

(*) MM. Bertrand et Hermite examinateurs.

Faisant $z = 0$, on obtient

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2. \tag{2}$$

La projection de la droite mobile sur le plan xy étant tangente au cercle de la plus courte distance a pour équation

$$\beta y + \alpha x = r^2, \tag{3}$$

et l'on a

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}. \tag{4}$$

Il faut donc éliminer les quatre quantités variables a, b, α, β entre les cinq équations (1), (2), (3), (4).

L'équation (2) devient

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2,$$

et l'équation (3) devient

$$y(y - bz) + x(x - az) = r^2;$$

d'où

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tang}^2\theta = r^2.$$

Remplaçant θ par $\pi - \theta$, l'équation ne change pas, ce qui indique une deuxième génération de la surface par une droite ; et si l'on mène par l'axe des z un plan quelconque, la section est une hyperbole, toujours la même, ce qui donne une troisième génération de la surface par une hyperbole tournante.

Nota. Un problème intéressant est celui-ci : *Étant donnée l'équation générale d'une surface du second degré, axes obliques, à quels caractères peut-on reconnaître que la surface est un hyperboloïde de révolution à une nappe?* Le cas général a été traité par M. Bourdon, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* t. II, p. 187 et 250 ; 1813.

COURS SUR LA THÉORIE DES NOMBRES, AU COLLÉGE DE FRANCE.

Ce cours, destiné au petit nombre, au *pusillus grex*, est digne de l'idée sublime qui a inspiré la création d'un établissement dont l'esprit a été si fatalement altéré, dans ces dernières années, par l'invasion de la politique; prostituée audacieuse, touchant tout, souillant tout. L'enseignement est confié à un jeune savant dont les brillants débuts ont attiré l'attention d'un Jacobi, et dont les *Nouvelles Annales* se glorifient d'avoir accueilli et préconisé le *virginal speech*, comme disent les Anglais (*voir* tome I). Plusieurs professeurs des départements expriment le désir de connaître la substance de ce cours, que mes occupations ne me permettent malheureusement pas de suivre. Si un auditeur mieux favorisé avait la générosité de me faire parvenir des renseignements, je m'empresserais de les publier avec reconnaissance. On contribuerait ainsi à propager des théories où l'abstraction mathématique se manifeste dans toute sa beauté, grave et puissante.

Puissent les *Exercices* de M. Lebesgue obtenir les encouragements que méritent une telle science, un tel auteur!

THÉORÈME SUR LES ARCS DE COURBES;

Par M. STREBOR.

Soit r le rayon vecteur mené d'une origine fixe à un point quelconque d'une courbe donnée, et soit ω l'angle fait par la normale en ce point avec un axe fixe; l'intégrale $\int r d\omega$ exprimera l'arc de la courbe, lieu des projections orthogonales du point fixe sur les tangentes à la courbe donnée.

Ce théorème fournit une démonstration très-simple d'une propriété des arcs d'une classe de courbes, qui se trouve énoncée dans le *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 448.

THÉORÈME SUR LES POLAIRES.

P est un point quelconque pris dans le plan de deux cercles donnés, P′ est le point d'intersection des deux polaires de P relativement aux deux cercles. P et P′ sont dits points réciproques. Prouver que l'axe radical passe par le milieu de PP′ (*fig.* 11, *Pl. II*)

(Voir t. VI, p. 452);

PAR M. ÉT. PLOIX,
Élève au lycée de Versailles.

Abaissons des points P et P′ les perpendiculaires PG, P′G′ sur la ligne des centres O, O′, et par le point I où l'axe radical IK rencontre PP′, menons HH′ parallèle à OO′: il faut prouver que l'on a $PI = P'I$, ou bien $IH = IH'$, ou $G'K = KG$.

Le point P a pour polaire QP′; donc la droite PG aura pour pôle le point A où la polaire de P rencontre OG; on a donc

$$OG \cdot OA = R^2.$$

De même, on a

$$O'G' \cdot O'B = r^2,$$

R et r désignant les rayons des cercles O et O'. Ces deux relations donnent

$$OG . OA - O'G' . O'B = R^2 - r^2.$$

IK étant un axe radical, on a

$$\overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2 = R^2 - r^2;$$

d'où

(1) $$OG . OA - O'G' . O'B = \overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2.$$

Les deux triangles AG'P', OPG étant semblables, donnent

$$G'P' . GP = OG . AG'.$$

De même, les deux triangles BG'P', OPG sont semblables et donnent

$$G'P' . GP = BG' . O'G.$$

Comparant les deux égalités, on en déduit

(2) $$AG' . OG = BG' . O'G.$$

Ajoutant membre à membre les deux égalités (1) et (2), on trouve

$$OG(OA + AG') - O'G(O'B + BG') = \overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2,$$

ou

$$OG . OG' - O'G . O'G' = \overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2.$$

Or

$$OG = OK + KG,\ OG' = OK - G'K,\ O'G = O'K - KG$$
$$\text{et } O'G' = O'K + KG';$$

d'où

$$(GK + KG)(OK - G'K) - (O'K - KG)(O'K + KG') = \overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2.$$

Effectuant les multiplications et supprimant les termes qui se détruisent, on trouve

$$KG.GK + KG.O'K = KG'.OK + KG'.O'K,$$

ou

$$KG(OK + O'K) = KG'(OK + O'K);$$

d'où

$$KG = KG'.$$

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. E. CATALAN.

Les Traités élémentaires ne contiennent, ordinairement, que les premières notions sur les fractions continues. Quant aux propriétés les plus importantes, les plus remarquables de ces quantités, elles se trouvent disséminées dans un grand nombre d'ouvrages. J'ai cru faire une chose utile aux élèves, en essayant de leur donner un résumé succinct de la théorie dont il s'agit.

I. — *Préliminaires.*

1. On appelle, en général, *fraction continue,* toute expression de la forme

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}};$$

mais, dans les Éléments, on réserve plus particulièrement ce nom aux quantités telles que

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}};$$

et l'on suppose même, pour plus de simplicité, que les nombres a, b, c, d, etc., sont *entiers* et *positifs*.

2. Il est facile de développer, en fraction continue ayant cette dernière forme, une quantité commensurable quelconque. Soit, par exemple, $x=\frac{287}{167}$. En extrayant les entiers, on trouve

$$x=1+\frac{120}{167}=1+\frac{1}{\left(\frac{167}{120}\right)};$$

mais

$$\frac{167}{120}=1+\frac{47}{120}=1+\frac{1}{\left(\frac{120}{47}\right)}.$$

A son tour, la fraction $\frac{120}{47}$ se transforme en

$$2+\frac{26}{47}=2+\frac{1}{\left(\frac{47}{26}\right)};$$

et ainsi de suite. On a donc, au lieu de la fraction *ordinaire* proposée, la fraction *continue* équivalente

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}}}.$$

On voit que les *termes* 1, 1, 2, 1, 1, 4, 5 de la fraction continue sont les quotients entiers fournis par l'opération du plus grand commun diviseur, effectuée sur 287 et 167: pour cette raison, on les désigne aussi sous le nom de *quotients incomplets*. Il est clair que, pour abréger, on peut écrire

$$x = 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 5.$$

3. Pour réduire une fraction continue en fraction ordinaire, il suffit de faire un calcul inverse du précédent. Ainsi, l'on aura successivement

$$4+\frac{1}{5}=\frac{21}{5},\quad 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}=1+\frac{1}{\left(\frac{21}{5}\right)}=1+\frac{5}{21}=\frac{26}{21},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}=1+\frac{1}{\left(\frac{26}{21}\right)}=1+\frac{21}{26}=\frac{47}{26},\ldots.$$

Pour plus de régularité, on dispose l'opération de la manière suivante :

	1	1	2	1	1	4	5
287	167	120	47	26	21	5	1.

Les termes de la première ligne sont ceux de la fraction continue. Le premier terme de la seconde ligne est 1. Enfin, *un terme quelconque de* cette seconde ligne *est égal au produit du terme précédent par le terme écrit au-dessus de celui-ci, augmenté du terme qui précède de deux rangs le terme cherché.*

4. Avant d'indiquer un autre procédé pour réduire une fraction continue en fraction ordinaire, observons que, si dans la fraction continue $x = a, b, c, d,\ldots$, nous conservons seulement le premier terme a, puis les deux premiers termes, puis les trois premiers, etc. (ces termes

étant supposés positifs), nous obtiendrons des fractions

$$\frac{A}{A'}=\frac{a}{1},\quad \frac{B}{B'}=a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b},$$

$$\frac{C}{C'}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=a+\frac{c}{bc+1}=\frac{abc+a+c}{bc+1},\ldots,$$

lesquelles seront alternativement plus petites et plus grandes que x. En effet, 1° a est $< x$; 2° le diviseur b est trop petit: donc $\frac{1}{b}$ est trop grand, donc $\frac{B}{B'}$ est $> x$, etc. Les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc., sont, pour des motifs que nous développerons plus tard, nommées *convergentes* ou *réduites*. D'après ce que nous venons de dire, *une réduite est plus petite que la fraction continue, ou plus grande, selon que cette réduite est de rang impair ou de rang pair* (*).

II. — *Formation des réduites.*

5. Pour découvrir la loi des réduites, observons que si, dans la seconde réduite $\frac{B}{B'}=\frac{ab+1}{b}$, nous remplaçons b par $b+\frac{1}{c}$, nous obtiendrons la troisième. Ainsi,

$$\frac{C}{C'}=\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}=\frac{Bc+a}{B'c+1}=\frac{Bc+A}{B'c+A'};$$

(*) Si la fraction continue était de la forme $\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}$, c'est-à dire si elle était *plus petite que l'unité*, on prendrait pour *premier terme zéro*, et pour *première réduite*, $\frac{0}{1}$.

car

$$\frac{A}{A'} = a = \frac{a}{1}.$$

Pour former le numérateur de la troisième réduite, on multiplie le numérateur de la seconde par le quotient incomplet correspondant à la troisième, et on ajoute au produit le numérateur de la première réduite. Le dénominateur de la troisième réduite se forme, de la même manière, au moyen des dénominateurs précédents. Cette loi est générale; car elle résulte d'un raisonnement que l'on pourrait répéter à l'égard de deux quotients incomplets consécutifs quelconques. Si donc $\frac{N}{N'}$, $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ sont trois réduites consécutives, et si q représente le quotient incomplet correspondant à $\frac{Q}{Q'}$, nous aurons

(1) $$\frac{Q}{Q'} = \frac{Pq + N}{P'q + N'}:$$

ou plutôt

(2) $$Q = Pq + N,$$

(3) $$Q' = P'q + N' \text{ (*)}.$$

6. Si l'on applique la règle (1) à la fraction continue $x = 1, 1, 2, 1, 1, 4, 5$, on trouve, pour les réduites consécutives,

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{55}{32}, \frac{287}{167}.$$

Ainsi qu'on devait s'y attendre, la dernière réduite est la valeur même de la fraction continue.

(*) Un mode de démonstration bien connu permettrait de vérifier *à posteriori* la généralité de la formule (1); mais cette vérification est superflue.

III. — *Propriétés des réduites.*

7. Éliminons q entre les formules (2) et (3); nous obtiendrons

$$QP' - Q'P = -(PN' - P'N),$$

c'est-à-dire que *la différence des produits en croix des termes de deux réduites consécutives est constante en valeur absolue.* Et comme, pour les deux premières réduites $\frac{A}{A'} = \frac{a}{1}$, $\frac{B}{B'} = \frac{ab+1}{b}$, cette différence est $+1$, on conclut que

$$PN' - P'N = \pm 1, \tag{4}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{P}{P'} - \frac{N}{N'} = \pm \frac{1}{N'P'}, \tag{5}$$

en prenant le signe $+$ si $\frac{P}{P'}$ est une réduite de rang *pair*.

Ainsi, *la différence de deux réduites consécutives est égale à ± 1, divisé par le produit des dénominateurs de ces réduites.*

8. Ces dernières propriétés subsistent, quelles que soient les valeurs des termes a, b, c, etc., de la fraction continue; c'est-à-dire que ces termes peuvent indifféremment être *entiers, fractionnaires, positifs, négatifs, incommensurables,* et même *algébriques.* Les propriétés suivantes supposent que la fraction continue a ses termes *entiers.*

9. D'après l'équation (4), si P et P′ avaient un facteur commun, ce facteur devrait diviser l'unité: donc P et P′ sont premiers entre eux; et, conséquemment, *toutes les réduites sont,* ainsi que leur nom l'indique, *des fractions irréductibles.*

Cette même équation (4) prouve que N et P sont premiers entre eux, et qu'il en est de même pour N' et P'. Ainsi, *les numérateurs de deux réduites consécutives sont premiers entre eux, et les dénominateurs de ces réduites sont aussi premiers entre eux.*

10. *Les réduites approchent de plus en plus de la fraction continue, alternativement par défaut et par excès.*

Pour démontrer cet important théorème, remarquons d'abord que si, dans le second membre de la formule (1), nous remplaçons le *quotient incomplet* q par le *quotient complet* $q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\ldots}}=y$, nous obtiendrons la valeur même de la fraction continue, attendu que nous n'aurons rien négligé. Cette formule donnera donc

$$x=\frac{Py+N}{P'y+N'}. \tag{6}$$

Cela étant, supposons, pour fixer les idées, que $\frac{N}{N'}$ soit une réduite de rang impair, auquel cas $\frac{N}{N'}<x<\frac{P}{P'}$, et comparons les différences $x-\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}-x$.

Or,

$$x-\frac{N}{N'}=\frac{Py+N}{Py'+N'}-\frac{N}{N'}=\frac{(PN'-P'N)y}{(P'y+N')N'},$$

ou, d'après l'équation (4),

$$x-\frac{N}{N'}=\frac{y}{(P'y+N')N'}.$$

En second lieu,

$$\frac{P}{P'}-x=\frac{P}{P'}-\frac{Py+N}{P'y+N'}=\frac{PN'-P'N}{(P'y+N')P'},$$

ou

$$\frac{P}{P'} - x = \frac{1}{(P'y + N')P'}.$$

La proposition sera donc démontrée si nous vérifions l'inégalité

$$\frac{1}{(P'y + N')P'} < \frac{y}{(P'y + N')N'},$$

laquelle se réduit à $\frac{N'}{P'} < y$.

Cette dernière inégalité est évidente : car

$$y = q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ldots}},$$

quantité > 1 ; et, d'après la loi de formation des réduites, on a $P' > N'$.

11. L'erreur ε que l'on commet en prenant une réduite $\frac{P}{P'}$ au lieu de la fraction continue est, d'après l'expression de $\frac{P}{P'} - x$, donnée par la formule

$$\varepsilon = \frac{1}{(P'y + N')P'}.$$

Pour avoir une limite *supérieure* de cette erreur, rappelons-nous que y est > 1. Si donc nous remplaçons y par 1, nous aurons

$$\varepsilon < \frac{1}{P'(P' + N')}.$$

Ainsi, *l'erreur que l'on commet en prenant une réduite pour valeur approchée de la fraction continue, est moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur de la réduite par la somme de ce dénominateur et de celui qui le précède.*

12. Si, dans l'inégalité précédente, nous négligeons N' devant P′, nous aurons, à plus forte raison,

$$\varepsilon < \frac{1}{P'^2}.$$

Ainsi, *l'erreur* ε *est moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la réduite à laquelle on s'arrête.*

Cette limite, quoique peu approchée, est très-souvent employée à cause de sa simplicité.

13. Au lieu de remplacer y par 1, remplaçons y par q : nous trouvons

$$\varepsilon < \frac{1}{P'(P'q + N')},$$

ou simplement

$$\varepsilon < \frac{1}{P'Q'}.$$

Cette limite est plus approchée que les deux autres; mais on l'emploie rarement, parce qu'elle suppose connu le dénominateur Q′ de la réduite qui suit $\frac{P}{P'}$.

14. Pour obtenir une limite *inférieure* de ε, substituons $q + 1$ à y dans l'expression de cette quantité; nous aurons

$$\varepsilon > \frac{1}{P'(P'q + P' + N')},$$

ou

$$\varepsilon > \frac{1}{P'(P' + Q')}.$$

15. Les considérations qui précèdent justifient la dénomination de *convergentes* attribuée aux réduites. Elles démontrent aussi que l'approximation d'une réduite est bien supérieure à celle qui paraîtrait devoir résulter de la valeur du dénominateur de cette réduite. Cette dernière propriété, qui rend l'emploi des fractions continues préférable à celui des autres procédés d'approximation, n'est

cependant pas la plus remarquable : les réduites jouissent encore de la propriété *caractéristique* suivante.

16. *Chaque réduite approche de la valeur de la fraction continue plus que toute autre fraction plus simple.*

Soient deux réduites consécutives $\frac{N}{N'}$, $\frac{P}{P'}$, entre lesquelles tombe la valeur de x; et supposons qu'une fraction $\frac{k}{k'}$ soit plus approchée de x que ne l'est $\frac{P}{P'}$. Cette fraction $\frac{k}{k'}$ sera comprise entre $\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}$; et nous aurons, en supposant $\frac{N}{N'}$ de rang impair,

$$\frac{N}{N'} < \frac{k}{k'} < \frac{P}{P'}.$$

Cette double inégalité donne

$$\frac{k}{k'} - \frac{N}{N'} < \frac{P}{P'} - \frac{N}{N'},$$

ou

$$\frac{kN' - k'N}{k'N'} < \frac{PN' - P'N}{N'P'},$$

ou simplement

$$\frac{kN' - k'N}{k'} < \frac{1}{P'}.$$

Le numérateur $kN' - k'N$ n'est pas nul, sans quoi nous aurions $\frac{k}{k'} = \frac{N}{N'}$, et la fraction $\frac{k}{k'}$ serait moins approchée que $\frac{P}{P'}$; donc ce numérateur est au moins égal à 1; donc, par compensation, $k' > P'$.

En renversant les fractions $\frac{N}{N'}$, $\frac{k}{k'}$, $\frac{P}{P'}$, on aurait

$$\frac{N'}{N} > \frac{k'}{k} > \frac{P'}{P};$$

d'où, par un calcul semblable au précédent, $k > P$.

Ainsi, pour qu'une fraction $\frac{k}{k'}$ soit plus approchée de x que la réduite $\frac{P}{P'}$, il faut qu'elle soit plus *compliquée* que cette réduite : cette conclusion est précisément l'équivalent de la proposition énoncée.

IV. — *Convergentes intermédiaires.*

17. Dans la formule générale (1), remplaçons q par les nombres entiers $0, 1, \ldots, q$; nous formerons une suite de fractions

$$\frac{N}{N'}, \quad \frac{N+P}{N'+P'}, \ldots, \quad \frac{N+iP}{N'+iP'}, \quad \frac{N+(i+1)P}{N'+(i+1)P'}, \ldots, \quad \frac{Q}{Q'}.$$

Les termes extrêmes de cette suite sont les réduites $\frac{N}{N'}$, $\frac{Q}{Q'}$. Quant aux autres fractions, elles jouissent de toutes les propriétés des réduites, attendu que ces propriétés sont une conséquence des équations (2) et (3), lesquelles subsistent évidemment, lorsqu'à la place du quotient incomplet q on met un entier quelconque. Les fractions dont il s'agit sont appelées *convergentes intermédiaires*.

18. On a

$$\frac{N+iP}{N'+iP'} - \frac{N+(i+1)P}{N'+(i+1)P'} = \frac{NP'-N'P}{(N'+iP')[N'+(i+1)P']},$$

quantité de même signe que $\frac{N}{N'} - \frac{P}{P'}$. Conséquemment, lorsque $\frac{N}{N'}$ est une réduite de rang impair, les convergentes intermédiaires vont en augmentant. Elles vont au contraire en diminuant, quand $\frac{N}{N'}$ est de rang pair.

19. Au lieu de supposer le nombre entier i compris entre 0 et q, on pourrait le faire croître de $-\infty$ à $+\infty$; alors l'expression $z = \frac{N + iP}{N' + iP'}$ varierait de la manière suivante :

1°. Pour $i = -\infty$, $z = \frac{P}{P'}$;

2°. De $i = -\infty$ à $i = -1$, z marche de $\frac{P}{P'}$ vers $\frac{P - N}{P' - N}$, c'est-à-dire que z augmente si $\frac{N}{N'}$ est de rang impair;

3°. Pour $i = 0$, $z = \frac{N}{N'}$, quantité moindre que $\frac{P - N}{P' - N'}$; donc z a diminué;

4°. De $i = 0$ à $i = \infty$, z augmente;

5°. Pour $i = \infty$, $z = \frac{P}{P'}$ (*).

20. Soit la fraction continue $x = 4, 3, 7, 4, 5$. Les réduites *principales* sont

$$\frac{4}{1}, \ \frac{13}{3}, \ \frac{95}{22}, \ \frac{393}{91}, \ \frac{2060}{477}.$$

Par des additions successives, elles donnent les convergentes *intermédiaires*

$$\frac{17}{4}, \ \frac{30}{7}, \ \frac{43}{10}, \ \frac{56}{13}, \ \frac{69}{16}, \ \frac{82}{19}, \ldots, \ \frac{108}{25}, \ \frac{203}{47}, \ \frac{298}{69}, \ldots,$$
$$\frac{488}{113}, \ \frac{881}{204}, \ \frac{1274}{295}, \ \frac{1667}{386}.$$

On peut même, pour plus de régularité, prendre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ pour premières convergentes principales, et l'on a alors

(*) On pourrait remarquer que cette discussion revient à celle de l'hyperbole représentée par $y = \frac{N + Px}{N' + P'x}$.

cette suite :

$$\left(\frac{0}{1}\right),\ \left(\frac{1}{0}\right),\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \left(\frac{4}{1}\right),\ \frac{5}{1},\ \frac{9}{2},\ \left(\frac{13}{3}\right),\ \frac{17}{4},\ \frac{30}{7},\ \frac{43}{10},$$
$$\frac{56}{13},\ \frac{69}{16},\ \frac{82}{19},\ \left(\frac{95}{22}\right),\ \frac{108}{25},\ \frac{203}{47},\ \frac{298}{69},\ \left(\frac{393}{91}\right),\ \frac{488}{113},$$
$$\frac{881}{204},\ \frac{1274}{295},\ \frac{1667}{386},\ \left(\frac{2060}{477}\right).$$

V. — *Réduites non consécutives.*

21. Considérons plusieurs réduites successives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, $\frac{S}{S'}$,..., et cherchons les relations qui existent entre les deux termes de la première et les deux termes de chacune des autres. A cet effet, prenons les équations

$$Q = Pq + N,\quad R = Qr + P,\quad S = Rs + Q,\quad T = St + R,$$
$$Q' = P'q + N',\quad R' = Q'r + P',\quad S' = R's + Q',\quad T' = S't + R',\ \text{etc.}$$

Elles donnent successivement

$$QP' - Q'P = \pm 1,\quad RP' - R'P = \pm r,$$
$$SP' - S'P = \pm(rs + 1),\quad TP' - T'P = \pm[(ts + 1)t + r],\ \text{etc.}$$

D'après ces valeurs, dont la loi est évidente, il s'ensuit que *si l'on considère la fraction continue* $x = q, r, s, \ldots$, *les dénominateurs des réduites successives seront les valeurs des fonctions* $QP' - Q'P$, $RP' - R'P$,..., *prises avec leurs signes ou avec des signes contraires, selon que q est de rang pair ou de rang impair.*

22. Comme application, soit la fraction continue

$$x = 4,\ 3,\ 7,\ 4,\ 5,$$

dont les réduites sont $\frac{4}{1}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{95}{22}$, $\frac{393}{91}$. $\frac{2060}{477}$. Si nous considérons la fraction continue $7,\ 4,\ 5$, les réduites de celle-ci seront $\frac{7}{1},\ \frac{29}{4},\ \frac{152}{21}$; et nous aurons en effet

$$95.3 - 22.13 = -1, \quad 393.3 - 91.13 = -4,$$
$$2060.3 - 477.13 = -21.$$

23. Pour arriver à un théorème plus général que celui qui vient d'être démontré, changeons pour un instant notre notation, et représentons par $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_n$ les termes de la fraction continue x. Si nous réduisons en fraction ordinaire la fraction continue

$$y = q_h,\ q_{h+1},\ q_{h+2}, \ldots, q_k,$$

le numérateur de cette fraction sera une certaine *fonction des indices* h, k, laquelle pourra être représentée par $N_{h,k}$.

En vertu de cette convention, le numérateur de x sera $N_{1,n}$. Quant au dénominateur, il est évidemment égal au numérateur de la fraction $q_2, q_3, q_4, \ldots$, c'est-à-dire égal à $N_{2,n}$. Nous aurons donc

$$x = q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots, q_n = \frac{N_{1,n}}{N_{2,n}}.$$

La relation $QP' - Q'P = \pm 1$ deviendra maintenant

$$(a) \qquad N_{1,h+1} . N_{2,h} - N_{2,h+1} . N_{2,h} = (-1)^{h+1},$$

en supposant que h soit le rang de la réduite $\frac{P}{P'} = \frac{N_{1,h}}{N_{2,h}}$.

De même, les relations

$$RP' - R'P = \pm r, \quad SP' - S'P = \pm (rs + 1),$$
$$TP' - T'P = \pm [(rs + 1)t + r],$$

deviendront

$$N_{1,h+2} . N_{2,h} - N_{2,h+2} . N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,h+2},$$
$$N_{1,h+3} . N_{2,h} - N_{2,h+3} . N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,h+3},$$
$$N_{1,h+4} . N_{2,h} - N_{2,h+4} . N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,h+4},$$

et, en général,

$$(b) \qquad N_{1,k}.N_{2,h} - N_{2,k}.N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,k}.$$

Si, dans cette dernière équation, nous supposons $k = h + 1$, elle donnera

$$N_{1,h+1}.N_{2,h} - N_{2,h+1}.N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,h+1}.$$

D'après l'équation (a), ce second membre doit se réduire à $(-1)^{h+1}$; donc $N_{h+2,h+1} = 1$: c'est-à-dire que, pour la commodité du calcul, nous supposerons généralement

$$N_{n+1,n} = 1.$$

De même, en prenant $k = h = n$, on trouve, au moyen de la formule (b),

$$N_{n+2,n} = 0.$$

24. Dans cette même formule (b), faisons $h = 1$; nous obtiendrons

$$N_{1,k}.N_{2,1} - N_{2,k}.N_{1,1} = N_{3,k},$$

ou simplement

$$N_{1,k} - N_{2,k}.q_1 = N_{3,k};$$

d'où

$$N_{2,k} = \frac{N_{1,k} - N_{3,k}}{q_1}:$$

et, en changeant k en h,

$$N_{2,h} = \frac{N_{1,h} - N_{3,h}}{q_1}.$$

Ces valeurs, substituées dans la formule (b), donnent

$$(c) \qquad N_{1,k}.N_{3,h} - N_{3,k}.N_{1,h} = (-1)^{h+2} N_{1,1}.N_{h+2,k},$$

à cause de $q_1 = N_{1,1}$.

Dans cette nouvelle équation, faisons $h = 2$, nous obtiendrons

$$N_{1,k} - N_{3,k}.N_{1,2} = N_{1,1}.N_{4,k};$$

d'où

$$N_{3,k} = \frac{N_{1,k} - N_{1,1} . N_{4,k}}{N_{1,2}}.$$

De même,

$$N_{3,h} = \frac{N_{1,h} - N_{1,1} . N_{4,h}}{N_{1,2}}.$$

Ces valeurs donnent, par la substitution dans (c),

$$N_{1,k} . N_{4,h} - N_{4,k} . N_{1,h} = (-1)^{h+3} N_{1,2} . N_{h+2,k}.$$

En continuant de la même manière, on arrive à la formule suivante, due à Kramp :

$$(7) \quad N_{1,k} . N_{g,h} - N_{g,k} . N_{1,h} = (-1)^{h+g-1} N_{1,g-2} . N_{h+2,k}.$$

25. *Application*. Soit $x = 3, 2, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 2, 1$. Les numérateurs des réduites sont

3, 7, 10, 47, 104, 151, 557, 2936, 6429, 9365.

Prenons $k = 10$, $h = 7$, $g = 3$; nous aurons $N_{1,k} = 9365$, $N_{1,h} = 557$, $N_{1,g-2} = 3$.

Quant aux fonctions représentées par $N_{g,h}$, $N_{g,k}$, $N_{h+2,k}$, elles sont égales, respectivement, aux numérateurs des fractions continues $y = 1, 4, 2, 1, 3$; $z = 1, 4, 2, 1, 3, 5, 2, 1$; $t = 2, 1$. On trouve $N_{g,h} = 59$, $N_{g,k} = 992$, $N_{h+2,k} = 3$. L'équation (7) donne donc

$$9365 . 59 - 992 . 557 = -3 . 3;$$

ce qui est exact.

VI. — *Fractions continues illimitées*.

26. Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des fractions continues *limitées*, c'est-à-dire composées d'un nombre *fini* de termes. Supposons maintenant que la fraction continue soit *illimitée*, et examinons d'abord ce que l'on devra appeler *valeur* d'une pareille fraction.

Soient x_1, x_2, x_3, etc., les résultats que l'on obtient quand on termine la fraction à son premier terme, ou à ses deux premiers termes, ou à ses trois premiers, etc. D'après ce qui a été vu ci-dessus (nos 10 et suivants), nous aurons

$$x_1 < x_3 < x_5 < x_7 \ldots,$$
$$x_2 > x_4 > x_6 > x_8 \ldots;$$

c'est-à-dire que les réduites de rang impair vont en augmentant, et que celles de rang pair vont en diminuant. D'ailleurs, chaque terme de la seconde ligne est plus grand que le terme correspondant de la première; et la différence entre ces deux termes peut, évidemment, devenir moindre que toute quantité donnée, si ces deux termes, c'est-à-dire si ces deux réduites, occupent des rangs assez éloignés.

Il résulte de là que les réduites de rang impair et les réduites de rang pair tendent vers une certaine limite, laquelle est toujours comprise entre deux réduites consécutives quelconques. Cette limite est la *valeur* de la fraction continue.

27. Ce que nous venons de dire suppose, bien entendu, les quotients incomplets *entiers* et *positifs*. Avec cette restriction, les propriétés démontrées pour les fractions continues limitées subsistent évidemment pour celles qui ont une infinité de termes. Mais si l'on admettait des quotients incomplets négatifs, les réduites pourraient n'avoir pas de limite déterminée.

Soit, par exemple, la fraction

$$1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \ldots}}}$$

En prenant un nombre de termes de plus en plus considérable, on obtient les résultats *périodiques*

$$1, 0, \infty, 1, 0, \infty, \ldots,$$

lesquels, évidemment, ne tendent vers aucune limite.

28. *Toute fraction continue illimitée a pour valeur une quantité incommensurable, et réciproquement.*

Cette proposition est évidente par les nos 2 et 3.

29. Il est facile de réduire en série toute fraction continue, limitée ou illimitée. En effet, considérons d'abord la fraction continue limitée $x = a, b, c, d, \ldots, p, q$.

Nous aurons, par les propriétés démontrées dans le § II,

$$\frac{A}{A'} = \frac{a}{1}, \quad \frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'}, \quad \frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{B'C'}, \ldots,$$
$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \pm \frac{1}{P'Q'}.$$

Donc, en ajoutant toutes ces équations,

$$\frac{Q}{Q'} = x = a + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \ldots \pm \frac{1}{P'Q'}.$$

Soit par exemple $x = 3, 2, 1, 7, 4, 5, 6, 2$. Les dénominateurs des réduites sont 1, 2, 3, 23, 95, 498, 3083, 6664; et nous aurons

$$x = 3 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.23} - \frac{1}{23.95} + \frac{1}{95.498}$$
$$- \frac{1}{498.3083} + \frac{1}{3083.6664}.$$

30. Que la fraction continue soit limitée ou illimitée, les réduites approchent de plus en plus de la valeur de cette fraction. Or, le second membre de l'équation ci-dessus étant limité à ses deux premiers termes, à ses trois premiers termes, etc., exprime les valeurs des réduites $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. Par conséquent, si x est une fraction continue *illimitée*, on aura, en série *convergente*,

$$(8) \qquad x = a + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \frac{1}{D'E'} + \ldots$$

De plus, l'erreur que l'on commet en s'arrêtant à un terme quelconque est moindre que la valeur absolue de ce terme : c'est ce qui résulte des nos 12 et 13.

31. Si une quantité incommensurable x est développée en série convergente, on pourra se servir de cette série pour développer x en fraction continue. En effet, l'équation (8), dans laquelle $A' = 1$, donne immédiatement les dénominateurs B', C', D', etc., des réduites. On obtient ensuite les termes b, c, d, etc., à l'aide des formules $b = B'$, $c = \frac{C' - A'}{B'}$, $d = \frac{D' - B'}{C'}$, etc. En général, ces termes a, b, c, d, etc., ne seront pas entiers et positifs ; mais cette circonstance n'empêchera pas le développement trouvé d'être *convergent*, car on a seulement remplacé la série convergente par une autre expression qui lui est équivalente, et qui n'en diffère que par la forme.

32. Comme application, développons en fraction continue le logarithme népérien de 2. On a

$$l.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots;$$

par suite,

$$a = 0,\ B' = 1,\ C' = 2,\ D' = \frac{3}{2},\ E' = \frac{2.4}{3},\ F' = \frac{3.5}{2.4},$$
$$G' = \frac{2.4.6}{3.5},\ H' = \frac{3.5.7}{2.4.6},\ \text{etc.};$$

puis

$$b = B' = 1,\ c = 1,\ d = \frac{1}{2^2},\ e = \frac{\frac{2.4}{3} - 2}{\frac{3}{2}} = \frac{2^2}{3^2},$$

$$f = \frac{\frac{3.5}{2.4} - \frac{3}{2}}{\frac{2.4}{3}} = \frac{3^2}{2^2.4^2},\ g = \frac{\frac{2.4.6.}{3.5} - \frac{2.4}{3}}{\frac{3.5}{2.4}} = \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2},\ \text{etc.}$$

Conséquemment,

$$l.2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{4}+\cfrac{1}{\cfrac{4}{9}+\cfrac{1}{\cfrac{9}{4.16}+\ldots}}}}}$$

Pour simplifier cette expression, observons que

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{4}+\cfrac{1}{\cfrac{4}{9}+\cfrac{1}{\cfrac{9}{4.16}+\cfrac{1}{\cfrac{4.16}{9.25}+\ldots}}}} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{9}+\cfrac{1}{\cfrac{9}{16}+\cfrac{1}{\cfrac{16}{9.25}+\ldots}}}}$$

De même,

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{9}+\cfrac{1}{\cfrac{9}{16}+\cfrac{1}{\cfrac{16}{9.25}+\ldots}}} = \cfrac{9}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{16}+\cfrac{1}{\cfrac{16}{25}+\ldots}}},$$

et ainsi de suite. Par conséquent,

$$l.2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+\ldots}}}}}}$$

33. Pour seconde application, prenons la série qui donne le rapport de la circonférence au diamètre :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Nous aurons ici

$$a=0,\ B'=1,\ C'=3,\ D'=\frac{5}{3},\ E'=\frac{3.7}{5},\ F'=\frac{5.9}{3.7},\ldots;$$

d'où

$$b=1,\ c=2,\ d=\frac{2}{9},\ e=\frac{2.9}{25},\ f=\frac{2.25}{9.49},\ \text{etc.}$$

Le développement cherché sera donc

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{2}{9}+\cfrac{1}{\frac{2.9}{25}+\cfrac{1}{\frac{2.25}{9.49}+\ldots}}}}}$$

Ce développement subit une simplification analogue à celle que nous avons indiquée tout à l'heure; et l'on obtient la formule suivante, due à Brouncker :

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}}$$

34. Si l'on appliquait la même méthode à la série *harmonique*

$$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots,$$

on trouverait

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-\frac{5}{2^2}+\cfrac{1}{\frac{2^2.7}{3^2}+\cfrac{1}{-\frac{3^2.9}{2^2.4^2}+\ldots}}}},$$

ou

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{-5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{-9 + \ldots}}}},$$

ou encore, par une transformation simple,

$$x = \cfrac{1}{+1 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{4}{+5 + \cfrac{9}{-7 + \cfrac{16}{+9 + \ldots}}}}}.$$

Or la série harmonique est *divergente,* c'est-à-dire que la somme de ses termes peut croître au delà de toute limite. Conséquemment, la fraction continue que nous venons d'obtenir est pareillement divergente; et les réduites de cette fraction, au lieu de tendre vers une limite finie, peuvent dépasser toute quantité assignable.

35. Pour dernière application, cherchons le développement, en fraction continue, de la base des logarithmes népériens.

On a

$$e^{-1} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{1.2.3.4.5} \ldots;$$

par suite, en comparant à la formule (8),

$$a = 0, \quad A' = 1, \quad B' = 2, \quad C' = 1.3,$$
$$D' = 2.4, \quad E' = 1,3.5, \quad F' = 2.4.6, \ldots,$$

puis

$$b = 2, \quad c = 1, \quad d = \frac{2}{1}, \quad e = \frac{1.3}{2}, \quad f = \frac{2.4}{1.3}, \quad g = \frac{1.3.5}{2.4}, \ldots.$$

Donc

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{2}{1} + \cfrac{1}{\frac{1.3}{2} + \cfrac{1}{\frac{2.4}{1.3} + \cfrac{1}{\frac{1.3.5}{2.4} + \dots}}}}}.$$

VII. — *Fractions continues périodiques.*

36. Une fraction continue *périodique* est celle dont les termes se reproduisent dans le même ordre, à partir d'un certain rang. Elle est dite *périodique simple*, lorsque le premier quotient incomplet fait partie de la période. Dans le cas contraire, elle est appelée fraction périodique *mixte*.

Les fractions continues périodiques jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, lesquelles reposent toutes sur la proposition suivante.

37. *Soit une fraction périodique simple $m, n, p, q, m, n, p, q, \dots$: la valeur y de cette fraction sera donnée par l'équation*

$$y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}}.$$

En désignant par y_i et y_{i+1} les résultats que l'on obtient en prenant i périodes et $i+1$ périodes, on a évidemment

$$y_{i+1} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y_i}}}}.$$

Mais la différence entre deux réduites consécutives peut devenir moindre que toute quantité donnée; il en est de même pour deux réduites distinctes d'un nombre *déterminé* de rangs : car cette dernière différence est égale à la somme des différences entre les réduites intermédiaires et consécutives. Donc y_i et y_{i+1} ont la même limite, laquelle est y.

38. On peut calculer de proche en proche y_1, y_2, $y_3, \ldots, y_i, y_{i+1}$ sans passer par les réduites intermédiaires. En effet, représentons par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les réduites répondant aux termes p, q de la première période; et soit $\frac{R}{R'}$ la réduite qui suit $\frac{Q}{Q'}$, de manière que

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qm + P}{Q'm + P'}.$$

Si, dans cette valeur, nous remplaçons m par y_i, nous obtiendrons y_{i+1}; donc, en général,

$$y_{i+1} = \frac{Qy_i + P}{Q'y_i + P'}.$$

39. Soit $\frac{T}{T'}$ la fraction irréductible équivalente à y_i, nous aurons

$$(9) \qquad y_{i+1} = \frac{QT + PT'}{Q'T + P'T'};$$

et je dis que la fraction contenue dans le second membre sera irréductible.

Soient U, U' les deux termes de cette fraction, savoir:

$$U = QT + PT', \quad U' = Q'T + P'T'.$$

Entre ces équations, éliminons successivement T et T'; nous trouverons

$$UQ' - U'Q = (PQ' - P'Q)T', \quad UP' - U'P = -(PQ' - P'Q)T.$$

Mais $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$ sont deux réduites consécutives: donc

$$PQ' - P'Q = \pm 1;$$

par suite,

$$UQ' - UQ' = \pm T', \quad UP' - U'P = \mp T.$$

Ces équations prouvent que tout facteur commun à U et à U' devrait diviser T et T'. Si donc, comme nous l'avons supposé, $\frac{T}{T'}$ est irréductible, $\frac{U}{U'}$ sera pareillement irréductible.

D'ailleurs, la fraction $\frac{Q}{Q'}$, qui donne la valeur de la première période, est une réduite; donc toutes les fractions obtenues par l'application de la formule (9) sont des réduites.

40. Soient, comme précédemment,

$$y_i = \frac{T}{T'}, \quad y_{i+1} = \frac{U}{U'}.$$

D'après le n° **21**, si l'on réduit en fraction ordinaire

$$m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}},$$

le dénominateur de cette fraction sera la valeur de la fonction $TU' - T'U$, prise avec son signe ou avec un signe contraire. Or ce dénominateur est celui de y_1, c'est-à-dire Q'; donc

$$TU' - T'U = \pm Q' \ (*).$$

41. Plus généralement, *si dans une fraction périodique, simple ou mixte, on considère deux réduites distantes d'autant de rangs que l'indique le nombre des*

(*) Dans l'application de cette formule, on devra prendre le signe +, si le nombre des termes de la période est *pair*. Et si ce nombre est *impair*, on prendra le signe + ou le signe —, selon que i sera *pair* ou *impair*.

termes de la période, la différence des produits en croix des termes de ces deux réduites sera égale au dénominateur de la fraction continue équivalente à la période, celle-ci étant comptée à partir de la première des deux réduites.

Ce théorème, aussi bien que le précédent, est une conséquence immédiate de la propriété démontrée au n° **21**.

Soit, comme application, la fraction

$$x = 2,\ 3,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ldots,$$

ou simplement

$$x = 2,\ 3\ (1,\ 3,\ 2).$$

Les réduites consécutives sont

$$\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{34}{15},\ \frac{77}{34},\ \frac{111}{49},\ \frac{410}{181},\ \frac{931}{411},\ \frac{1341}{592},\ \frac{4954}{2187},\ldots.$$

D'un autre côté, l'on a

$$1,\ 3,\ 2 = \frac{9}{7};\quad 3,\ 2,\ 1 = \frac{10}{3};\quad 2,\ 1,\ 3 = \frac{11}{4}.$$

Or,

1°. $7 \cdot 34 - 3 \cdot 77 = -(77 \cdot 411 - 34 \cdot 931) = \ldots = +7;$

2°. $9 \cdot 49 - 4 \cdot 111 = -(111 \cdot 592 - 49 \cdot 1341) = \ldots = -3;$

3°. $34 \cdot 181 - 15 \cdot 410 = -(410 \cdot 2187 - 181 \cdot 4954) = \ldots = +4.$

42. D'après l'équation $UQ' - U'Q = \pm T'$, nous voyons que si T' est divisible par Q', U' sera pareillement divisible par ce facteur. Or le dénominateur de y_1 est précisément Q': *donc les dénominateurs de toutes les réduites y_2, y_3,..., sont divisibles par le dénominateur de y_1.*

VIII. — *Recherche des valeurs des fractions continues périodiques.*

43. *Toute fraction continue périodique est équivalente à l'une des racines d'une équation du second degré, à coefficients rationnels.*

1°. Soit d'abord une fraction périodique simple

$$y = (m, n, p, q).$$

Nous aurons, d'après le n° 37,

$$y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}};$$

d'où, en représentant par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les réduites répondant aux termes p, q,

$$y = \frac{Qy + P}{Q'y + P'}.$$

Ainsi, la valeur y de la fraction continue périodique simple sera donnée par l'équation

$$(10) \qquad Q'y^2 + (P' - Q)y - P = 0,$$

laquelle a ses racines *de signes contraires*. Il est d'ailleurs manifeste que la racine positive seule répond à la question.

2°. Si la période avait un seul terme m, l'équation qui donne y serait simplement $y = m + \frac{1}{y}$ ou

$$(11) \qquad y^2 - my - 1 = 0.$$

3°. Soit maintenant une fraction périodique mixte

$$x = a, b, c, d, e, (m, n, p, q).$$

En représentant encore par y la fraction périodique simple (m, n, p, q), nous aurons

$$x = a, b, c, d, e, y;$$

d'où, en appelant $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ les réduites qui correspondent aux termes d, c,

(12) $$x = \frac{Ey + D}{E'y + D'}.$$

Cette relation donne

$$y = -\frac{D'x - D}{E'x - E};$$

puis, par la substitution dans (12),

(13) $$\left\{\begin{array}{l} Q'(D'x - D)^2 - (P' - Q)(D'x - D)(E'x - E) \\ \qquad - P(E'x - E)^2 = 0. \end{array}\right.$$

Or cette équation est du second degré, et ses coefficients sont rationnels.

4°. Si la partie non périodique avait un seul terme a, on aurait $x = a + \frac{1}{y}$; et l'équation (13) serait remplacée par

(14) $$P(x - a)^2 - (P' - Q)(x - a) - Q' = 0.$$

5°. Si la partie périodique et la partie non périodique n'ont chacune qu'un seul terme, l'équation (11) donne

(15) $$(x - a)^2 + m(x - a) - 1 = 0.$$

6°. Enfin, si $x = \frac{1}{y}$, d'où $y = \frac{1}{x}$, les équations (10) ou (11) donneront encore des équations du second degré en x.

La proposition énoncée est donc démontrée dans tous les cas. Mais nous pouvons aller plus loin et discuter les équations (10), (11), (12), etc. A cet effet, établissons d'abord le lemme suivant.

44. *Soit x une fraction continue, plus grande que l'unité, et soit x' la fraction continue inverse. Si $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ sont les deux dernières réduites de x, celles de x' seront $\frac{E'}{D'}$, $\frac{E}{D}$.*

Une fraction continue x' est dite *inverse* d'une fraction continue x, lorsque les termes de la première sont ceux de la seconde, écrits dans un ordre inverse.

Cela posé, soit $x = a, b, c, d, e$; d'où $x' = e, d, c, b, a$. De $\mathrm{E} = \mathrm{D}e + \mathrm{C}$ l'on déduit $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}} = e + \frac{1}{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}}$. Par la même raison, $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}} = d + \frac{1}{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}}$, et ainsi de suite jusqu'à $\frac{\mathrm{B}}{a} = b + \frac{1}{a}$. Donc $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}} = e,\ d,\ c,\ b,\ a = x'$. On verrait de même que $\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{D}'} = e, d, c, b$.

45. Si la fraction continue x est *symétrique*, c'est-à-dire si ses termes sont tels que a, b, c, b, a, alors $x' = x$; donc $\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{D}'} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}'}$, ou simplement $\mathrm{E}' = \mathrm{D}$. Ainsi, *dans une fraction continue symétrique, le dénominateur de la dernière réduite est égal au numérateur de l'avant-dernière.*

46. *Remarque.* On peut de bien des manières parvenir à l'équation qui donne la valeur d'une fraction continue périodique. En effet, on ne changera pas cette valeur si l'on comprend, dans la partie non périodique, plusieurs termes appartenant à la période, ou si l'on prend plusieurs fois celle-ci, au lieu de la prendre une seule fois.

Soit, par exemple, $x = 2, 3, 5\ (1, 4)$.

Si nous posons $y = (1, 4)$, nous aurons

$$x = 2, 3, 5, y, \quad y = 1, 4, y;$$

d'où

$$x = \frac{37y + 7}{16y + 3}, \quad y = \frac{5y + 1}{4y + 1};$$

puis, par l'élimination de y,

$$28x^2 - 134x + 137 = 0.$$

Mais si nous regardons, comme appartenant à la partie non périodique, les termes 1, 4, 1 de la période, et si nous posons $y' = (4, 1, 4, 1)$, nous aurons

$$x = 2, 3, 5, 1, 4, 1, y', \qquad y' = 4, 1, 4, 1, y';$$

puis

$$x = \frac{257y' + 213}{111y' + 92}, \qquad y' = \frac{29y' + 24}{6y' + 5}.$$

L'élimination de y' donne ensuite l'équation trouvée ci-dessus.

47. Revenons maintenant au n° 43. En discutant les différents cas qui se peuvent présenter, et en supposant, pour plus de simplicité, que la fraction périodique soit *plus grande que l'unité,* nous obtiendrons les théorèmes suivants :

1°. *L'équation* (10), *à laquelle donne lieu une fraction périodique simple, a ses racines de signes contraires. Et si on désigne par* α *la fraction continue inverse de la fraction proposée, la racine négative de cette équation est* $-\frac{1}{\alpha}$.

D'abord, l'équation (10) a ses racines de signes contraires, puisque son dernier terme est négatif. En second lieu, d'après le n° 44, la fraction inverse serait donnée par l'équation

$$y' = \frac{Qy' + Q'}{Py' + P'},$$

ou

$$Py'^2 + (P' - Q)y' - Q' = 0.$$

Et il est évident que cette dernière équation ne diffère de (10) que par le changement de y en $-\frac{1}{y'}$.

2°. *Si la période a un seul terme, l'équation résultante a ses racines réciproques, et de signes contraires.*

En effet, dans l'équation (11), le produit des racines est égal à -1.

3°. *Plus généralement, si la période est symétrique, l'équation du second degré a encore ses racines réciproques, et de signes contraires.*

D'après le n° 45, le dénominateur Q' est égal au numérateur P; donc l'équation (15) devient

$$y^2 + \frac{P'-Q}{P} y - 1 = 0.$$

4°. *L'équation (13), à laquelle donne lieu une fraction périodique mixte qui a plusieurs termes non périodiques, a ses racines positives.*

L'équation (13) résulte de l'élimination de y entre les deux relations

$$(10) \qquad Q'y^2 + (P'-Q)y - P = 0,$$

$$(12) \qquad x = \frac{Ey + D}{E'y + D'}.$$

Il s'agit donc de faire voir que si l'on substitue dans la formule (12), successivement les deux racines de l'équation (10), les résultats obtenus seront positifs. Cela est évident pour la valeur positive de y. Quant à la valeur négative, j'observe d'abord qu'elle est comprise entre $-\frac{P}{Q'} : \frac{P}{P'}$ et $-\frac{P}{Q'} : \frac{Q}{Q'}$, c'est-à-dire entre $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{P}{Q}$. Ces valeurs, mises à la place de y dans (12), donnent

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'}, \quad \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P}.$$

Actuellement, nous avons

$$e < \frac{E}{D} < e + 1, \quad q < \frac{Q}{P} < q + 1,$$

$$e < \frac{E'}{D'} < e + 1, \quad q < \frac{Q'}{P'} < q + 1.$$

D'ailleurs e est différent de q, sans quoi e ferait partie de la période. Soit $e < q$; alors

$$\frac{E}{D} < \frac{Q}{P}, \quad \frac{E}{D} < \frac{Q'}{P'}, \quad \frac{E'}{D'} < \frac{Q}{P}, \quad \frac{E'}{D'} < \frac{Q'}{P'}.$$

Ces dernières inégalités prouvent d'abord que si y varie d'une manière continue entre $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{Q}{P}$, la valeur de x ne passera ni par *zéro* ni par *l'infini*; donc elle variera d'une manière continue.

Ensuite, ces mêmes inégalités donnent

$$DQ' - EP' > 0, \quad DQ - EP > 0,$$
$$D'Q' - E'P' > 0, \quad D'Q - E'P > 0;$$

d'où

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'} > 0, \quad \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P} > 0.$$

Si nous avions supposé $e > q$, nous serions arrivés au même résultat.

Puis donc qu'en remplaçant, dans la formule (12), y par ses deux limites $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{P}{Q}$, les résultats de la substitution sont positifs, et que d'ailleurs x varie d'une manière continue dans l'intervalle considéré, nous pouvons conclure que la seconde racine de l'équation (13) est positive et comprise entre

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'} \quad \text{et} \quad \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P} \; (*).$$

5°. Si la partie non périodique a un seul terme a, nous aurons $x = a + \frac{1}{y}$, et la seconde racine de l'équation (14) sera comprise entre $a - \frac{Q'}{P'}$ et $a - \frac{Q}{P}$. Or, $\frac{Q'}{P'}$ et $\frac{Q}{P}$ sont

(*) Ici encore, comme au n° **19**, on pourrait considérer l'hyperbole représentée par l'équation (12).

compris entre q et $q+1$; donc cette seconde racine est comprise entre $a-q$ et $a-q-1$.

Si a est moindre que q, nos deux limites sont négatives; donc *la seconde racine sera négative et plus grande que l'unité.*

Si a est plus grand que q, les deux limites sont positives; donc *la seconde racine sera positive.*

6°. Enfin, dans l'équation (15), la seconde racine est comprise entre $a-m$ et $a-m-1$: donc *cette seconde racine sera négative ou positive, selon que a sera inférieur ou supérieur à m.*

48. *Toute racine irrationnelle d'une équation du second degré, à coefficients entiers, se développe en fraction continue périodique.*

Ce théorème, réciproque de celui dont nous venons d'examiner les différents cas, est dû à Lagrange.

Soit

$$(16) \qquad a_1 x^2 - 2b_0 x - a_0 = 0$$

l'équation proposée, dans laquelle a_0, a_1, b_0 sont entiers. Supposons d'abord que les racines soient de signes contraires, auquel cas a_0 et a_1 sont positifs. La racine *positive* sera donnée par la formule

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1}.$$

Pour développer cette quantité en fraction continue, représentons par q_1 la partie entière du second membre, laquelle peut être nulle, et posons $x = q_1 + \frac{1}{x_1}$: x_1 sera positif et plus grand que 1.

De $\frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1} = q_1 + \frac{1}{x_1}$ on tire

$$\frac{1}{x_1} = \frac{b_0 - a_1 q_1 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1},$$

puis

$$x_1 = \frac{a_1}{b_0 - a_1 q_1 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}.$$

Pour faire passer le radical au numérateur, multiplions les deux termes par $\sqrt{b_0^2 + a_0 a_1} - (b_0 - a_1 q_1)$; nous obtiendrons

$$x_1 = \frac{a_1 (a_1 q_1 - b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1})}{b_0^2 + a_0 a_1 - (b_0 - a_0 q_1)^2} = \frac{a_1 q_1 - b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_0 + 2 b_0 q_1 - a_1 q_1^2},$$

en supprimant le facteur commun a_1.

Posons, pour abréger,

$$a_1 q_1 - b_0 = b_1, \quad a_0 + 2 b_0 q_1 - a_1 q_1^2 = a_2;$$

nous aurons, identiquement,

$$b_0^2 + a_0 a_1 = b_1^2 + a_1 a_2,$$

et la valeur de x_1 deviendra

$$x_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + a_1 a_2}}{a_2}.$$

Conséquemment, l'inconnue x_1 est racine de l'équation

$$(a) \qquad a_2 x_1^2 - 2 b_1 x_1 - a_1 = 0.$$

Maintenant, je dis que cette équation est de même nature que la proposée, c'est-à-dire qu'elle a ses deux racines de signes contraires. En effet, le coefficient a_2 est ce que devient le premier membre de la proposée quand, après en avoir changé tous les signes, on y remplace x par q_1. Or cette dernière quantité étant, par hypothèse, la partie entière de x, est comprise entre les deux racines de l'équation (16); donc, d'après les propriétés connues des trinômes du second degré,

$$a_1 q_1^2 - 2 b_0 q_1 - a_0 < 0,$$

ou, ce qui est la même chose, $a_2 > 0$. Donc, etc.

L'équation (a) ayant ses racines de signes contraires, il est clair, d'après ce qui précède, que l'inconnue x_1 sera la racine positive de cette équation, et que si l'on désigne par q_2 la partie entière de x_1 (laquelle sera au moins égale à 1), on aura

$$x_1 = q_2 + \frac{1}{x_2},$$

x_2 étant la racine positive de l'équation

$$(b) \qquad a_3 x_2^2 - 2 b_2 x_2 - a_2 = 0,$$

laquelle se déduit de la précédente comme celle-ci a été déduite de la proposée.

Cette équation (b) aura encore ses racines de signes contraires; et ainsi de suite.

Actuellement, la série des égalités

$$b_0^2 + a_0 a_1 = b_1^2 + a_1 a_2 = b_2^2 + a_2 a_3 = \ldots = A,$$

dans lesquelles a_0, a_1, a_2,..., b_0^2, b_1^2, b_2^2,..., sont des *nombres entiers positifs*, prouve que ces nombres ne peuvent croître indéfiniment, et, conséquemment, qu'*après un nombre limité* d'opérations, on arrivera à une certaine équation

$$a_{n+1} x_n^2 - 2 b_n x_n - a_n = 0,$$

dont les coefficients seront ceux d'une équation déjà obtenue. Conséquemment aussi, *la valeur de x sera périodique*.

Considérons à présent le cas où l'équation du second degré a ses racines de même signe. Nous pouvons les supposer positives : car si elles étaient négatives, il nous suffirait de changer, dans la proposée, x en $-x$.

Cela étant, soit

$$(17) \qquad a_0 x^2 - 2 b_0 x + a_1 = 0$$

l'équation proposée, dans laquelle a_0, a_1, b_0 sont *entiers et positifs*.

La plus grande racine est donnée par la formule

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - a_0 a_1}}{a_0} = q_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Si ces deux valeurs de x n'ont pas la même partie entière, l'équation en x_1 aura une racine plus grande que 1, et une racine négative : car l'expression $q_1 + \frac{1}{x_1}$ doit donner les deux valeurs de x. Cette transformée en x_1 ayant ses racines de signes contraires, la racine positive se développera en fraction continue périodique; et il en sera de même pour la plus grande racine de l'équation (17).

Si les deux racines de cette équation ont la même partie entière q_1, la transformée en x_1 aura ses deux racines plus grandes que l'unité positive; et alors nous pourrons raisonner sur cette équation comme nous avons raisonné sur l'équation (17), c'est-à-dire que si les deux valeurs de x_2 n'ont pas la même partie entière, la transformée en x_3 aura ses racines de signes contraires, etc.

Remarquons enfin que nous ne pourrons pas trouver indéfiniment des transformées dont les deux racines aient même partie entière : car, s'il en était ainsi, les deux valeurs de x seraient égales et, conséquemment, rationnelles.

Le théorème de Lagrange est donc démontré.

49. Reprenons le calcul qui donne le développement de la plus grande racine de l'équation proposée.

Dans le cas de l'équation (16), nous avons trouvé

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1} = q_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Nommons N la racine carrée entière de $A = b_0^2 + a_0 a_1$, et posons

$$b_0 + N = d_1, \qquad d_1 = a_1 q_1 + r_1;$$

nous aurons de même

$$b_1 + N = d_2, \qquad d_2 = a_2 q_2 + r_2,$$
$$b_2 + N = d_3, \qquad d_3 = a_3 q_3 + r_3.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mais

$$b_1 = a_1 q_1 - b_0 = b_0 + N - r_1 - b_0 = N - r_1;$$

donc

$$d_2 = 2N - r_1,$$
$$d_3 = 2N - r_2.$$
$$\dots\dots\dots$$

La *loi des dividendes* est donc connue.

D'un autre côté, la relation $a_2 = a_0 + 2b_0 q_1 - a_1 q_1^2$ donne

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0 + q_1(2b_0 - a_1 q_1) = a_0 + q_1(2b_0 - b_1 - b_0) \\ &= a_0 + q_1(b_0 - b_1) = a_0 + q_1(d_1 - d_2) = a_0 + q_1(r_2 - r_1). \end{aligned}$$

De là le tableau suivant, qui donne la marche du calcul :

$$d_1 = b_0 + N = 2N - r_0,$$
$$d_1 = a_1 q_1 + r_1, \qquad d_2 = 2N - r_1, \qquad a_2 = a_0 + q_1(r_1 - r_0),$$
$$d_2 = a_2 q_2 + r_2, \qquad d_3 = 2N - r_2, \qquad a_3 = a_1 + q_2(r_2 - r_1).$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

S'il s'agit de l'équation (17), il suffit de changer le signe de a_1.

50. En appliquant cette méthode à l'équation

$$3x^2 - 8x - 5 = 0,$$

nous aurons

$$a_1 = 3, \quad b_0 = 4, \quad a_0 = 5, \quad A = 31, \quad N = 5,$$

puis

$$\begin{array}{lll}
 & d_1 = 9, & a_1 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_2 = 10, & a_2 = 5 - 3 = 2, \\
10 = 2.\ 5 + 0, & d_3 = 10, & a_3 = 3, \\
10 = 3.\ 3 + 1, & d_4 = 9, & a_4 = 2 + 3 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, & d_5 = 6, & a_5 = 3 + 3 = 6, \\
6 = 6.\ 1 + 0, & d_6 = 10, & a_6 = 5 - 4 = 1, \\
10 = 1.10 + 0, & d_7 = 10, & a_7 = 6, \\
10 = 6.\ 1 + 4, & d_8 = 6, & a_8 = 1 + 4 = 5, \\
6 = 5.\ 1 + 1, & d_9 = 9, & a_9 = 6 - 3 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_{10} = 10, & a_{10} = 5 - 3 = 2; \ldots;
\end{array}$$

donc

$$x' = (3,\ 5,\ 3,\ 1,\ 1,\ 10,\ 1,\ 1).$$

51. Pour la seconde racine, prise positivement, on aurait

$$a_1 = 3, \quad b_0 = -4, \quad a_0 = 5, \quad A = 31, \quad N = 5;$$

puis

$$\begin{array}{lll}
 & d_1 = 1, & a_1 = 3, \\
1 = 3.\ 0 + 1, & d_2 = 9, & a_2 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, & d_3 = 6, & a_3 = 3 + 3 = 6, \\
6 = 6.\ 1 + 0, & d_4 = 10, & a_4 = 5 - 4 = 1, \\
10 = 1.10 + 0, & d_5 = 10, & a_5 = 6, \\
10 = 6.\ 1 + 4, & d_6 = 6, & a_6 = 1 + 4 = 5, \\
6 = 5.\ 1 + 1, & d_7 = 9, & a_7 = 6 - 3 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_8 = 10, & a_8 = 5 - 3 = 2, \\
10 = 2.\ 5 + 0, & d_9 = 10, & a_9 = 3, \\
10 = 3.\ 3 + 1, & d_{10} = 9, & a_{10} = 2 + 3 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, \ldots; & &
\end{array}$$

donc

$$-x'' = 0,\ (1,\ 1,\ 10,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3).$$

52. Prenons encore l'équation

$$62x^2 - 400x + 645 = 0,$$

laquelle donne

$$x' = \frac{200 + \sqrt{10}}{62}, \quad x'' = \frac{200 - \sqrt{10}}{62}.$$

Pour la première racine,

$$a_1 = 62, \quad a_0 = -645, \quad N = 3, \quad d_1 = 203;$$

puis

$$\begin{array}{lll}
203 = 62.3 + 17, & d_2 = -11, & a_2 = -645 + 3(203 + 11) = -3, \\
-11 = -3.3 - 2, & d_3 = 8, & a_3 = 62 - 3.19 = 5, \\
8 = 5.1 + 3, & d_4 = 3, & a_4 = -3 + 5 = 2, \\
3 = 2.1 + 1, & d_5 = 5, & a_5 = 5 - 2 = 3, \\
5 = 3.1 + 2, & d_6 = 4, & a_6 = 2 + 1 = 3, \\
4 = 3.1 + 1, & d_7 = 5, & a_7 = 3 - 1 = 3, \\
5 = 2.2 + 1, & d_8 = 5, & a_8 = 3, \\
5 = 3.1 + 2, & d_9 = 4, & a_9 = 2 + 1 = 3, \ldots
\end{array}$$

A cause de $d_9 = d_6$ et de $a_9 = a_6$, la période est en évidence; et $x' = 3, 3, 1, 1, (1, 1, 2)$.

On trouve semblablement

$$x'' = 3, 5, (1, 2, 1) = 3, 5, 1, (2, 1, 1).$$

53. La méthode de calcul qui vient d'être appliquée donne une limite supérieure du nombre des transformées de l'équation proposée. En effet, s'il s'agit de l'équation (16), les dividendes sont positifs et moindres que $2N + 1$. De plus, pour un dividende d, il y a au plus d valeurs du diviseur. Donc le nombre des transformées est au plus

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2N = N(2N + 1).$$

Dans le cas de l'équation (17), comme les dividendes peuvent être négatifs, on obtiendrait une limite du nombre des transformées en doublant $N(2N + 1)$ (*).

(*) On aurait une limite beaucoup plus basse que $N(2N + 1)$, si l'on pouvait assigner le nombre des solutions entières et positives de l'équation $z^2 + ut = A$.

53. Nous supposerons maintenant, pour plus de simplicité, que *l'équation donnée a au moins une racine plus grande que l'unité positive :* si le contraire arrivait, il suffirait de changer x en $\frac{1}{x}$ ou en $-\frac{1}{x}$. Cette restriction étant admise, si l'on rapproche le théorème de Lagrange de la discussion faite ci-dessus (47), on arrive aux conséquences suivantes :

1°. *Soit une équation du second degré, dont les racines sont de signes contraires,*

Si l'on développe, en fractions continues, la racine positive x' et la racine négative $-x''$ changée de signe :

La partie périodique de x' sera l'inverse de la partie périodique de x'' ;

Les deux fractions continues sont périodiques simples, excepté quand x'' est >1, auquel cas x' a un seul terme non périodique.

2°. *Si l'équation du second degré a ses racines positives, ces deux racines se développent suivant deux fractions périodiques mixtes, dans lesquelles les parties périodiques sont inverses l'une de l'autre.*

Ajoutons, pour que cet énoncé ne puisse pas être en défaut :

1°. Qu'une fraction périodique simple, plus petite que l'unité, est nécessairement de la forme

$$x'' = 0,\ (m,\ n,\ p,\ q,\ldots,\ s,\ t);$$

2°. Que pour avoir, dans x' et dans x'', des périodes inverses l'une de l'autre, il pourra être nécessaire de comprendre dans les parties non périodiques, plusieurs termes périodiques.

Ainsi, dans l'exemple du n° 50, nous avons trouvé

$$x' = (3,\ 5,\ 3,\ 1,\ 1,\ 10,\ 1,\ 1)$$

et

$$x'' = 0,\ (1,\ 1,\ 10,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3).$$

Dans le n° 52, les valeurs des deux racines étaient

$$x' = 3,\ 3,\ 1,\ 1,\ (1,\ 1,\ 2),\quad x'' = 3,\ 5\ (1,\ 2,\ 1),$$

et les périodes n'étaient pas inverses; mais elles le sont devenues quand nous avons eu écrit

$$x'' = 3,\ 5,\ 1,\ (2,\ 1,\ 1).$$

54. *La racine carrée d'un nombre rationnel non carré est exprimée par une fraction périodique mixte ayant un seul terme à sa partie non périodique.*

Soit A le nombre, *plus grand que l'unité,* dont on veut développer la racine carrée en fraction continue. Cette racine est donnée par l'équation $x^2 - A = 0$, et le théorème est compris dans celui qui précède.

Soit $x' = \sqrt{A} = a,\ (m,\ n,\ p,\ q,\ r)$, en supposant, pour fixer les idées, que la période ait cinq termes. Représentons par y la fraction périodique simple $(m,\ n,\ p,\ q,\ r)$; nous aurons, d'après le n° 47,

$$-x'' = \sqrt{A} = a - (r,\ q,\ p,\ n,\ m)$$

ou

$$x'' = -a + (r,\ q,\ p,\ n,\ m).$$

Mais $x'' = x' = a,\ (m,\ n,\ p,\ q,\ r)$; donc

$$-a + r = a,\quad q = m,\quad p = n,\quad n = p,\quad m = q,\quad r = r,\ \text{etc.}$$

La relation $-a + r = a$ donne $r = 2a$, c'est-à-dire que, *dans le développement de* $\sqrt{A}$, *le dernier terme de la période est double du terme non périodique.*

Les autres égalités nous apprennent qu'*en faisant abstraction du dernier terme* $2a$, *la période de* $\sqrt{A}$ *est symétrique.*

Par exemple,

$$\sqrt{24} = 4,\ (1,\ 8);\quad \sqrt{73} = 8,\ (1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1,\ 16).$$

55. Avant de passer à d'autres propriétés, cherchons

le moyen de *transformer une fraction continue, à termes positifs et négatifs, en une autre dont tous les termes soient positifs.*

Soit, à cet effet, la fraction continue $x = a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$, dans laquelle a, b, c ne sont pas inférieurs à l'unité. Cette fraction est comprise entre $a - 1$ et a; donc on peut écrire $x = a - 1 + \frac{1}{z}$. En identifiant, on trouve

$$z = \frac{b + \frac{1}{c}}{b - 1 + \frac{1}{c}} = 1 + \frac{1}{b - 1 + \frac{1}{c}}.$$

Donc

$$(18) \qquad a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b - 1 + \cfrac{1}{c}}}.$$

Si $b = 1$, on a simplement

$$a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c}} = a - 1 + \frac{1}{1 + c}.$$

56. Comme application, prenons

$$x = 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 - \ldots}}}}}}$$

Nous obtiendrons successivement

$$x = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 - \ldots}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 - \ldots}}}}}},$$

et enfin

$$x = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 5,\ 6,\ 1,\ 7,\ 8,\ 1,\ldots$$

57. Revenons à l'équation (17),

$$a_0 x^2 - 2 b_0 x + a_1 = 0;$$

et supposons qu'ayant réduit l'une des racines en fraction continue, on veuille conclure de ce développement celui de la seconde racine.

Soit donc, pour fixer les idées,

$$x' = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ (m,\ n,\ p,\ q).$$

Représentons par y' la valeur de la fraction périodique simple (m, n, p, q); d'où $x' = a, b, c, d, e, y'$.

Il est clair, d'après le n° 43, que pour obtenir la seconde racine x'' de l'équation (17), il suffira de remplacer y', dans l'expression de x', par la racine négative de l'équation $y = m, n, p, q, y$. Or cette racine négative $-y''$ a pour développement $-[0, (q, p, n, m)]$ (47). Conséquemment, en posant $z = (q, p, n, m)$,

$$x'' = a,\ b,\ c,\ d,\ e - z.$$

Il y a maintenant, à cause de e différent de q, deux cas à distinguer :

1°. $e > q$. Alors la fraction

$$e - z = e - q - \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n + \ldots}},$$

ou, par la formule (18),

$$e - z = e - q - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{p - 1 + \cfrac{1}{n + \ldots,}}}$$

puis

$$x'' = a, \ b, \ c, \ d, \ e - q - 1, \ 1, \ p - 1, \ (n, \ m, \ q, \ p).$$

2°. $e < q$. Dans ce cas,

$$d + \frac{1}{e - z} = d - \cfrac{1}{q - e + \cfrac{1}{p + \ldots}} = d - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - e - 1 + \cfrac{1}{p + \ldots,}}}$$

et, conséquemment,

$$x'' = a, \ b, \ c, \ d - 1, \ 1, \ q - e - 1, \ (p, \ q, \ n, \ m).$$

Les mêmes considérations s'étendraient à l'équation (16). On trouvera les formules générales, soit dans le Mémoire de M. Ramus (*Journal de* Crelle, tome XX), soit dans celui de M. Lebesgue (*Journal de* Liouville, tome V).

58. *Applications.* Soit l'équation

$$62x^2 - 400x + 645 = 0.$$

Nous avons trouvé ci-dessus, pour la première racine,

$$x' = 3, \ 3, \ 1, \ 1, \ (1, \ 1, \ 2).$$

Le développement de la seconde racine sera donc

$$x'' = 3, \ 3, \ 0, \ 1, \ 0, \ (1, \ 1, \ 2).$$

Pour simplifier ce développement, observons qu'une fraction telle que $a + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{b + \frac{1}{c}}} = a + b + \frac{1}{c}$. Par conséquent,

$$x'' = 3, \ 3, \ 0, \ 2, \ (1, \ 2, \ 1) = 3, \ 5, \ (1, \ 2, \ 1);$$

ce qui est exact

Soit encore $x'=2, 3, 3, 4, 5, (3, 2, 2, 2)$. Nous aurons, d'après la formule ci-dessus,

$$x''=2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1,\ 1,\ (2,\ 3,\ 2,\ 2).$$

Et, en effet, si l'on remonte aux valeurs de ces deux fractions continues, on trouve qu'elles sont racines de l'équation

$$490\,137\,x^2-2\,256\,768\,x+2\,597\,744=0.$$

D'ailleurs, cette équation étant résolue donne

$$x=\frac{1\,128\,384\pm\sqrt{528}}{490\,137}.$$

59. Pour terminer ce paragraphe, résolvons les équations du second degré auxquelles on est conduit lorsqu'on cherche la valeur d'une fraction continue périodique.

D'abord, l'équation (10) : $Q'y^2+(P'-Q)y-P=0$ donne

$$y=\frac{-(P'-Q)\pm\sqrt{(P'-Q)^2+4PQ'}}{2Q'}$$

Mais $PQ'-P'Q=\pm 1$; donc

$$y=\frac{-(P'-Q)\pm\sqrt{(P'+Q)^2\pm 4}}{2Q'}.$$

Plus généralement, soit l'équation (13)

$$Q'(D'x-D)^2-(P'-Q)(D'x-D)(E'x-E)-P(E'x-E)^2=0,$$

ou

$$\begin{aligned}&[Q'D'^2-(P'-Q)D'E'-PD'^2]x^2\\ &-[2(Q'DD'-PEE')-(P'-Q)(DE'+D'E)]x\\ &+Q'D^2-(P'-Q)DE-PE^2=0.\end{aligned}$$

Elle donne

$$x=\frac{2(Q'DD'-PEE')-(P'-Q)(DE'+D'E)\pm\sqrt{L}}{2[Q'D'^2-PE'^2-(P'-Q)D'E']},$$

en représentant par L la fonction

$$[2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E)]^2$$
$$-4[Q'D'^2 - PE'^2 - (P'-Q)D'E'][Q'D^2 - PE^2 - (P'-Q)DE].$$

En développant cette fonction, et ayant égard aux relations $PQ' - P'Q = \pm 1$, $DE' - D'E = \pm 1$, on trouve qu'elle se réduit à $(P' - Q)^2 \pm 4$.

Il suit de là que si l'on cherche la valeur d'une fraction continue périodique, le radical contenu dans cette valeur est de la forme $\sqrt{u^2 \pm 4}$, laquelle, si u est pair, se réduit à $2\sqrt{u'^2 \pm 1}$. Par suite, d'après le théorème de Lagrange, l'irrationnelle $\sqrt{A}$, dans laquelle A est un nombre entier, ne doit différer que par un facteur commensurable λ de l'irrationnelle $\sqrt{u^2 \pm 4}$. En d'autres termes, on peut toujours satisfaire à l'équation $A\lambda^2 = u^2 \pm 4$.

Cette remarque est utile dans l'analyse indéterminée du second degré.

IX. — *Sur le rapport de la circonférence au diamètre.*

60. La formule de Brouncker, démontrée ci-dessus, ne peut pas servir à calculer des valeurs approchées du rapport de la circonférence au diamètre, parce qu'elle est fort peu convergente. On peut, ainsi que nous le ferons voir plus tard, développer ce rapport suivant des fractions continues plus convergentes que celle de Brouncker; mais on ne connaît pas de méthode directe qui permette de le développer en une fraction continue ayant ses termes *entiers*.

Pour suppléer à la connaissance de cette méthode, observons que le rapport dont il s'agit est compris entre

$$3,141592653589793 \quad \text{et} \quad 3,141592653589794,$$

c'est-à-dire entre les deux fractions

$$\frac{3\,141\,592\,653\,589\,793}{1\,000\,000\,000\,000\,000} \quad \text{et} \quad \frac{3\,141\,592\,653\,589\,794}{1\,000\,000\,000\,000\,000}.$$

Si donc on réduit ces deux quantités en fractions continues, les termes communs aux deux développements appartiendront au développement cherché : c'est là une proposition qu'il est très-aisé de démontrer.

Cela posé, on trouve

$$\frac{3\,141\,592\,653\,589\,793}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$$
$$= 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 15,\ldots;$$
$$\frac{3\,141\,592\,653\,589\,794}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$$
$$= 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ldots.$$

Conséquemment,

$$\pi = 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ldots.$$

On aurait obtenu un plus grand nombre de termes si l'on avait pris un plus grand nombre de décimales dans la valeur de π.

61. Formons actuellement les réduites de la fraction continue qui vient d'être écrite, et nous obtiendrons les valeurs suivantes, qui approchent de plus en plus du nombre π, alternativement par défaut et par excès :

$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{103\,993}{33\,102},\quad \frac{104\,348}{33\,215},$$
$$\frac{208\,341}{66\,317},\quad \frac{312\,689}{99\,532},\quad \frac{833\,719}{265\,381},\ldots.$$

La première réduite est fort peu approchée.

La deuxième, $\frac{22}{7}$, est égale au *rapport d'Archimède*; elle est approchée à moins de $\frac{1}{7.106} = \frac{1}{742}$.

La troisième réduite donne le *rapport de Rivard.*

La quatrième est égale au rapport trouvé par *Adrien Métius*. Ce rapport, qui n'est guère plus compliqué que celui de Rivard, est beaucoup plus approché, car il diffère de π d'une quantité comprise entre

$$\frac{1}{113.33102} \quad \text{et} \quad \frac{1}{113(33102+113)},$$

c'est-à-dire entre

$$\frac{1}{3740526} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3753295}.$$

Si, à l'aide des réduites principales que nous venons de calculer, on formait les réduites intermédiaires, on obtiendrait d'autres expressions approchées du rapport de la circonférence au diamètre.

62. Reprenons la fraction continue

$$\pi = 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ldots.$$

Si nous voulons la rendre plus convergente, transformons-la en une autre qui ne renferme plus de termes égaux à l'unité. C'est à quoi nous parviendrons au moyen de la formule (18). Cette formule donne, en effet,

$$15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1}}} = 16 - \cfrac{1}{293 + \cfrac{1}{1}}.$$

Elle donne ensuite

$$293 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = 294 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

$$= 294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3}}, \ldots;$$

donc

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}},$$

ou encore

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{-294 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-4 + \dots}}}}}.$$

63. Ayant développé π en fraction continue, on peut, à l'aide de la formule (8), développer ce même nombre en série convergente. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\pi = 3 &+ \frac{1}{7} - \frac{1}{7.106} + \frac{1}{106.113} \\ &- \frac{1}{113.33102} + \frac{1}{33102.33215} - \frac{1}{33215.66317} \\ &- \frac{1}{66317.99532} + \frac{1}{99532.265381} - \dots.\end{aligned}$$

La série devient encore plus convergente si l'on prend pour fraction continue celle qui vient d'être écrite. On trouve alors, en effet,

$$\begin{aligned}\pi = 3 &+ \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{113.33215} \\ &- \frac{1}{33215.99532} - \frac{1}{99532.364913} + \dots.\end{aligned}$$

BIOGRAPHIE.

Cirodde.

Nous avons à raconter une vie, sans incidents, courte, mais bien remplie; la vie d'un homme intègre, bon époux, bon père, bon citoyen et excellent professeur. Cirodde (Paul-Louis) est né le 18 décembre 1794, à Issoudun, seconde ville du Berry, et occupant une place honorable dans les annales de cette ancienne province. Admis au lycée de Bourges, le jeune Cirodde fit des études si brillantes, qu'à l'âge de dix-huit ans il fut nommé, par M. de Fontanes, régent de mathématiques au collége de Châteauroux. Voué désormais à l'enseignement, il partit du premier échelon. Nous le trouvons, en 1813, professant les classes de grammaire au collége de Sancerre; en 1814, régent de mathématiques au collége de Saint-Benoît-du-Saultz; de 1817 à 1818, maître d'études au collége de Meaux; de 1818 à 1820, maître d'études au collége royal Louis-le-Grand; et de là, envoyé, par arrêté de la Commission d'instruction publique, du 3 octobre 1820, au collége de Dijon pour y professer les mathématiques. Après quinze années d'exercices, Cirodde entra dans la carrière littéraire par ses leçons d'arithmétique, en 1835, et continua depuis à publier ces Traités élémentaires qui ont eu tant de succès, d'autant plus flatteurs qu'il y avait lutte entre des ouvrages analogues, d'un mérite intrinsèque, et auxquels la position officielle des auteurs donnait un cours *forcé;* c'est que Cirodde possédait à un haut degré l'exégèse, sous forme catéchétique du professeur, et savait, en écrivant, éviter les deux écueils du genre : le niais et le verbiage. Savoir ce qu'il faut dire est un talent rare ; plus rare encore est le talent de savoir ce qu'il ne faut pas dire. Presque tous ces Traités ont eu plusieurs éditions et l'autorisation officielle. Ces deux critériums sont loin d'être infaillibles. Les professeurs à classes nombreuses trouvent toujours un débit assuré pour leurs livres et de la facilité à multiplier les éditions. Si, comme il est d'usage dans les académies, on publiait les rapports et les noms des rapporteurs, les *autorisations* auraient une signification ; comme il n'en est rien, ces appréciations dégénèrent en simples formules, espèce de certificat de bonne conduite attestant que l'auteur n'a pas dévié du sillon tracé par la charrue universitaire. Voici un fait plus significatif : Poisson, ce nom dit tout, appela Cirodde dans la capitale, et le fit nommer, le 29 mai 1827, professeur au collége de Henri IV ; là, il forma de nombreux élèves pour les diverses écoles, et prit bientôt rang parmi les meilleurs professeurs de l'Académie de Paris. Absorbé complétement par le devoir, tous ses instants s'écoulaient à donner, à écrire, à publier des leçons. Retiré dans son cabinet, vivant au milieu de ses théorèmes, ses relations sociales n'avaient pas cette facilité, ce *liant* que donnent la fréquentation du monde et la culture des lettres (*litteræ humaniores*). Toutefois, Cirodde n'était pas du nombre de ces géomètres dont Voltaire dit, avec raison, qu'en les faisant

Promethée oublia de leur donner un cœur.

Il est à ma connaissance que Cirodde aida avec générosité et, ce qui est plus louable, avec délicatesse, un collègue dans la peine, qui l'a précédé dans la tombe sans pouvoir s'acquitter. Parvenu à une honorable aisance, unique fruit des pénibles labeurs de l'enseignement, jouissant d'un bonheur domestique parfait, il pouvait aspirer à ce genre de repos que Cicéron définit *otium cum dignitate*. Le sort en a décidé autrement. Les plus chanceuses des probabilités sont celles de la durée vitale : échéance indéterminée pour chacun, à court terme pour tous. Les premiers symptômes du mal, précurseurs que nous voulons rarement reconnaître, se déclarèrent à Rome, dans un voyage d'agrément que Cirodde fit avec toute sa famille, pendant les vacances de 1847. Après une courte maladie de cinq jours, il a expiré le 24 janvier 1849, âgé de cinquante-quatre ans, et ayant conservé jusqu'au dernier moment toutes ses facultés intellectuelles et toutes ses opinions philosophiques. Il laisse une veuve, sœur de M. Vaillant, général de division du génie, et deux fils, ses élèves, qu'il a fait entrer ensemble à l'École Polytechnique, en 1843, et qui ont été admis ensemble, en 1845, dans le corps des Ponts et Chaussées. Ils promettent de porter dignement un nom honorable : *noblesse oblige.* Tm.

Ouvrages de Cirodde.

1°. *Leçons d'Arithmétique*; in-8° de 12 feuilles $\frac{1}{2}$. Dijon, 1835. — 3e édition; Paris, 1839. — 4e édition; Paris, 1840. — 5e édition; Paris, 1843. — 6e édition; Paris, 1845. — 7e édition; Paris, 1845. — 8e édition; Paris, 1847. (Voir *Nouvelles Annales.*)

2°. *Théorie de l'Élimination entre deux équations de degré quelconque entre deux inconnues*; in-4° de 3 feuilles. Dijon, 1835. (Par la division, méthode de Bret.)

3°. *Leçons de Géométrie théorique et pratique*; in-8° de 24 feuilles. Dijon, 1836.

4°. *Abrégé d'Arithmétique*; in-18 de 3 feuilles. Dijon, 1840. — 2e édition. Dijon, 1842.

5°. *Leçons de Géométrie*, suivies de notions élémentaires de géométrie descriptive; in-8° de 28 feuilles. Paris, 1844. (La couverture porte 2e édition.)

6°. *Leçons d'Algèbre;* in-8° de 36 feuilles. Paris, 1846.

7°. *Éléments de Trigonométrie rectiligne et sphérique;* in-8° de 6 feuilles. Paris, 1847.

8°. *Leçons de Géométrie analytique*, précédées des *Éléments de la Trigonométrie sphérique et rectiligne;* 2e édition. Paris, 1848. La 1re édition est de 1843.

9°. *Traité de Statique;* manuscrit prêt pour l'impression.

10°. *Nouvelles Annales de Mathématiques,* tomes I et IV.

SOLUTION DE LA QUESTION 201

(Voir p. 44);

PAR M. HAREL (JULES),
Élève du lycée de Rouen.

Soient P, P′ *deux points appartenant respectivement à deux ellipses homofocales, tels que les tangentes qu'on mène à ces courbes en* P *et en* P′ *se coupent à angle droit; en désignant par* I *le point de leur intersection, et par* C *le centre commun des ellipses, la droite* CI *divisera en parties égales la distance* PP′ (Strebor).

Soient $2a$ et $2b$ les deux axes de l'ellipse intérieure, et $2A$ et $2B$ les axes de l'ellipse extérieure; les équations de ces deux ellipses, rapportées à leur centre commun et à leurs axes, seront

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$
$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Soient x' et y' les coordonnées de P, x'' et y'' celles de P′; l'équation de la tangente en P est

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x + \frac{b^2}{y'};$$

l'équation de la tangente en P' est

$$y = -\frac{B^2x''}{A^2y''}x + \frac{B^2}{y''};$$

les coordonnées du point d'intersection I sont

$$x = \frac{a^2A^2(B^2y' - b^2y'')}{a^2B^2y'x'' - A^2b^2x'y''},$$

$$y = \frac{b^2B^2(a^2x'' - x'A^2)}{a^2B^2y'x'' - A^2b^2x'y''};$$

donc l'équation de la droite CI est

$$y = \frac{b^2B^2(a^2x'' - x'A^2)}{a^2A^2(B^2y' - b^2y'')}x.$$

Il faut faire voir que cette équation est satisfaite pour les coordonnées du point milieu de PP', coordonnées qui sont $\frac{y' + y''}{2}$ et $\frac{x' + x''}{2}$; c'est-à-dire il faut montrer que l'on a

$$\frac{y' + y''}{2} = \frac{b^2B^2(a^2x'' - x'A^2)}{a^2A^2(B^2y' - b^2y'')}\left(\frac{x' + x''}{2}\right)$$

ou

$$\begin{aligned} &A^2B^2(a^2y'^2 + b^2x'^2) + A^2a^2(B^2 - b^2)y'y'' \\ &= a^2b^2(B^2x''^2 + A^2y''^2) + B^2b^2(a^2 - A^2)x'x''. \end{aligned}$$

Or (x', y') étant sur la première ellipse, on a

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2;$$

(x'', y'') étant sur la seconde ellipse, on a

$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$-a^2A^2y'y''(b^2 - B^2) = b^2B^2x'x''(a^2 - A^2).$$

Or, les tangentes étant perpendiculaires, on a

$$a^2A^2y''y' = -b^2B^2x'x'';$$

les deux ellipses étant homofocales, on a aussi

$$b^2 - B^2 = a^2 - A^2.$$

La relation ci-dessus est justifiée; donc le théorème est démontré.

Nota. Le lieu géométrique du point I est un cercle concentrique aux ellipses, ce cercle est touché au point I par le cercle décrit sur PP′ comme diamètre (*voir* tome V, page 127); donc le rayon CI passe par le milieu de PP′.

BIBLIOGRAPHIE (*).

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE NAVIGATION à l'usage des officiers de la marine militaire et de la marine du commerce; par *V. Caillet,* examinateur de la marine, membre de la Légion d'honneur.

COURS DE L'ÉCOLE NAVALE, première année d'études; t. I^{er}, texte. Brest, 1848. Grand in-8° de 277 pages, 13 pl. lith.; par *V. Caillet,* professeur d'hydrographie de première classe, chevalier de la Légion d'honneur, chargé à l'École navale de l'enseignement de l'astronomie, de la navigation et de la géodésie appliquée à la marine; t. II, Tables. Brest, 1846, grand in-8° de 217 pages.

Le premier Traité de navigation, vraiment didactique, est celui de Georges Fournier, jésuite de Caen. Son ouvrage, très-longtemps classique et qu'on consulterait encore avec fruit, est devenu extrêmement rare; il porte

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. BACHELIER, libraire, quai des Augustins, n° 55.

pour titre : *Hydrographie contenant la théorie et la pratique de toutes les parties de la navigation*. Paris, 1643 et 1667; 2[e] édition, in-folio.

De nos jours, un homonyme, M. Fournier (C.-F.), naguère examinateur de la marine, a composé aussi un Traité de navigation, adopté pour les Écoles d'hydrographie, et qui est parvenu, en 1845, à la 4[e] édition. L'auteur, ayant navigué lui-même, a résolu avec talent les problèmes pratiques. Mais, dès 1808, le savant Du Bourguet exposa, d'une manière à peu près complète, les applications des théories astronomiques à la navigation; destinées à la marine militaire et à la marine marchande, l'auteur a dû renvoyer aux notes la partie supérieure aux éléments.

M. Caillet a suivi une marche différente. Les cinq premiers chapitres, consacrés à l'astronomie proprement dite, donnent au navigateur une parfaite connaissance de la voûte céleste et des lois qui régissent les mouvements des astres, connaissance indispensable pour comprendre la construction des *éphémérides* (*). L'usage de ces éphémérides (*Connaissance des Temps*) est expliqué, avec les préliminaires nécessaires, dans le chapitre VI. On y trouve une méthode d'interpolation, en supposant constante la troisième différence, ce qui est toujours suffisant pour la pratique.

Il arrive souvent que plusieurs personnes observent simultanément les mêmes distances angulaires; M. Caillet cherche (page 24) quelle erreur peut donner, dans les hauteurs observées au même instant, une différence de

---

(*) Ces cinq chapitres, modèles de concision et d'exactitude, imprimés à part, seraient très-utiles aux professeurs de cosmographie et d'astronomie, dans les institutions universitaires. O. T.

position des observateurs. La considération de deux angles trièdres, l'un ayant son sommet au centre de la terre, et l'autre au centre de l'astre, et ayant pour arête commune la distance des lieux des observateurs, fait voir très-simplement que l'erreur ne peut aller à $0'',3$ pour un écartement de 10 mètres.

Après cette exposition claire et élémentaire des calculs fondamentaux, l'auteur établit, dans les chapitres VII et VIII, la théorie des lentilles et leurs diverses applications aux lunettes astronomiques; examinant tous les cas d'erreur que peut donner la construction des instruments, il fait voir que, contrairement à l'opinion de Borda, consignée dans son Instruction sur le cercle à réflexion, il n'est pas absolument nécessaire que le grand miroir de l'instrument soit exactement placé au centre. Une Table, dont on connaît la formule, est d'un usage plus facile que si la pratique seule en donnait l'entrée. Aussi l'auteur explique avec soin les démonstrations des formules au moyen desquelles on a construit les Tables nécessaires pour tenir compte de l'imperfection des instruments, du non-parallélisme des miroirs, etc.

Les trois chapitres suivants sont consacrés aux trois corrections fondamentales que doivent subir les *hauteurs* observées. Le chapitre IX traite de la dépression. On y trouve la description de l'ingénieux dépressiomètre de M. Daussy, et l'indication d'un mode d'observer plus simple que celui qui est dû à M. Daussy. Les relations entre la hauteur de l'œil, la dépression et la distance à l'horizon sont rigoureusement établies, et les exemples de calcul facilitent l'emploi des formules. On connaît le beau travail de M. Caillet sur les réfractions astronomiques, travail qui a été l'objet d'un Rapport très-favorable à l'Académie des Sciences. L'auteur, ayant fait d'heureuses modifications à la formule de Laplace, a calculé des Tables usuelles, insérées dans la *Connaissance des Temps* de 1851 (*).

Les Tables de correction relatives à l'influence thermométrique et barométrique, au cas où les circonstances ne permettent pas d'employer les réfractions moyennes, sont d'un usage très-commode. Le chapitre X donne l'explication et les applications de ces diverses Tables, renfermées dans le tome II.

Le chapitre XI renferme tout ce qui concerne l'influence de la parallaxe; et la mesure des demi-diamètres du soleil et de la lune fait la matière du chapitre XII.

Tout ce qui précède peut être considéré comme les préliminaires; ce n'est qu'après l'exposition de ces théories, que l'auteur aborde les applications à la navigation.

Un marin fait rarement une seule observation, surtout pour les calculs d'angles horaires. Il s'agit donc de savoir si la moyenne des hauteurs correspond exactement à la moyenne des heures indiquées par le chronomètre. Cela arrive exactement pour les astres dont le mouvement est régulier, et encore pour ceux dont le mouvement peut être considéré comme régulier dans l'intervalle des observations, si l'on choisit les instants favorables à l'observation.

L'auteur déduit élémentairement toutes les applications de navigation de la formule générale

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

méthode excellente, parce qu'elle est naturelle et qu'on s'en sert constamment; et il faut se rappeler que cet ouvrage est destiné aussi à des personnes qui souvent ne commencent à étudier qu'à un âge où l'habitude du tra-

(*) Dans ces Tables, un signe placé sur la dernière décimale fait connaître si l'approximation est par excès ou par défaut; ce qui devrait être adopté pour toute espèce de Tables approximatives. O. T.

vail est devenue assez difficile. Dès lors, il faut des méthodes qui ne changent pas, et ne chargent pas trop la mémoire. L'auteur, ne voulant éluder aucune difficulté, par des calculs préparés, a mis le marin dans la position où il se trouve à la mer, ayant à régler un chronomètre dont il connaît la marche diurne et l'état absolu.

Les chapitres XV et XVI terminent la navigation, et contiennent les calculs de latitude par tous les moyens applicables à la mer, et les calculs de longitude par les distances lunaires et les chronomètres, ainsi que les calculs des erreurs d'observation. Peut-être que, pour rendre l'ouvrage complet, on n'aurait pas dû omettre le calcul des longitudes par les éclipses des satellites de Jupiter; il est vrai que ce calcul n'est guère possible à la mer. La fin de l'ouvrage est consacrée à la navigation par *estime*, c'est-à-dire au moyen de la carte, du compas de route et du loch. La théorie loxodromique, la construction des cartes sont expliquées avec une extrême clarté, et commodément appliquées. On y donne aussi tous les moyens de *relèvements*, importants dans la navigation si remplie de dangers à l'approche des côtes.

L'entrée et la sortie des ports exigent la connaissance des *marées*. L'auteur adopte les formules de Laplace, perfectionnées par M. Chazallon.

L'ouvrage est terminé par une instruction sur la disposition et l'usage des Tables du second volume.

Ce second volume, publié avant le premier, renferme *cinquante-quatre* Tables; toutes sont nécessaires au navigateur, plusieurs sont entièrement nouvelles, et le plus grand nombre d'entre elles est utile à tous les calculateurs, géomètres et physiciens. L'arrangement des nombres en lignes et en colonnes, la netteté des chiffres, enfin toute l'exécution typographique ne laissent rien à désirer. Sous un format commode, ce volume prendra place non-seulement dans les bibliothèques des calculateurs par état, mais encore dans celles de tous les hommes instruits qui veulent être initiés aux moyens de calculer les grands phénomènes de la nature.

La spécialité des *Nouvelles Annales* ne nous permet pas, à notre grand regret, de nous livrer à de plus grands développements. Nous nous bornerons à dire que l'ouvrage de M. Caillet est le premier du genre qui soit à la hauteur de l'état actuel des sciences physiques, technologiques et mathématiques.

TERQUEM (PAUL), professeur d'hydrographie à Dunkerque.

Nota. Ceux qui aiment la patrie d'un amour intelligent, doivent s'affliger de voir que le pays des Cassini, des Lacaille, des Lalande est le seul aujourd'hui où la science céleste n'a pas d'organe spécial. Les corps savants des Mines, des Ponts et Chaussées font paraître chacun des Annales qui enregistrent les mouvements de l'esprit humain dans ces directions. Pourquoi notre *Observatoire national*, cette pépinière d'hommes d'élite, n'en fait-il pas autant? Quel immense succès n'obtiendrait pas un recueil périodique d'astronomie, publié sous les auspices et avec le concours de l'illustre directeur, fondateur des *Comptes rendus académiques*? Ce serait un nouveau service, un nouveau fleuron ajouté à une couronne si riche. Les services rendus à la science sont les seuls qui échappent aux tergiversations des hommes, à la versatilité des opinions, et qui n'ont à craindre ni l'oubli, ni l'ingratitude. Et quelle science! Rien de plus sublime, dit Kant, que le ciel étoilé au-dessus de nous, et le sentiment du devoir au dedans de nous.

TM.

THÉORÈME SUR LES CONIQUES HOMOFOCALES

(Voir p. 234).

1. *Lemme.* Le carré de la distance du centre d'une ellipse à une tangente, diminué du carré de la distance du même centre à une parallèle à cette tangente, menée par un foyer, est égal au carré du demi-petit axe.

2. *Théorème.* Le lieu géométrique du sommet d'un angle droit circonscrit à deux ellipses homofocales est un cercle concentrique aux ellipses.

Démonstration. Soient O le centre et F un foyer commun, P la projection de O sur une tangente à la première ellipse, et P′ la projection de O sur une droite tangente à la seconde ellipse et perpendiculaire à la première tangente; et soient Q et Q′ les projections du foyer F sur OP et OP′. D'après le lemme, on a, en appelant b et b' les demi-petits axes,

$$\overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 = b^2, \quad \overline{OP'}^2 - \overline{OQ'}^2 = b'^2.$$

Ces deux relations donnent

$$\overline{OP}^2 + \overline{OP'}^2 - \left(\overline{OQ}^2 + \overline{OQ'}^2\right) = b^2 + b'^2.$$

Mais $\overline{OQ}^2 + \overline{OQ'}^2 = \overline{OF}^2 = c^2$; donc

$$\overline{OP}^2 + \overline{OP'}^2 = b^2 + b'^2 + c^2;$$

donc l'intersection des deux tangentes est sur une circonférence ayant pour centre celui des ellipses, et pour rayon la racine carrée de $b^2 + b'^2 + c^2$. C.Q.F.D.

Observation. Le théorème est de M. Chasles, et il en a donné cette belle démonstration dans le cours de géométrie supérieure qu'il fait à la Sorbonne; cours qui serait fréquenté avec empressement à Londres, à Dublin, à Berlin, à Königsberg, à Gottingue, et, en général, dans les grandes cités où les sciences mathématiques sont cultivées pour elles-mêmes.

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES CUBIQUES

(Voir t. V, p. 640);

PAR M. ALPHONSE DE POLIGNAC,
Élève de l'Institution Sainte-Barbe.

1. *Théorème.* La différence des cubes de deux nombres consécutifs est égale à la somme de quatre carrés, dont trois sont égaux.

Démonstration. On a les deux identités

$$(2n+1)^3 - (2n)^3 = (3n+1)^2 + 3n^2,$$
$$(2n)^3 - (2n-1)^3 = (3n-1)^2 + 3n^2.$$

2. *Lemme.* Le produit de deux facteurs quadratiques,

$$x^2 + my^2, \quad t^2 + mu^2,$$

est de la même forme quadratique.

Démonstration.

$$x^2 + my^2 = \left(x + y\sqrt{-m}\right)\left(x - y\sqrt{-m}\right),$$
$$t^2 + mu^2 = \left(t + u\sqrt{-m}\right)\left(t - u\sqrt{-m}\right),$$
$$\left(x + y\sqrt{-m}\right)\left(t + u\sqrt{-m}\right) = tx - muy + \sqrt{-m}\,(ux + ty),$$
$$\left(x - y\sqrt{-m}\right)\left(t - u\sqrt{-m}\right) = tx - muy - \sqrt{-m}\,(ux + ty);$$

donc

$$(x^2 + my^2)(t^2 + mu^2) = (tx - muy)^2 + m(ux + ty)^2.$$

C. Q. F. D.

3. *Théorème.* Lorsque tous les facteurs d'un produit sont les différences des cubes de deux nombres consécutifs, le produit est égal à quatre carrés, dont trois sont égaux.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

QUESTIONS D'EXAMEN SUR LE POLE ET LA POLAIRE DANS LE CERCLE

(Voir t. V, p. 704 : question 14).

1. Problème. *Étant donnés un cercle et un point pris dans l'intérieur du cercle ; trouver sur la polaire un point tel, qu'en menant par ce point et le pôle une sécante, le segment moyen divisé par le segment extérieur soit égal à une quantité donnée.*

Solution. Notation. O le centre du cercle, P le point donné, D le point de rencontre de OP avec la polaire de P, M le point cherché sur la polaire, MNPQ la sécante menée par M et P, N première intersection et Q seconde intersection de la sécante avec le cercle, p le rapport donné des segments, $OD = a$, $r =$ rayon, $DM = x_1$.

On a $\dfrac{PN}{NM} = p = \dfrac{PQ}{MQ}$, car P est le pôle de DM ; donc

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{NM}^2} = \frac{PN.PQ}{NM.MQ} = p^2.$$

Or

$$PN.PQ = \frac{r^2(a^2-r^2)}{a^2}, \text{ puissance du point P (*)},$$

$$NM.MQ = x_1^2 + a^2 - r^2, \text{ puissance du point M} ;$$

donc

$$r^2(a^2-r^2) = a^2p^2(x_1^2 + a^2 - r^2).$$

De là on déduit la valeur de x_1.

2. Problème. Mêmes données : *Trouver sur la polaire deux points tels, qu'en menant par chacun et le pôle*

(*) Si, par un point pris dans le plan, on mène une corde, le produit constant des segments, additifs ou soustractifs, se nomme la *puissance* de ce point; dénomination commode introduite par le célèbre M. Steiner.

une sécante, et divisant le segment moyen par le segment extérieur, la somme des carrés des quotients soit égale à une quantité donnée.

Solution. M′ étant le second point, désignons la distance DM′ par x_2 et la quantité donnée par A : le carré du premier quotient sera $\frac{r^2(a^2-r^2)}{a^2(x_1^2+a^2-r^2)}$, et celui du second $\frac{r^2(a^2-r^2)}{a^2(x_2^2+a^2-r^2)}$; donc

$$\frac{r^2(a^2-r^2)}{a^2}\left(\frac{1}{x_1^2+a^2-r^2}+\frac{1}{x_2^2+a^2-r^2}\right)=\mathrm{A},$$

d'où

$$a^2\mathrm{A}x_1^2x_2^2+(a^2-r^2)(a^2\mathrm{A}-r^2)(x_1^2+x_2^2)$$
$$+(a^2-r^2)^2(a^2\mathrm{A}-2r^2)=0.$$

Telle est la relation qui doit exister entre x_1 et x_2, pour que les points M et M′ répondent à la question; en considérant x_1 et x_2 comme les coordonnées d'une courbe, on voit que cette ligne est du quatrième degré et facile à discuter en coordonnées polaires.

Corollaire. Si $\mathrm{A}=\frac{r^2}{a^2}$, il vient $x_1x_2=a^2-r^2$, ce qui fournit cette construction : Menez du point D la tangente DR au cercle, prolongez RD d'une quantité DR′ égale à elle-même, faites passer un cercle par R et R′, la polaire rencontre le cercle en deux points M et M′ qui remplissent les conditions voulues.

Faisant MPD $=\alpha_1$, $\mathrm{M_1}$PD $=\alpha_2$, on a

$$x_1=\frac{a^2-r^2}{a}\operatorname{tang}\alpha_1,\quad x_2=\frac{a^2-r^2}{a}\operatorname{tang}\alpha_2;$$

donc

$$\operatorname{tang}\alpha_1\operatorname{tang}\alpha_2=\frac{a^2}{a^2-r^2}=\sin^2\mathrm{ROD}:$$

c'est la solution de la question d'examen (*voir* l'endroit ci-dessus cité).

3. Si, au lieu de prendre $\frac{PN^2}{NM^2}$, on prend $\frac{NM^2}{PN^2}$, on obtient la relation

$$a^2[x_1^2 + x_2^2 + 2(a^2 - r^2)] = Ar^2(a^2 - r^2).$$

NOTE SUR LE THÉORÈME DU CYLINDRE ET DU CONE CIRCONSCRITS A UNE SPHÈRE;

Par M. TILLOL,

Professeur à Castres.

Ainsi que l'a fait remarquer M. Coupy, le théorème (tome VII, page 458) n'est pas nouveau. Il avait déjà trouvé place dans le *Traité de géométrie* de M. Vincent, pages 502-529; depuis lors, il a paru dans quelques autres ouvrages.

Le théorème peut être de Viète (*): je n'ai pu le vérifier, n'ayant pas à ma disposition les ouvrages de ce géomètre; mais ce qu'il y a de positif, c'est que, il y a plus de cent ans, il avait trouvé place dans l'enseignement.

Jusqu'ici, je croyais le théorème d'André Tacquet. On lit, en effet, dans ses Éléments d'Euclide, imprimés à Rome en 1745 :

Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, et cylindrus rectus sphæræ similiter circumscriptus, et ipsa sphæra eamdem proportionem continuant, nimirum sesquialteram, tam quoad soliditatem, quam quoad superficiem totam.

... *Quare hæc tria corpora, conus, cylindrus, sphæra, sunt inter se ut hi numeri,* 9, 6, 4.

Ce théorème est rappelé plusieurs fois dans l'ouvrage,

(*) Vérification faite, il n'est pas dans les œuvres de Viète.

et avec une telle complaisance, que j'avais supposé que le père jésuite en était l'inventeur. Voici ce qu'il dit dans sa préface :

Eximiam illius (Archimède) *de cylindro ac sphæra doctrinam tredecim propositionibus adjectis ampliavi, quibus inter cætera demonstro sesquialteram proportionem ab eo in cylindro sphæraque repertam, ab æquilatero cono eidem sphæræ circumscripto, tam in soliditate, quam in superficie continuari.*

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LEBESGUE.

Si l'on prend l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

les trois déterminants

$$ac - b^2,\ ad - bc,\ bd - c^2,\ \text{ou}\ A,\ 2B,\ C,$$

se présenteront dans la résolution de l'équation. J'énoncerai ici les propositions suivantes :

1°. Si $A = B = C = 0$, la racine est triple et égale à $-\frac{b}{a}$;

2°. Si $AC - B^2 = 0$, il y a une racine double

$$x' = x'' = -\frac{B}{A},$$

la racine simple est

$$x''' = -\frac{Ad}{Ca};$$

3°. Si $A = 0$ ou si $C = 0$, l'équation se réduit à une équation à deux termes ;

4°. Si l'on pose

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = o,$$

et que λ', λ'' soient les deux valeurs de λ, on aura, en appelant α une racine cubique imaginaire de l'unité,

$$ax' + b = \sqrt[3]{A(a\lambda' + b)} + \sqrt[3]{A(a\lambda'' + b)},$$
$$ax'' + b = \alpha\sqrt[3]{A(a\lambda' + b)} + \alpha^2\sqrt[3]{A(a\lambda'' + b)},$$
$$ax''' + b = \alpha^2\sqrt[3]{A(a\lambda' + b)} + \alpha\sqrt[3]{A(a\lambda'' + b)}.$$

Pour parvenir à ce résultat, on change x en $y + \lambda$, ce qui donne une équation de la forme

$$a'y^3 + 3b'y^2 + 3c'y + d' = o.$$

La condition $a'c' = b'^2$, revient à $ac = b^2$. Ainsi elle ne peut être généralement satisfaite. La condition $b'd' - c'^2 = o$ revient à l'équation $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = o$. Ayant déterminé λ, on aura y par le moyen d'une équation à deux termes, où l'inconnue est $d' \cdot \frac{1}{y} + c'$.

Les réductions sont assez longues et la solution précédente n'a d'autre avantage que la symétrie. On voit qu'il est toujours inutile de faire disparaître le second terme, et de réduire le premier coefficient à l'unité; ce qui, selon M. Eisenstein, est même nuisible (*voir* p. 110).

QUESTIONS D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1848.

1. Étant donné un rectangle, déterminer une ligne telle, que, si on la prend pour unité linéaire et son carré pour unité de surface, le nombre qui exprime la surface du rectangle soit égal au nombre qui en exprime le périmètre.

2. Dans tout système de numération, les carrés des nombres à égale distance de o et de la base sont terminés par le même chiffre : donc il n'existe pas de système de numération dans lequel les carrés des nombres puissent être terminés par tous les chiffres du système.

3. On donne sur une circonférence deux points fixes A et B, et un arc PQ de longueur constante, mais dont les extrémités P, Q se déplacent sur la circonférence ; trouver le lieu des rencontres des droites AP et BQ (évidemment deux cercles ; preuve par l'analyse).

4. Calculer le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête. Calculer son angle dièdre. Pourquoi est-il indépendant de l'arète? (*Voir* Merlieux, t. I, p. 471.)

5. Deux quadrilatères sont semblables quand ils ont un angle égal et les côtés proportionnels. Déterminer la surface d'un quadrilatère en fonction d'un angle et de ses côtés (*voir* t. VII, p. 348).

6. On donne un point et une droite, trouver le lieu des centres des cercles passant par le point donné et interceptant sur la droite une corde de longueur donnée.

7. On peut réduire le système de plusieurs forces à deux, de plusieurs manières. Si l'on se donne la direction de l'une des deux, le problème est-il encore indéterminé, est-il toujours possible? (Même question, en donnant l'axe du couple résultant.)

8. Résoudre $\sin x \cdot \sin(x+\alpha) = k$. Quelle relation existe-t-il entre deux racines de cette équation?

9. Construire $xy^2 - yx^2 = 1$ (trois asymptotes et un diamètre passant par l'origine).

10. Toute courbe algébrique qui a un diamètre et une asymptote a une autre asymptote (*voir* Vannson, t. II, p. 398).

11. $y = -x + \sqrt[3]{x^3 + x}$. Déterminer les asymptotes, le coefficient angulaire de la tangente; la courbe a-t-elle un centre? (Asymptote unique.)

12. Peut-on abaisser le degré de $f(x) = 0$, quand on sait que le rapport de deux racines est égal au produit de deux autres?

13. On a un angle droit YOX, une droite AB et une parabole dont l'axe est parallèle à OY, et dont la concavité est tournée vers le bas. Un mobile de masse m se meut d'un mouvement uniforme sur AB, un autre de masse m' se meut sur la parabole, de manière que sa projection sur l'axe des x se meuve d'un mouvement uniforme; trouver le lieu des centres de gravité de ces deux mobiles. Démontrer que sa projection sur l'axe des x a un mouvement uniforme (*voir* t. VII, p. 319).

14. Trouver dans l'hyperbole deux diamètres conjugués de moindre différence.

15. Si deux pyramides triangulaires avaient un angle trièdre symétrique, seraient-elles entre elles comme les produits des trois arêtes de cet angle?

16. On projette un point d'une hyperbole équilatère sur les hypoténuses de triangles rectangles inscrits dans cette hyperbole et ayant ce point pour sommet commun; trouver le lieu des projections.

17. Si deux triangles ABC, abc donnent les rapports égaux, $ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$, sont-ils semblables?

18. Calculer à 0,1 près $x = \sqrt{17 + 2\sqrt{15}}$ (*voir* Guilmin, t. I). Démontrer que, pour avoir à 0,1 près la racine d'une expression fractionnaire, il suffit d'extraire à 0,1 près la racine de la partie entière.

19. Aux extrémités M, N d'une corde MN normale à la parabole on mène des tangentes MP, NP; trouver le lieu des milieux de PM.

20. $x^3 + px^2 + qr + r = 0$. Former l'équation $\varphi(y) = 0$ dont les racines soient liées aux racines a, b, c de la première par la relation $y = \dfrac{c}{a+b-c}$.

21. Démontrer que $\dfrac{\sqrt[3]{7}-1}{2\sqrt[2]{7}+1}$ est incommensurable.

22. Construire $\rho = 1 + \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$ (*voir* Rispal, t. II, p. 511).

23. Connaissant les traces d'un plan sur deux plans de projection, trouver sa trace sur un nouveau plan vertical?

24. Chercher si la condition d'inscriptibilité du pentagone dépend seulement, comme celle du quadrilatère, de la grandeur des angles. Trois des angles étant donnés, peut-on déterminer les deux autres?

25. Deux mobiles se meuvent sur deux droites données, l'un vers la droite, l'autre vers la gauche; on demande le lieu des intersections successives des droites qui les joignent (*voir* t. VI, p. 401).

26. Un arc de section conique étant donné, trouver à quelle courbe il appartient.

27. Construire, avec la règle et le compas, les angles x et y déterminés par les équations

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n}, \qquad x + y = \alpha.$$

28. Trouver les diviseurs du troisième degré de la

forme $x^3 + px^2 + qx + r$ d'une équation du sixième degré. L'équation à laquelle on arrive peut-elle s'abaisser? (*Voir* Durville, t. IV, p. 339 et 439.)

29. Quelle serait l'expression de la surface d'un fuseau, si l'on prenait le carré du rayon pour unité de surface?

30. Trouver le lieu des pôles de tous les cercles d'une sphère passant par deux points fixes.

31. A est le sommet d'une parabole, P est un point de son axe : une ellipse est-elle déterminée par la condition d'avoir AP pour un de ses axes et d'avoir un double contact avec la parabole; et si l'on donne le point de contact R, le problème est-il possible et déterminé?

32. Si deux triangles sphériques ont les angles égaux et les côtés proportionnels, ils doivent être sur des sphères de rayons différents, et leurs surfaces sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

33. Équation de la corde de contact des tangentes menées du point (x', y') à la conique

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

34. Peut-il exister dans le plan de deux courbes un point qui ait la même corde de contact dans les deux cercles?

35. Plus courte distance de deux droites dont les projections horizontales sont parallèles.

36. $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ représente des ellipses où b est variable; d'un point α, 6 on mène des tangentes à toutes ces ellipses, trouver le lieu de leurs points de contact.

37. Si α, 6, γ sont racines de $f(x) = 0$, démontrer que

$$f'(\alpha) f'(6) f'(\gamma) \ldots f'(\lambda) = k(\alpha - 6)^2 (\alpha - \gamma)^2 (6 - \gamma)^2 \ldots.$$

38. Calculer le logarithme de 2 à $\frac{1}{n}$ près, base 10 (*voir* Guilmin, t. V, p. 429).

39. Lieu des points de rencontre des droites divisant un trapèze en parties égales. Le trouver géométriquement.

40. Trouver la somme des carrés des n premiers nombres naturels; son expression est toujours un nombre entier.

41. Construire $x^6 + x^3y = y^3$; transformer en équation polaire.

42. Lieu des centres des ellipses tangentes à deux droites données et ayant un foyer commun (une droite).

43. Construire avec la règle et le compas un carré équivalent à un décagone régulier donné, ou réciproquement.

44. Étant donné un quadrilatère, on en construit un autre dont les côtés sont parallèles à ceux du premier et équidistants; quelle doit être cette distance pour que le rapport des rectangles soit un nombre donné?

45. Ramener l'équation de la parabole à la forme

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a.$$

46. Quand un cercle coupe une conique en quatre points, les bissectrices des angles des droites qui joignent ces points deux à deux sont parallèles aux axes de la courbe.

47. Quand une courbe a deux diamètres, elle en a au moins trois.

48. Si une équation $f(x) = 0$ a une racine commune avec $x^3 - 10 = 0$, $f(x)$ est divisible par $x^3 - 10$ (*voir* Wantzel, t. IV, p. 57).

49. Deux courriers parcourent, avec des vitesses données, deux droites AB, A′B′; quand leur distance sera-t-elle minimum (*voir* t. VI, p. 401)?

50. Si le système métrique était perdu et qu'on vînt à trouver dans une fouille un parallélipipède rectangle sur

lequel serait écrit *poids, p kilogrammes,* pourrait-on en déduire la longueur du mètre et le système métrique?

Nota. Ces questions, calquées sur le programme, quoique faites par des hommes d'un mérite incontestable, reflètent l'état sénile de notre enseignement universitaire : rien sur les transversales; rien sur les rapports projectifs, harmoniques, anharmoniques, involutifs; rien sur les méthodes métamorphiques, polarité réciproque, perspectives, homologiques, homographiques, etc.; rien sur l'*homofocalité,* désormais si utile en physique; rien sur le calcul infinitésimal; une timide question sur les polaires déguisées en cordes de contact. Conséquences déplorables d'un programme suranné (*).

THÉORÈME SUR LES ELLIPSOIDES HOMOFOCAUX.

1. Soient les trois ellipsoïdes homofocaux

$$\frac{x^2}{a^2+h}+\frac{y^2}{b^2+h}+\frac{z^2}{c^2+h}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}+\frac{z^2}{c^2+k}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2+l}+\frac{y^2}{b^2+l}+\frac{z^2}{c^2+l}=1.$$

x, y, z étant un point commun aux trois surfaces, l'on a

$$x^2=\frac{(a^2+h)(a^2+k)(a^2+l)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2=\frac{(b^2+h)(b^2+k)(b^2+l)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2=\frac{(c^2+h)(c^2+k)(c^2+l)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

(*) Notre meilleure *Géométrie analytique,* celle de MM. Briot et Bouquet, étant supérieure au fatal programme, obtient peu de succès.

Considérant dans ces trois équations comme inconnues linéaires, les quantités $h+k+l$; $hk+hl+kl$; hkl, on obtient

$$h+k+l=x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2,$$
$$hk+hl+kl=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-(b^2+c^2)x^2$$
$$-(a^2+c^2)y^2-(a^2+b^2)z^2,$$
$$hkl=a^2b^2c^2-b^2c^2x^2-a^2c^2y^2-a^2b^2z^2.$$

(*Voir* t. VI, p. 129.)

DIVERS NOMS DONNÉS A DES ELLIPSOIDES, EN ANGLETERRE.

1. *Ellipsoïde momental.* C'est l'ellipsoïde central de M. Poinsot (*). Par un point fixe d'un solide, on mène une droite *quelconque*. A partir du point, on porte sur la droite une longueur proportionnelle à la racine carrée de la masse du solide divisée par le moment d'inertie par rapport à la droite; le lieu de l'extrémité de la droite est l'ellipsoïde momental.

2. *Ellipsoïde d'inertie.* Si l'on mène une sphère de rayon $=1$ et qui soit concentrique à l'ellipsoïde momental, la polaire réciproque de cet ellipsoïde, prise par rapport à la sphère, est l'ellipsoïde d'inertie; car le carré d'une perpendiculaire abaissée du point fixe sur un plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie, et multipliée par la masse du corps, est égal au moment d'inertie du corps pris par rapport à cette perpendiculaire.

3. *Ellipsoïde de giration.* C'est le nom que prend l'ellipsoïde d'inertie lorsque le point fixe est le centre de gravité du corps; on le nomme aussi *ellipsoïde central.*

4. *Surface d'inertie.* C'est la *podaire* du centre de l'el-

(*) L'ellipsoïde central de M. Poinsot appartient à M. Cauchy (*Exercices*, seconde année, p. 95, 1827).

lipsoïde d'inertie, surface du quatrième ordre et la même que la surface d'élasticité dans la théorie des ondes.

JOURNAL DE M. CRELLE, t. XXXII (1846)

(Voir t. VIII, p. 102).

DEUXIÈME CAHIER.

11. *Des modules qui sont des puissances de nombres premiers;* par le docteur SCHÖNEMANN, à Brandebourg sur la Havel. 93-105. (Continuation du Mémoire n° 22 du tome précédent, sur la *Théorie des congruences supérieures.*)

12. *Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt nova et facilis evolutio;* par le professeur Aug.-Fer. MOBIUS, à Leipsig. 106-118 (1844).

Exposition claire et presque élémentaire de la méthode des perturbations *spéciales;* on considère les orbites planétaires comme enveloppes d'ellipses variables, puis on calcule les variations de ces ellipses. Cette méthode a été trouvée par Euler (*Mémoires de Saint-Pétersbourg,* 1768), et perfectionnée par Lagrange, Laplace, Bessel, etc.

13. *Sur quelques propriétés des déterminants gauches;* par M. A. CAYLEY, de Cambridge. 119-123 (en français). L'auteur appelle déterminant gauche celui où l'on a $\lambda_{r,s} = -\lambda_{s,r}$; par exemple, dans ce système,

$$\begin{matrix} 1, & a, & -b \\ -a, & 1, & c, \\ b, & -c, & 1 \end{matrix} \quad \lambda_{1,2} = -\lambda_{2,1}; \text{ et ainsi des autres.}$$

Par les propriétés de ces déterminants, on passe d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre, et il y a de belles applications aux équations du mouvement de rotation d'un solide.

14. *Mémoire sur les différentes manières*, etc. (suite du Mémoire n° 3, *voir* p. 103). 124-163.

15. *Démonstration de la proposition que tout nombre non pentagonal peut se décomposer autant de fois en un nombre pair qu'en un nombre impair de nombres différents ;* par le professeur C.-G.-J. JACOBI, à Berlin. 164-175.

Euler a le premier donné la théorie de la partition des nombres dans son *Introductio in analysin*. On trouve, dans cet ouvrage, une induction sur les exposants pentagonaux d'un certain développement, induction qu'Euler a démontrée plus tard rigoureusement. Cette démonstration est l'objet du Mémoire de M. Jacobi, sur lequel nous reviendrons plus tard.

16. *Extrait d'une Lettre adressée à* M. Hermite, *par* M. C.-G.-J. JACOBI, concernant les fonctions abéliennes, et une construction géométrique y relative, insérée dans le *Journal de Mathématiques* (août 1845) [*].

17. *Propositions de géométrie;* par le professeur STEINER. 182-184 (1845).

1°. Toute ligne du troisième ordre contient vingt-sept points P tels, qu'en chacun d'eux elle peut être touchée par une conique, suivant un contact du sixième ordre ; de ces vingt-sept points, neuf sont réels et dix-huit imaginai-

---

(*) Dans cette Lettre, on lit vers la fin : *Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre.* Voilà comme parle, en 1845, un des plus grands analystes du siècle, à un jeune homme qui a été admis en 1843, le soixante-cinquième à l'École Polytechnique. En 1848, M. Paul Serret, lauréat, que nos lecteurs connaissent, a été déclaré *incapable*.

res; l'équation du vingt-septième degré, qui détermine ces points, est toujours résoluble algébriquement. Dans ces vingt-sept points, il y en a cent huit fois trois tracés sur une même droite, et ces cent huit droites ont encore des relations remarquables entre elles et entre d'autres points et droites dépendant de la courbe. Ainsi, des neuf points réels, il y en a neuf fois trois sur une même droite, et de ces neuf droites, il y en a certaines trois qui se coupent en un même point Q, et il y a en tout douze de ces points Q.

2°. Si, sur une courbe du troisième degré, on prend deux points fixes P et Q, et un point arbitraire quelconque A; la droite PA rencontre la courbe en un troisième point B; la droite QB rencontre la courbe en un troisième point C; la droite PC rencontre la courbe en un quatrième point D, et ainsi de suite; on inscrit ainsi dans la courbe une figure polygonale ABCDEF..., dont les côtés passent alternativement par P et Q. Si la figure se ferme une fois, on aura un polygone d'un nombre $2n$ de côtés, et, dans ce cas, la figure se fermera toujours, quel que soit le point A que l'on choisisse; dans ce même cas, PQ coupant la courbe en un troisième point R, et si, par ce point R, l'on mène une tangente à la courbe qui la touche en S, alors aux points fixes P et S ou Q et S correspond aussi un polygone fermé d'un nombre $4n$ de côtés.

3°. Dans toute ligne du troisième degré, à un point fixe P, il correspond toujours un point Q pour lequel on obtient un polygone fermé.

a. *Quadrilatère.* Les tangentes en P et Q doivent se couper en un point I situé sur la courbe.

b. *Hexagone.* Si les tangentes en P et Q coupent la courbe en P_1 et Q_1, les droites PQ_1 et QP_1 doivent se couper en un point I sur la courbe.

c. *Décagone*. Les tangentes en P et Q coupent la courbe en P_1 et Q_1; les droites PQ_1 et QP_1 coupent la courbe en P_2 et Q_2; les droites PQ_2 et QP_2 en P_3 et Q_3; les droites PQ_3 et QP_3 doivent se couper en un point I sur la courbe.

4°. Lorsqu'une courbe du quatrième degré a deux points *doubles* P et Q, en les prenant pour points fixes, et faisant les mêmes constructions que ci-dessus (2°), si le polygone se ferme une fois, il se fermera toujours, quel que soit le point A de départ.

(Ces théorèmes ont été insérés dans le *Journal de Mathématiques,* tome XI, p. 468; 1846.)

Fac-simile d'un manuscrit de W.-J.-G. Karsten (en allemand).

C'est un abrégé de sa biographie, qu'il a remis à l'académie électorale, en conformité d'un article de ses statuts. Il dit qu'il est né à Neu-Brandebourg, dans le duché de Meklembourg-Strélitz, le 15 décembre 1732, d'un père pharmacien et d'une mère fille de pharmacien. Écriture très-lisible. Il est mort le 17 avril 1787.

TROISIÈME CAHIER.

18. *Sur les changements de paramètres et d'arguments dans les transcendantes abéliennes et les transcendantes supérieures;* par M. C.-G.-J. Jacobi. 185-196.

Dans la collection des œuvres complètes d'Abel (Christiania, 1839), on trouve dans le tome II, sous les nos IX et X, deux dissertations sur une propriété remarquable d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes: M. Jacobi donne une nouvelle exposition de cette propriété.

19. *Sur quelques séries analogues à la série binomiale;* par M. C.-G.-J. Jacobi. 197-204.

Belle généralisation de la série binomiale, dont nous parlerons dans des études sur cette série.

20. *Conversion des séries en fractions continues;* par M. le docteur F. Heine, professeur particulier à Bonn. 205-209.

M. Heine ramène les développements donnés par le professeur Eisenstein (tome XXVIII) à celui d'Euler; savoir :

$$A - B + C - D + E - F \text{ etc.} = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B + \cfrac{AC}{B - C + \cfrac{BD}{C - D} + \ldots}}}$$

21. *Sur la série*

$$1 + \frac{(q^\alpha - 1)(q^\beta - 1)}{(q - 1)(q^\gamma - 1)} x + \frac{(q^\alpha - 1)(q^{\alpha+1} - 1)(q^\beta - 1)(q^{\beta+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)(q^\gamma - 1)(q^{\gamma+1} - 1)} x^2 + \ldots$$

par M. E. Heine, de Bonn. 210-212.

Conversion de cette formule en fraction continue; en faisant $q = 1$, on obtient la série hypergéométrique.

22. *Réduction de l'intégrale* $\int \frac{fx dx}{\sqrt{\pm(1 - x^8)}}$ *à des intégrales elliptiques;* par M. le professeur Richelot, à Königsberg. 213-219.

24. *Sur une nouvelle méthode pour l'intégration des équations différentielles hyperelliptiques, et sur la forme rationnelle des équations intégrales complétement algébriques;* par M. C.-G. Jacobi, à Berlin. 220-226 (juillet 1846).

M. Jacobi donne le nom de *hyperelliptique* au système suivant d'équations :

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,$$

$$\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,$$

$$\frac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^2\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0.$$

Ce sont $n-1$ équations entre les n variables $x_1, x_2 \ldots x_n$; $X_1, X_2 \ldots X_n$ sont des fonctions entières du degré $2n$ des mêmes variables et $n > 2$; l'auteur parvient à $n-1$ équations rationnelles, savoir, une du second degré entre la somme des variables et leurs combinaisons 2 à 2; et $n-2$ autres équations au moyen desquelles on peut exprimer *linéairement* les combinaisons 3 à 3, 4 à 4, etc., de ces variables, en fonction des racines de l'équation du second degré.

25. *Propriété de deux forces auxquelles peut se réduire un système de forces;* par M. le professeur SCHWEINS, à Heidelberg. 227-230.

Cette propriété consiste en ce qu'une même droite rencontre perpendiculairement les deux forces et l'axe principal de rotation du système des forces.

Cette propriété a déjà été remarquée, sous une autre forme, par M. Chasles, dans l'hyperboloïde à une nappe.

26. *Mémoire sur les différentes manières,* etc. (suite du Mémoire n° 14). 231-276.

Fac-simile d'un manuscrit de Schröter (le maître de l'immortel Bessel), Lettre datée de Lilienthal, 19 mars 1803; belle écriture (mort en 1816).

THÉORÈME SUR LES CONIQUES HOMOFOCALES

(Voir p. 214);

PAR M. JULES HAREL,
Élève du lycée de Rouen.

THÉORÈME. *Le lieu décrit par le sommet d'un angle droit circonscrit à deux coniques homofocales, est un cercle.*

Démonstration. Conservons même notation que pour le problème 201 (*voir* page 206); les tangentes étant perpendiculaire l'une sur l'autre, on a, pour leurs équations,

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

$$y = -\frac{1}{m} x \pm \sqrt{\frac{A^2}{m^2} + B^2};$$

l'élimination de m, entre ces deux équations, donnera l'équation du lieu si l'on exprime que les deux ellipses sont homofocales.

Or, avec ces deux équations, on obtient

$$y^2 + m^2 x^2 - 2mxy = a^2 m^2 + b^2,$$

$$m^2 y^2 + 2mxy + x^2 = A^2 + B^2 m^2.$$

Ajoutons membre à membre, il vient

$$y^2(m^2+1) + x^2(m^2+1) = A^2 + b^2 + m^2(a^2 + B^2),$$

et,

$$A^2 + b^2 = a^2 + B^2.$$

Donc l'équation ci-dessus peut être remplacée par

$$(y^2 + x^2)(m^2 + 1) = (A^2 + b^2)(m^2 + 1),$$

d'où

$$y^2 + x^2 = A^2 + b^2;$$

équation d'un cercle dont le rayon est $\sqrt{A^2 + b^2}$.

La propriété démontrée pour deux ellipses homofocales est également vraie pour deux hyperboles qui se trouvent dans le même cas. Il suffit de remarquer que les calculs sont absolument les mêmes en changeant b^2 en $-b^2$ et B^2 en $-B^2$, et le lieu du point de rencontre des tangentes est un cercle de rayon $\sqrt{A^2 - b^2}$.

On voit, en outre, que si les deux ellipses ou les deux hyperboles se confondent, la propriété n'en subsiste pas moins; et on retrouve alors les propriétés connues.

Dans le cas de deux paraboles homofocales, on trouve que le lieu est une droite perpendiculaire à l'axe commun. On pouvait prévoir ce résultat; car la parabole pouvant être considérée comme cas limite de l'ellipse, et pour deux ellipses homofocales le lieu du point d'intersection étant un cercle, dans les deux paraboles homofocales le centre sera situé à l'infini, c'est-à-dire le lieu se réduira à une droite.

ANNONCE (*).

Complément des Éléments d'arithmétique; par M. *E. Lionnet,* professeur de mathématiques au lycée Descartes. Paris, 1848; in-8° de 196 pages.

On rendra compte de cette instructive production où l'on trouve une exposition claire de la théorie des ap-

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

proximations arithmétiques, et qui fait ressortir, par des applications, l'utilité pratique de la division de Fourier; le tout à la portée des élèves.

QUESTIONS.

104. $F(x) = 0$ est une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales; démontrer qu'en égalant à zéro la dérivée seconde de $(Fx)^{-1}$, on obtient une équation dont toutes les racines sont imaginaires.

(Catalan.)

105. On peut réduire un système quelconque de forces à trois forces dont deux forment un couple agissant dans un plan perpendiculaire à la *troisième* force; on peut aussi réduire le système à deux forces; la plus courte distance de ces deux forces rencontre, à angle droit, la *troisième* force de la première réduction. (Chasles.)

DE LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES; APPLICATION AUX SURFACES;

Par M. Lebesgue.

1. On prend ordinairement pour équations des deux droites dont on cherche la plus courte distance

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta;\quad x = a'z + \alpha',\quad y = b'z + \beta';$$

le calcul perd sa symétrie et se trouve, en réalité, tout aussi long que si l'on eût pris les équations

(1) $$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}=\rho,$$

(2) $$\frac{x-\alpha'}{a'}=\frac{y-\beta'}{b'}=\frac{z-\gamma'}{c'}=\rho'.$$

Menons, en effet, par l'origine une droite

(3) $$\frac{x}{a_1}=\frac{y}{b_1}=\frac{z}{c_1};$$

elle sera perpendiculaire aux droites (1), (2) si l'on a les équations

$$a_1a+b_1b+c_1c=0,\quad a_1a'+b_1b'+c_1c'=0:$$

d'où

$$\frac{a_1}{bc'-b'c}=\frac{b_1}{ca'-c'a}=\frac{c_1}{ab'-a'b}:$$

et comme on peut remplacer dans (3) a_1, b_1, c_1 par des quantités proportionnelles, on fera

(4) $$a_1=bc'-b'c,\quad b_1=ca'-c'a,\quad c_1=ab'-a'b.$$

Pour avoir maintenant l'équation d'une parallèle à la droite (3) et qui coupe les droites (1) et (2), on fera passer par la droite (2), et la droite $\frac{x-\alpha'}{a_1}=\frac{y-\beta'}{b_1}=\frac{z-\gamma'}{c_1}=\rho''$ qui coupe (2) et est parallèle à (3), un plan

(5) $$A(x-\alpha')+B(y-\beta')+C(z-\gamma')=0,$$

de sorte que A, B, C, ou des quantités proportionnelles, seront déterminées par les équations

$$Aa'+Bb'+Cc'=0,\quad Aa_1+Bb_1+Cc_1=0;$$

d'où l'on tire

$$A=b'c_1-c'b_1,\quad B=c'a_1-a'c_1,\quad C=a'b_1-b'a_1.$$

Comme l'équation (5) peut prendre la forme

$$\begin{aligned} &A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma) \\ &=A(\alpha'-\alpha)+B(\beta'-\beta)+C(\gamma'-\gamma) \end{aligned}$$

en vertu des équations (1), l'on aura

$$x-\alpha=\rho a,\quad y-\beta=\rho b,\quad z-\gamma=\rho c;$$

de là, par l'équation précédente,

$$(6)\qquad \begin{aligned} \rho &= \frac{A(\alpha'-\alpha)+B(\beta'-\beta)+C(\gamma'-\gamma)}{Aa+Bb+Cc} \\ &= \frac{A(\alpha'-\alpha)+B(\beta'-\beta)+C(\gamma'-\gamma)}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(7)\qquad x=\alpha+\rho a,\quad y=\beta+\rho b,\quad z=\gamma+\rho c$$

pour les coordonnées du point de rencontre de la droite (1) avec la droite perpendiculaire aux droites (1) et (2).

Si l'on faisait passer un plan

$$A_1(x-\alpha)+B_1(y-\beta)+C_1(z-\gamma)=0$$

par la droite (1) et la droite

$$\frac{x-\alpha}{a_1}=\frac{y-\beta}{b_1}=\frac{z-\gamma}{c_1},$$

on trouverait semblablement

$$A_1=bc_1-cb_1,\quad B_1=ca_1-ac_1,\quad C_1=ab_1-ba_1;$$

d'où

$$(8)\qquad \begin{aligned} \rho' &= \frac{A_1(\alpha-\alpha')+B_1(\beta-\beta')+C_1(\gamma-\gamma')}{A_1a'+B_1b'+C_1c'} \\ &= \frac{A_1(\alpha'-\alpha)+B_1(\beta'-\beta)+C_1(\gamma'-\gamma)}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}, \end{aligned}$$

et, par suite, pour les coordonnées x', y', z' du point de rencontre de la droite (2) avec la perpendiculaire commune aux droites (1) et (2)

$$(9)\qquad x' = \alpha' + \rho' a', \quad y' = \beta' + \rho' b', \quad z' = \gamma' + \rho' c'.$$

La plus courte distance δ des deux droites sera donnée par l'équation

$$\delta^2 = (\alpha' - \alpha + \rho' a' - \rho a)^2 + (\beta' - \beta + \rho' b' - \rho b)^2 + (\gamma' - \gamma + \rho' c' - \rho c)^2.$$

Or la substitution donne

$$\begin{aligned}
\alpha' - \alpha + \rho' a' - \rho a &= a_1 [a_1(\alpha' - \alpha) + b_1(\beta' - \beta) + c_1(\gamma' - \gamma)],\\
\beta' - \beta + \rho' b' - \rho b &= b_1 [\quad id. \quad id. \quad],\\
\gamma' - \gamma + \rho' c' - \rho c &= c_1 [\quad id. \quad id. \quad];
\end{aligned}$$

de là

$$(10)\qquad \pm\delta = \frac{(\alpha' - \alpha) a_1 + (\beta' - \beta) b_1 + (\gamma' - \gamma) c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

2. Si les points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont infiniment voisins et que les coefficients a, b, c diffèrent infiniment peu des coefficients a', b', c', de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha + d\alpha + \frac{d^2\alpha}{2} + \ldots & a' &= a + da + \frac{d^2 a}{2} + \ldots,\\
\beta' &= \beta + d\beta + \frac{d^2\beta}{2} + \ldots & b' &= b + db + \frac{d^2 b}{2} + \ldots,\\
\gamma' &= \gamma + d\gamma + \frac{d^2\gamma}{2} + \ldots & c' &= c + dc + \frac{d^2 c}{2} + \ldots;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
a_1 &= (bdc - cdb) + \tfrac{1}{2}(bd^2c - cd^2b) + \ldots,\\
b_1 &= (cda - adc) + \tfrac{1}{2}(cd^2a - ad^2c) + \ldots,\\
c_1 &= (adb - bda) + \tfrac{1}{2}(ad^2b - bd^2a) + \ldots.
\end{aligned}$$

le numérateur de δ deviendra

$$d\alpha(bdc - cdb) + d\beta(cda - adc) + d\gamma(adb - bda),$$
$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} d\alpha(bd^2c - cd^2b) + d\beta(cd^2a - ad^2c) + d\gamma(ad^2b - bd^2a) \\ d^2\alpha(bdc - cdb) + d^2\beta(cda - adc) + d^2\gamma(adb - bda) \end{bmatrix},$$

+ des termes infiniment petits du quatrième ordre.

Or le dénominateur de δ est un infiniment petit du premier ordre; il suit de là que δ sera aussi un infiniment petit du premier ordre.

Mais s'il arrive que l'on ait

$$(\mathrm{A})\quad d\alpha(bdc - cdb) + d\beta(cda - adc) + d\gamma(adb - bda) = 0,$$

le numérateur de δ perdra de plus les termes du troisième ordre, qui ne sont autres que la moitié de la différentielle de

$$d\alpha(bdc - cdb) + d\beta(cda - adc) + d\gamma(adb - bda).$$

Dans ce cas, δ est au plus un infiniment petit du troisième ordre: quand cela arrive, on dit, pour abréger, que les deux droites se rencontrent.

Ainsi l'équation (A) exprime que les deux droites infiniment voisines

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}, \quad \frac{x-\alpha'}{a'} = \frac{y-\beta'}{b'} = \frac{z-\gamma'}{c'}$$

se rencontrent.

3. *Application.* Soit une surface d'équation

$$(a)\qquad F(x, y, z) = 0,$$

l'équation différentielle étant

$$(b)\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

La normale, au point x, y, z de la surface, aura pour équations

$$\frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y} = \frac{\zeta - z}{Z}.$$

Pour que cette normale soit rencontrée par celle qui est menée par le point $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, comme X, Y, Z deviennent $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, la condition de rencontre sera

$$(c)\qquad \begin{aligned} &dx(YdZ - ZdY) + dy(ZdX - XdZ) \\ &+ dz(XdY - YdX) = 0. \end{aligned}$$

Les équations (a), (b), (c) déterminent les lignes que Monge a nommées *lignes de courbure*.

Pour avoir l'équation telle qu'il l'a donnée, on posera

$$\mathrm{F}(x, y, z) = f(x, y) - z = 0;$$

de là

$$\mathrm{X} = \frac{df}{dx} = p, \quad \mathrm{Y} = \frac{df}{dy} = q, \quad \mathrm{Z} = -1,$$

$$d\mathrm{X} = rdx + sdy, \quad d\mathrm{Y} = sdx + tdy, \quad d\mathrm{Z} = 0:$$

la substitution donne

$$\begin{gathered} sdx^2 - sdy^2 + (pt - qs)\,dy\,dz + (ps - qr)\,dz\,dx \\ + (t - r)\,dx\,dy = 0. \end{gathered}$$

Si l'on remplace dz par $pdx + qdy$, on trouvera, en changeant tous les signes,

$$\begin{gathered} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [s(1 + q^2) - pqt] + [r(1 + q^2) - t(1 + p^2)] \left(\frac{dy}{dx}\right) \\ - [s(1 + p^2) - pqr] = 0: \end{gathered}$$

c'est l'équation ordinaire.

L'équation (c) est très-commode pour la détermination des propriétés des lignes de courbure. Ce sera l'objet d'un Mémoire particulier; la présente Note a seulement pour but de faire connaître l'équation (c) qui semble, par sa symétrie, devoir passer dans les éléments, qu'elle soit d'ailleurs nouvelle ou non, ce que j'ignore.

4. I. La remarque qui termine le n° 2 est de M. Bouquet (*voir* la note 3^e du *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* par M. Duhamel).

II. Si la droite qui passe par les points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ fait, avec les axes, des angles λ, μ, ν, et que la perpendiculaire commune aux deux droites fasse, avec les mêmes axes, des angles λ', μ', ν';

si, de plus, on pose

$$R = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\gamma' - \gamma)^2},$$

on aura

$$\alpha' - \alpha = R\cos\lambda,$$
$$\beta' - \beta = R\cos\mu,$$
$$\gamma' - \gamma = R\cos\nu,$$

et la formule (10) se réduira à

$$\pm\delta = R(\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu') = R\cos U,$$

en appelant U l'angle de la perpendiculaire commune et de la droite qui passe par les points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$.

On aurait donc pu partir de la formule évidente

$$\pm\delta = R\cos U$$

pour trouver l'équation (10).

NOTE SUR LES ÉQUATIONS QUI ONT DES RACINES EN PROGRESSION;

PAR M. GUILMIN.

1^er^ *Cas*. L'équation proposée a toutes ses racines en progression géométrique.

Soit

$$(1) \quad f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots = 0,$$

l'équation proposée, et soient a, aq, aq^2, aq^3,... aq^{m-1} ses m racines.

On voit facilement que

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$f\left(\frac{x}{q}\right) - f(x) = 0$$

ont $m-1$ racines aq, aq^2, $aq^3, \ldots aq^{m-1}$ communes avec la proposée.

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{x^m}{q^m} + A_1 \frac{x^{m-1}}{q^{m-1}} + A_2 \frac{x^{m-2}}{q^{m-2}} + \ldots = 0.$$

Nous substituons à cette équation celle-ci

(2) $\quad x^m + A_1 q x^{m-1} + A_2 q^2 x^{m-2} + A_3 q^3 x^{m-3} + \ldots = 0.$

Retranchant (1) de (2), nous avons

$$A_1 (q-1) x^{m-1} + A_2 (q^2 - 1) x^{m-2} + A_3 (q^3 - 1) x^{m-3} + \ldots = 0,$$

ou bien, sauf le cas de $q = 1$,

(3) $\quad A_1 x^{m-1} + A_2 (q+1) x^{m-2} + A_3 (q^2 + q + 1) x^{m-3} + \ldots = 0,$

laquelle a pour racines aq, aq^2, $aq^3, \ldots aq^{m-1}$.

La somme de ces racines est égale à celle des racines de (1), moins la racine a. On déduit de là l'égalité

$$-\frac{A_2 (q+1)}{A_1} = -A_1 - a,$$

ou

(α) $\quad A_2 (q+1) = A_1^2 + A_1 a;$

équation du premier degré en a et q.

La somme des produits des racines de l'équation (3), multipliées deux à deux, est égale à la somme des produits analogues des racines de l'équation (1), moins ceux de ces derniers produits qui renferment le facteur a, c'est-à-dire moins

$$a(aq + aq^2 + aq^3 \ldots + aq^{m-1}) = a(-A_1 - a).$$

Cette remarque conduit à l'égalité

$$\frac{A_3 (q^2 + q + 1)}{A_1} = A_2 - a(-A_1 - a),$$

ou

$$(\beta)\qquad A_3(q^2+q+1)=A_1(A_2+A_1a+a^2),$$

équation du second degré en a et q.

Quand on élimine a entre ces équations, on trouve une équation du second degré en q; le produit des deux racines est 1, ce qu'on pouvait prévoir à priori.

Dans l'application, il vaut mieux substituer les coefficients A_1, A_2, A_3 dans les équations (α) et (β), puis éliminer entre les équations numériques.

Si q est donné, l'équation (α) donne a très-simplement.

2ᵉ *Cas*. L'équation donnée (1) a seulement n racines en progression géométrique.

Alors les équations (1) et (2), ou bien les équations (1) et (3) ont $n-1$ racines communes. On cherchera le plus grand commun diviseur du degré $n-1$ qui existe entre leurs premiers membres; ce diviseur trouvé, on l'égalera à zéro. On aura ainsi une équation du degré $n-1$ qui aura toutes ses racines en progression géométrique, et qu'on pourra résoudre complétement en appliquant ce qui précède.

Les racines $aq, aq^2, \ldots aq^{n-1}$ étant trouvées, on aura a en divisant la plus petite racine trouvée par q, si l'on a pris q plus grand que 1, ou en divisant la plus grande de ces racines par q, si l'on a pris q moindre que 1.

3ᵉ *Cas*. L'équation proposée a toutes ses racines en progression arithmétique.

$$(1)\qquad x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots=0.$$

Soient a, $a+r$, $a+2r$,... $a+(m-1)r$ les racines cherchées.

On voit facilement que l'équation $f(x-r)=0$, et, par suite, l'équation $f(x-r)-f(x)=0$ ont les $m-1$

racines $a+r$, $a+2r$,... $a+(m-1)r$ communes avec la proposée.

$$f(x-r)-f(x)=\left.\begin{array}{l|l} -mr.x^{m-1}-(m-1)A_1r & x^{m-2}\dots \\ +\frac{m(m-1)}{1.2}r^2 & +\text{etc.}\end{array}\right\}=0.$$

Laissant de côté le cas où $r=0$, divisant par r et changeant les signes, nous trouverons ainsi :

$$(2)\left\{\begin{array}{l|l|l} mx^{m-1}+(m-1)A_1 & x^{m-2}+(m-2)A_2 & x^{m-3} \\ -\frac{m(m-1)}{1.2}r & -\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A_1r & +\text{etc.} \\ & +\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}r^2 & \end{array}\right\}=0.$$

Les racines de cette équation étant $a+r$, $a+2r$,... $a+(m-1)r$, nous concluons comme précédemment que leur somme est égale à $-A_1-a$, d'où

$$-\frac{m-1}{m}A_1+\frac{m-1}{1.2}r=-A_1-a,$$

ou

$$(\alpha)\qquad 2am+m(m-1)r=-2A_1,$$

équation du premier degré en a et r.

La considération des produits des racines, multipliées deux à deux, donne encore

$$\frac{m-2}{m}A_2-\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.m}A_1r+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}r^2=A_2-a(-A_1-a)$$

ou

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l} \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}r^2-\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A_1r \\ \qquad =2A_2+A_1a+ma^2.\end{array}\right.$$

Les équations (α) et (β) donneront a et r; en éliminant a, on trouve pour r deux valeurs égales et de signes contraires.

Nous conseillons de conserver le système des équations (α) et (β) pour les applications numériques.

L'équation (α) est celle que donne immédiatement l'arithmétique.

4^e^ *Cas.* L'équation (1) a seulement n racines en progression arithmétique.

On trouvera ces n racines en suivant une méthode analogue à celle qui est indiquée ci-dessus pour le deuxième cas.

QUESTION D'EXAMEN. SUR LES DIVISEURS FRACTIONNAIRES EN ARITHMÉTIQUE (*).

1. *Définition.* a, b, c, d étant quatre nombres entiers, si $\frac{a}{b}$ divisé par $\frac{c}{d}$ donne pour quotient un nombre entier, alors $\frac{c}{d}$ est dit *diviseur* de $\frac{a}{b}$; ainsi $\frac{ad}{bc}$ doit être un nombre entier.

Observation. C'est une généralisation de la définition ordinaire.

2. Problème. *Quelle relation doit exister entre $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$ pour que ces quantités aient $\frac{c}{d}$ pour diviseur commun?*

Solution. On doit avoir $ad = bcz$, $a_1d = b_1cz_1$, z et z_1 étant des nombres entiers; et de là $ab_1z_1 = a_1bz$. Soit D le plus grand commun diviseur de ab_1 et a_1b; faisons $ab_1 = \mathrm{D}p$, $a_1b = \mathrm{D}q$. Nous aurons $pz_1 = qz$; et comme p et q sont premiers entre eux, l'on doit avoir

(*) M. J. Bertrand, examinateur.

$z = mp$, $z_1 = mq$, où m est un nombre entier quelconque : on déduit de là

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{bz} = \frac{a}{bmp} = \frac{a\mathrm{D}}{bm\mathrm{D}p} = \frac{\mathrm{D}}{mbb_1}.$$

3. Problème. *Quel est le plus grand commun diviseur des quantités* $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$?

Solution. Conservant la même notation, le plus grand commun diviseur répond évidemment à la valeur de m égale à l'unité; donc ce plus grand commun diviseur est $\frac{\mathrm{D}}{bb_1}$; alors $z = p$ et $z_1 = q$. z et z_1 sont donc premiers entre eux; ce qui est évident par la définition du plus grand commun diviseur.

4. Problème. *Étant données les quantités* $\frac{a}{b}$ et $\frac{a_1}{b_1}$, *trouver des nombres entiers* z *et* z_1 *tels, que l'on ait*

$$\frac{a}{bz} = \frac{a_1}{b_1 z_1}.$$

Solution. La même que celle du problème 2; car l'on a

$$ab_1 z_1 = a_1 bz.$$

Observation. Dans les examens, le problème est ainsi énoncé : Un rectangle a ses deux dimensions $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$ exprimées en mètres; il faut diviser le contour en parties égales, de manière que chaque dimension contienne un nombre entier de ces parties.

5. Problème général. *Résoudre les équations*

$$\frac{a_1}{b_1 z_1} = \frac{a_2}{b_2 z_2} = \frac{a_3}{b_3 z_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n z_n},$$

où a_p, b_p *sont des entiers donnés, et* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *des entiers à trouver.*

Solution. *Voir* les *Fractions équivalentes* de M. Lebesgue, p. 81.

Remarque. Nous nous sommes servis de l'algorithme algébrique, parce que ces considérations sont à l'usage des personnes qui connaissent cet algorithme; il est d'ailleurs facile de traduire les formules en *phrases*, et d'employer ce qu'on peut appeler *le genre verbeux*. Comme il peut se trouver des examinateurs qui aiment ce genre, j'engage les candidats à s'y exercer, par précaution, en cette occasion et en d'autres.

Exemple. Une demi-ligne d'écriture algorithmique suffit pour démontrer que, dans une proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Une telle abréviation sera souvent repoussée avec colère. Remplacez cette demi-ligne par un flux de paroles, et vous serez bien accueilli. *Historique*.

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 201

(Voir p. 206 et 208);

PAR M. E. DOULIOT,

Externe du lycée Monge, classe de M. Vincent.

1. *Lemme*. Étant donné un parallélogramme ABDE, si par un point C, pris sur la diagonale DA, ou sur son prolongement, on mène une droite qui coupe en N et T les côtés adjacents AB, DB, et en N′ et T′ les côtés EA, ED, on aura

$$\mathrm{CN}.\mathrm{CT} = \mathrm{CN}'.\mathrm{CT}' \qquad (\textit{fig. } 17,\ \textit{Pl. II});$$

et réciproquement, si sur la transversale II′ l'on a

$$\mathrm{CN}.\mathrm{CT} = \mathrm{CN}'.\mathrm{CT}',$$

le point C est sur la diagonale.

Démonstration. Les deux triangles ACN, DCT′ étant semblables, on a

$$\mathrm{CN} : \mathrm{CT}' :: \mathrm{CA} : \mathrm{CD}.$$

De même, les deux triangles ACN′, DCT étant semblables, on a

$$CN' : CT :: CA : CD;$$

donc

$$CN.CT = CN'.CT'.$$

Remarque. Le point C sera toujours compris entre deux nombres pairs de points d'intersections; ceci est évident, quand le point C est intérieur au parallélogramme. Si le point C est extérieur, en faisant tourner la droite autour du point C, de manière à éloigner le point T′, on voit que dès qu'elle sera parallèle à DE elle le sera aussi AB; elle ne peut donc pas rencontrer une de ces droites dans le sens de CT, et l'autre dans le sens de CT′. Donc le point C sera en dehors des quatre points d'intersections, ou il en aura deux de chaque côté.

La réciproque se démontre par la réduction à l'absurde.

2. Théorème. (*Fig.* 18, *Pl. II.*) *Soient* P, P′ *deux points appartenant respectivement à deux ellipses homofocales, tels, que les tangentes menées à ces courbes en* P *et* P′ *se coupent à angle droit; en désignant par* I *le point de leur intersection, et par* C *le centre commun des ellipses, la droite* CI *divisera en deux parties égales la distance* PP′.

Strebor.

Démonstration. Je mène les normales PK, P′K; la figure PKP′I est un rectangle, et le théorème sera démontré si l'on prouve que le point C est sur la diagonale IK. Soient N, N′, T, T′ les points où les normales et les tangentes rencontrent l'axe, on a

$$C^2 = CN.CT \quad \text{et} \quad C^2 = CN'.CT';$$

donc

$$CN.CT = CN'.CT'.$$

Donc, en vertu du lemme, le point C est sur la diagonale.

Comme on s'est appuyé sur une propriété commune à l'ellipse et à l'hyperbole, et dans laquelle les tangentes et les normales entrent d'une manière symétrique, on voit que le théorème est applicable à deux coniques homofocales quelconques.

TROIS THÉORÈMES ARITHMOLOGIQUES DE M. STEINER,

Démontrés par M. STERN.

(Journal de M. Crelle, t. XIV, p. 76, 1835.)

THÉORÈME I. *Prenant tous les nombres entiers depuis 2 jusqu'à l'infini, et élevant chacun à toutes les puissances négatives, depuis la deuxième jusqu'à l'infini, la somme est égale à l'unité.*

Démonstration. On a

$$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\ldots$$

Faisant successivement $a=2,\ 3,\ 4,\ldots,\ \infty$, le second membre donne toutes les puissances négatives des nombres entiers, et le premier membre devient successivement

$$1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ldots;$$

dont la somme est égale à l'unité. Ce qu'il fallait démontrer.

Observation. On a aussi

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5}\ldots$$

Faisant successivement $a=2,\ 3,\ 4,\ldots,\ \infty$ et ajoutant les équations, on conclut que la somme des puissances négatives paires des nombres entiers (l'unité exclue), moins la somme des puissances impaires, est égale à $\frac{1}{2}$; donc les sommes des puissances négatives paires $= \frac{3}{4}$, et les puissances négatives impaires $= \frac{1}{4}$.

Legendre, dans ses *Exercices du calcul intégral*, donne une Table des sommes des puissances négatives, jusqu'à la trente-cinquième, avec seize décimales (part. IV, sect. 1, p. 65). D'après cette Table, la somme des puissances négatives paires, depuis la deuxième jusqu'à la trente-quatrième inclusivement $= 0{,}7499999998$; ainsi la somme des puissances négatives restantes est moindre que $0{,}0000000002$; de même la somme des puissances négatives impaires depuis la troisième jusqu'à la trente-cinquième inclusivement $= 0{,}2499999999908$; ainsi la somme des puissances impaires restantes est moindre que $0{,}0000000001$.

THÉORÈME II. *La somme de toutes les fractions de la forme* $\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1}$ *est* $= 1$, *en donnant à* x *et* y *toutes les valeurs entières positives de* 0 *à* ∞, *et ne prenant qu'une fois les fractions qui se reproduisent plusieurs fois.*

Démonstration.

$$\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1} = \frac{1}{(2+x)^{2+y}} + \frac{1}{(2+x)^{4+2y}} + \frac{1}{(2+x)^{6+3y}} + \ldots$$

Donnant à x et à y toutes les valeurs positives entières depuis 0 jusqu'à l'infini; prenant pour $2+x$ d'abord les nombres qui ne sont puissances d'aucun nombre; ensuite les nombres qui ne sont que des carrés et non des puissances supérieures; puis les nombres qui ne sont que des cubes et non des puissances supérieures, etc.; la somme totale renfermera donc la somme de toutes les puissances négatives, et on rentre dans le théorème I.

THÉORÈME III.

$$\sum \frac{(2+x)^{-(2+y)}}{(2+x)^{2+y}-1} = \sum (2+x)^{-(2+y)},$$

en donnant à x et y toutes les valeurs positives de 0 *à* ∞ *avec ces restrictions,* $2+y$ *ne doit pas être une puissance supérieure d'un nombre, et* $2+x$ *doit être une puissance supérieure d'un nombre.*

Démonstration. Cette expression

$$=\frac{1}{[(2+x)^2]^{2+y}}+\frac{1}{[(2+x)^3]^{2+y}}+\ldots$$

et $2+y$ ne devant pas être une puissance supérieure d'un nombre, il s'ensuit que cette expression est la somme de toutes les puissances négatives, à partir de la seconde, de tous les nombres qui sont une puissance supérieure d'un nombre (*).

THÉORIE GÉNÉRALE DES POLAIRES RÉCIPROQUES PLANES

(Voir t. VII, p. 308-409);

PAR M. LENTHÉRIC, NEVEU,
Professeur.

1. On a vu (tome VII, page 352) que la polaire étant

(3) $$y = mx + n,$$

le pôle était déterminé par les deux équations

(5) $$m\mathrm{F}'_y + \mathrm{F}'_x = 0$$

(6) $$\mathrm{F}'_y + \mathrm{P} = 0,$$

en posant, pour plus de simplicité,

$$\mathrm{D}y + \mathrm{E}x + 2\mathrm{K} = \mathrm{P}.$$

Supposons les constantes m et n de la polaire liées entre elles par une relation quelconque

$$\varphi(m, n) = 0;$$

il en résultera un lieu géométrique des pôles dont l'équation s'obtiendrait en éliminant m et n entre la relation

(*) *Voir* Catalan, Journal de M. LIOUVILLE, 1842.

donnée et les équations (5) et (6), qui fixeraient la position particulière du pôle pour chaque système de valeurs de m et n qui satisferait à cette relation.

Les valeurs de m et n, déduites de (5) et (6), ayant même dénominateur, et leurs formes étant linéaires en x et y, le lieu géométrique des pôles serait de même degré en x et y que la relation $\varphi(m, n) = 0$ en m et n.

2. On a vu aussi (tome VII, page 353) que a et b désignant les coordonnées du pôle, l'équation de la polaire est

$$F'_b y + F'_a x + Db + Ea + 2K = 0$$

ou

$$bF'_y + aF'_x + P = 0. \tag{7}$$

Supposons les coordonnées (a, b) du pôle liées entre elles par une relation quelconque

$$\psi(a, b) = 0,$$

et il résultera de là une courbe enveloppe des positions successives de la polaire, dont on obtiendrait l'équation par la théorie connue.

3. Ces lieux des pôles et ces courbes enveloppes des polaires présentent une foule de cas particuliers, dont l'étude n'offrirait aucune difficulté. Il est possible d'établir, entre les constantes de la polaire et les coordonnées du pôle, des relations telles, que le lieu géométrique des pôles soit identique avec la courbe enveloppe des polaires. Je vais faire voir que cette identité a lieu si la polaire se meut tangentiellement à une courbe quelconque, et si le pôle parcourt la même courbe.

En effet, soit

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{8}$$

une courbe quelconque située sur le plan d'une conique

$$F(x, y) = 0.$$

La tangente à cette courbe en un point (a, b) est

$$\varphi'_b(y-b)+\varphi'_a(x-a)=0.$$

Le pôle de cette tangente s'obtient en faisant, dans (5) et (6),

$$m=-\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b},\quad n=b+a\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b},$$

ce qui identifie la tangente avec la polaire (3); on aura donc, pour déterminer le pôle de la tangente, les deux équations

(9) $$\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b}=\frac{F'_x}{F'_y}$$

et

(10) $$bF'_y+aF'_x+P=0.$$

Le point (a, b) étant sur la courbe (8), on aura en outre la condition

(11) $$\varphi(a, b)=0.$$

Le lieu géométrique des pôles des diverses tangentes à la courbe (8) résultera donc de l'élimination de a et de b entre les trois équations (9), (10) et (11).

Maintenant supposons que le pôle parcoure la courbe (8), ce qui donnera la relation

(11) $$\varphi(a, b)=0;$$

la polaire sera

(10) $$bF'_y+aF'_x+P=0.$$

Pour avoir la courbe enveloppe des polaires de tous les points de la courbe (8), il faudra, d'après la théorie connue des courbes enveloppes, différentier (11) et (10) par rapport à a et à b, ce qui donne

$$\varphi'_a+\varphi'_b\frac{db}{da}=0,$$

$$F'_y\frac{db}{da}+F'_x=0,$$

et éliminer ensuite a, b et $\frac{db}{da}$ entre les équations (11), (10) et leurs dérivées. Or l'élimination de $\frac{db}{da}$ donne

$$(9) \qquad \frac{\varphi'_a}{\varphi'_b} = \frac{F'_x}{F'_y}.$$

Donc la courbe enveloppe des polaires des divers points de la courbe (8) résultera de l'élimination de a et de b entre les trois équations (9), (10) et (11), comme le lieu géométrique des pôles des tangentes de la courbe (8), ce qui établit la parfaite identité des deux lieux.

De là résulte ce beau théorème de M. Poncelet :

Le lieu géométrique des pôles des tangentes d'une courbe quelconque, relativement à une conique, est le même que l'enveloppe des polaires des divers points de cette courbe, relativement à la conique.

Ainsi il existe sur le plan d'une conique une infinité de systèmes de deux courbes telles, que chacune des courbes d'un même système est en même temps et le lieu des pôles des tangentes de l'autre, et l'enveloppe des polaires des divers points de l'autre, relativement à la conique. Les deux courbes d'un même système ont été désignées, par M. Poncelet, sous le nom de *courbes polaires réciproques*, et la conique, qui leur sert d'intermédiaire, sous le nom de *directrice*.

C'est par la propriété connue (tome VII, page 355) que toute droite qui passe par un point a son pôle sur la polaire de ce point, et réciproquement, et en considérant les courbes comme des polygones infinitésimaux, que l'illustre géomètre fut conduit au théorème qui précède, dont il fit la base de l'une des théories les plus curieuses de la géométrie moderne, la *dualité*, que j'exposerai dans la suite.

4. La courbe (8) étant du degré m, la polaire réci-

proque sera au plus du degré $m(m-1)$, car son équation résulte de l'élimination de a et de b entre les trois équations (9), (10) et (11), dont l'une est linéaire en a et b, et les deux autres de degrés m et $m-1$.

D'ailleurs, toutes les tangentes à la courbe (8), issues d'un même point, devant avoir leurs pôles sur la polaire de ce point et sur la courbe polaire réciproque, on voit que le degré de la polaire réciproque doit être égal au nombre de tangentes que l'on pourrait mener à la courbe par un point de son plan. Or on sait qu'à une courbe du degré m on peut mener au plus $m(m-1)$ tangentes.

M. Gergonne a fait voir par l'exemple de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^3 = 1,$$

dont la polaire réciproque, par rapport au cercle

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

est

$$(r^6 - a^3x^3 - b^3y^3)^2 = 4a^3b^3x^3y^3,$$

que la polaire réciproque d'une courbe du degré m peut, en effet, s'élever au degré $m(m-1)$. La polaire réciproque d'une courbe de degré m n'est donc pas la plus générale de son degré, car sa propre polaire réciproque doit reproduire la courbe du degré m, tandis qu'on serait autorisé à croire qu'elle pourrait donner une courbe du degré $m(m-1)[m(m-1)-1]$. La polaire réciproque perd donc $m^3(m-2)$ tangentes dans le faisceau issu d'un même point. M. le professeur Plucker est le premier, comme le fait observer M. Terquem (tome VII, page 311), qui ait donné une explication complétement satisfaisante de ce fait singulier, sur lequel nous reviendrons.

5. Dans le cas où la courbe

$$(8) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

serait une conique, on aura $m = 2$, et la polaire réciproque serait aussi une conique. Nous pourrions trouver l'équation de cette polaire réciproque en suivant la marche indiquée § 3. C'est celle qui a été suivie par M. Poncelet (*Annales de* Gergonne, tome VIII, page 224). On y parvient plus simplement en suivant la marche indiquée § 1.

Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + K = 0,$$

ou

$$(12) \qquad F(x, y) = 0,$$

l'équation de la conique directrice; et soit

$$ay^2 + bxy - cx^2 + dy + ex + k = 0,$$

ou

$$(13) \qquad f(x, y) = 0,$$

la conique dont on demande la polaire réciproque.

La relation $\varphi(m, n) = 0$, entre les constantes de la polaire représentée par $y = mx + n$, s'obtiendra en remplaçant dans (13) y par $mx + n$, et exprimant que l'équation résultante du deuxième degré en x a ses deux racines égales. On trouvera, réduction faite,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &(b^2 - 4ac)n^2 + 2(2ae - bd)mn + (d^2 - 4ak)m^2 \\ &+ 2(bc - 2cd)n + 2(de - 2bk)m + e^2 - 4ck = 0, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle, substituant pour m et n leurs valeurs,

$$m = -\frac{F'_x}{F'_y}, \qquad n = -\frac{p}{F'_y},$$

on aura, pour l'équation de la polaire réciproque de la conique (13),

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} (e^2 - 4ck)(F'_y)^2 - 2(de - 2bk)F'_y F'_x \\ + (d^2 - 4ak)(F'_x)^2 - 2(be - 2cd)pF'_y \\ - 2(bd - 2ae)pF'_x + (b^2 - 4ac)p^2 = 0. \end{array}\right.$$

6. Si l'on prenait pour directrice la conique (13), la polaire réciproque de (12) serait représentée par

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} (E^2 - 4CK)(f'_y)^2 - 2(DE - 2BK)f'_y f'_x \\ + 2(D^2 - 4AK)(f'_x)^2 - 2(BE - 2CD)pf'_y \\ - 2(BD - 2AE)pf'_x + (B^2 - 4AC)p^2 = 0; \end{array}\right.$$

et pour avoir la polaire réciproque de (15) par rapport à (13), il faudrait remplacer dans (16) les dérivées de l'équation (13) par celles de l'équation (15). On obtiendrait ainsi une équation dont les coefficients auraient évidemment, avec ceux de l'équation (16), les mêmes relations que ceux de l'équation (13) avec ceux de l'équation (15), donc cette nouvelle équation serait celle de la polaire réciproque de l'équation (16) par rapport à la directrice (12). De là, ce théorème :

Les polaires réciproques de la directrice, par rapport à deux polaires réciproques, sont elles-mêmes polaires réciproques, par rapport à cette directrice (*).

Nous désignerons ces polaires réciproques de la directrice sous le nom de *polaires réciproques doubles*, et nous ferons connaître quelques propriétés curieuses dont elles jouissent. Pour le moment, nous allons indiquer la discussion complète de l'équation (15), qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté, et en évitant de trop longs détails qui ne sauraient trouver place ici.

7. *Cas où la directrice serait une ellipse ou une hyperbole.* On peut toujours choisir les axes de manière

(*) M. Angelo Genocchi, de Turin, nous a adressé une démonstration géométrique de ce théorème.

que la directrice (12) ait pour équation

$$(17) \qquad Ay^2 + Cx^2 + K = 0,$$

la conique étant la courbe (13). Faisant dans (15),

$$F'_y = 2Ay, \quad F'_x = 2Cx, \quad p = 2K,$$

on aura, pour la polaire réciproque de (13),

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} (e^2 - 4ck)A^2y^2 - 2(de - 2bk)ACxy \\ + (d^2 - 4ak)C^2x^2 - 2(be - 2cd)AKy \\ - 2(bd - 2ae)CKx + (b^2 - 4ac)K^2 = 0. \end{array} \right.$$

L'inspection de cette équation montre que *la directrice n'influe que sur la position de la polaire réciproque* dont la nature ne dépend que de la différence

$$(de - 2bk)^2 - (e^2 - 4ck)(d^2 - 4ak);$$

l'équation (14) fait voir que les valeurs de m qui correspondent à $n = 0$, seront réelles et inégales, réelles et égales ou imaginaires, suivant que cette différence sera positive, nulle ou négative. Mais les valeurs de m qui correspondent à $n = 0$ sont les coefficients angulaires des tangentes que l'on peut mener à la conique (13) par l'origine, qui est le centre de la directrice; donc :

La polaire réciproque d'une conique, par rapport à une directrice qui a un centre, sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que le centre de la directrice sera situé en dehors de la conique, sur la conique, ou en dedans.

Cela était, d'ailleurs, facile à prévoir; car toute droite qui passe par le centre de la directrice ayant son pôle à l'infini, la polaire réciproque d'une courbe quelconque doit avoir autant de branches infinies que cette courbe a de tangentes passant par le centre de la directrice. De plus, les points de tangence sont les pôles des éléments de la polaire réciproque situés à l'infini, c'est-à-dire des asymptotes de la polaire réciproque. Ces asymptotes sont donc les polaires des points de contact des tangentes menées à la courbe par le centre de la directrice; et, par suite, les cordes de contact sont les polaires des points d'intersection des asymptotes. Les points d'intersection de la directrice et de la polaire réciproque sont aussi faciles à déterminer, car les polaires de ces points sont tangentes à la directrice en ces points mêmes, et comme elles sont aussi tangentes à la courbe donnée, on voit qu'on les obtiendra en menant des tangentes communes à la courbe et à la directrice.

Ces remarques rendront, surtout dans le cas des coniques, la polaire réciproque trop facile à construire pour qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point.

Si la conique (13) était concentrique à la directrice, son équation se réduirait à la forme

$$ay^2 + cx^2 + k = 0, \tag{19}$$

et l'on trouverait la polaire réciproque, en faisant dans (18),

$$b = 0, \quad d = 0, \quad e = 0,$$

ce qui donnerait

$$ckA^2y^2 + akC^2x^2 + acK^2 = 0. \tag{20}$$

Vérifions sur les équations (17), (19) et (20) le théorème du § 6 sur les polaires réciproques doubles.

En prenant (17) pour conique, sa polaire réciproque, par rapport à une directrice quelconque, serait, d'après l'équation (15),

$$CK(F'_y)^2 + AK(F'_x)^2 + ACP^2 = 0.$$

Si (19) est la directrice, on a

$$F'_y = 2ay, \quad F'_x = 2cx, \quad P = 2k,$$

et pour la polaire réciproque de (17)

$$a^2CKy^2 + c^2AKx^2 + k^2AC = 0; \tag{21}$$

si (20) est la directrice,

$$F'_y = 2ckA^2_y, \quad F'_x = 2akC^2_x, \quad P = 2acK^2,$$

et la polaire réciproque de (17), par rapport à cette directrice, est

$$(22) \qquad c^2k^2A^3y^2 + a^2k^2C^3x^2 + a^2c^2K^3 = 0.$$

Or on trouve que (21) et (22) sont polaires réciproques, en prenant pour directrice la conique (17).

L'équation (20) montre que la polaire réciproque de (19) sera toujours de même nature que cette conique. Pour que la conique et sa polaire réciproque fussent semblables, on devrait avoir

$$\frac{cA^2}{a} = \frac{aC^2}{c}$$

ou

$$\frac{A}{a} = \frac{C}{c};$$

mais alors la conique serait semblable à sa directrice.

Si la directrice était une ellipse

$$Ay^2 + Cx^2 - K = 0,$$

et la conique une hyperbole ayant les mêmes axes

$$Ay^2 - Cx^2 + K = 0,$$

on trouverait, pour la polaire réciproque, l'hyperbole elle-même. De même, en prenant l'hyperbole pour directrice, on trouverait que l'ellipse est à elle-même sa polaire réciproque.

On verrait de même que deux hyperboles conjuguées sont telles, que chacune est à elle-même sa polaire réciproque par rapport à l'autre.

Si la conique (13) était une parabole, on aurait

$$b^2 - 4ac = 0,$$

et l'équation (18) fait voir que la polaire réciproque passerait par le centre de la directrice; ce qui était facile à prévoir, car la conique aurait deux de ses éléments situés à l'infini. Si la parabole avait le même axe que la directrice, on aurait, de plus,

$$b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0,$$

et l'équation (18) se réduirait à

$$e^2 A^2 y^2 - 4akC^2x^2 + 4aeCKx = 0,$$

équation d'une ellipse ou d'une hyperbole, suivant que a et k seront de signes contraires ou de mêmes signes, c'est-à-dire suivant que l'origine ou le centre de la directrice sera intérieur ou non à la parabole, comme on devait s'y attendre.

Si, de plus, le sommet de la parabole était à l'origine, la polaire réciproque serait

$$eA^2y^2 + 4aCKx = 0,$$

équation d'une parabole de même sommet et de même axe que la proposée. Si la directrice était une ellipse, C et K étant de signes contraires, les deux paraboles seraient opposées par le sommet; si la directrice était une hyperbole, les deux paraboles seraient opposées par le sommet ou non, suivant que l'axe transverse de l'hyperbole coïnciderait avec celui de la parabole ou lui serait perpendiculaire.

8. *Cas où la directrice serait un cercle.* Soit

$$y^2 + x^2 = r^2$$

l'équation de ce cercle; en faisant dans (18)

$$A = 1, \quad C = 1, \quad K = -r^2,$$

on aura, pour la polaire réciproque d'une conique quelconque par rapport à ce cercle,

$$(e^2 - 4ck)y^2 - 2(de - bk)xy + (d^2 - 4ak)x^2$$
$$+ 2r^2(be - 2cd)y + 2r^2(bd - 2ae)x + (b^2 - 4ac)r^4 = 0,$$

si la conique est un autre cercle quelconque

$$y^2 + x^2 + dy + ex + k = 0.$$

En faisant, dans l'équation précédente,

$$a = c = 1 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

on aura, pour la polaire réciproque,

$$\begin{gathered}(e^2 - 4k)y^2 - 2dexy + (d^2 - 4k)x^2 \\ - 4r^2dy - 4r^2ex - 4r^4 = 0,\end{gathered}$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$(d^2 + e^2 - 4k)(y^2 + x^2) - (dy + ex + 2r^2)^2 = 0;$$

ce qui montre que la polaire réciproque est une conique ayant pour foyer l'origine ou le centre du cercle directeur, et pour directrice la droite

$$dy + ex + 2r^2 = 0,$$

c'est-à-dire la polaire du centre du second cercle par rapport au premier.

Donc, *la polaire d'un cercle, par rapport à un autre cercle, est une conique ayant pour foyer le centre du cercle directeur, et pour directrice la polaire du centre de l'autre cercle.*

9. *Cas où la directrice serait une parabole.* On peut toujours choisir les axes de manière que l'équation de la directrice soit

$$(23) \qquad Ay^2 + Ex = 0;$$

d'après l'équation (18), l'équation d'une conique, par rapport à cette directrice, sera

$$(24) \quad \left\{\begin{aligned} & 4(e^2 - 4ck)A^2y^2 - 4(be - 2cd)AExy \\ & + (b^2 - 4ac)E^2x^2 - 4(de - 2bk)AEy \\ & - 2(bd - 2ae)E^2x + (d^2 - 4ak)E^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

La nature de la polaire réciproque ne dépend que de la différence

$$(be - 2cd)^2 - (b^2 - 4ac)(e^2 - 4ck).$$

Or, en faisant $m = 0$ dans la relation (14), on trouvera;

pour déterminer les coefficients linéaires des tangentes de la conique parallèle à l'axe de la parabole, l'équation du deuxième degré

$$(b^2 - 4ac)q^2 + 2(be - 2cd)q + e^2 - 4ck = 0,$$

et, suivant que la différence ci-dessus sera positive, nulle ou négative, la conique aura deux tangentes parallèles à l'axe de la parabole, ou n'en aura qu'une, ou n'en aura pas. Dans le premier cas, la polaire réciproque (24) sera une hyperbole; dans le deuxième, une parabole; et, dans le troisième, une ellipse: conclusions faciles à prévoir en considérant la parabole comme une conique ayant son centre à l'infini.

Si l'on avait $b^2 - 4ac = 0$, la polaire réciproque serait une hyperbole, à moins qu'on n'eût aussi $be - 2cd = 0$, ce qui arriverait pour $b = 0$ et $c = 0$, c'est-à-dire si la conique avait son axe parallèle à celui de la directrice. Si les axes étaient les mêmes, on aurait, de plus, $d = 0$, et l'équation de la polaire réciproque deviendrait

$$e^2 A^2 y^2 + ae E^2 x - ak E^2 = 0; \tag{25}$$

et, en supposant de plus $k = 0$, ce qui donnerait aux deux paraboles le même sommet, la polaire réciproque serait

$$e A^2 y^2 + a E^2 x = 0,$$

ce qui montre que, dans le cas de deux paraboles,

$$A y^2 + E x = 0,$$
$$A y^2 - E x = 0,$$

opposées par le sommet, chacune d'elles serait à elle-même sa polaire réciproque par rapport à l'autre.

10. *Cas des coniques confocales.* En prenant pour origine le foyer de la conique, son équation sera

$$y^2 + x^2 - (my + nx + q)^2 = 0 \tag{26}$$

ou

$$(1 - m^2)y^2 - 2mnxy + (1 - n^2)x^2 - 2mqy - 2nqx - q^2 = 0;$$

et, d'après l'équation (15), pour avoir la polaire réciproque par rapport à une directrice quelconque, il faudra remplacer a, b, c, etc., par leurs valeurs, ce qui donnera

$$(27)\quad \left\{ \begin{array}{l} q^2(F'_y)^2 + q^2(F'_x)^2 - 2mqpF'_y - 2nqpF'_x \\ + (m^2 + n^2 - 1)p^2 = 0, \end{array} \right.$$

et, si la conique (26) était une parabole, à cause de

$$m^2 + n^2 - 1 = 0,$$

$$(28)\qquad q(F'_y)^2 + q(F'_x)^2 - 2mpF'_y - 2npF'_x = 0.$$

Dans le cas où la directrice serait un cercle

$$y^2 + x^2 = r^2$$

ayant pour centre le foyer de la conique, on aurait

$$F'_y = 2y, \quad F'_x = 2x, \quad p = -2r^2,$$

et la polaire réciproque de la conique (26) serait

$$(29)\quad q^2y^2 + q^2x^2 + 2mqr^2y + 2nqr^2x + (m^2 + n^2 - 1)r^4 = 0.$$

On voit que cette polaire réciproque serait un cercle, quelle que soit la conique. Dans le cas de la parabole, $m^2 + n^2 - 1 = 0$, et le cercle passerait par l'origine ou par le foyer de la parabole.

Les coordonnées du centre de ce cercle (29) sont

$$\alpha = -\frac{nr^2}{q}, \quad \beta = -\frac{mr^2}{q},$$

et la polaire de ce point, par rapport au cercle directeur, est

$$\beta y + \alpha x - r^2 = 0,$$

ou, substituant les valeurs de α et de β,

$$my + mx + q = 0,$$

c'est-à-dire l'équation de la directrice de la conique; d'où résulte ce théorème au moyen duquel une foule de problèmes sur les coniques se ramènent à des problèmes sur les cercles :

La polaire réciproque d'une conique, par rapport à un cercle confocal, est un second cercle qui aurait pour centre le pôle de la directrice de la conique, par rapport au cercle confocal.

On déduirait facilement des équations (26) et (29) que, dans le cas de deux coniques de même foyer et de même directrice, la polaire réciproque serait aussi de même foyer et de même directrice.

NOTE SUR LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. E. LIONNET,
Professeur au lycée Descartes (*).

I. *Étant donnée une limite δ des erreurs commises sur les facteurs d'un produit $abc\ldots kl$, trouver une limite de l'erreur e commise sur le produit.*

Soient a', b', c', etc., des valeurs de a, b, c, etc., approchées par défaut à moins de δ. En remplaçant a par a', on a diminué le facteur a d'un nombre moindre que δ, et le produit $abc\ldots kl$ d'un nombre moindre que $\delta bc\ldots kl$; pareillement, en remplaçant b par b' dans le produit $a'bc\ldots kl$, on a diminué ce produit d'un nombre moindre que $\delta a'c\ldots kl$, et, à plus forte raison, d'un nombre moindre que $\delta ac\ldots kl$; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'en remplaçant l par l' dans le produit $a'b'c'\ldots k'l$, on ait diminué ce produit d'un nombre moindre que $\delta ab\ldots k$. Donc, en définitive, on aura $e < \delta s_{n-1}$, s_{n-1} désignant

(*) *Voyez*, pour plus de détails, les Compléments d'arithmétique, livre VI.

la somme des produits $n-1$ à $n-1$ des n facteurs a, b, c,..., k, l.

En général, si l'on désigne par p le produit des facteurs non modifiés, et par n le nombre des facteurs modifiés tous par défaut, tous par excès, ou les uns par défaut et les autres par excès, des raisonnements semblables conduiront à la relation

$$e < \delta p s_{n-1},$$

dans laquelle s_{n-1} représente la somme des produits $n-1$ à $n-1$ des facteurs modifiés, chaque facteur modifié par voie d'augmentation étant remplacé par sa valeur approchée par excès.

II. *Étant donnée une limite δ de l'erreur commise sur un nombre a, trouver une limite de l'erreur commise sur la racine $m^{\text{ième}}$ de ce nombre.*

Soit α une valeur de a approchée par excès à moins de δ. En remplaçant a par α dans $\sqrt[m]{a}$, l'erreur e commise sur cette racine est $\sqrt[m]{\alpha} - \sqrt[m]{a} = x - y$, en posant $\sqrt[m]{\alpha} = x$ et $\sqrt[m]{a} = y$. Or on a

$$e = x - y = \frac{(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + y^{m-1})(x-y)}{x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + y^{m-1}},$$

ou

$$e = \frac{x^m - y^m}{x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + y^{m-1}}.$$

De plus, le dividende $x^m - y^m = \alpha - a < \delta$, et la relation $\alpha > a$ donne

$$\sqrt[m]{\alpha} > \sqrt[m]{a}, \quad \text{ou} \quad x > y;$$

donc en remplaçant x par y au diviseur, qui devient alors $y^{m-1} + y^{m-1} + y^{m-1} +$ etc., ou my^{m-1}, on diminuera ce diviseur, et on aura

$$e < \frac{\delta}{m\, y^{m-1}},$$

ou

$$(1) \qquad e < \frac{\delta}{m \sqrt[m]{a^{m-1}}}.$$

En désignant par α une valeur de a approchée par défaut à moins de δ, des raisonnements semblables conduisent à la relation

$$(2) \qquad e < \frac{\delta}{m \sqrt[m]{\alpha^{m-1}}}.$$

Corollaire. Les relations (1) et (2) montrent que si a est un nombre décimal plus grand que l'unité et que $\delta = \frac{1}{10^n}$, on aura $e < \frac{1}{10^n}$; donc, *pour obtenir la racine $m^{ième}$ d'un nombre décimal plus grand que l'unité, à moins d'une unité décimale du $n^{ième}$ ordre, il suffit d'opérer sur une valeur du nombre proposé, approchée à moins de la même unité décimale.* Ce principe peut d'ailleurs être considéré comme une conséquence de celui que nous allons démontrer.

III. *Pour extraire la racine $m^{ième}$ d'un nombre entier a avec une erreur moindre que l'unité, il suffit de connaître plus de la $m^{ième}$ partie du nombre de ses chiffres à partir de la gauche.*

En supposant que n soit le nombre des chiffres de a, nous démontrerons d'abord que si l'on prend sur la gauche de a un nombre de chiffres plus grand que $\frac{n}{m}$, ou au moins égal à $\frac{n+1}{m}$, en remplaçant tous les chiffres suivants par des zéros, l'erreur e commise sur $\sqrt[m]{a}$ sera moindre qu'une unité. En effet, le nombre α qu'on substitue à a dans $\sqrt[m]{a}$ contenant n chiffres est au moins égal à 10^{n-1}; de plus, le nombre des chiffres pris sur la gauche de n étant au moins égal à $\frac{n+1}{m}$, la partie négligée contient au plus $n - \frac{n+1}{m}$ ou $\frac{n(m-1)-1}{m}$ chiffres; donc cette partie est moindre que $10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}$. Or on a la relation

$$e < \frac{\delta}{m\sqrt[m]{\alpha^{m-1}}}, \quad \text{ou} \quad e < \frac{\delta}{m\alpha^{\frac{m-1}{m}}} \qquad \text{(II)},$$

dans laquelle e désigne l'erreur commise sur $\sqrt[m]{a}$ en remplaçant a par une valeur α approchée par défaut à moins de δ; donc si l'on fait $\delta = 10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}$ et $\alpha = 10^{n-1}$, on aura, à plus forte raison,

$$e < \frac{10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}}{m \times 10^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}}, \quad \text{ou} \quad e < \frac{10^{\frac{m-2}{m}}}{m}.$$

Remplaçant m successivement par chacun des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on voit immédiatement que $10^{\frac{m-2}{m}}$ est moindre que m; il en est de même pour une valeur quelconque de m supérieure à 9, puisque $10^{\frac{m-2}{m}}$ est constamment moindre que 10; donc, quel que soit le degré m de la racine à extraire, on aura $e < 1$. Il en résulte que *pour extraire la racine $m^{ième}$ d'un nombre entier composé de n chiffres, avec une erreur moindre qu'une* *unité, il suffit de prendre sur la gauche de ce nombre au moins* $\frac{n+1}{m}$ *chiffres, en remplaçant tous les autres par des zéros, puis d'extraire la racine* $m^{ième}$ *du nombre ainsi obtenu par excès, à moins d'une unité.* Ainsi, par exemple, pour extraire la racine $12^{ième}$ d'un nombre de 23 chiffres, avec une erreur moindre qu'une unité, il suffira de connaître ses deux premiers chiffres à gauche.

IV. *Trouver, avec une erreur moindre qu'un millimètre,* 1° *le diamètre d'un cercle dont l'aire est un mètre carré;* 2° *le diamètre d'une sphère dont le volume est un mètre cube.*

Prenons le mètre pour unité de longueur, le mètre carré pour unité de surface, le mètre cube pour unité de volume, et désignons par x la mesure du diamètre demandé.

1°. On détermine la valeur de x par l'égalité

$$\frac{1}{4}\pi x^2 = 1, \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{4}{\pi}};$$

de sorte qu'il s'agira d'extraire à moins d'un millième la racine carrée du quotient de la division de 4 par π; or ce quotient est plus grand que l'unité, donc il suffit d'en obtenir une valeur approchée à moins d'un millième (II, cor.), c'est-à-dire de calculer sa partie entière et ses trois premières décimales. La division abrégée de Fourrier donne immédiatement $\frac{4}{\pi} = 1,273$ etc., et en extrayant la racine carrée de 1,273 par excès à moins d'un millième, on a $x = 1,129$ avec une erreur moindre qu'un millième.

2°. On détermine x par l'égalité

$$\frac{1}{6}\pi x^3 = 1, \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

Le quotient $\frac{6}{\pi}$ étant plus grand que l'unité, on détermine ses quatre premiers chiffres à gauche 1, 9, 0, 9 par la division abrégée de Fourrier, et en extrayant la racine cubique de 1,909 par excès à moins d'un millième, on aura $x = 1,241$ avec une erreur moindre qu'un millième.

La solution de ces problèmes fait ressortir l'utilité de la *division ordonnée* de Fourrier combinée avec la règle donnée précédemment pour l'extraction des racines par approximation.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE M. STREBOR SUR LES HYPERBOLES ÉQUILATÈRES CONCENTRIQUES.

(Voir t. VII, p. 240 et 245 : questions 176 et 190) ;

PAR M. PAUL SERRET.

---

1. *Lemme* I. Si, dans l'équation d'une droite en coordonnées polaires, $\rho = \frac{b}{\sin\omega - a\cos\omega}$, on remplace ρ par ρ^2 et ω par 2ω, on obtient l'équation d'une hyperbole équilatère

$$\rho^2 = \frac{b}{2\sin\omega\cos\omega - a(\cos^2\omega - \sin^2\omega)},$$

ayant pour centre l'origine des coordonnées. Donc, dans ce qui suit, les hyperboles équilatères correspondantes à des droites données par la transformation indiquée, seront toutes concentriques, leur centre commun étant l'origine même des coordonnées.

Cette remarque, qui nous conduira à des conséquences importantes, est due à M. Strebor qui en a fait le sujet de la question 190 (t. VII, p. 240).

2. *Lemme* **II.** **Si une droite**

$$(1)\qquad \rho = \frac{b}{\sin\omega - a\cos\omega}$$

passe par le point ($\rho = \rho'$, $\omega = \omega'$), l'hyperbole équilatère correspondante

$$(1')\qquad \rho^2 = \frac{b}{\sin 2\omega - a\cos 2\omega}$$

passera par le point $\left(\rho' = \sqrt[2]{\rho'},\ \omega = \frac{\omega'}{2}\right)$.

3. *Lemme* III. Si m droites se coupent au même point ($\rho = \rho'$, $\omega = \omega'$), les m hyperboles équilatères concentriques correspondantes se couperont aussi au même point $\left(\rho = \sqrt[2]{\rho'},\ \omega = \frac{\omega'}{2}\right)$, lequel point sera le point correspondant du point d'intersection des m droites. Évident d'après le lemme II.

Cas particuliers. Si les m droites sont parallèles, les m hyperboles équilatères correspondantes auront mêmes asymptotes.

4. *Lemme* IV. Si m points sont sur une même droite, savoir :

$$(\rho = \rho_1,\ \omega = \omega_1), \ldots, (\rho = \rho_m,\ \omega = \omega_m),$$

les m points correspondants, savoir :

$$\left(\rho = \sqrt[2]{\rho_1},\ \omega = \frac{\omega_1}{2}\right), \ldots, \left(\rho = \sqrt[2]{\rho_m},\ \omega = \frac{\omega_m}{2}\right),$$

sont sur une même hyperbole équilatère ayant pour centre l'origine des coordonnées, et correspondante à la droite des m points.

Démonstration. Prenons l'équation de la droite, elle sera satisfaite par les coordonnées de chacun des m points; prenons l'équation de l'hyperbole équilatère correspondante, elle sera satisfaite (lemme II) par les coordonnées de chacun des m points correspondants. Donc, etc.

Remarque. Dans ce qui précède, nous disons que le point (ρ, ω) est le point *correspondant* du point (ρ', ω') si l'on a

$$\rho = \sqrt[2]{\rho'}, \quad \omega = \frac{\omega'}{2}.$$

5. *Lemme* V. Le point *correspondant* du point d'intersection de deux droites est le point d'intersection des deux hyperboles équilatères concentriques *correspondantes*.

6. *Lemme* VI. Si deux droites se coupent sous un angle A, les hyperboles équilatères concentriques *correspondantes* se couperont sous le même angle A.

Démonstration. Soient

$$\rho = \frac{b}{\sin\omega - a\cos\omega},$$
$$\rho = \frac{b'}{\sin\omega - a'\cos\omega}$$

les équations de deux droites. Soit A l'angle des deux droites; on aura

$$\tang A = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Les hyperboles équilatères *correspondantes* sont, en passant aux coordonnées rectilignes, représentées par

$$ay^2 + 2xy - ax^2 - b = 0, \quad a'y^2 + 2xy - a'x^2 - b' = 0.$$

Soient a_1, a_2 les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes, à leur point commun d'intersection; on aura

$$a_1 = \frac{ax - y}{x + ay}, \quad a_2 = \frac{a'x - y}{x + a'y}.$$

Si A' désigne l'angle des deux tangentes, on aura

$$\tang A' = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2} = \frac{\frac{a'x - y}{x + a'y} - \frac{ax - y}{x + ay}}{1 + \frac{(a'x - y)(ax - y)}{(x + a'y)(x + ay)}}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(a' - a)}{(x^2 + y^2)(1 + aa')} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Donc $\quad \tang A' = \tang A$; $\quad$ donc $A' = A$. $\quad$ C.Q.F.D.

Corollaires. 1°. Si deux droites sont perpendiculaires les deux hyperboles équilatères correspondantes se coupent orthogonalement:

2°. Si une droite C divise dans un rapport quelconque l'angle de deux autres droites A et B, l'hyperbole équilatère correspondante C' divisera dans le même rappor l'angle des deux hyperboles équilatères correspondante A', B'.

7. Théorème I. *Étant donnée la base d'un triangl curviligne formé par trois arcs d'hyberboles équilatère concentriques, le lieu du sommet, lorsque l'angle fai par les deux côtés est constant, est une ellipse de Cassini.* (Strebor, question 176, t. VII, p. 45.)

Démonstration. Prenons sur le plan de deux axes fixe rectangulaires un triangle rectiligne ABC dont la base AI soit fixe et l'angle au sommet C soit constant. Le lieu décrit par le sommet C sera un cercle dont l'équation ser

$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$, en coordonnées rectilignes,

et

(1) $\rho^2 + \rho(a \sin\omega + b \cos\omega) + c = 0$, en coordonnées polaires.

La transformation indiquée dans le lemme I nous donne comme correspondant au triangle rectiligne ABC dont i vient d'être parlé, un triangle curviligne A'B'C' formé d'arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre commun en O, origine des coordonnées; la base curviligne A'B' de ce triangle étant fixe, et l'angle C' au sommet constant (lemme VI).

D'ailleurs ($\rho = \rho'$, $\omega = \omega'$) étant les coordonnées du point C dans l'une de ses positions, les coordonnées du point correspondant C' seront

$$\left(\rho_1 = \sqrt{\rho'}, \ \omega_1 = \frac{\omega'}{2}\right),$$

d'où l'on tire

$$\rho' = \rho_1^2, \ \omega' = 2\omega_1.$$

Or on a

$$\rho'^2 + \rho'(a \sin\omega' + b \cos\omega') + c = 0;$$

donc, en remplaçant ρ', ω' par leurs valeurs ρ_1^2, $2\omega_1$,

(2) $$\rho_1^4 + \rho_1^2(a \sin 2\omega_1 + b \cos 2\omega_1) + c = 0;$$

ou, en passant aux coordonnées rectilignes,

(2') $$(y^2 + x^2)^2 + 2a.xy + b(x^2 - y^2) + c = 0,$$

équation générale d'une ellipse de Cassini rapportée à deux axes rectangulaires passant par son centre. Or l'équation (2') représente le lieu décrit par le sommet C' du triangle curviligne A'B'C' considéré; donc ce lieu est une ellipse de Cassini. C.Q.F.D.

Remarque. Dans le triangle rectiligne, l'enveloppe de la bissectrice de l'angle mobile C est un point situé sur la circonférence du cercle décrit par le point C; de même, dans le triangle curviligne A'B'C', si l'on mène à chaque position du sommet C' l'arc d'hyperbole équilatère ayant son centre en O (origine des coordonnées) qui divise en deux parties égales l'angle au sommet, l'enveloppe de l'arc bissecteur sera un point situé sur l'ellipse de Cassini décrite par le sommet C'. La même chose aurait lieu dans quelque rapport que l'arc d'hyperbole divisât l'angle au sommet, pourvu que ce rapport fût constant.

8. *Corollaires.* L'angle curviligne, inscrit dans un segment déterminé d'une ellipse de Cassini et formé d'arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre commun au centre de l'ellipse, est constant.

Un triangle curviligne étant formé de trois arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre commun en O :

1°. Les trois arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre en O et menés par chaque sommet du triangle perpendiculairement au côté opposé, se coupent en un même point;

2°. Les trois arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre commun en O, et bissecteurs des trois angles du triangle, se coupent en un même point. (Strebor.)

Les théorèmes énoncés ayant lieu pour le triangle rectiligne, ont lieu aussi pour le triangle curviligne en question, d'après les lemmes établis.

9. Théorème II. *Dans tout polygone curviligne de m côtés formé d'arcs d'hyperboles équilatères concentriques, la somme des angles du polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Remarque. Toutefois, il y aura doute sur la manière d'estimer les angles du polygone curviligne.

10. Théorème III. *Si par un point quelconque d'une ellipse de Cassini, circonscrite à un triangle curviligne formé d'arcs... ayant pour centre celui* O *de l'ellipse, on mène des arcs d'hyp... perpendiculaires aux côtés du triangle inscrit, les trois points d'intersection seront sur*

une même hyperbole équilatère ayant son centre en O.

Remarque. Le théorème que j'ai donné (t. VII, p. 214) sur le quadrilatère rectiligne inscrit à un cercle, donne un théorème correspondant sur le quadrilatère curviligne inscrit à une ellipse de Cassini.

Le théorème sur les quatre points de rencontre des hauteurs dans les quatre triangles que l'on peut former avec les côtés d'un quadrilatère rectiligne, en fournit un analogue sur le quadrilatère curviligne.

Les théorèmes de Pascal et de Brianchon, et leurs conséquences, donnent des propositions analogues pour les hexagones, les pentagones, les triangles curvilignes inscrits ou circonscrits à l'ellipse de Cassini. Il en est de même d'un très-grand nombre d'autres théorèmes. Ainsi :

Le théorème de M. Poncelet sur l'enveloppe des cordes d'un cercle vues d'un point de leur plan sous un angle droit ;

Le théorème de M. Finck, question 154 ;

Le principe sur l'involution de Desargues, en n'introduisant dans l'énoncé que des rapports de sinus.

Généralement, tout théorème de collinéation sur des lignes droites, dans l'énoncé duquel n'entre aucune relation entre des grandeurs métriques, mais seulement des constructions de droites d'après des données graphiques, les angles étant constants ou variables suivant une certaine loi, donnera toujours un théorème analogue pour le système curviligne, en remplaçant les droites par des hyperboles équilatères concentriques.

Note. Les analogies qui existent entre le triangle rectiligne inscrit à un cercle, et le triangle curviligne inscrit dans une ellipse de Cassini, permettent de résoudre facilement la question suivante.

PROBLÈME. *Etant donnés le centre et trois points d'une ellipse de Cassini, construire* géométriquement *la tangente à la courbe en l'un quelconque de ses points.*

11. Théorème IV. *Étant données deux hyperboles équilatères concentriques; soient nn_1 le diamètre commun aux deux courbes, et mm_1 la tangente commune :*

1°. Le demi-diamètre commun sera moyen géométrique entre les demi-diamètres aboutissant aux points de contact de la tangente commune (Strebor);

2°. Les diamètres aboutissant aux points de contact de la tangente commune seront également inclinés sur le diamètre commun;

3°. Les deux extrémités du diamètre commun et les deux points de contact de la tangente commune seront les sommets d'un quadrilatère inscriptible.

Ces divers énoncés, y compris celui de M. Strebor, se démontrent facilement par la géométrie.

12. Théorème V. *Étant tracés un demi-cercle et le diamètre qui le termine, on inscrit dans la figure résultante un système de deux cercles tangents entre eux :*

1°. Le point de contact des deux cercles inscrits décrira un arc de cercle (théorème connu);

2°. La droite qui joint les centres des deux cercles aura pour enveloppe un arc de cercle.

13. Théorème VI. *Étant données deux ellipses homofocales, si, par les deux extrémités d'un diamètre quelconque de l'ellipse extérieure, on mène des tangentes à l'ellipse intérieure, la somme des longueurs interceptées sur chaque tangente de l'extrémité du diamètre à leur point de commune intersection sera constante. Pour deux hyperboles homofocales la différence serait constante.*

14. Théorème VII. *Soit un triangle variable* ABC *dont les trois côtés pivotent autour de trois points fixes situés en ligne droite; si les deux sommets* A, B *sont constamment sur une même conique, le sommet libre* C *décrira lui-même une conique.*

15. Théorème corrélatif par les polaires réciproques.

Note. Tous ces théorèmes découlent des méthodes métamorphiques. (*Voir* t. V, p. 502.) Tm.

NOTE SUR LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX POINTS SITUÉS SUR LA SURFACE DE LA SPHÈRE;

Par M. L. THOMAS,
Professeur de mathématiques.

Dans les éléments, pour prouver que, de toutes les lignes tracées sur la surface d'une sphère et terminées aux deux mêmes points, la plus courte est l'arc de grand cercle qui joint ces deux points; on regarde comme évident qu'entre les deux points donnés, il y a toujours une ligne moindre que toutes les autres, et l'on démontre ensuite qu'on peut trouver une ligne plus courte que toute ligne qui diffère de l'arc de grand cercle. Le postulatum n'est pas admissible dans toute sa généralité, puisque, pour unir les deux extrémités d'un même diamètre, il n'y a aucune ligne moindre que toutes les autres, il y en a une infinité d'également courtes. De plus, le mode de démonstration employé ne pouvant s'appliquer à l'arc de grand cercle, pour être logique, il faudrait, avant de conclure, faire voir que, par aucun autre tour de démonstration, on ne parviendra à prouver que l'arc de grand cercle n'admet pas de ligne plus courte que lui-même.

Il y a de ce théorème une démonstration directe, plus simple et qui me semble très-rigoureuse; la voici :

Soient AMB (*fig.* 15, *Pl. II*) l'arc de grand cercle et AFIB une autre ligne quelconque terminée aux deux mêmes points A et B sur la surface d'une sphère donnée; il s'agit de prouver que la longueur de l'arc AMB est moindre que la longueur de la ligne AFIB.

Soient C, D, E des points de cette dernière; joignons-les entre eux, et aux points A et B par les arcs des grands cercles AC, CD, DE, EB, et tirons, en outre, les arcs de grands cercles AD, AE. Les triangles sphériques ABE, AED, ADC, donnent les inégalités

$$\begin{aligned} \text{arc } AMB &< AE + BE, \\ AE &< AD + DE, \\ AD &< DC + AC. \end{aligned}$$

Additionnons-les membre à membre et supprimons les termes communs aux deux membres du résultat; il vient

$$AMB < BE + DE + DC + AC.$$

La conclusion est la même, quelque nombreux et rapprochés que soient les points A, C, D, E, B choisis sur la ligne AFIB; donc elle a encore lieu à la limite, lorsque les points sont infiniment nombreux et infiniment rapprochés. Or la limite de la somme des arcs de grands cercles, BE, DE, DC, etc., est alors la même que la limite de la somme de leurs cordes, c'est-à-dire que la limite vers laquelle tend la somme des côtés d'un polygone inscrit dans la courbe AFIB; mais, par définition, cette dernière limite est la longueur de l'arc de courbe AFIB. Donc, etc.

Note. AB étant une ligne tracée sur une surface quelconque, si, par tous les points de cette ligne, on mène des plans tangents à la surface, on obtient une surface développable; si, en développant cette surface, la ligne AB devient une droite, alors cette ligne est évidemment géodésique; caractère qui sur la sphère n'appartient qu'aux grands cercles. Il est vrai que ce genre de considérations ne peut être présenté aux élèves lorsqu'ils ne font qu'aborder la sphère; mais il est utile de les en instruire le plus tôt possible. L'occasion de *généraliser* ne doit jamais être négligée; car l'esprit de la science consiste dans la généralisation, qui agrandit et facilite tout. TM.

QUESTION D'EXAMEN SUR LES DIAMÈTRES

(Voir p. 234).

1. Le mot *diamètre* a plusieurs sens; dans ce qui suit, on appelle *diamètre* une droite qui partage en deux parties égales un système de cordes parallèles.

2. THÉORÈME. *Une ligne plane qui a deux diamètres a nécessairement un troisième diamètre* (fig. 12, Pl. II).

Démonstration. Soient OY, OX les deux diamètres (*fig.* 12), et soient M, N deux points de la ligne donnée. Au point M correspondent les deux points M_1, M_2; de même, N_1 et N_2 sont les points correspondants de N par rapport aux deux diamètres. Prenons les points R, S, correspondants de M_1 et N_1 relativement au diamètre OY. Les points I, L, milieux des cordes NN_1, MM_1, ont leurs correspondants, par rapport au diamètre OY, en F et en G, milieux des cordes M_2R, N_2S; donc, comme les trois points G, F, O sont évidemment en ligne droite, OFG coupe en parties égales le système de cordes parallèles M_2R, N_2S. Donc OFG est un troisième diamètre.

C. Q. F. D.

3. A l'aide de ce troisième diamètre et de l'un des deux diamètres donnés, on peut en trouver un quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on rencontre un diamètre déjà trouvé; ce qui peut arriver dès le troisième diamètre.

Observation. Cette démonstration simple a été donnée par M. le professeur Choquet, dans son Cours à l'Institution Mayer. Notre savant collaborateur, M. Breton (de Champs), a bien voulu nous promettre un travail complet sur ce genre de diamètres rectilignes et curvilignes. Euler n'a traité que des diamètres coupant les cordes à angle droit.

NOTE SUR L'ANGLE DROIT CIRCONSCRIT A DEUX CONIQUES.

I. $$\begin{aligned} Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F &= 0, \\ A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' &= 0, \end{aligned}$$

équations de deux coniques, axes rectangulaires;

$y + ex + f = 0$, tangente à la première conique,

$y + e'x + f' = 0$, tangente à la deuxième conique.

Posons

$$\begin{aligned} P &= mx^2 - 2kx + l, & P' &= \mu y^2 - 2\pi' y + \lambda', \\ Q &= ky + k'x + n - mxy, & Q' &= \pi y + \pi' x + \nu - \mu xy, \\ R &= my^2 - 2k'y + l', & R' &= \mu x^2 - 2\pi x + \lambda, \end{aligned}$$

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC),$$

$$k = \frac{dL}{dE}, \quad k' = \frac{dL}{dD}, \quad l = \frac{dL}{dC}, \quad l' = \frac{dL}{dA},$$

$$n = -\frac{dL}{dB}, \quad m = \frac{dL}{dF};$$

les lettres grecques sont relatives à la seconde conique.

Représentons par x et y les coordonnées du point d'intersection des deux tangentes; on a les deux équations de condition qui établissent le contact

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} Pe^2 - 2Qe + R &= 0, \\ R'e'^2 - 2Q'e' + P' &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les tangentes formant un angle droit, on a

$$ee' + 1 = 0;$$

donc la dernière équation devient

$$(2) \qquad P'e^2 + 2Q'e + R' = 0.$$

Éliminant e, on obtient

$$(3) \qquad (RP' - PR')^2 + 4(RQ' + QR')(PQ' + QP') = 0.$$

Le terme le plus élevé de l'équation est $m^2\mu^2(y^2 + x^2)^4$; donc si l'équation n'a pas de facteur rationnel, le lieu géométrique du point d'intersection est toujours du huitième degré, à moins que l'une des coniques ne soit une parabole; car alors m ou μ est nul, et l'équation n'est plus que du sixième degré. Si les deux coniques sont des paraboles, l'équation s'abaisse au quatrième degré. Si l'équation a un facteur rationnel du deuxième degré, il doit être de la forme $A(y^2 + x^2) +$ etc.; donc le lieu géométrique n'admet d'autres coniques que le cercle.

Lorsque les deux coniques se confondent, on a

$$P' = R, \quad Q' = Q, \quad R' = P,$$

et l'équation (3) devient

$$(R + P)^2[(R - P)^2 + 4Q^2] = 0;$$

d'où

$$R + P = 0,$$

équation du cercle : théorème déjà connu de Pappus.

Éliminant e entre les deux équations (1) et (3), on obtient

$$e^2(PQ' + P'Q) + RQ' + R'Q = 0.$$

Si l'on a l'identité

$$PQ' + P'Q = RQ' + R'Q,$$

alors le lieu a pour équation

$$PQ' + P'Q = 0;$$

l'identité donne celle-ci,

$$Q'(P - R) = Q(R' - P').$$

Pour qu'elle subsiste, il faut que k, k', π, π', n, ν deviennent nuls, et que $\frac{l - l'}{m} = \frac{\lambda - \lambda'}{\mu}$, c'est-à-dire il faut que les deux coniques soient homofocales, et le lieu devient

$$m\mu(x^2 + y^2) + l\mu + m\lambda' = 0,$$

équation d'un cercle concentrique aux coniques.

L'équation $RP' - PR' = 0$ amène au même résultat; de même, $RQ' + QR' = 0$.

INTERSECTION DE DEUX CERCLES.

Relation entre la distance des centres, la corde commune et les quatre segments de la ligne des centres. Aire du triangle;

Par M. G.-J. DOSTOR,

Docteur ès sciences mathématiques.

Théorème I. *Lorsque deux cercles se coupent, les droites qui joignent les extrémités d'un diamètre de la ligne des centres à un point d'intersection, sont coupées par la seconde circonférence en segments, comptés à partir de ce diamètre, proportionnels entre eux, et dans le rapport de ce diamètre et de la double distance des centres* (fig. 16, Pl. II).

Démonstration.

$$EC : EG :: FC : FH :: EF : 2AB.$$

En effet, l'angle ECF étant droit, son adjacent GCH l'est aussi, et la droite GH passe par le centre B.

Cela étant, du centre B menons sur la corde CH la perpendiculaire BO.

Les deux triangles rectangles CEF, BFO sont semblables et donnent la proportion

$$\mathrm{EC} : \mathrm{BO} :: \mathrm{FC} : \mathrm{FO} :: \mathrm{EF} : \mathrm{BF};$$

d'où

$$\mathrm{EC} : \mathrm{EB} + 2\,\mathrm{BO} :: \mathrm{FC} : \mathrm{FC} + 2\,\mathrm{FO} :: \mathrm{EF} : \mathrm{EF} + 2\,\mathrm{BF}.$$

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{EC} + 2\,\mathrm{BO} &= \mathrm{EC} + \mathrm{CG} = \mathrm{EG}, \\ \mathrm{FC} + 2\,\mathrm{FO} &= \mathrm{CO} + \mathrm{FO} = \mathrm{FH}, \\ \mathrm{EF} + 2\,\mathrm{BF} &= 2\,\mathrm{AF} + 2\,\mathrm{BF} = 2\,\mathrm{AB}; \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{EC} : \mathrm{EG} :: \mathrm{FC} : \mathrm{FH} :: \mathrm{EF} : 2\,\mathrm{AB}.$$

On a de même

$$\mathrm{KC} : \mathrm{KM} :: \mathrm{LC} : \mathrm{LN} :: \mathrm{KL} : 2\,\mathrm{AB}.$$

Corollaire. La comparaison des deux dernières proportions donne

$$\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EG}} : \frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{KM}} :: \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{FH}} : \frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{LN}} :: \mathrm{EF} : \mathrm{KL} \quad \text{ou} \quad :: \mathrm{AC} : \mathrm{BC}.$$

THÉORÈME II. *Lorsque deux cercles se coupent, le produit de la distance des centres, par la corde commune, est égal à la racine carrée du produit des quatre segments de la ligne des centres.*

En effet, de la similitude des deux triangles CEF, CFI, on tire

$$\mathrm{EF} : \mathrm{EC} :: 2\,\mathrm{CF} : 2\,\mathrm{CI},$$

d'où

$$\overline{\mathrm{EF}}^2 . \overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{EC}}^2 . 4\,\overline{\mathrm{CF}}^2;$$

mais on a, par le théorème précédent,

$$2\,AB.EC = EG.EF,$$
$$2\,AB.FC = FH.EF.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, et simplifiant, on obtient

$$\overline{AB}^2.\overline{CD}^2 = EC.EG.FC.FH.$$

Or

$$EC.EG = EK.EL, \quad FC.FH = FL.FK;$$

donc

$$AB.CD = \sqrt{EK.EL.FK.FL}.$$

Corollaire. Posons

$$AB = a, \quad AC = b, \quad BC = c,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} EK &= AB + AE + BK = a + b + c, \\ EL &= EA + AB - BL = b + a - c, \\ FK &= AB + BK - AF = a + c - b, \\ FL &= AF + BF - AB = b + c - a; \end{aligned}$$

et puisque

$$AB \times CD = 4 . \frac{AB \times CI}{2} = 4\,ABC,$$

il viendra

$$ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

pour *l'aire du triangle* ABC *en valeur de ses côtés.*

THÉORÈMES SUR LES POLAIRES;

PAR M. CASIMIR FOUCAULT,
Élève de l'institution Barbet.

THÉORÈME I. *Si du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole on abaisse une perpendiculaire sur la polaire d'un* *point situé dans le plan de la courbe, le rectangle construit sur cette perpendiculaire et le diamètre conjugué parallèle à la polaire pris dans une courbe semblable concentrique à la première, passant par ce point donné, est constamment équivalent au rectangle des demi-axes de la première courbe.*

Considérons une ellipse ; soient P le point donné et ST la polaire du point P. Supposons que dans l'ellipse semblable, concentrique à AA'BB, et passant par le point P, OH soit le conjugué de OP. ON étant perpendiculaire à la polaire ST, il s'agit de démontrer que

$$\mathrm{OH} \times \mathrm{ON} = \text{constante} = ab.$$

En effet, nous représenterons le rapport de similitude par $\mathrm{K}.\mathrm{OH} = b'\mathrm{K}$.

Les deux triangles semblables ONS et OPQ donnent

$$\mathrm{ON} : \mathrm{PQ} :: \mathrm{OS} : \mathrm{OP},$$

ou

$$\mathrm{ON} : a'\mathrm{K} \sin\theta :: \mathrm{OS} : a'\mathrm{KI}.$$

On a

$$\overline{\mathrm{OV}}^2 = \mathrm{OP} \times \mathrm{OS}, \quad \text{ou} \quad a'^2 = a'\mathrm{K}.\mathrm{OS};$$

de là

$$\mathrm{SO} = \frac{a'}{\mathrm{K}},$$

et, par suite,

$$\mathrm{ON} = \frac{a' \sin\theta}{\mathrm{K}}.$$

Donc

$$\mathrm{OH} \times \mathrm{ON} = a'b' \sin\theta = ab. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. *On démontre facilement que le triangle formé en joignant le pôle aux points d'intersection de la polaire est constant lorsque le pôle se meut sur une courbe semblable et concentrique à la première.*

Théorème III. *Le triangle formé en joignant les* *points de contact au centre est aussi constant. On obtient donc un quadrilatère de surface constante qui se décompose en joignant le centre au pôle en deux triangles équivalents et de surface constante.*

QUESTION D'EXAMEN SUR LES ASYMPTOTES

(Voir t. VIII, p. 102).

THÉORÈME. *Une courbe algébrique qui a un diamètre et une asymptote a encore une seconde asymptote.*

Démonstration. Prenons le diamètre pour axe des x et une droite non parallèle à l'asymptote donnée pour axe des y; l'équation de la courbe ne renfermera que des puissances paires de y. Soit m le degré de cette équation et P_m la somme des termes de ce degré; cette somme contient nécessairement des termes en y, puisqu'il existe au moins une asymptote non parallèle à l'axe des y. Faisant $\frac{y}{x} = z$, on obtient $P_m = x^m f(z)$; posant $f(z) = 0$, on obtient les directions des asymptotes. Or l'équation en z est de degré pair et a une racine réelle, par conséquent elle a une seconde racine réelle. Donc, etc. Cette seconde asymptote est sujette à la discussion connue.

SECONDE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME SUR LES ASYMPTOTES

(Voir t. VI, p. 217. Serret).

1°. Lorsqu'une ligne s'arrête en un point, sans *continuer* et sans *rebrousser*, ce point est appelé *point d'arrêt*. Ainsi dans $y = e^{\frac{1}{x}}$, $y = xlx$, l'origine est un *point* *d'arrêt*. On ne peut rencontrer ces points que dans les lignes transcendantes (*). Dans les courbes algébriques, chaque point d'une branche divise cette branche en deux parties, et la tangente en ce point est à la fois tangente à chacune de ces parties. Cela a même lieu lorsque le point de contact est à l'infini : c'est l'objet du théorème suivant.

2°. THÉORÈME. *Une asymptote est toujours tangente à deux parties de la courbe.*

Démonstration. Cherchons la polaire réciproque de la courbe par rapport à une conique à centre tracée dans son plan. Le pôle P de l'asymptote est sur le diamètre conjugué à cette asymptote, et ce diamètre est la polaire du point de contact situé à l'infini. Donc ce diamètre touche la polaire réciproque au point P; mais la polaire réciproque étant *algébrique*, le point P n'est pas un point d'arrêt; donc le diamètre touche deux parties de la polaire réciproque : par conséquent l'asymptote touche aussi *deux parties* correspondantes de la courbe.

(*) On lit dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. l'abbé Moigno que la ligne dont l'équation est $y = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ offre deux points d'arrêts situés sur l'axe des y de part et d'autre de l'origine et à l'unité de distance (Tome I, page 209); on suppose que $\sqrt{x^2}$ n'a qu'une seule valeur.

SUR LE THÉORÈME DES POLAIRES A DEUX CERCLES.

P est un point quelconque pris dans le plan de deux cercles donnés; P′ est le point d'intersection des deux polaires de P relativement aux deux cercles; P et P′ sont dits points réciproques : prouver que l'axe radical passe par le milieu de la droite PP′

(Voir p. 152);

PAR M. GENTIL,

Chef d'institution, ancien élève de l'École Polytechnique.

A l'aide du principe suivant, démontré par M. Poncelet, n° 78, du *Traité des propriétés projectives des figures*, ce théorème devient évident.

« Tous les milieux des cordes de contact qui correspondent à un même point quelconque du plan d'une suite de cercles, ayant une sécante commune (réelle ou idéale), sont distribués sur une nouvelle circonférence, coupant orthogonalement toutes les premières » (et j'ajoute : *passant par ce point*).

Dans le théorème, PP′ est un diamètre d'un cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés, qui a, par conséquent, son centre sur l'axe radical. Donc, etc.

Je crois qu'il est utile de propager des principes comme ceux de M. Poncelet.

Remarque. Si, au lieu de deux cercles, on considère une suite de cercles ayant une corde commune, le point P a toujours la même réciproque P′ par rapport à deux quelconques de ces cercles.

Note. 1°. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$; tous les coefficients sont constants, excepté B; toutes ces coniques passent par les mêmes quatre points. Soient x', y' les coordonnées d'un point pris dans le plan des coniques, et x, y les coordonnées d'un point polairement conjugué, on a

$$(1)\quad x=\frac{Lx'-kF'}{L-mF'},\quad y=\frac{Ly'-k'F'}{L-mF'}$$ (*voir* t. II, p. 305),

où

$$F'=Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F.$$

Pour avoir le lieu du point (x, y), il faut éliminer B entre les deux équations (1). B monte au troisième degré dans le terme mF'; mais en éliminant F', on obtient l'équation

$$(2)\quad m(yx'-xy')+k'(x-x')+k(y'-y)=0,$$

où B ne monte qu'au second degré. On en déduit

$$B^2=\frac{B\varphi_1+\varphi_2}{\varphi_3};$$

φ_1, φ_2, φ_3 sont des fonctions linéaires en x et y; et

$$B^3=\frac{B\psi_1+\psi_2}{\psi_1^2}:$$

ψ_1, ψ_2 sont des fonctions du second ordre en x et y. Substituant B^3 et B^2 dans les équations (1), on obtient

$$BP_1+P_2=0;\qquad BQ_1+Q_2=0;$$

P_1, P_2, Q_1, Q_2 étant des fonctions en x, y du troisième degré. Éliminant B, on a une équation du sixième degré en x et y, et qui représente le lieu cherché.

2°. Soit $y^2+x^2+Dy+Ex=0$ l'équation d'un cercle; D est constant et E est variable; tous ces cercles ont deux points en commun. Un calcul facile montre que le lieu est un cercle.

3°. *Parabole.* $(y+Cx)^2+ry+sC^2x=0$; r et s sont constants et C est variable; toutes ces paraboles ont trois points en commun. L'équation (2) donne $C = -\frac{y - y'}{x - x'}$; substituant dans l'une quelconque des équations (1), on parvient à une ligne du troisième ordre.

QUESTION SUR LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. J.-H. VINCENT,
Professeur au lycée Monge.

Soit $\frac{m}{n}$ une fraction irréductible; les deux termes de la fraction $\frac{km}{kn}$ auront k pour commun diviseur le plus grand, c'est-à-dire que l'opération du plus grand commun diviseur donnera, dans une des divisions successives, k pour diviseur et *zéro* pour reste. D'où il résulte que, si l'on représente par α un nombre très-petit par rapport à k, la fraction $\frac{m}{n}$ sera l'une des réduites de la fraction $\frac{km + \alpha}{kn}$.

Ne s'ensuit-il pas que la division partielle qui donnera cette réduite donnera en même temps α pour reste, puisqu'en faisant $\alpha = 0$, on reproduirait la réduite?

Réponse : NON.

En effet, supposons la réduite $\frac{m}{n}$ précédée de ces deux autres $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, on aura

$$m = m'q + m'', \quad n = n'q + n'';$$

d'où

$$\frac{m}{n} = \frac{m'q + m''}{n'q + n''}.$$

Pour reproduire $\frac{km+\alpha}{kn}$, il suffit de tenir compte du reste correspondant à q; soient r ce reste et d le diviseur: on aura

$$\frac{km+\alpha}{kn}=\frac{m'\left(q+\frac{r}{d}\right)+m''}{n'\left(q+\frac{r}{d}\right)+n''}=\frac{m+\frac{m'r}{d}}{n+\frac{n'r}{d}},$$

ou plutôt

$$\frac{km+\alpha}{kn}=\frac{md+m'r}{nd+n'r}=\frac{m\left(d+\frac{n'r}{n}\right)+\left(m'-\frac{mn'}{n}\right)r}{\left(d+\frac{n'r}{n}\right)};$$

ce qui fait voir, d'abord, que

$$k=d+\frac{n'r}{n}.$$

Ensuite, quant à la quantité

$$m'-\frac{mn'}{n},$$

elle se transforme en

$$\frac{nm'-mn'}{n}=\pm\frac{1}{n};$$

donc

$$\frac{km+\alpha}{kn}=\frac{km\pm\frac{r}{n}}{kn};$$

donc

$$\pm\alpha=\frac{r}{n},$$

d'où

$$r=\pm n\alpha.$$

Soit pour exemple,

$$m=8,\quad n=5,\quad k=600,\quad \alpha=3;$$

d'où

$$\frac{km+\alpha}{kn} = \frac{5283}{3300} = \frac{8.660+3}{5.660},$$

On trouve, en opérant,

	1	1	1	1	$1+\frac{15}{651}$
5285 1983	3300 1317	1983 666	1317 651	666 15	651
	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$

d'où

$$d = 651, \quad r = 15, \quad m' = 5, \quad n' = 3.$$

Vérification :

$$\frac{5\left(1+\frac{15}{651}\right)+3}{3\left(1+\frac{15}{651}\right)+2} = \frac{8.651+5.15}{5.651+3.15} = \frac{8\left(651+\frac{3.15}{5}\right)+\frac{15}{5}}{5\left(651+\frac{3.15}{5}\right)}$$

$$= \frac{8(651+9)+3}{5(651+9)} = \frac{8.660+3}{5.660}.$$

Note. Le célèbre Sauveur (J) [*] est le premier qui ait donné une base scientifique à l'acoustique musicale; et ce qu'il y a de fort singulier, c'est que ce physicien avait la voix fausse et l'oreille fausse. On dit même qu'il était sourd. Aussi s'est-il appliqué à transporter l'appréciation des sons, de l'oreille à l'œil, en permettant de compter à vue le nombre absolu de vibrations des corps sonores. Sa découverte fondamentale peut s'énoncer ainsi : Deux corps sonores faisant entendre simultanément deux sons cor-

[*] Né en 1653, à la Flèche, mort en 1716.

respondants à des nombres entiers u et u' de vibrations dans le même temps t; k étant le plus grand commun diviseur de u et u', il se produit un troisième son correspondant à un nombre k de vibrations pendant le même temps t. C'est à tort qu'on attribue cette expérience à Tartini, qui n'a fait que la reproduire, peut-être sans la connaître. Il s'ensuit que, connaissant ce nombre k et le rapport relatif $m : n$ des deux sons, les nombres absolus des vibrations des deux corps pendant le temps t sont km et kn. Cette méthode d'évaluer les nombres absolus de vibrations, due à Sauveur, a été perfectionnée, il y a une quinzaine d'années, par un nommé Scheibel, manufacturier de soieries à Crevelt, en Prusse. M. le professeur Vincent, connu du public géomètre et dans le monde savant par d'importants travaux sur la musique grecque, s'est proposé d'éclaircir par des considérations théoriques la méthode de Scheibel, et il a été amené à résoudre quelques questions sur les fractions continues : celle que l'on vient de lire, et encore une autre, proposée dans les *Nouvelles Annales,* et résolue par M. Vachette (t. VII, p. 13). Pour mieux se préparer à comprendre le Mémoire de l'érudit professeur, on fera bien de lire dans la *Biographie Universelle* les articles SAUVEUR et TARTINI, tous les deux dus à Prony.

THÉORÈME DE COLLINÉATION SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE;

PAR M. FÉLIX LAROCHE.

4. THÉORÈME. (*Fig.* 14, *Pl. II.*) *Soient* A, A_1, A_2 *les sommets d'un triangle et* O *un point dans le plan du triangle; en* O, *on élève à* OA *une perpendiculaire qui va*

rencontrer le côté opposé A_1A_2 *en* B; *on détermine d'une manière analogue* B_1 *sur* AA_2 *et* B_2 *sur* AA_1; *les trois points* B, B_1, B_2 *sont en ligne droite.*

Démonstration. Désignons par ρ, ρ_1, ρ_2 les lignes OA, OA_1, OA_2;

Par δ, δ_1, δ_2 les lignes OB, OB_1, OB_2;

Par p, p_1, p_2 les perpendiculaires abaissées de O sur les côtés opposés aux sommets A, A_1, A_2.

Dans les deux triangles AOB_2, BOA_2, les angles AOB_2, BOA_2 sont supplémentaires comme ayant les côtés perpendiculaires; ce qui donne

$$\frac{AB_2 . p_2}{BA_2 . p} = \frac{\rho\,\delta_2}{\rho_2\,\delta}.$$

On trouve de même,

$$\frac{A_1B . p}{B_1A . p} = \frac{\rho_1\,\delta}{\rho\,\delta_1},$$

$$\frac{A_2B_1 . p_1}{B_2A_1 . p_2} = \frac{\rho_2\,\delta_1}{\rho_1\,\delta_2};$$

d'où

$$AB_2 . A_1B . A_2B_1 = BA_2 . B_1A . B_2A_1;$$

donc, par le théorème sur les segments, les trois points B, B_1, B_2 sont en ligne droite.

Note. Dans le plan du triangle AA_1A_2, traçons une ellipse; par le point O, menons une droite conjuguée de OA_1 relativement à la conique, et qui rencontre en B le côté A_1A_2. Déterminons de même les points B_1, B_2 sur les côtés AA_2, AA_1 : d'après la méthode des projections symétriques, les trois points B, B_1, B_2 seront en ligne droite.

Le théorème de collinéation existe-il pour une conique quelconque? Existe-t-il sur la sphère?

SOLUTION DE LA QUESTION 103, SUR LES PARABOLES HOMOFOCALES;

PAR M. FÉLIX LAROCHE,
Élève du lycée de Versailles.

1. *Lemme*. On a trois tangentes à la parabole et qui se coupent deux à deux. Si l'on circonscrit un cercle au triangle ainsi formé, il passera par le foyer.

Réciproquement, si quatre points sont sur une circonférence, on pourra considérer trois d'entre eux comme les sommets d'un triangle formé par trois tangentes à une parabole; parabole dont le foyer sera le quatrième point.

2. *Lemme*. Quand un triangle est inscrit dans une circonférence, si d'un point de la circonférence on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les trois pieds de ces perpendiculaires seront en ligne droite.

Réciproquement, si l'on a trois points en ligne droite et un point extérieur, on pourra les considérer comme les pieds de trois perpendiculaires abaissées du point extérieur sur les trois côtés d'un triangle inscrit dans un cercle qui passe par le point extérieur.

Donc ce point extérieur pourra être considéré comme le foyer d'une parabole à laquelle seraient tangentes les trois côtés de ce triangle.

3. THÉORÈME. *On a trois paraboles homofocales dont chacune est tangente à deux côtés d'un triangle; on mène à chacune d'elles une tangente perpendiculaire au côté qu'elle ne touche pas; faire voir que les trois lignes ainsi obtenues sont tangentes à une quatrième parabole homofocale aux trois autres.* (Strebor.)

Démonstration. Soient ABC (*fig.* 13, *Pl. II*), un triangle, O le foyer commun aux paraboles. Une des paraboles sera tangente aux côtés c et b; nous connaissons les pieds P'' et P' des perpendiculaires abaissées du foyer sur ces deux tangentes, et, par conséquent, la droite $P''P'$, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes.

Concevons la tangente perpendiculaire à a; si du point O on abaisse une perpendiculaire sur cette tangente, elle sera parallèle à a. Donc le pied de cette perpendiculaire se trouvera en m' à la rencontre de $P''P'$ avec une parallèle à a menée par le point O.

En raisonnant de la même manière pour les autres côtés, nous obtiendrons les points analogues m et m'', et le problème revient à démontrer que les trois points m, m', m'' sont en ligne droite (*voir* p. 295).

THÉORÈME DE MŒBIUS. SUR LA CONIQUE DÉTERMINÉE PAR CINQ POINTS SUR UN PLAN

(Voir t. VII, p. 106 et 177);

PAR M. LEMOINE,
Professeur à Nantes.

Quelque simple que soit la solution donnée par M. Jules Lescurre (t. VII, p. 177), la suivante, je crois, l'est encore plus.

Soient $F = 0$, $F_1 = 0$ les équations des deux paraboles. L'équation générale de toutes les coniques qui passent par les mêmes points sera

$$F + \lambda F_1 = 0.$$

Dans le polynôme F comme dans le polynôme F_1 les termes du second degré, les axes étant d'ailleurs quelconques, doivent former un carré parfait, on aura $F > 0$ pour tout point extérieur à la première parabole, et $F < 0$ pour tout point intérieur. Il en sera de même à l'égard de la seconde. Désignons par α et β les coordonnées du cinquième point, le coefficient λ sera déterminé par la condition

$$F(\alpha, \beta) + \lambda F_1(\alpha, \beta) = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{F(\alpha, \beta)}{F_1(\alpha, \beta)}.$$

En sorte que λ sera négatif si le cinquième point est à la fois intérieur ou extérieur aux deux paraboles, et il sera positif dans le cas contraire. Or

$$F = (ay + bx)^2 + cy + dx + f = 0,$$
$$F_1 = (a'y + b'x)^2 + c'y + d'x + f' = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned} F + \lambda F_1 &= (ay + bx)^2 + \lambda(a'y + b'x)^2 \\ &\quad + (c + \lambda c')y + (d + \lambda d')x + f + \lambda f' \\ &= (a^2 + a'^2\lambda)y^2 + 2(ab + a'b'\lambda)xy + (b^2 + b'^2\lambda)x^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(B^2 - 4AC) &= (ab + a'b'\lambda)^2 - (a^2 + a'^2\lambda)(b^2 + b'^2\lambda) \\ &= -(a^2b'^2 + a'^2b^2 - 2abc'b')\lambda = -(ab' - ba')^2 \cdot \lambda. \end{aligned}$$

La conique sera donc une hyperbole si λ est négatif, et une ellipse si λ est positif. Le théorème est démontré.

QUESTIONS D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ECOLE POLYTECHNIQUE EN 1848

(Voir p. 220).

---

51. On donne un cercle et une corde AB dans ce cercle, du centre C on mène un rayon CD qui coupe la corde ou son prolongement en F. Trouver le lieu des points M milieux des segments FD; donner à priori la tangente en A et en B (*voir* t. VI, p. 202).

52. Étant données quatre droites dans l'espace, déterminer le plan sur lequel leurs projections formeraient un parallélogramme.

53. Lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles rectangles formés en menant d'un point donné M des sécantes à un angle droit YOX (évidemment une conique).

54. De tous les segments appartenant à une même sphère et ayant même hauteur, quel est le maximum? (*Voir* t. I, Cirodde, et t. V, p. 537.)

55. De toutes les zones de même surface et à une seule base, quelle est celle qui donne le plus grand segment sphérique.

56. Le côté du décagone régulier est égal à la hauteur du cône ayant son sommet au centre de la sphère, et équivalent au segment sphérique de même base.

57. Trouver la surface du triangle, en la considérant comme limite de rectangles dont la hauteur serait le $\frac{1}{n}$ de celle du triangle; trouver le volume de la pyramide, du cône et de la sphère, en les considérant comme limites de cylindres dont la hauteur est le $\frac{1}{n}$ de celle de la pyramide ou de celle du cône, ou du rayon (*voir* t. V, p. 348).

58. Par le foyer d'une ellipse on mène trois rayons vecteurs formant deux à deux un angle de 120 degrés; démontrer que $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} =$ constante (*voir* t. VI, p. 162).

59. Trois mobiles partent des points A, B, C avec des vitesses r, r', r''; à quel moment un des trois sera-t-il à égale distance des deux autres? (*Voir* t. VI, p. 401.)

60. Démontrer que

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

(Si c'est vrai pour n, c'est vrai aussi pour $n+1$.)

61. On donne, par leurs projections, une droite et un point sur cette droite; on propose de déterminer une deuxième droite telle, que la première, tournant autour de la seconde, puisse devenir parallèle à la ligne de terre.

62. Si deux arcs tendent vers zéro, la limite de leur rapport est celui de leurs cordes.

63. Rayon de la sphère sur laquelle un triangle sphérique dont les angles sont $A = 60°$, $B = 120°$, $C = 48°$ a 3 mètres carrés de surface.

64. Déterminer, s'il y a lieu, une hyperbole équilatère dont on donne une tangente et une asymptote. (Équation, $\beta\alpha y + \beta^2 \cos^2\gamma x^2 + 4\beta\lambda \cos\gamma x + \lambda^2 = 0$; axes, asymptote et tangente.)

65. Équation de la courbe qui coupe en moyenne et extrême raison toutes les cordes parallèles d'une parabole donnée (*voir* t. VI, p. 28).

66. $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$; $x^{2n} - 2x^n \cos(n\alpha) + 1 = 0$; toute solution de la première équation est-elle solution de la seconde? (*Voir* t. II, p. 5, et t. IV, p. 57.)

67. En chaque point d'un petit cercle d'une sphère on lui mène un grand cercle tangent, à partir du point de

contact M, on prend sur ce grand cercle un arc $MP = 90^{o}$; trouver le lieu du point P (*voir* t. VII, p. 152).

68. Deux grandeurs qui n'ont pas de commune mesure peuvent-elles avoir un commun multiple?

69. D'un point d'une circonférence, avec un rayon égal au côté du carré inscrit, on décrit une circonférence; évaluer la surface comprise entre les deux circonférences.

70. Un solide renfermé entre deux parallélogrammes est-il un parallélipipède?

71. Étant donné un point dans l'espace, déterminer un plan tel, que la somme algébrique des distances des points à ce plan soit minimum. (Plan passant par le centre de gravité.)

72. Lieu des intersections des trois hauteurs dans les triangles ayant même base et même angle au sommet. (Evidemment un cercle.)

73. Si par le foyer F d'une ellipse on mène deux cordes AFB, A'F'B' à angle droit, on a

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} = \text{constante}.$$

74. Trouver x, sachant que $\sin 5x = \sin x$ [*voir* t. V, p. 222, 36 (*bis*)].

75. Quel est l'arc à partir duquel l'accroissement du sinus est plus grand que le décroissement du cosinus $\left(\text{à partir de } \frac{\pi}{4}\right)$?

76. Combien y a-t-il de nombres divisibles par B parmi les nombres A, 2A, 3A,... (B — 1) A, BA, les nombres A et B étant quelconques? (*Voir* t. III, p. 343.)

77.

$$\text{arc} \cos x - \text{arc} \cos y = k' \left[\cos k' = xy + \sqrt{1 - x^2 (1 - y^2)} \right].$$

78. Volume du parallélipipède oblique dont on a les trois arêtes et leurs angles deux à deux (*voir* t. I, p. 392).

79. $p = \omega$. Que signifie cette équation? Coefficient angulaire de la tangente; construction géométrique de la tangente en un point donné (ω' étant $< 2\pi$, faites $\omega = \omega' \pm 2k\pi$; k entier positif; et *voir* Rispal, t. II, p. 511).

80. Étant donné un tronc quadrangulaire, comment constater que c'est un tronc de pyramide? suffit-il que les bases soient parallèles et semblables?

81. Condition de relation entre les côtés d'un triangle pour qu'un angle soit triple d'un autre (Viète).

82. L'hyperbole est-elle la seule courbe telle, que les segments de toute sécante compris entre la courbe et les asymptotes soient égaux? (Oui, car alors les milieux des cordes parallèles sont sur une même droite.)

83. Le toit d'un édifice a $69^{m},10$ de long sur $27^{m},76$ de large; on veut le soutenir par des colonnes équidistantes et dont la distance est comprise entre 4 et 5 mètres, comment les placer? (*Voir* p. 246.)

84. Reste de la division de $f(x)$ par $x^n \pm a^n$. (Remplacez dans $f(x)$, x^n par $\mp a^n$, le résultat est le reste cherché.)

85. Quelle racine prendre pour solution du problème de la détermination de la profondeur d'un puits, connaissant le temps écoulé entre le moment où on laisse tomber une pierre et celui où l'on entend l'eau choquée? (*Voir* Cournot, *Correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie*, p. 87, 1847.)

86. Quadrilatère inscrit, connaissant deux sommets opposés, l'angle de l'un de ces deux sommets et la direction de la droite qui joint les deux autres (*voir* t. VIII, p. 98).

87 Quelle est la valeur de $\dfrac{\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[m]{f(a)}}{\sqrt[n]{\varphi(x)} - \sqrt[n]{\varphi(a)}}$ pour $x = a$?

(*Voir* t. VII, p. 425.)

88. Trouver le $n^{ième}$ terme du développement de $\dfrac{1}{1 - x - x^2}$ (par décomposition en fractions rationnelles).

89. Que devient la formule fondamentale de trigonométrie sphérique quand le rayon de la sphère devient infini (par réduction en séries)?

90. Démontrer que

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos(2n+1)\alpha = \frac{1}{2},$$

quand $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+3}$ (*voir* t. III, p. 518).

91. Quelle est l'enveloppe de la droite dont la somme des coordonnées à l'origine est constante? (*Voir* t. III, p. 182, et t. VII, p. 277.) Lorsque la relation entre ces coordonnées est du premier ou du second degré, l'enveloppe est une conique.

SUR LES POLYÈDRES ÉTOILÉS

(Voir p. 132),

D'APRÈS M. CAUCHY.

(Journal de l'École Polytechnique, XVI^e cahier, p. 68; 1813) [*].

1. « Est-il possible qu'il existe des polyèdres réguliers » dont le nombre des faces ne serait pas un de ceux-ci, » 4, 6, 8, 12, 20? Voilà une question qui mériterait » d'être approfondie, et qu'il ne paraît pas facile de » résoudre en toute rigueur. » (Poinsot, *Journal de l'École Polytechnique*, X^e cahier.)

L'objet de la première partie du Mémoire de M. Cauchy, la seule dont nous nous occuperons, est de répondre à cette question de M. Poinsot, et de prouver qu'il ne peut

[*] Lu à la première classe de l'Institut, en 1811.

exister que neuf polyèdres réguliers, savoir : les cinq anciens, les deux de Kepler et les deux de M. Poinsot.

2. M. Cauchy, au § 15 de son Mémoire, fait l'observation qu'on peut former tous les polygones d'espèces supérieures en prolongeant les côtés des polygones réguliers de première espèce. Ajoutons que cette observation a été faite pour la première fois par Kepler. Or, dit M. Cauchy, les polyèdres d'espèces supérieures dérivent d'une manière analogue des polyèdres réguliers de première espèce, et l'on peut former tous les nouveaux polyèdres réguliers en prolongeant les arêtes ou les faces des polyèdres réguliers déjà connus. Cette observation sert de base à la démonstration.

3. *Définition*. Un polyèdre régulier d'une espèce quelconque est celui qui est formé par des polygones égaux et réguliers, également inclinés l'un sur l'autre, assemblés en même nombre autour de chaque sommet.

4. « Soient deux polyèdres réguliers égaux; si l'on
» désigne par des nos 1, 2, 3, 4, etc., les faces corres-
» pondantes des deux polyèdres, on pourra faire coïn-
» cider le second polyèdre avec le premier, en plaçant
» l'une quelconque des faces du second sur une face dé-
» terminée du premier, par exemple sur la face no 1 du
» premier, et en commençant par faire coïncider dans
» ces deux faces deux quelconques de leurs arêtes. Réci-
» proquement, si deux polyèdres égaux satisfont à la con-
» dition précédente, on pourra en conclure avec sûreté
» qu'ils sont réguliers : car, puisqu'on pourra faire alors
» coïncider chacune des faces du second avec une face dé-
» terminée du premier, en commençant par faire coïn-
» cider deux arêtes quelconques de ces deux faces, il
» s'ensuivra que les différentes faces sont des polygones
» égaux et réguliers; et puisqu'en faisant coïncider deux
» faces quelconques, prises à volonté, on fait coïncider

» toutes les autres, on en conclura que les différents an-
» gles dièdres sont égaux, ou, ce qui revient au même,
» que les faces sont également inclinées l'une à l'autre,
» et assemblées en même nombre autour de chaque
» sommet. »

5. *Définition*. Un polygone *semi-régulier* est celui qui a $2n$ côtés tels, que les côtés de rang $1, 3, 5, \ldots 2n-1$ soient égaux; de même, les côtés de rang $2, 4 \ldots 2n$; et que les côtés $1, 2, 3 \ldots n$ soient respectivement parallèles aux côtés $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

6. Il y a n manières d'opérer la coïncidence de deux polygones réguliers de n côtés, et autant de manières pour opérer la coïncidence de deux polygones semi-réguliers de $2n$ côtés.

7. Tout ce qui précède est invoqué par M. Cauchy pour démontrer un fait déjà remarqué aussi, comme nous verrons, par Kepler. En se transportant par la pensée au centre d'un polyèdre régulier d'espèce supérieure, les plans qui comprennent les différentes faces du polyèdre présenteront à l'observateur la forme d'un polyèdre convexe de première espèce, qui lui sert comme de noyau, et ce polyèdre est *régulier*. « En effet, construisons un
» second polyèdre d'espèce supérieure égal au premier;
» vous construirez en même temps un second polyèdre
» de première espèce, égal à celui qui formait le *noyau*
» du polyèdre régulier donné; désignez maintenant par
» des n^{os} 1, 2, 3, etc., les différentes faces correspondantes
» des deux polyèdres d'espèce supérieure, et par les
» mêmes n^{os} 1, 2, 3, etc., les faces des polyèdres de pre-
» mière espèce qui sont renfermées dans les mêmes plans
» que celles affectées de ces numéros dans les polyèdres
» d'espèce supérieure. De quelque manière que vous
» fassiez coïncider les polyèdres d'espèce supérieure, les
» deux polyèdres de même espèce, compris sous les mêmes

» faces, coïncideront aussi.....» Par suite (4), les différentes faces des deux polyèdres *noyaux* sont toutes égales entre elles, également inclinées l'une sur l'autre, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet. Supposons que le nombre des côtés de chaque face soit égal à n dans les deux polyèdres d'espèce supérieure; il y a donc n manières d'opérer la coïncidence de deux faces de ces polyèdres, et, par conséquent, aussi n manières d'opérer la coïncidence des faces correspondantes des deux polyèdres de première espèce; ces faces sont donc ou des polygones réguliers de n côtés ou semi-réguliers de $2n$ côtés (6); mais n étant au moins égal à 3, $2n$ est au moins égal à 6. Mais il est impossible de former un polyèdre de première espèce dont toutes les faces auraient au moins six côtés; donc les faces du noyau sont des polygones réguliers, et ce noyau est un polyèdre régulier de première espèce.

8. « Ainsi, il est donc prouvé que dans un ordre quel-
» conque on ne peut construire de polyèdres réguliers
» d'espèce supérieure qu'autant qu'ils résultent du pro-
» longement des arêtes ou des faces des polyèdres réguliers
» de même ordre et de première espèce qui leur servent de
» noyau; et que, dans chaque ordre, les faces des polyèdres
» d'espèce supérieure doivent avoir le même nombre de
» côtés que celles des polyèdres de première espèce. »

Examinons donc, sous ce point de vue, les cinq polyèdres réguliers de première espèce.

9. *Tétraèdre.* Il n'existe qu'une espèce de triangle; on ne peut donc obtenir de nouvelles faces par le prolongement des arêtes. Chacune des faces est voisine des trois autres; on ne peut donc obtenir de nouvelles faces par le prolongement des faces. Il n'existe donc qu'une espèce de tétraèdre.

10. *Hexaèdre.* Il n'existe qu'une espèce de carré; de

plus, les faces qui ne sont pas voisines sont parallèles, par conséquent ne peuvent se rencontrer. Il n'existe donc qu'une espèce d'hexaèdre.

11. *Octaèdre.* Il n'existe qu'une espèce de triangle, chaque face prolongée rencontre trois autres qui ne sont ni voisines ni parallèles; on obtient ainsi huit triangles équilatéraux, mais qui ne forment pas un octaèdre régulier, mais un solide double formé par deux tétraèdres qui se traversent mutuellement. C'est ainsi que l'hexagone donne un triangle double (*voir* p. 136).

12. *Dodécaèdre.* 1°. En prolongeant les côtés de douze pentagones, on obtient un dodécaèdre régulier de seconde espèce (*voir* p. 134, § 13).

2°. Chaque face rencontre les cinq plans qui avoisinent la face parallèle opposée; les deux intersections forment deux pentagones réguliers de première et de deuxième espèce, et on obtient ainsi un dodécaèdre de troisième et de quatrème espèce (*voir* p. 134).

13. *Icosaèdre.* Comme il n'y a qu'une espèce de triangle, il n'y a pas lieu à des prolongements d'arêtes. Considérons donc la face F et la face F′ parallèles et opposées; les *dix-huit* triangles restants se distribuent ainsi :

(*a*) Trois triangles ayant une arête commune avec F;

(*b*) Trois triangles ayant une arête commune avec F′;

(*c*) Six triangles n'ayant qu'un angle commun avec F et se partageant en deux groupes (1, 3, 5), (2, 4, 6); dans chacun les triangles sont également inclinés l'un sur l'autre;

(*d*) Six triangles n'ayant qu'un sommet en commun avec F′, et se divisant de même en deux groupes (1, 3, 5), (2, 4, 6) formés respectivement de triangles également inclinés l'un sur l'autre.

Examinons les intersections de F avec ces systèmes de triangles. Le système (*a*) ne donne rien, le système (*b*) fournit un triangle, et chaque face donnant lieu à un triangle, on formera ainsi l'icosaèdre de septième espèce (*voir* p. 134, 1°); chaque groupe du système (c) fournit un triangle circonscrit au triangle F; mais huit faces seulement donnent des triangles différents; de sorte qu'on construit ainsi un octaèdre régulier de première espèce. En suivant le système (*d*), on ne peut passer que sur quatre faces, et l'on construit un tétraèdre régulier.

14. Il est donc démontré qu'il n'existe que quatre polyèdres réguliers d'espèce supérieure.

15. Problème. *Connaissant les angles que forment deux faces adjacentes dans le tétraèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre de première espèce, trouver l'angle compris entre deux faces quelconques d'un polyèdre régulier?*

Solution. Soient α, β, γ, ces trois angles.

1°. *Tétraèdre.* On a α pour deux faces quelconques.

2°. *Hexaèdre.* L'angle compris entre deux faces est nul ou droit.

3°. *Octaèdre.* 1° Deux faces adjacentes, l'angle compris est $\pi - \alpha$; 2° deux faces non adjacentes, α; 3° deux faces parallèles.

4°. *Dodécaèdre.* 1° Deux faces parallèles; 2° β, pour deux faces adjacentes; 3° $\pi - \beta$, pour deux faces non adjacentes.

5°. *Icosaèdre.* 1° Deux faces parallèles; 2° γ, pour deux faces adjacentes; 3° $\pi - \gamma$, une face et celles qui avoisinent la face opposée; 4° l'angle compris entre deux faces dont l'une n'est pas adjacente à l'autre, ni à la face opposée, sera représenté par α ou par $\pi - \alpha$.

Cette solution est fondée sur les constructions indiquées dans les paragraphes 9, 10, 11, 12, 13.

Nous allons transcrire *in extenso* la prop. XXVI, lib. II, des *Harmonices Mundi*.

XXVI. Propositio. *Addi possunt congruentiis per-*

fectissimis regularibus, duæ etiam aliæ congruentiæ, stellarum duodecim planarum pentagonicarum; et duæ semisolidæ, stellarum octangulæ et decangulæ.

Claudunt enim pentagonicæ solidas figuras aculeatas undique; quarum una fit duodecim angularum quinquelinearium, altera viginti angularum trilinearium: illa trinis angulis insistit, hæc quinis simul; illa pulchrius super angulum erigitur, hæc rectius sedet, incumbens in quinos. In his etsi forinsecus non apparet regulare planum, sed ejus loco triangulum æquicrurum pentagonicum; quina tamen hujusmodi semper in unum idemque planum competentia, occultum sub soliditate quinquangulum, veluti cor suum (*) circumstant; faciuntque cum eo dictam stellam pentagonicam, seu germanico idiomate, pedem-Truitæ, Theophrasto Paracelso signum sanitatis. Idea corporis quodammodo eadem est, quæ sui plani; nam ut in hoc, scilicet in stella quinquangula, binorum semper triangulorum latera in unam rectam competunt, quæ parte sui interiore fit basis uni exteriori triangulo, latus vero intimo quinquangulo; sic in solido, semper quinorum solidorum angulorum triangula singula æquicrura, competunt in unam planitiem, quorum quinque triangulorum seu stellæ intima medulla et cor, quinquangulum, fit basis in una superstantis anguli solidi; vel in altera, superstantium quinque solidorum. Est autem tanta cognatio harum figurarum, unius cum dodecaedro, alterius cum icosaedro, ut videantur hæ, præsertim dodecaedron, trunca quodammodo et mutila, si cum illis aculeatis comparentur.

Le reste est relatif à des solides demi-réguliers.

On voit que Kepler déduit un polyèdre étoilé de l'icosaèdre ordinaire, et un seul aussi du dodécaèdre, savoir : le dodé-

(*) C'est le noyau dont parle M. Cauchy.

caèdre étoilé de troisième espèce; en ayant égard aux pentagones étoilés, il aurait pu déduire encore deux autres dodécaèdres étoilés du dodécaèdre ordinaire. Peut-être qu'il n'a pas voulu le faire, afin de ne pas troubler ses relations imaginaires entre les corps géométriques et les corps célestes. Il lui fallait un certain nombre de corps réguliers et pas davantage. Quoi qu'il en soit, c'est à M. Poinsot que nous devons la connaissance de deux nouveaux dodécaèdres étoilés. On a lieu d'être surpris que le célèbre géomètre ne fasse aucune mention de Kepler, auteur de la doctrine des polyèdres étoilés. La surprise est d'autant plus fondée que M. Poinsot cite un passage des *Harmonices*; il est vrai que ce n'est que la citation d'une citation, car Lidonne, mentionné dans le Mémoire de M. Poinsot, rapporte le même passage. Sachant qu'un géomètre, ayant nom Kepler, avait traité un sujet semblable, comment n'a-t-on pas la *curiosité* de consulter l'ouvrage?

Pour faire diversion, nous terminerons ce long exposé par quelques observations philologiques, qui, nous en convenons, n'ont pas le moindre rapport avec le sujet. Les Psaumes commencent par *Aschré*; ce mot hébreu, qu'on rencontre rarement, est d'une signification douteuse. On convient généralement de traduire ce mot par *beatus*; la forme étant celle d'un substantif pluriel *construit*, *felicitates* serait plus exact. Toutefois, voici le sens des premiers versets : *heureux celui qui ne va pas aux conciliabules des mauvaises gens, qui n'assiste pas aux réunions des pervers, qui ne siége pas aux séances des gens de rien, ne respectant rien* (*); *il sera comme l'arbre planté sur le bord des eaux, dont le feuillage ne se flétrit pas*. En d'autres termes : celui qui ne fré-

(*) C'est le sens *développé* du mot *Letsime*.

quente pas de mauvaises sociétés ne se corrompra pas. Cette admonition, faite il y a quelques milliers d'années, est encore utile aujourd'hui, et peut avoir, comme parlent nos Welches, un intérêt d'actualité.

On trouve dans la même collection encore d'autres pensées de ce genre, où l'on félicite ceux qui font telles actions et pas telles autres. Jadis, par forme d'exercice, j'ai essayé d'écrire en hébreu un psaume à l'usage des géomètres. Voici le premier verset: *Beatus mathematicus qui procul libris nihil legit; omnia inveniet* (*).

THÉORIE DES PARALLÈLES;

PAR M. CAMILLO MINARELLI (**).

1. *Lemme.* La somme des trois angles d'un triangle ne peut jamais surpasser deux angles droits.

Démonstration. Legendre a donné une démonstration rigoureuse, aujourd'hui bien connue, dès la première édition de sa *Géométrie.*

Corollaire. La somme des quatre angles d'un quadrilatère ne peut dépasser quatre angles droits.

2. *Lemme.* Étant donné un trapèze ABCD, rectangle en A et B, si $AD > BC$, l'angle en D est aigu.

Démonstration. Prolongeons BC jusqu'en E, de manière que l'on ait $BC + CE = AD$, et menons DE; les deux angles ADE, DEB sont évidemment égaux, et, par conséquent, non obtus, d'après le corollaire précédent; donc, à plus forte raison, $ADC < ADE$ est aigu. C. Q. F. D.

(*) Pour les hebraïsants: *Aschre baal hamispar lo kore bsphorim; ha kol jimtsa.*

(**) Communiquée par M. Angelo Genocchi, de Turin.

3. *Lemme*. Une des trois hauteurs d'un triangle tombe dans l'intérieur du triangle.

Démonstration. Tout triangle a au moins deux angles aigus; par conséquent, la hauteur qui part du sommet du troisième angle tombe dans l'intérieur.

4. *Lemme*. La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

Démonstration. Soit ABC (*fig*. 18, *Pl. II*) un triangle donné, et BE la hauteur qui tombe dans l'intérieur. Prolongeons la base AC, et construisons une suite indéfinie de triangles CB_1C_1, $C_1B_2C_2$, $C_2B_3C_3$, etc., égaux au triangle ABC; de sorte que l'on ait $AC = CC_1$, $CB_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, et ainsi des autres. En A, élevons à AC une perpendiculaire $AD > BE$, et en D une perpendiculaire DK à AD; menant DB, l'angle ADB est aigu (lemme 2); de même, si l'on menait DB_1, DB_2, etc.; donc la droite DK ne peut entrer dans aucun des triangles ABC, CB_1C_1, $C_1B_2C_2$, etc. Joignons les sommets B, B_1, B_2, etc., par des droites BB_1, B_1B_2, etc. Prenons sur la droite DK des points quelconques D_1, D_2, D_3, etc. (*), menons D_1B, D_1B_1, D_2B_1, D_2B_2, etc. Cela posé, représentons par R l'angle droit, et supposons que la somme des trois angles du triangle ABC soit égale à $2R - \delta$; le pentagone ADD_1B_1C renferme cinq triangles ABD, DBD_1, BD_1B_1, BCB_1, ABC; la somme des quinze angles de ces triangles ne peut dépasser $10R - \delta$ (lemme 1). Les angles autour de B valent quatre droits; donc la somme des cinq angles du pentagone C ne peut dépasser $6R - \delta$.

Considérons maintenant le pentagone $ADD_2B_2C_1$; ajoutons aux angles du premier pentagone ceux du triangle CB_1C_1, et ensuite ceux des triangles $D_1B_1D_2$, $B_1D_2B_2$,

---

(*) On peut prendre pour D_1, D_2, etc., les pieds des perpendiculaires abaissées de B, B_1, etc., sur DK.

$B_1C_1B_2$, la somme totale sera moindre que $14R - 2\delta$; mais les angles en D_1, en B_1 et en C valent ensemble 8R, donc la somme des cinq angles du second pentagone est inférieure à $6R - 2\delta$. On démontrera de même que la somme des angles du troisième pentagone $ADD_3B_3C_2$ est moindre que $6R - 3\delta$; et pour le $n^{ième}$ pentagone, la somme des angles sera moindre que $6R - n\delta$. Or n croissant, $n\delta$ finira par surpasser 6R, et, par conséquent, on parviendrait à un pentagone dont la somme des angles serait négative; résultat absurde; donc δ est nul, et la somme des angles du triangle ABC est égale à deux droits. C. Q. F. D.

5. Théorème. *Deux droites parallèles étant coupées par une sécante, les angles alternes-internes sont égaux.*

Démonstration. Elle est fondée sur le lemme précédent. Consultez les premières éditions de la *Géométrie* de Legendre.

ANNONCE (*).

Traité d'Arithmétique, par M. *Joseph Bertrand*, maître de conférences à l'École Normale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Paris, 1849, in-8° de 254 pages.

Premier ouvrage d'un jeune géomètre, qui s'est fait remarquer, depuis longtemps, par de savants Mémoires dans les hautes régions de la science. Nous étudierons ce

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Traité, où l'on rencontre de curieux et difficiles exercices, dignes d'examen. L'arithmologie pénètre enfin dans les éléments. C'est un progrès.

GRAND CONCOURS DE 1849, 10 JUILLET

(Voir t. VII, p. 286, 317).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques supérieures (*).

Soient, dans un plan, une ellipse et une droite située hors de cette ellipse. On prend sur la droite deux points N et N′ conjugués par rapport à l'ellipse (c'est-à-dire deux points tels, que, si l'on mène par l'un d'eux des tangentes à l'ellipse, la corde des contacts passe par l'autre); cela posé :

1°. Prouver qu'il existe dans le plan de l'ellipse deux points O et O′ desquels on voit chaque segment NN′ sous un angle droit.

2°. On demande le lieu des points O et O′, quand la droite se meut parallèlement à elle-même.

Mathématiques élémentaires.

Étant donné un parallélogramme ABCD, on mène une droite LL′ perpendiculaire à ses deux côtés opposés AB, CD, laquelle rencontre le premier côté en a et le prolongement du second côté en a'; cette droite rencontre les deux autres côtés AD, BC en b et b', et les deux diagonales BD, AC en c et c'.

On demande de prouver que les circonférences des cercles décrits sur les trois segments aa', bb', cc' comme diamètres ont les mêmes points d'intersection.

(*) Naguère, *spéciales*.

On pourra examiner si le théorème aurait encore lieu dans le cas où la droite LL′ serait oblique aux deux côtés AB, CD, au lieu de leur être perpendiculaire.

Observation. Le *centre d'involution*, féconde découverte de M. Chasles, fournit de promptes réponses aux deux questions. Ce théorème et d'autres analogues sont maintenant enseignés dans toutes les écoles tant soit peu soignées, hors France. L'Université de France, seule dans le monde, repousse *officiellement* une doctrine et une terminologie, qui ont *triplé* la science et dont l'origine est entièrement française. Cette répulsion est une conséquence du célèbre principe de *continuité*. En effet, avant de tomber en enfance, nous tombons en jeunesse. Or, la nôtre remonte à l'an de grâce 1800; alors il n'était question, ni de *pôles*, ni de *polaires*, ni d'*harmoniques*, ni d'*anharmoniques*, etc., etc.; devenus chefs et ordonnateurs, nous ne pouvons pas permettre à la jeunesse actuelle de nous parler une langue étrangère. Cela me paraît juste, et à vous?

Quand on se rappelle que le même *corps* toujours remorqué, jamais remorqueur, a d'abord repoussé Descartes, puis Newton, puis le système infinitésimal, on est encore amené au principe de continuité.

Encore une Commission polychrome d'organisation. On dit que dans le genre Aphidien les femelles viennent au monde toutes fécondées. De même, chez nous, une Commission naît toujours grosse d'une autre; aussi ne voyons-nous que de fausses couches. Je m'assure que si Dieu avait confié la formation des mondes à une Commission, le chaos serait encore à débrouiller. L'immutabilité et l'ordre admirable qu'on rencontre partout sont la preuve la plus irréfragable de l'existence d'une intelligence unique, d'une volonté unique.

SOLUTION DU PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE proposé au concours général de 1849;

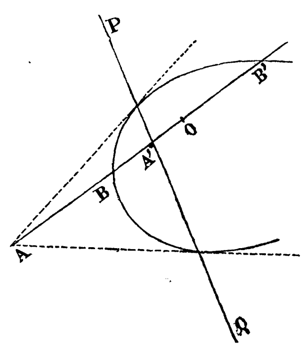
PAR M. JULES VIEILLE.

Énoncé. Étant données, dans un même plan, une ellipse et une droite, située en dehors de la courbe, on suppose qu'on prenne sur cette droite divers systèmes de deux points (a, a') conjugués relativement à l'ellipse, de manière que la polaire de l'un de ces points a passe par l'autre a', et l'on propose :

1° De démontrer qu'il existe dans le plan deux points fixes tels, que de chacun d'eux on voit chaque segment aa' sous un angle droit; 2° de déterminer le lieu géométrique de ces points, lorsque la droite donnée se meut parallèlement à elle-même.

Solution. Première partie. Le théorème en question étant vrai pour une section conique quelconque, nous ne supposerons pas qu'il s'agisse spécialement d'une ellipse; la démonstration repose sur une propriété des lignes du second ordre, que nous allons d'abord rappeler :

fig. 1.

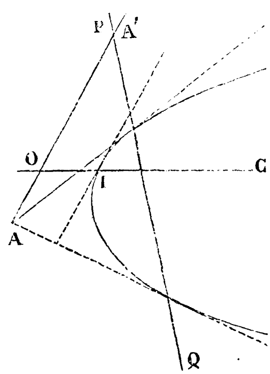


Lorsque d'un point A, pris à volonté dans le plan d'une conique, on mène une transversale quelconque ABB′, on sait que le point A′ où cette transversale rencontre la polaire PQ du point A, est le conjugué harmonique du point A par rapport aux extrémités B, B′ de la corde BB′; cette propriété s'exprime par la relation

$$(1) \qquad \overline{OB}^2 = OA.OA',$$

O étant le milieu de la corde. Remarquons que les segments OA, OA′ sont situés d'un même côté de l'origine commune O.

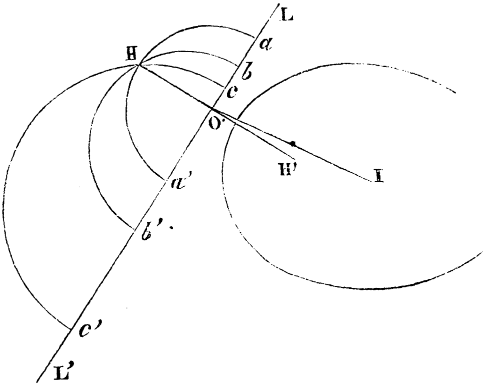
fig. 2.



Quand la transversale ne rencontre pas la courbe, les points B et B′ n'existent plus; mais l'analyse continue à donner, pour les coordonnées du point O, milieu de la corde imaginaire, des valeurs réelles, en sorte que ce point existe toujours, et il se trouve à l'intersection de la transversale AA′ avec le diamètre CI conjugué aux cordes parallèles à cette transversale. L'expression analytique de la demi-corde OB prend la forme $\rho\sqrt{-1}$; son carré $-\rho^2$ est réel et négatif, et les segments OA, OA′, situés maintenant de côtés différents du point O, sont de signes contraires, en sorte que l'équation (1) subsiste encore, en grandeurs et en signes.

Cela posé, considérons une droite fixe LL' qui ne rencontre pas la conique; et sur cette droite prenons trois couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), (c, c'), c'est-à-dire tels, que la polaire de l'un des points a passe par l'autre a'.

fig. 3.



Il résulte de ce qui précède, que si l'on mène le diamètre conjugué à la direction LL', lequel rencontre en O la droite LL', et qu'on désigne par $-\rho^2$ le carré de la demi-corde (imaginaire) formée par cette transversale, on aura (en ne considérant que les grandeurs absolues des segments)

$$(2) \qquad \rho^2 = \mathrm{O}a \,.\, \mathrm{O}a' = \mathrm{O}b \,.\, \mathrm{O}b' = \mathrm{O}c \,.\, \mathrm{O}c'$$

Donc, si l'on décrit des cercles sur chacun des segments aa', bb', cc' comme diamètres, ces trois cercles auront une corde commune HOH', dont la moitié OH sera précisément égale à ρ. Tous les cercles décrits sur les segments en nombre infini qu'on peut ainsi former sur LL' avec des systèmes de points conjugués, se croiseront en ces deux points fixes H, H'; et de chacun de ces points on verra chaque segment sous un angle droit. C. Q. F. D. (*).

Remarques. I. Les points H, H' existeront toujours, quand la droite LL' sera située en dehors de la conique, parce que les segments conjugués (Oa, Oa') sont alors comptés en sens contraire à partir du point O (l'expression analytique $-\rho^2$ de leur produit étant négative). Le point O est donc compris dans l'intérieur de chaque segment aa', bb', cc', ...; et, par conséquent, les cercles se coupent tous.

Au contraire, les points H, H' n'existeront plus, si la droite LL' est sécante; car Oa, Oa' sont alors d'un même côté du point O, lequel est en dehors de chaque segment; et, par suite, les cercles sont ou intérieurs les uns aux autres, ou extérieurs. Seulement, comme toutes les tangentes menées du point O à ces différents cercles seront égales en vertu des relations (2), ces cercles auront un axe radical commun passant par le point O, et cet axe peut encore être regardé comme une sécante commune.

II. Si la droite LL' était tangente à la conique, les deux points H, H' se confondraient avec le point de contact.

Si LL' est une directrice, l'un des points H, H' sera le foyer correspondant.

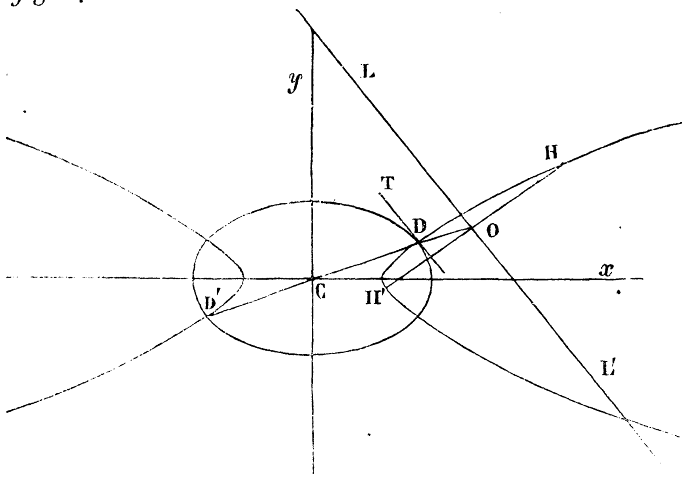
(*) Les six points (a, a'), (b, b'), (c, c'), sont dits en *involution*, et le point O est le *point central* de l'involution. Les points de rencontre de la transversale LL' avec la courbe sont tels, que chacun d'eux est lui-même son conjugué : c'est pourquoi ces deux points (qui sont imaginaires dans le cas actuel) s'appellent *points doubles* de l'involution. Ils sont équidistants du point central.

III. En général, pour construire ces deux points, il suffira de décrire un seul cercle sur un segment formé par deux points conjugués pris sur LL′, puis de tracer le diamètre IO, conjugué à la direction de LL′; enfin, de mener du point O une perpendiculaire à LL′ jusqu'à la rencontre du cercle

IV. Dans un plan perpendiculaire au plan de la figure imaginons une circonférence de cercle décrite du point O comme centre, avec OH pour rayon; il est clair que de tout point S pris sur cette circonférence, on verra sous un angle droit chacun des segments aa', bb', ... Regardons ce point S comme le sommet d'un cône ayant pour base la conique proposée. Nous nous bornerons à énoncer le théorème suivant, extrait des Leçons de M. *Chasles*, et qu'il est aisé de démontrer par la perspective : *Tout plan parallèle au plan conduit par le point* S *et la droite* LL′, *coupera ce cône suivant un cercle dont le centre sera sur la droite menée du point* S *au pôle de la droite* LL′.

Seconde partie. Supposons maintenant que la transversale LL′ se meuve parallèlement à elle-même, et cherchons le lieu géométrique des points H, H′. D'après ce qui précède, on serait conduit à prendre pour axes coordonnés deux diamètres conjugués de la conique, dont l'un parallèle à la transversale. On arriverait ainsi, par un calcul assez simple, à l'équation du lieu; mais, pour en reconnaître les propriétés, il est préférable d'employer des coordonnées rectangulaires.

fig 4.



Considérons d'abord le *cas de l'ellipse*, et prenons pour axes coordonnés les axes de la courbe

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Équation de l'ellipse. . .} & a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \\ \text{Équation de la droite LL'} & y = mx + n. \end{cases}$$

Soient X, Y les coordonnées du point H; x_1, y_1 celles du point O; $\rho\sqrt{-1}$ la demi-corde (imaginaire) fournie par LL′, ρ est, comme on l'a vu, égal à OH. On a donc

$$(2)\quad \begin{cases} X = x_1 + \dfrac{\rho m}{\sqrt{1+m^2}}, \\[2ex] Y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(X - x_1). \end{cases}$$

Il est aisé d'obtenir x_1, y_1 et ρ en fonction de l'indéterminée n et des constantes données; puis l'élimination de n entre les équations (2) fournira l'équation du lieu.

Si l'on désigne par x' et x'' les abscisses des points d'intersection de LL′ avec l'ellipse, l'expression du carré de la demi-corde imaginaire sera

$$-\rho^2 = \frac{(x' - x'')^2(1+m^2)}{4};$$

or les équations (1) donnent, par l'élimination de y,

$$x' - x'' = \frac{2ab\sqrt{n^2 - h^2}}{h^2}\sqrt{-1},$$

en posant, pour abréger,

$$h^2 = a^2 m^2 + b^2;$$

h est l'ordonnée à l'origine d'une tangente menée à l'ellipse parallèlement à LL'; elle est supposée plus petite que n. On aura donc

$$\rho = \frac{ab\sqrt{1+m^2}}{h^2}\sqrt{n^2 - h^2}.$$

Quant aux coordonnées x_1, y_1 du milieu O de la corde, on a

$$x_1 = -\frac{a^2 mn}{h^2}, \quad y_1 = -\frac{b^2}{a^2 m} x_1 = \frac{nb^2}{h^2}.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (2), donnent

$$(3) \quad \mathrm{X} = \frac{am(b\sqrt{n^2 - h^2} - an)}{h^2}, \quad \mathrm{Y} = -\frac{1}{m}\mathrm{X} - \frac{nc^2}{h^2}, \quad a^2 - b^2 = c^2.$$

Bien que nous n'ayons considéré que le point H, les équations (3) conviennent aussi au point H', en prenant le radical $\sqrt{n^2 - h^2}$ avec le signe —. De la seconde de ces équations, on tire n, qu'on substitue dans l'autre, et il vient, après transposition et élévation au carré, l'équation

$$(4) \qquad a^2 m^2 y^2 - b^2 x^2 = -\frac{a^2 b^2 c^2 m^2}{h^2}.$$

Elle représente une *hyperbole rapportée à son centre et à ses axes*. L'axe transverse est celui des x; soient a' et b' les longueurs des demi-axes, on a

$$a' = \frac{mac}{h}, \quad b' = \frac{bc}{h}, \quad \text{d'où} \quad a'^2 + b'^2 = c^2;$$

donc *l'hyperbole et l'ellipse sont homofocales,* et, par suite, *elles se coupent orthogonalement.*

Les quatre points d'intersection, symétriques deux à deux par rapport aux axes, ont pour coordonnées

$$x = \pm \frac{a^2 m}{h}, \quad y = \pm \frac{b^2}{h};$$

deux d'entre eux coïncident avec les extrémités D, D′ du diamètre CO : ce qui devait être, d'après les considérations exposées plus haut. On se rend d'ailleurs aisément compte de la section orthogonale des deux courbes, en remarquant que lorsque la transversale LL′ prend la position de la tangente DT à l'ellipse, les points H et H′ se confondent avec le point de contact D, et, par suite, la sécante HH′ devient tangente à l'hyperbole ; mais cette sécante n'a pas cessé d'être perpendiculaire à LL′, quelque voisins que H et H′ soient du point D ; donc la tangente à l'hyperbole, menée par le point D, doit couper à angle droit la tangente à l'ellipse.

Les équations des asymptotes sont

$$y = \pm \frac{b}{am} x.$$

Ces droites demeurent donc les mêmes pour toutes les ellipses semblables et concentriques à l'ellipse proposée.

L'équation (4) ne contient le paramètre m qu'au carré : le lieu géométrique resterait donc le même, si, au lieu des transversales parallèles à LL′, on considérait un système de transversales, pour lesquelles m serait changé en $-m$, c'est-à-dire inclinées symétriquement sur l'axe des x.

Cette remarque explique le résultat que donne l'équation (4) dans le cas particulier du cercle. Soit $a = b$; l'hyperbole dégénère en deux droites dont les équations sont

$$y = \pm \frac{1}{m} x.$$

Cependant il est évident qu'alors le diamètre CO devient perpendiculaire à LL', et, par conséquent, les points H, H' sont tous situés sur *cette droite unique*, dont l'équation est

$$y = -\frac{1}{m}x.$$

Quant à l'autre droite $y = \frac{1}{m}x$, elle répond au cas où l'on considérerait la direction symétrique de LL' par rapport à l'axe des x.

Si dans l'équation (4) on change b^2 en $-b^2$, on aura

$$(5) \qquad a^2m^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2c^2m^2}{h^2} \qquad h^2 = a^2m^2 - b^2;$$

équation qui résout le problème proposé, dans le *cas où la conique donnée* est *une hyperbole; le lieu des points* H, H' est donc alors *une ellipse homofocale.*

Enfin, *si la conique donnée* est *une parabole,* on peut, sans recommencer les calculs, déduire encore la solution de l'équation (4). A cet effet, on transportera d'abord l'origine du centre C de l'ellipse au sommet A, et l'équation (4) deviendra

$$a^2m^2y^2 - b^2x^2 + 2b^2ax = \frac{a^2b^4(1+m^2)}{a^2m^2+b^2};$$

puis, si l'on pose

$$a - \sqrt{a^2-b^2} = \frac{p}{2},$$

p étant une constante, on en tire

$$b^2 = ap - \frac{p^2}{4}.$$

Substituant cette valeur de b^2 dans l'équation ci-dessus, puis divisant par a^2, et faisant croître a indéfiniment, on trouve à la limite, pour l'équation du lieu,

$$y^2 + \frac{2p}{m^2}x = \frac{p^2(m^2+1)}{m^4};$$

elle représente *une parabole ayant même axe et même foyer* que la proposée, mais *dirigée en sens contraire.*

CINÉMATIQUE. — SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS A DES SYSTÈMES QUELCONQUES;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

I. — *Exposé.*

Il est souvent fort utile, lorsque l'on possède les données nécessaires à la détermination du mouvement d'un point matériel, regardé comme mouvement *absolu,* d'en déduire son mouvement *relatif* à un système solide se mouvant lui-même d'une manière quelconque dans l'espace. Le second mouvement une fois trouvé, l'on obtient immédiatement, si on le désire, le premier, auquel on ne serait arrivé d'une manière directe qu'avec une difficulté incomparablement plus grande dans certains cas (*).

M. Coriolis a donné et démontré, par l'analyse, un beau théorème servant à faire, d'une manière générale, la déduction dont nous parlons (**).

M. Belanger (***) et M. J. Bertrand (****) l'ont dé-

(*) Par exemple, dans le cas où le point matériel glisse dans un tuyau tournant, ou dans un autre appareil mobile.

(**) *Journal de l'École Polytechnique,* XXIV^e cahier (1835), pages 142 à 148; ou mieux, *Traité de la mécanique des corps solides et du calcul des machines,* 1844; n^{os} 27 à 29.

(***) *Cours de Mécanique,* 1847; n^{os} 256 à 266.

(****) *Journal de l'École Polytechnique,* XXXII^e cahier (1848), pages 149 à 154.

montré depuis, presque sans calcul, en s'appuyant seulement sur l'expression algébrique de l'espace parcouru en vertu d'un mouvement uniformément accéléré composé avec un mouvement uniforme; ce qui revient à remplacer, par de petites paraboles, les portions de trajectoires décrites dans l'espace et dans le système mobile, pendant un temps infiniment court (*).

Bien que la démonstration de M. Bertrand, fondée ingénieusement sur une considération de mouvements fictifs introduits par Clairaut (**), ait un haut degré de simplicité, j'ai pensé qu'on pourrait en voir avec intérêt une autre qui tire directement le théorème de Coriolis des premières notions de la mécanique, ou plutôt, des définitions mêmes formant la base de la cinématique (***) ou géométrie du mouvement. Cette démonstration se borne (n° VI ci-après) à mettre en regard, pour chaque trajectoire, deux de ces éléments rectilignes et parcourus uniformément, qu'il faut bien toujours considérer pour y avoir deux vitesses et la force à laquelle on attribue leur différence. Elle s'étend au cas où le mouvement dont on possède les données est *relatif*, comme l'autre, à un système qu'on ne suppose point immobile, et même au cas où les deux systèmes auxquels on rapporte le mouvement du point matériel ne seraient point *invariables*, ou se composeraient de points dont les distances mutuelles

(*) Il y en a encore une démonstration assez brève dans un Mémoire lu à l'Académie, le 15 septembre 1845 (*Comptes rendus*, t. XXI, p. 623) : elle est fondée sur l'emploi d'une sorte de différentiation qui comprend à la fois les changements de grandeur et les changements de direction des lignes dans l'espace. Mais on peut la dégager facilement du nouvel algorithme proposé, en raisonnant sur une figure.

(**) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1742.

(***) On sait que ce nom a été proposé par Ampère (*Essai sur la philosophie des Sciences*, 1834; 1re partie, p. 50) pour désigner la science du mouvement considéré en lui-même et indépendamment de ses lois physiques, ou, comme on dit, des ses *causes*.

ne restent pas les mêmes, ce qui rend le théorème plus général.

II. — *Définitions.*

Voyons bien, d'abord, comment on doit entendre le mouvement d'un point relativement à ces divers systèmes supposés mobiles les uns dans les autres, lorsqu'on s'astreint, comme nous ferons, à ne raisonner que sur des choses observables, telles que des *distances mutuelles* de points, et lorsqu'on ne s'occupe aucunement du *mouvement absolu,* que l'un des systèmes peut posséder dans ce qu'on appelle l'*espace immobile,* ni même de savoir si ce mouvement et cet espace, dont on n'a pu encore assigner les repères fixes, sont quelque chose de réel, ou bien de pures créations de notre imagination (*).

Pour arriver à connaître la suite des distances où se trouvent les uns des autres les divers points des corps, ce qui est l'objet général de la mécanique, on en choisit d'abord quelques-uns dont les distances mutuelles sont, ou constantes, ou connues d'avance pour tous les instants, et l'on détermine les distances successives des autres à ceux-ci, pour en déduire géométriquement toutes les distances cherchées.

Système. C'est l'ensemble des points ainsi choisis, pour y rapporter tous les autres, qui constitue ce que nous appelons un *système* de comparaison ou de rattachement. Tel est notre globe terrestre : tel peut être tout appareil solide, comme un navire, ou une roue hydraulique; tel peut être, même, avec utilité dans certains cas, un courant fluide étudié d'avance, et dont les diverses parties,

(*) Laplace semble reconnaître notre complète ignorance à cet égard (*Mécanique céleste,* art. 1).

en glissant parallèlement les unes devant les autres, changent de distance mutuelle suivant une loi connue (*).

Milieu. Bien que trois points suffisent à la rigueur pour remplir cet objet, il est commode d'embrasser dans chaque système tous les points géométriques compris dans une étendue indéfinie. Cela est bien permis, en supposant tous ces points liés à ceux primitivement choisis, de sorte que les distances des uns aux autres restent, ou constamment les mêmes, ou soumises à une même loi de changement continu avec le temps. Nous pouvons regarder ainsi, avec M. Saint-Guilhem (**), tout système comme un *milieu* indéfini, dont chaque point coïncide successivement avec différents points des autres milieux ou systèmes, et est toujours retrouvable dans le sien à un instant donné, parce qu'il est caractérisé, à chaque instant, par ses distances aux points reconnaissables du même système.

Dès lors, le mouvement dans un système ou milieu quelconque peut se concevoir très-facilement, sans penser seulement à l'existence du mouvement dit *absolu*, et sans regarder, ainsi qu'on le fait quelquefois, tout autre mouvement comme n'étant qu'une *apparence*, une illusion d'un observateur entraîné à son insu avec un système. Et nous pouvons donner la définition de tout ce qui s'y rapporte sans parler, non plus, de ces axes ou de ces plans coordonnés fixes ou mobiles, dont la considération n'est utile qu'au moment où l'on sort des généralités pour passer au calcul analytique des grandeurs particulières à chaque cas.

(*) C'est plutôt, alors, l'ensemble des centres de gravité des éléments ou groupes moléculaires fluides, que l'on prend pour système de rattachement, car les molécules individuelles ont des mouvements imperceptibles bien plus compliqués; et ce sont surtout ces derniers mouvements qu'il est utile de rapporter à un pareil système.

(**) *Mémoire sur le mouvement d'un système de points matériels dans un milieu absolu et dans un milieu relatif;* brochure publiée chez Paya, à Toulouse, vers 1843.

III. — *Suite des définitions.*

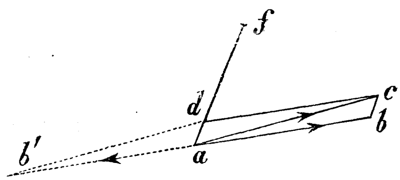
Mouvement et *repos*. Tout point matériel m, étranger à un système ou milieu A, *occupe* à chaque instant, comme l'on voit, un des points de ce milieu ou système. On dit qu'il est *en repos* dans A, ou relativement à A, s'il y occupe constamment le même point, ou si ses distances aux autres points de A suivent la loi de constance ou de variation continue particulière à ce système. Il y est *en mouvement*, si, aux divers instants qui se succèdent, il y occupe des points différents.

Trajectoire. Dans ce dernier cas, la suite des points ou *emplacements* qu'il y a occupés, ou y occupera, forme la *trajectoire* du mouvement de m dans A ou relativement à A : trajectoire ou sillon dont la forme reste constante si le système est invariable.

Vitesse. La *vitesse* du mouvement du point matériel m dans le système ou milieu A, ou la vitesse de m relative à A, est, pour un instant donné, une ligne droite finie dont la direction est celle de l'élément infiniment petit de la trajectoire, parcouru entre cet instant et un instant suivant; et dont la grandeur est le quotient de cet élément par le temps, aussi infiniment petit, écoulé entre les deux instants. Il est inutile de dire que si, ce que nous supposons, le mouvement de m dans A est soumis à la loi de continuité, cette direction et cette grandeur de la vitesse sont les mêmes, quelles que soient les longueurs de l'élément et du temps mis à le parcourir, pourvu qu'elles soient infiniment petites, et comptées, l'une à partir du même point de la trajectoire, l'autre à partir de l'instant où m occupait ce point.

Force (envisagée cinématiquement). La comparaison géométrique, dans un même milieu, de deux vitesses différant infiniment peu de grandeur et de direction, donne ce qu'on appelle *la force* regardée comme capable de changer l'une de ces deux vitesses dans l'autre pendant un temps infiniment court. La force (accélératrice et déviatrice) considérée d'une manière purement géométrique, ou indépendamment de toute idée métaphysique de *cause seconde* efficiente, n'est autre chose qu'une certaine ligne droite finie *af* (*fig.* 1) ayant pour direction, dans un milieu, celle de la ligne infinitésimale *ad* qui, composée avec la première vitesse *ab*, donne pour *résultante géométrique* une ligne *ac* égale et parallèle à la deuxième vitesse; et ayant pour longueur le rapport de cette petite ligne ou vitesse gagnée *ad*, au temps, aussi infiniment petit, pendant lequel s'opère ce *gain*, ou la transformation de la vitesse *ab* en celle *ac*.

fig. 1.



La *force* est, si l'on veut, la résultante géométrique de la deuxième vitesse *ac* composée avec $ab' = -ab$, ligne égale et contraire à la première vitesse; cette résultante étant divisée par le temps pendant lequel celle-ci est devenue celle-là.

Ordinairement les deux vitesses sont celles du même point mobile à deux instants qui se suivent. On sait que pour un certain système (celui-là même où les mouvements sont dits absolus) la force qui donne ainsi la succession des vitesses de chaque point est composée géométriquement, à chaque instant, de lignes dirigées vers les autres points matériels, et ayant des grandeurs qui dépendent des distances actuelles de celui-là à ceux-ci. Mais cette loi sort de la cinématique, et appartient déjà à la mécanique physique, ainsi que la deuxième loi générale en vertu de laquelle les lignes composantes ou *forces partielles* dont nous parlons, opposées deux à deux pour des points différents, sont rendues égales aussi deux à deux lorsqu'on les multiplie par certains coefficients appelés *masses* de chaque point. Nous n'aurons pas besoin d'invoquer, dans ce qui va suivre, ces deux grandes lois au moyen desquelles on peut établir toute la mécanique sans parler ni de *causes* de mouvement, ni de *quantités de matière,* ni de *repos absolu.* Aussi nous pourrons faire abstraction de la masse de notre point matériel : nos forces seront, si l'on veut, les forces totales ordinaires sollicitant l'unité de masse du point considéré.

IV. — *Problème.*

Ceci convenu, il est évident que l'on pourra construire, par ses éléments successifs, toute la trajectoire du mouvement d'un point matériel dans un milieu quelconque, si l'on connaît, avec son point de départ et sa *vitesse* initiale dans ce milieu, toute la suite des *forces* qui modifient la grandeur et la direction de cette vitesse. Le problème de la détermination, par ces données, de son mouvement dans un deuxième milieu, ou le problème posé au commencement du n° I, se réduit donc à ceci :

« Étant donnés, pour un instant quelconque, la vitesse » animant un point matériel m dans un système ou mi- » lieu A où il se meut, et la force qui donne le change- » ment de cette vitesse du même instant au suivant, en » déduire sa vitesse et sa force relatives à un autre sys- » tème ou milieu B (tel qu'un appareil solide ou une » masse fluide) dont les divers points ont des mouvements » connus dans le premier. »

Nous le résoudrons immédiatement en nous représentant (*fig.* 2) un ensemble de points géométriques *appar-*

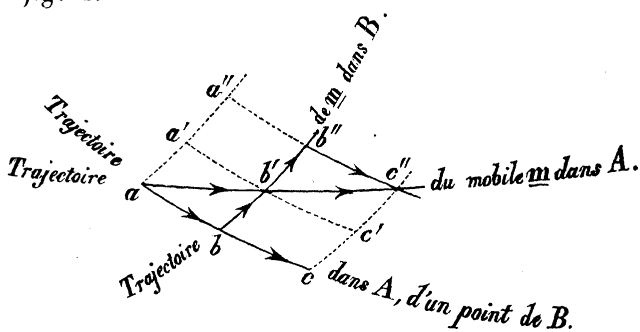
tenant tous au système A, mais occupés, à trois instants successifs, tant par le point mobile m étranger aux deux systèmes, que par les points du système B avec lesquels ce mobile a coïncidé aux mêmes instants, et en y appliquant simplement les définitions données ci-dessus (n° III), pour les vitesses et les forces.

Nous supposons les trois instants séparés par deux intervalles de temps égaux et infiniment petits, dont nous appelons dt la durée.

a, b', c'' sont les emplacements occupés dans A par le mobile m au premier, au second et au troisième instants.

En sorte que ab', $b'c''$ sont deux éléments consécutifs de la trajectoire dans le premier système.

fig. 2.



a, b, c sont les emplacements occupés, aussi dans A, et aux trois mêmes instants, par le point du système B *qui coïncidait en a avec le mobile m au premier instant.*

De même a', b', c' et a'', b'', c'' sont les emplacements occupés, aux trois instants (toujours dans A), par deux autres points de B, savoir celui qui coïncidait avec m en b' au second instant, et celui qui coïncide en c'' avec le même mobile m au troisième instant.

Il en résulte que b, b', b'' sont des emplacements occupés simultanément, à l'instant intermédiaire, par les trois points de B dont nous parlons, et avec lesquels m s'est trouvé ou se trouvera en contact au premier, au second et au troisième instant.

$bb'b''$ est donc une portion de la trajectoire de m dans le milieu B; et bb', $b'b''$ sont les deux éléments de cette trajectoire parcourus dans B pendant le premier et pendant le second temps dt.

On peut remarquer que $aa'a''$, $cc'c''$ sont la même portion de trajectoire pour les situations qu'occupent les points du milieu B dans celui A l'instant d'avant et l'instant d'après. Mais nous n'aurons pas besoin de considérer la trajectoire relative à B dans ces deux positions, car, alors, ses éléments ne peuvent différer en direction et en grandeur de ceux bb', $b'b''$ que de quantités infiniment petites d'ordre supérieur, négligeables dans ce qui va suivre.

V. — *Relation des vitesses.*

Si l'on divise, par la durée dt, les espaces ab', bb' parcourus dans A et dans B du premier instant au second, on a respectivement, d'après les définitions (n° III), les vitesses du mobile relativement au système A et relativement au système B, au premier instant.

Or le triangle abb' montre que ab' est résultante géométrique de bb' et de ab son troisième côté. Divisant aussi ce côté par dt pour avoir une vitesse, on voit déjà que :

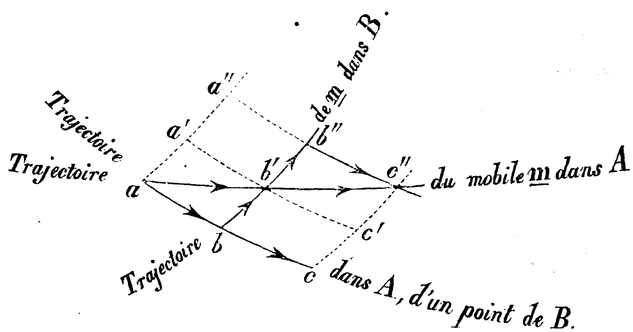
« A un instant quelconque, la vitesse du mobile m
» dans le milieu A est composée de sa vitesse dans le
» milieu B, et de ce que Coriolis appelle la vitesse de
» l'*entraînement* exercé sur ce mobile par B, c'est-à-dire,
» de la vitesse supposée connue que possède, dans A, le
» point du milieu B momentanément occupé par lui. »

Ou, que :

« La vitesse du mobile m, relativement au système B,

» s'obtient en prenant la résultante de sa vitesse relative-
» ment au système A, et d'une vitesse égale et contraire
» à celle qu'il aurait s'il restait en coïncidence avec le
» même point de B. »

VI. — *Relation des forces.*



Comme le triangle $b'b''c''$ montre que

$b'b''$ est la résultante de $b'c''$ et de $-b''c''$,

de même que celui abb' a indiqué que

$-bb'$ est la résultante de $-ab'$ et de $+ab$

on a, en composant ces deux résultantes ensemble, et en ajoutant bc, $-bc$, ce qui ne change rien au résultat, la relation suivante :

$$\begin{array}{l} b'b'' \text{ composée avec } -bb' \\ \quad\text{est résultante}\ldots\ldots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{de } b'c'' \text{ composée avec } -ab', \\ \text{de } -bc \text{ composée avec } ab, \\ \text{et de } -b''c'' \text{ composée avec } bc, \end{array} \right.$$

relation dans laquelle on peut remplacer $-b''c''$ composée avec bc par

$-a''b''$ composée avec ab,

car ces deux résultats partiels de composition ne peuvent différer que d'un infiniment petit d'ordre supérieur et négligeable.

Divisant tout par $(dt)^2$ on a une relation de forces, car une première division par dt transforme en vitesses les sept éléments de trajectoires, supposés conserver leurs directions en décrivant aussi des lignes finies, et une seconde division faite de même par dt change en quatre forces les quatre petites lignes provenant de la composition de vitesses avec d'autres vitesses infiniment peu différentes prises en signe contraire (n° III).

On a donc ce théorème général, s'appliquant indifféremment aux milieux variables ou invariables, et comprenant comme cas particulier celui de Coriolis :

« La force qui produit (ou qui mesure) l'accélération et » la déviation actuelles du point mobile m dans le mi- » lieu B, est résultante de la force qui modifie de même » sa vitesse dans celui A, et de deux autres forces, la » première égale et contraire à celle qui modifie la vitesse, » dans A, du point de B en coïncidence actuelle avec le » mobile m, et la seconde égale et contraire à celle qui » serait capable de changer, dans un temps extrêmement » petit, la vitesse actuelle de ce point de B en la vitesse » *contemporaine* d'un autre point de B, savoir celui avec » lequel le mobile m ira coïncider après un temps double, » en vertu de sa vitesse actuelle relative à B. »

Il résout, avec le théorème du numéro précédent relatif aux vitesses, le problème général du n° IV, car les deux forces à ajouter sont connues, puisqu'elles dépendent des mouvements supposés connus des points du milieu B dans le milieu A.

On doit remarquer que ce théorème et celui du numéro précédent, donnent non-seulement la grandeur de la force et de la vitesse attribuables actuellement au mobile m dans le deuxième système B; mais, aussi, *les directions* *de cette force et de cette vitesse dans* A, *pour la situation actuelle* des points de B dans ce dernier système (*).

VII. — *Cas des systèmes invariables.*

Maintenant si, comme l'ont supposé tous les auteurs, et comme cela a lieu le plus généralement, A et B sont deux systèmes dans chacun desquels les points restent sensiblement aux mêmes distances les uns des autres, comme les points des corps solides, la seconde des deux forces à ajouter peut recevoir une autre expression.

On sait, en effet, qu'alors la vitesse possédée dans le système ou l'espace A, par un point quelconque du solide B, se compose de la vitesse contemporaine de tout autre point de B, et de la vitesse due à une rotation du solide B autour d'un *axe instantané* passant par son second point (**).

(*) Le théorème ancien des vitesses, dont nous avons cru devoir rappeler la démonstration au numéro précédent, me paraît être implicitement invoqué dans les diverses démonstrations, citées ci-dessus, du théorème des forces; car lorsqu'on calcule une force au moyen d'un petit déplacement ou espace parcouru, il faut s'être assuré d'abord si ce déplacement n'est pas dû en partie à la vitesse que le mobile possédait au commencement de l'action de cette force, et cela exige que l'on sache ce qu'est cette vitesse relative au système nouveau.

(**) Voici l'une des démonstrations que l'on peut donner, sans calcul, de ce théorème de cinématique.

Considérons le mouvement du corps B, non plus dans le milieu A, mais dans un milieu A' dont tous les points sont supposés avoir, dans A, pendant dt, des vitesses égales et parallèles à celle d'un point O de B, en sorte que O y soit fixe ou en repos (nº II), et que les autres points ne fassent que tourner autour de lui, en suivant des directions perpendiculaires à leurs lignes de jonction à O. Par ce point O et par les emplacements qu'occupent dans A', au commencement de dt, deux autres points M, M' du corps B, menons deux plans respectivement perpendiculaires aux mouvements de ces deux points M, M' dans A'. Pendant le temps infiniment petit dt, tout point P de la droite suivant lequelle ces deux plans se coupent, restera à une distance constante, soit de M, soit

Celle-ci est le produit de la vitesse *angulaire* actuelle de la rotation de B (la même autour de tous les axes), par un rayon de rotation qui n'est autre chose, évidemment, que la projection de la ligne de jonction de ces deux points sur le plan de rotation, c'est-à-dire sur un plan perpendiculaire aux divers axes instantanés, qui, pris au même instant, sont tous parallèles.

Or nos deux points b'' et b, ou a'' et a (n° VI) ont pour ligne de jonction l'espace parcouru par le mobile m en vertu de sa vitesse relative à B, dans un temps double de celui de l'action supposée de la force que nous voulons exprimer. On a donc cet énoncé, où nous avons rétabli la *masse* du mobile m :

« Pour avoir la suite du mouvement d'un point mobile m relativement à un milieu invariable B qui se » meut lui-même dans un premier milieu A, aussi invariable, il faut ajouter à chaque instant, aux forces » supposées connues qui l'animent dans A, une force » égale et contraire à celle dont il y serait animé s'il

---

de M', et aussi d'un troisième point de B, le point O. Donc cette droite OP, qui est fixe dans A' comme les deux plans, appartient tout entière au système invariable B, et ce système ne fait que tourner autour d'elle dans A' pendant dt. Le mouvement de tout point de B dans A se compose : 1° de celui qui vient de cette rotation ; 2° de la *translation* générale de A', ou du mouvement de O dans A, ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de voir, aussi, en considérant successivement des mouvements de rotation autour de deux axes tirés dans B parallèlement entre eux, que, pour tout point de B situé dans leur plan, et, par une suite nécessaire, pour tout autre point de ce système solide, une petite rotation autour de l'un des axes produit le même déplacement qu'une rotation de même angle autour de l'autre, en y ajoutant une translation générale des points de B suivant de petites lignes toutes égales entre elles et perpendiculaires au plan des deux axes. D'où l'on conclut que toutes les droites menées dans B parallèlement à un axe instantané de rotation sont d'autres axes instantanés ; que la rotation angulaire est la même autour de tous, et que la translation seule diffère de l'un à l'autre, en direction comme en grandeur.

» restait uni au point de B avec lequel il coïncide actuel-
» lement, et, de plus, une autre force, perpendiculaire
» à la fois à la direction de la vitesse du même mobile
» relative à B pour la situation actuelle de ce dernier
» milieu dans celui A, et aux axes instantanés de la rota-
» tion de B dans A. L'intensité de cette dernière force
» est double du produit de la masse du point mobile par
» la vitesse angulaire de rotation de B et par la vitesse du
» mobile relative à B, projetée sur le plan de rotation
» perpendiculaire aux axes. Le sens dans lequel elle agit
» est opposé à celui suivant lequel le point B, actuelle-
» ment occupé par le mobile, tourne autour de celui
» qu'il occupait l'instant d'avant. »

C'est le théorème de Coriolis, qui a appelé la première force additionnelle, force d'entraînement, et la seconde, force centrifuge composée (*).

(*) Il a donné ce dernier nom à la seconde, à la suite de considérations revenant à cette remarque, que (*fig.* 2) $b''c''$ composé avec $-bc$, ou (à cela près de quantités négligeables) deux fois le résultat de la composition de $b'c'$ avec $-bc$, est la même chose que deux fois le résultat de la composition de cc' avec $-bb'$, puisque le quadrilatère $bb'c'c$ montre que la résultante de bb' et de $b'c'$ est la même que celle de bc et cc': d'où il suit, puisque cc' a la même longueur que bb' et n'en diffère qu'en direction lorsque les deux systèmes de rattachement sont invariables, que la deuxième force additionnelle est une force capable de faire éprouver à la vitesse relative à B, qui est $\frac{bb'}{dt}$, non pas un changement de grandeur, mais un simple changement de direction, dû à la rotation du système B supposé entraîner avec lui la droite représentant cette vitesse. En cela cette force, bien qu'oblique au rayon de la rotation, est analogue à la force centrifuge, qui a pour propriété de changer aussi la direction et non la grandeur de la vitesse du mouvement de rotation d'un point.

C'est cette force qui fait tomber sur la terre, prise pour système B, un corps pesant un peu à l'orient du pied de la verticale tirée de son point de départ supposé très-élevé.

Elle disparaît lorsqu'on se sert du théorème général pour poser une équation de forces vives dues aux vitesses relatives à B.

La première des deux forces ajoutées ne laisse pas d'avoir aussi de l'ana-

VIII. — *Scolie.*

La démonstration élémentaire que nous avons donnée de ce théorème au n° VI, en le généralisant, a découlé de la simple vue des relations nécessaires de position qu'ont entre eux les emplacements occupés consécutivement par le mobile dans les deux systèmes. Nous avons, en la présentant, accordé tout autant de *réalité* au mouvement dans l'un qu'au mouvement dans l'autre. Nous n'avons invoqué ni fictions, ni apparences.

Peut-être que, tout en n'excluant point absolument l'usage quelquefois aussi utile qu'ingénieux de ces dernières considérations, on trouvera que notre manière de procéder, qui consiste à mettre sous les yeux, comme en un tableau, les faits réels, pour tirer directement leurs conséquences, offre quelques avantages, et est propre à faire probablement disparaître le danger qu'on a remarqué dans les raisonnements dits à priori, ou à éviter, sans recourir aux formules, des erreurs comme celle que M. Bertrand a lucidement signalée dans le raisonnement fait, il y a un siècle, par un illustre géomètre.

---

logie avec la force centrifuge, et peut-être même plus que la seconde, car elle se réduit identiquement à la force centrifuge quand le mouvement du système B dans A se réduit, pendant les deux intervalles d'instants, à une rotation uniforme, avec ou sans une translation aussi uniforme, comme le mouvement d'une roue hydraulique ou d'une roue de voiture; et c'est là le cas le plus ordinaire de la pratique.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. G. EISENSTEIN.

(Journal de M. Crelle, t. XXVIII, p. 38, 1844; en français.)

Pour le cas où n est un entier impair, ω désignant une racine *primitive* de l'équation $\omega^n - 1 = 0$, M. Gauss a donné la formule

$$\begin{aligned}&1 + \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-6} \ldots + \omega^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\\&= (1-\omega)(1-\omega^3)(1-\omega^5)\ldots(1-\omega^{n-2});\end{aligned}$$

en transformant ce produit dans la série suivante,

$$1 + \frac{1-\omega}{1-\omega^2} + \frac{(1-\omega)(1-\omega^3)}{(1-\omega^2)(1-\omega^4)} + \frac{(1-\omega)(1-\omega^3)(1-\omega^5)}{(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^6)} + \ldots;$$

et, en développant celle-ci en fraction continue, je trouve

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+\omega - \cfrac{\omega}{1+\omega^2 - \cfrac{\omega^2}{1+\omega^3} \cdots \cfrac{\omega^{n-2}}{1+\omega^{n-1}}}}}.$$

Cela fournit cette équation remarquable :

$$\begin{aligned}&1 + \omega^{-1} + \omega^{-3} + \ldots + \omega^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\\&= \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+\omega - \cfrac{\omega}{1+\omega^2} \cdots \cfrac{\omega^{n-2}}{1+\omega^{n-1}}}};\end{aligned}$$

d'un autre côté, on a, comme l'on sait,

$$1+\omega^{-1}+\omega^{-3}+\omega^{-6}+\ldots\omega^{-\frac{1}{2}n(n-1)}$$
$$=\omega^{-\frac{1}{8}(n^2-1)}\sqrt{(-1)^{-\frac{1}{2}(n-1)}n},$$

où le signe du radical peut être déterminé par les méthodes connues.

On a donc aussi :

$$\sqrt{(-1)^{-\frac{1}{2}(n-1)}n}=\cfrac{\omega^{\frac{1}{8}(n^2-1)}}{1-\cfrac{1}{1+\omega-\cfrac{\omega}{1+\omega^2}\cdots\cdots-\cfrac{\omega^{n-2}}{1+\omega^{n-1}}}}.$$

Cette expression en fraction continue et finie du radical $\sqrt{\pm n}$, suivant une loi si simple, me paraît très-remarquable, et je ne crois pas qu'une formule semblable soit connue.

Je remarque encore que l'on a

$$\left(1-\frac{z}{p}\right)\left(1-\frac{z}{p^2}\right)\left(1-\frac{z}{p^3}\right)\ldots=\varphi(z)$$
$$=1+\cfrac{z}{1-p+\cfrac{z}{\cfrac{1-p^2}{1-p}+\cfrac{p^2z}{1-p^3-\cfrac{pz}{\cfrac{1-p^4}{1-p^2}+\cfrac{p^4z}{1-p^5}-\ldots}}}}$$

Tous les dénominateurs sont ici des fonctions entières de p. Soit $z=1$ et p un nombre entier, tous les dénominateurs et tous les numérateurs seront des nombres entiers, et les premiers surpasseront les derniers. On conclut de là que la valeur du produit infini

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\cdot\ \cdot$$

est toujours une quantité irrationnelle, p étant entier et >1. A l'aide de la formule

$$\varphi(z)=\left(1-\frac{z}{p}\right)\varphi\left(\frac{z}{p}\right),$$

on peut exprimer rationnellement $\varphi(z)$ par une autre fonction $\varphi(\zeta)$, dont la variable est d'une petitesse arbitraire. En considérant donc attentivement la fraction continue, il sera facile d'en tirer une proposition plus générale; ce que nous laissons au lecteur.

Toutes les fractions continues que nous avons présentées ici ne sont que des exemples particuliers. Les méthodes que nous avons employées pour y parvenir nous ont fourni des fractions continues d'une généralité telle, que j'ose assurer qu'elles renferment, outre une foule de résultats nouveaux et très-remarquables comme cas spéciaux, toutes les fractions continues trouvées jusqu'à présent, et surtout celles de M. Gauss. C'est ce que nous expliquerons dans une autre occasion.

Ce qui m'a fort intéressé dans ces recherches, ce sont les équations identiques qui se présentent en comparant les résultats. Ainsi, par exemple, parce que la fraction continue dans laquelle nous avons développé

$$1+\omega^{-1}+\omega^{-3}+\omega^{-6}+\ldots\omega^{-\frac{1}{2}n(n-1)}$$

se trouve aussi sans le secours de la transformation de M. Gauss, il en résulte une nouvelle manière de vérifier cette ingénieuse transformation. Il existe des résultats analogues pour les formules qui se rapportent aux fonctions elliptiques.

NOUVELLE DÉMONSTRATION ET GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME BINOMIAL ;

D'APRÈS M. G. EISENSTEIN,
Étudiant (student) à Berlin.

(Journal de M. Crelle, t. XXVIII, p. 44, 1844; en allemand.)

Lemme. m et n étant deux nombres positifs entiers, l'expression

$$\frac{p^m - 1}{p^n - 1}$$

se réduit à $\frac{m}{n}$ lorsque $p = 1$.

Soit l'expression

$$(1) \quad \varphi(x, \alpha) = (1 + x)(1 + px)(1 + p^2 x) \ldots (1 + p^{\alpha - 1} x).$$

Elle satisfait évidemment à la relation

$$(2) \qquad (1 + p^\alpha x)\,\varphi(x, \alpha) = (1 + x)\,\varphi(px, \alpha);$$

$\varphi(x, \alpha)$ étant une fonction entière de degré α de x, on a

$$(3) \qquad \varphi(x, \alpha) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_\alpha x^\alpha.$$

Il s'agit de déterminer les coefficients. D'abord $A_0 = 1$; ensuite, si l'on met les séries correspondantes à $\varphi(x)$ et $\varphi(px)$ dans la relation (2), on obtient

$$(1 + p^\alpha x) \sum_{t=0}^{t=\alpha} A_t x^t = (1 + x) \sum_{t=0}^{t=\alpha} p^t x^t;$$

et égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, il vient

$$A_t + p^\alpha A_{t-1} = A_t p^t + A_{t-1} p^{t-1};$$

d'où

$$(4)\qquad A_t = \frac{p^\alpha - p^{t-1}}{p^t - 1} A_{t-1};$$

par conséquent,

$$A_t = \frac{p^\alpha - p^{t-1}}{p^t - 1} \cdot \frac{p^\alpha - p^{t-2}}{p^{t-1} - 1} \cdots \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \cdot A_0.$$

Si l'on considère que $A_0 = 1$ et que

$$1 + 2 + 3 + \ldots t - 1 = \frac{1}{2} t(t-1),$$

on peut écrire

$$(5)\quad A_t = \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \cdot \frac{p^{\alpha-1} - 1}{p^2 - 1} \cdots \frac{p^{\alpha-t+1} - 1}{p^t - 1} \cdot p^{\frac{1}{2}t(t-1)};$$

ainsi, l'on obtient

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & (1+x)(1+px)\ldots(1+p^{\alpha-1}x) \\ & = \sum_{t=0}^{t=\alpha} A_t x^t = \sum_{t=0}^{t=\alpha} \frac{p^\alpha - 1}{p-1} \cdot \frac{p^{\alpha-1} - 1}{p^2 - 1} \cdots p^{\frac{1}{2}t(t-1)} x^t. \end{aligned} \right.$$

Faisant $p = 1$, le premier membre devient $(1+x)^\alpha$, tandis que le coefficient général A_t, d'après le lemme, est

$$\frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha - 1}{2} \cdot \frac{\alpha - 2}{3} \cdots \frac{(\alpha - t + 1)}{t};$$

donc

$$(7)\qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^2 + \ldots x^\alpha.$$

On voit, par cet exemple, combien il est convenable de considérer les expressions comme des *cas* particuliers d'autres cas plus *généraux*. Par l'introduction de la nouvelle variable p, il a été possible d'établir la relation (2), laquelle, pour le cas spécial $p = 1$, ne donne qu'une identité.

Les coefficients A_t, qui sont derechef de la forme $\varphi(x)$, jouissent des mêmes propriétés que les coefficients binomiaux, et les renferment, comme on a vu, comme cas particuliers.

Soient α et β deux nombres entiers positifs, on a la relation

$$\varphi(x, \alpha + \beta) = \varphi(x, \alpha)\, \varphi(p^\alpha x, \beta);$$

en effet,

$$\begin{aligned}&(1+x)(1+px)\ldots(1+p^{\alpha+\beta-1}x)\\ &= [(1+x)(1+px)\ldots(1+p^{\alpha-1}x)]\\ &\times [(1+p^\alpha x)(1+p.p^\alpha x)\ldots(1+p^{\beta-1}p^\alpha x)].\end{aligned}$$

Si l'on remplace les trois fonctions φ par leurs valeurs en série déduites de (6), et comparant les coefficients, on obtient

$$(8) \qquad C_t = A_t + A_{t-1}B_1\, p^\alpha + A_{t-2}B_2\, p^{2\alpha} + \ldots + B_t\, p^{t\alpha};$$

B_t et C_t sont ce que devient A_t en y remplaçant successivement α par β et $\alpha + \beta$.

Si dans l'équation (8) on pose partout $p^\alpha = u$ et $p^\beta = v$, les deux membres deviennent des fonctions entières de u et de v, et α et β n'apparaissent plus, si ce n'est *implicitement* dans u et v. Faisant passer tous les termes dans un seul membre, on a une fonction *entière* de u et de v qui *disparaît* pour un nombre *infini* de valeurs des deux variables (correspondantes aux valeurs positives de α et β); aussi cette fonction doit s'annuler *identiquement*, c'est-à-dire pour toute valeur de u et de v (*). Ainsi l'existence de la formule (8) est démontrée pour chaque valeur de α et β. En généralisant l'expression de $\varphi(x, \alpha)$, et

(*) Il suffit même, pour qu'une fonction entière disparaisse, qu'elle s'annule pour un nombre de valeurs des variables surpassant d'une unité le degré de la fonction.

désignant par ce symbole la série $\sum\limits_{t=\infty}^{t=0} A_t x^t$, pour une valeur quelconque de α (lorsque la série est convergente), alors il suit, en remontant, que la relation

$$(9) \qquad \varphi(x, \alpha + \beta) = \varphi(x, \alpha)\,\varphi(p^\alpha x, \beta)$$

n'existe pas seulement pour des valeurs entières, mais aussi pour des valeurs quelconques de α et β, et de là, en posant $p = 1$, on conclut que la série

$$1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1.2} x^2 + \frac{\alpha . \overline{\alpha - 1} . \overline{\alpha - 2}}{1.2.3} x^3 + \ldots = \psi(\alpha)$$

satisfait, pour des valeurs quelconques de α et φ, à la relation

$$(10) \qquad \psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha)\,\psi(\beta).$$

Au moyen des propositions connues, cette relation donne la démonstration du *théorème binomial général* pour des exposants quelconques.

EXTRAIT DES EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE ;

PAR M. LEBESGUE.

Dans un premier extrait (p. 87), j'ai pris un exemple propre à montrer qu'en développant un peu plus l'analyse indéterminée du premier degré, on simplifierait, quant aux démonstrations, l'analyse indéterminée du second degré.

Dans ce second extrait, je prendrai un exemple montrant l'usage de la théorie des nombres dans l'algèbre supérieure.

PROBLÈME. *Soient $a, b, c, \ldots, k$ des nombres premiers* *diviseurs de n, on demande combien de* 1 *à n il y a de nombres premiers à a, b, c, ..., k.*

Solution. De 1 à a il y a $a-1$ nombres premiers à a; ce sont 1, 2, 3... $a-1$; il y en a autant de a à $2a$, de $2a$ à $3a$, et généralement de ma à $(m+1)a$, car, pour que $ma+r$ $(r<a)$ soit premier à a, il faut et il suffit que r le soit. Ainsi, puisque $n=\frac{n}{a}\cdot a$, il y aura, de 1 à n, $\frac{n}{a}(a-1)$ nombres premiers à a. On les obtient en supprimant, dans la série 1, 2, 3... n, tous les multiples de a.

Pour avoir les nombres premiers à a et b de 1 à n, il faut supprimer d'abord les multiples de a. On a vu qu'il reste $\frac{n}{a}(a-1)$ nombres; en supprimant les multiples de a on a, par là même, supprimé certains multiples de b de la suite b, $2b$, $3b$, ..., hb, ... $\frac{n}{b}.b$; mais on n'a pas supprimé ceux où le facteur h serait premier à a. Or de 1 à $\frac{n}{b}$ multiple de a, il y a $\frac{n}{ab}(a-1)$ nombres premiers à a; il faut donc diminuer $\frac{n}{a}(a-1)$ de $\frac{n}{ab}(a-1)$, et l'on aura $\frac{n}{ab}(a-1)(b-1)$, qui indiquera combien de 1 à n il y a de nombres premiers à a et b.

Pour avoir les nombres premiers à a, b et c, comme en supprimant les multiples de a et b on n'a supprimé qu'une partie des multiples de c, ou des nombres c, $2c$, $3c$, ..., $\frac{n}{c}\cdot c$; puisque $\frac{n}{c}$ est multiple de a et b, les multiples de c premiers à a et à b qui restent à supprimer sont en nombre $\frac{n}{abc}(a-1)(b-1)$, de sorte que la différence

$$\frac{n}{ab}(a-1)(b-1)-\frac{n}{abc}(a-1)(b-1)$$
$$=\frac{n}{abc}(a-1)(b-1)(c-1)$$

indiquera combien de 1 à n il y a de nombres premiers à a, b, c diviseurs premiers de n.

En continuant de la même manière on trouvera, pour le nombre cherché,

$$\frac{n}{abc\ldots k}(a-1)(b-1)(c-1)\ldots(k-1).$$

Problème. *Combien y a-t-il de nombres premiers à n et non plus grands?*

Solution. Soit $n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots m^{\mu}$; a, b, c, ..., m étant des nombres premiers différents, tout nombre premier à n doit nécessairement l'être aux nombres a, b, c, ..., m; et, réciproquement, tout nombre premier à chacun des nombres a, b, c, ..., m est premier à n. Il suit donc du problème précédent que le nombre cherché est

$$\frac{n}{abc\ldots m}(a-1)(b-1)(c-1)\ldots(m-1),$$

ou encore

$$n\cdot\frac{a-1}{a}\cdot\frac{b-1}{b}\cdot\frac{c-1}{c}\cdots\frac{m-1}{m}.$$

Remarque. Ce nombre est souvent représenté par $\varphi(n)$; on a donc

$$\varphi(a^{\alpha})=a^{\alpha-1}.(a-1),$$
$$\varphi(a^{\alpha}b^{\beta})=a^{\alpha-1}.(a-1)b^{\beta-1}.(b-1)=\varphi(a^{\alpha}).\varphi(b^{\beta}),$$

de même

$$\varphi(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = \varphi(a^\alpha).\varphi(b^\beta).\varphi(c^\gamma),$$

et ainsi de suite.

Plus généralement, si m et n sont premiers entre eux, on aura

$$\varphi(m.n) = \varphi(m).\varphi(n);$$

propositions qu'il est facile de résoudre à priori.

Problème. *Trouver le plus petit multiple de plusieurs nombres donnés* $a, b, c, \ldots, k$.

On connaît deux solutions : l'une qui se tire de la décomposition des nombres $a, b, c, \ldots, k$ en facteurs premiers ; l'autre qui se déduit de cette proposition : « Le » plus petit multiple des nombres a et b est égal à leur » produit ab divisé par leur plus grand commun divi- » seur (ab). » Cette proposition peut être généralisée ainsi qu'il suit :

« Soit p_1 le produit des nombres $a, b, c, \ldots, k$; p_2 le » produit $(ab)(ac)\ldots(bc)\ldots$ des plus grands communs » diviseurs des nombres $a, b, \ldots, k$ pris deux à deux; » p_3 le produit des plus grands communs diviseurs des » nombres pris trois à trois, et ainsi de suite, jusqu'à ce » que l'on prenne tous les nombres; ce qui donne un » seul plus grand commun diviseur : le plus petit multiple » cherché sera

$$\frac{p_1.p_3.p_5\ldots}{p_2.p_4.p_6\ldots} = \mathrm{M}.$$

Soit θ un quelconque des nombres premiers, diviseur d'un des nombres $a, b, c, \ldots, k$. Comme l'ordre des nombres $a, b, c, \ldots, k$ est indifférent, on peut supposer que θ entre dans ces nombres avec les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ rangés par ordre de grandeur décroissante. Il suit de là que l'exposant de θ sera

$$\begin{array}{rl} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots & \text{dans } p_1, \\ \beta+2\gamma+3\delta+\ldots & \text{dans } p_2, \\ \gamma+3\delta+\ldots & \text{dans } p_3, \\ \delta+\ldots & \text{dans } p_4, \end{array}$$

et ainsi de suite, de sorte que dans $\dfrac{p_1 \cdot p_3 \cdot p_5 \ldots}{p_2 \cdot p_4 \cdot p_6 \ldots}$ l'exposant sera

$$\alpha+(1-1)\beta+(1-1)^2\gamma+(1-1)^3\delta+\ldots=\alpha.$$

D'ailleurs, le nombre M ne peut contenir que les diviseurs premiers de $a, b, c, \ldots, k$, et il les contient avec leur exposant maximum. M est donc le plus petit multiple demandé.

Application à l'algèbre.

Quand on aura décomposé un polynôme

$$P=x^n+ax^{n-1}+\ldots+px+q$$

en facteurs du premier degré

$$P=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$

on appellera P un polynôme composé de binômes simples, et tous les théorèmes sur la décomposition des nombres en facteurs premiers s'étendront aux polynômes. On pourra, par exemple, appliquer la règle précédente pour trouver le plus petit multiple de plusieurs polynômes.

Ceci posé, proposons-nous cette question :

Problème. *Trouver l'équation aux racines primitives de l'équation binôme* $x^m-1=0$.

On sait que r étant racine de $x^m-1=0$, il en est de même de $r, r^2, r^3, \ldots, r^m-1$. Une racine est dite *primitive*, quand la série $r, r^2, \ldots, r^m$ est composée de m expressions différentes, qui sont, par conséquent, les m racines. Y a-t-il des racines primitives? Combien y en a-t-il? La solution du problème précédent répondra à ces questions.

1°. Si r est une racine dans la série $1, r, r^2, \ldots$, le premier terme qui se répétera sera l'unité. Si l'on avait, par exemple, $r^\alpha = r^{\alpha+\beta}$, il en résulterait $r^\beta = 1$; donc l'unité se répète avant qu'on soit parvenu à $r^{\alpha+\beta}$.

2°. La série $1, r, r^2, \ldots r^{\alpha-1}$, $r^\alpha = 1$ donne α diviseur de m. Démonstration connue. Cela posé, soit $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$. Les racines non primitives satisferont à quelques-unes des équations

$$x^{\frac{m}{a}}-1=0, \quad x^{\frac{m}{b}}-1=0, \quad x^{\frac{m}{c}}-1=0, \quad \ldots,$$

qui ont toutes leurs racines communes avec

$$x^m-1=\left(x^{\frac{m}{a}}\right)^a-1=0. \;..$$

Il suffira donc de diviser x^m-1 par le plus petit multiple des polynômes $x^{\frac{m}{a}}-1$, $x^{\frac{m}{b}}-1$, $x^{\frac{m}{c}}-1$, etc. Or l'algèbre montre que le plus grand commun diviseur des polynômes x^f-1, x^g-1 est $x^{(fg)}-1$, (fg) étant le plus grand commun diviseur des nombres f et g. Le quotient égalé à zéro sera l'équation aux racines primitives. Cette équation sera donc

$$\frac{(x^m-1)\times\left(x^{\frac{m}{ab}}-1\right)\left(x^{\frac{m}{ac}}-1\right)\ldots\times\left(x^{\frac{m}{abcd}}-1\right)\ldots}{\left(x^{\frac{m}{a}}-1\right)\left(x^{\frac{m}{b}}-1\right)\ldots\times\left(x^{\frac{m}{abc}}-1\right)\ldots}=0,$$

et aura pour degré

$$m - m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\ldots\right)+m\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\ldots\right)-m\left(\frac{1}{abc}\ldots\right)\ldots$$
$$= m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$
$$= m\,\frac{a-1}{a}\cdot\frac{b-1}{b}\cdot\frac{c-1}{c}\ldots = \varphi(m).$$

Il y a donc autant de racines primitives que de nombres premiers à m. C'est ce qu'il est facile de prouver sans passer par l'équation précédente.

On sait, en effet, que $x^m - 1 = 0$ est satisfaite par

$$x = \cos\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1},$$

et comme

$$\left(\cos\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}\right)^i = \cos\frac{2\pi i}{m} + \sin\frac{2\pi i}{m}\sqrt{-1},$$

on reconnaît tout de suite que $\cos\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}$ est racine primitive. La formule des racines est donc

$$\cos\frac{2i\pi}{m} + \sin\frac{2i\pi}{m}\sqrt{-1}.$$

Il en est de même pour $\cos\frac{2h\pi}{m} + \sin\frac{2h\pi}{m}\sqrt{-1}$, si h est un nombre déterminé premier à m; mais cette racine ne serait pas primitive si h n'était pas premier à m. Chacun développera facilement ces propositions.

On peut consulter, à ce sujet, les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, de M. Cauchy, 1829.

La méthode donnée plus haut s'étend à l'équation $x^m - 1 = py$, le nombre p étant premier. C'est en cela, surtout, que consiste son utilité.

QUESTIONS SUR LA NUMÉRATION (*).

1. Problème. *Trouver la somme des n premiers termes de la série dont le terme général est na^n; a étant un nombre quelconque.*

Solution. Soit

$$S_{n+2} = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots\ldots (n+1)a^{n+1},$$
$$S_{n+1} = a + 2a + 3a^2 + \ldots + na^n;$$

d'où

$$S_{n+2} - S_{n+1} = (n+1)a^{n+1}.$$

Faisons

$$S_{n+1} = a^{n+1}(n\varphi a + \psi a) + C;$$

$\varphi(a)$ et $\psi(a)$ sont des fonctions à déterminer, et C une constante arbitraire; on aura

$$S_{n+2} = a^{n+2}[(n+1)\varphi(a) + \psi a] + C;$$

d'où

$$S_{n+2} - S_{n+1}$$
$$= a^{n+1}[n(a-1)\varphi a + a\varphi(a) + (a-1)\psi(a)] = a^{n+1}(n+1).$$

On doit donc avoir

$$(a-1)\varphi a = 1; \qquad a\varphi(a) + (a-1)\psi a = 1;$$

on en tire

$$\varphi(a) = \frac{1}{a-1}, \quad \psi(a) = \frac{-1}{(a-1)^2};$$

donc

$$S_{n+1} = \frac{a^{n+1}[n(a-1)-1]}{(a-1)^2} + C.$$

(*) *Arithmétique* de M. J. Bertrand.

Supposons que pour $n = 0$, on ait

$$S_1 = 0,$$

alors

$$C = \frac{a}{(a-1)^2};$$

donc

$$S_{n+1} = \frac{a^{n+1}[n(a-1)-1]+a}{(a-1)^2}.$$

Observation. La solution *directe* se trouve par les méthodes du calcul aux *différences finies.* (*Voir* le précieux *Traité de Calcul différentiel* de LACROIX, tome III, page 138, 2e édition; 1819.)

L'éloge de cet académicien, homme de bien, qui a rendu des services éclatants à la science et à l'enseignement, n'a pas encore été prononcé. Il en est de même pour l'illustre Legendre. Il est vrai que ces noms ne sont pas mêlés à nos discordes civiles; mais la gloire de ces noms est une richesse nationale. Pourquoi les frustrer d'un honneur qu'ils ont si bien mérité? Ayant égard à des circonstances impérieuses, l'Académie, dérogeant à ses statuts, pourrait charger un de ses membres d'acquitter une dette non sujette à prescription, et d'autant plus exigible, plus sacrée, qu'aucune réclamation ne peut venir d'outre-tombe. Il est triste qu'un citoyen obscur ait besoin d'élever sa voix dans une cause qui devrait compter publiquement pour avocats les Biot, les Cauchy et les Lamé.

2. PROBLÈME. *Combien y a-t-il de chiffres dans la suite naturelle des nombres, depuis 1 jusqu'à $10^{n+1}-1$?*

Solution. Depuis 10^n jusqu'à $10^{n+1}-1$, on rencontre $10^{n+1}-10^n$ ou 9.10^n nombres de $n+1$ chiffres; et, par conséquent, $9(n+1)10^n = 9n.10^n + 9.10^n$ chiffres. Il faut *sommer* depuis $n = 0$; dans le problème précédent, faisant $a = 10$, on obtient

$$9S_{n+1} = \frac{10^{n+1}(9n-1)+10}{9},$$

$$9S.10^n = 10^{n+1} - 1,$$

$$9S_{n+1} - 9S.10^n = n.10^{n+1} + \frac{8.10^{n+1}+1}{9}$$

$$= (n+1)10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9};$$

d'où l'on déduit cette règle :

Écrivez $n+1$ *zéros à la droite du nombre* $n+1$, *et au-dessus de chaque zéro, écrivez l'unité; faites la soustraction; le reste est le nombre des chiffres cherché.*

Exemple. Combien y a-t-il de chiffres depuis 1 jusqu'à 99999? Ici $n=4$; écrivez 500000, retranchez 11111, et le reste 488889 est le nombre de chiffres demandé.

3. PROBLÈME. *Trouver le nombre des chiffres de la suite naturelle des nombres depuis* 1 *jusqu'au nombre quelconque* N.

Solution. N est compris entre 10^{n+1} et 10^{n+2}; soit donc $N = 10^{n+1} + k$. Le nombre de chiffres de 1 à $10^{n+1}-1$ est $(n+1)\,10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9}$ (problème précédent). Il existe $k+1$ nombres depuis 10^{n+1} jusqu'à $10^{n+1}+k$, chacun de $n+2$ chiffres; ainsi le nombre total des chiffres est

$$(n+1)\,10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9} + (k+1)(n+2).$$

4. PROBLÈME. *Écrivant tous les nombres de la suite naturelle, de droite à gauche, à la suite les uns des autres, on demande le chiffre qui occupe un rang désigné.*

Solution. Supposons qu'on demande le chiffre 1849^{ième}

à partir de la gauche, cherchons le nombre auquel ce chiffre appartient; à cet effet il faut, dans l'expression $(n+1)\,10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9}$, donner à n une valeur telle, que l'expression approche le plus possible de 1849 ; cette valeur est $n=1$: donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie est compris entre 99 et 999. Le premier 9 à droite de 999, occupe le 189^{ième} rang à partir de la gauche; il faut donc encore compter 1660 chiffres. Le produit $(k+1)(n+2)$ ou $3(k+1)$ égal le plus possible à 1660, on a $k=552$; ce qui donne $3(k+1)=1659$. Ainsi, le chiffre cherché est le premier à gauche de 1553, c'est-à-dire 1.

5. *Autrement.* On a l'identité

$$n+(n-1)(a-1)+(n-2)a(a-1)+(n-3)a^2(a-1)$$
$$+(n-4)a^3(a-1)+\ldots+a^{n-2}(a-1)=1+a+a^2+\ldots a^{n-1}.$$

Supposons qu'on demande tous les chiffres de la suite naturelle depuis 1 jusqu'à 99999. Si tous ces nombres avaient cinq chiffres, on aurait 5.99999 ou 500000 — 5 chiffres.

Les nombres d'un seul chiffre donnent de trop .	4.9	chiffres;
Les nombres de deux chiffres	$3.9.10$	
Les nombres de trois chiffres	$2.9.10^2$	
Les nombres de quatre chiffres	$1.9.10^3$	

On a donc de trop, sur 500000,

$$5+4.9+3.9.10+2.9.10^2+1.9.10^3=11111;$$

d'après l'identité, en faisant $n=5$ et $a=10$; donc le nombre de chiffres est $500000-11111=488889$, comme on trouve par la règle de ci-dessus.

QUESTIONS SUR LA NUMÉRATION (*) ET SUR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

1. *Lemme.* $\dfrac{1-x}{1-x-x^2}$ développé, par les méthodes connues, suivant les puissances ascendantes de x, donne la série récurrente

$$1+2x+3x^2+5x^3+8x^4+13x^5+\ldots;$$

l'échelle de relation est $(1,1)$; le terme général est

$$\frac{1}{4\sqrt{5}}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}\right];$$

on a

$$4\sin 18^\circ = -1+\sqrt{5}.$$

2. *Question.* Faisant, dans la série précédente, $x=1$, combien y a-t-il de termes qui ont le même nombre donné de chiffres?

Réponse. Concevons la série partagée en groupes de nombres de *un* chiffre, de *deux* chiffres, de *trois* chiffres chacun, et ainsi de suite. Supposons qu'un de ces groupes commence par les deux nombres suivants 10^m+A_1, 2.10^m+A_2; A_1 et A_2 étant chacun moindre que 10^m; le premier chiffre à droite de 10^m+A_1 est 1, et ce même premier chiffre est 2 dans le nombre 2.10^m+A_2; d'après la loi de formation, les cinq nombres suivants sont :

$$3.10^m+A_1+A_2,\ 5.10^m+A_1+2A_2,\ 8.10^m+2A_1+3A_2,$$
$$13.10^m+3A_1+5A_2,\ 21.10^m+5A_1+8A_2;$$

(*) *Traité d'Arithmétique;* par M. J. Bertrand, p. 7 et 64; 1849.

il y a donc *au moins* cinq nombres de $m+1$ chiffres, et le sixième est de $m+2$ chiffres, et commence aussi à droite par 1, tandis que le suivant commence par 2; or ceci existe dans le premier groupe, où $m=0$; donc aussi dans tous les groupes suivants. Si $A_1 + A_2$ est égal ou supérieur à 10^m, le troisième nombre sera $4.10^m + B_1$, et ensuite $6.10^m + B_1 + A_2$, $1^{m+1} + 2B_1 + A_2, \ldots$; alors le groupe de $m+1$ chiffres ne renfermera que *quatre* termes. Ainsi, il y a au *plus cinq termes* qui ont le même nombre de chiffres, et *quatre termes* au moins; tels sont: 1597, 2584, 4181, 6765, 10946.

3. *Question*. Combien le $n^{ième}$ nombre de la série a-t-il de chiffres?

Réponse. En mettant la valeur de n dans le terme général donné ci-dessus, on trouve la valeur de ce terme, et, par conséquent, le nombre de ses chiffres; mais il y a un moyen plus simple. On a

$$\log 2 \sin 18^\circ = \log.\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \bar{1},791012;$$

donc

$$\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0,208988; \quad \log\sqrt{5} = 0,349485,$$

$$(n+1)\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \log\sqrt{5} = n.0,208988 + \bar{1},859503 = A;$$

la valeur de n fait connaître la caractéristique du logarithme, et, par conséquent, le nombre des chiffres, à *une unité près;* car la seconde partie du terme général, quoique fractionnaire, et allant sans cesse en décroissant, peut augmenter d'une unité le nombre entier de la première partie.

Les logarithmes de la première partie du terme général croissent suivant une progression arithmétique dont la raison est, 0,068491.

4. *Question*. Un terme de la série étant donné, trouver son quantième.

Réponse. D'après le terme général, il faudrait résoudre une équation exponentielle. Soit p le nombre des chiffres du nombre donné; il appartient au groupe d'ordre p (2); si chaque groupe contenait *cinq termes*, le quantième du nombre serait un des nombres consécutifs de $5p-4$ jusqu'à $5p$: ainsi $5p$ est la limite supérieure du quantième n, et l'on voit de même que $4p$ est la limite inférieure. En substituant donc, dans le terme général, pour n tous les nombres entiers de $4p$ à $5p$, on trouvera la valeur de n qui correspond au nombre donné.

Autrement. Soit N le nombre donné; on pose $\log N = A$ (*voir* 3); d'où $n=\dfrac{-010497+\log N}{0{,}208985}$, division facile, puisqu'on ne prend que la partie entière.

5. *Lemme*. Tous les nombres de la série (1) sont premiers entre eux.

Corollaire. En cherchant le plus grand commun diviseur (*) de deux nombres consécutifs, le nombre d'opérations qu'il faut faire, avant de parvenir au résidu *zéro*, est marqué par le quantième du petit nombre, et ce quantième a pour limite supérieure *cinq* fois le nombre des chiffres du petit nombre (4).

6. *Lemme*. Le rapport géométrique de deux nombres compris entre deux nombres consécutifs de la série, est compris entre 1 et 2.

7. N_1, N_2, N_3 étant trois nombres consécutifs de la série, si deux nombres sont compris entre N_2 et N_3, leur différence est moindre que N_1; car cette différence est moindre que $N_3 - N_2 = N_1$.

(*) Pourquoi ne pas appeler ce nombre *simplificateur*, d'après son usage le plus fréquent? on dit bien le *multiplicateur*.

8. Théorème. *Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, cinq fois le nombre des chiffres du petit nombre est une limite supérieure du nombre d'opérations à faire avant de parvenir au résidu zéro.*

Démonstration. Soit P le plus petit des deux nombres, et R le premier résidu; supposons P compris entre N_2, N_3, termes consécutifs de la série; si $\frac{P}{R}$ est supérieur à 2, R sera moindre que N_2 (6); si $\frac{P}{R}$ est moindre que 2, R peut aussi être compris entre N_2 et N_3; mais alors le résidu suivant $P - R$ est moindre que N_1 (7); ainsi, le nombre d'opérations ne peut surpasser celui qu'il faudrait faire s'il s'agissait de N_3 et N_2; donc, etc.

Remarque. C'est M. Lamé qui a découvert cette limite ingénieuse (*voir* tome IV; Finck, 71; Lionnet, p. 617). Pourquoi le judicieux auteur du *Traité d'Arithmétique* n'a-t-il pas saisi cette occasion de faire connaître à ses jeunes lecteurs le nom d'un Français si célèbre dans l'Europe savante? Cette répugnance invincible qu'on remarque chez les géomètres français pour toute citation de noms propres, pourrait figurer comme *onomatophobie* dans une nosographie du système mental. Cette étrange aberration produit quelquefois des résultats fort singuliers. Ainsi, ce qui caractérise particulièrement l'École Polytechnique, c'est la haute importance qu'on y attache, et avec raison, à l'enseignement de la géométrie descriptive. Eh bien! je suis sorti de cette École sans avoir jamais entendu prononcer le nom du Lyonnais Desargues, créateur de la théorie stéréométrique, et j'en dois la première connaissance à l'ouvrage de M. Poncelet, mon illustre compatriote. Un demi-siècle s'est écoulé, et toujours même négligence de l'histoire de la science. Cette ignorance du passé contribue, avec d'autres causes, à entretenir le vice radical de notre époque, l'orgueil; c'est bien là le démon dont l'Évangile parle sous le nom de *légion* (saint Marc, ch. V, v. 9). En effet, ce vice unique engendre, recrute une légion de vices. Ce qui explique, soit dit en passant, comment on rencontre aujourd'hui tant d'hommes se croyant aptes, non à donner des lois à la société, à la gouverner, ce serait de leur part pure modestie, mais à la transformer complétement dans son essence, à créer même une nouvelle société de toutes pièces, subitement; toutefois, Dieu même a mis six jours à son œuvre : mythe sublime, qui nous enseigne que l'élément de toute création durable, c'est le temps. Déjà les Grecs disaient, dans un langage spirituel, *le temps ne respecte pas ce qu'on fait sans lui*. En France, nous faisons tout *sans lui;* aussi voyez comme cela dure! Sur toutes nos institutions, constitutions, on peut inscrire d'avance la célèbre épitaphe de Malherbe pour une jeune fille.

INSTITUT NATIONAL.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES
A DÉCERNER EN 1850.

Les travaux récents de plusieurs géomètres ayant ramené l'attention sur le dernier théorème de Fermat, et avancé notablement la question, même pour le cas général, l'Académie propose de lever les dernières difficultés qui restent sur ce sujet. Elle met donc au concours pour le grand prix de Mathématiques, à décerner en 1850, le problème suivant :

« *Trouver pour un exposant entier* QUELCONQUE *n les* *solutions en nombres entiers et inégaux de l'équation* $x^n + y^n = z^n$, *ou prouver qu'elle n'en a pas.*

» Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*. Les Mémoires devront être arrivés au secrétariat de l'Académie avant le 1[er] octobre 1850. Ce terme est de rigueur. Les noms des auteurs seront contenus dans un billet cacheté, qui ne sera ouvert que si la pièce est couronnée. »

(La Commission chargée de proposer le sujet du prix était composée de MM. Cauchy, Sturm, Arago, Poinsot, Liouville rapporteur. *Comptes rendus*, n° 2, 9 juillet 1849, tome XXIX, page 23.)

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA QUESTION FERMAT.

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, t. XVII. — M. Cauchy, *Mémoire sur la théorie des nombres*, p. 245 (1840). (Le Mémoire est de 1830.)

Journal de M. Crelle, t. XIX. — M. Jacobi (C.-G.-J.). (*Voir* un extrait dans le *Journal* de M. Liouville, t. VIII, p. 268; traduction de M. Faye, 1843).

Comptes rendus, t. XXIV. — M. Lamé, p. 310, 352, 569, 888; année 1847. M. Cauchy, p. 316, 347, 407, 414, 469, 516, 578, 633, 661, 943, 996, 1022. M. Liouville, p. 315, 899. M. Kummer; p. 899. M. Wantzel, p. 430.

Journal de Mathématiques (Liouville), t. V (1840). — M. Lebesgue, p. 184. M. Lamé, p. 197; impossibilité de $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. M. Lebesgue, p. 276-348; impossibilité de $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. M. Lebesgue, p. 49. M. Liouville, p. 360.

Journal de Mathématiques (Liouville), tome XII

(1847). — M. LAMÉ, p. 135; sur l'impossibilité de $x^5 + y^5 + z^5 = 0$. M. LAMÉ, p. 172; sur l'équation... $x^n + y^n + z^n = 0$. On démontre l'impossibilité pour $n = 5, 7, 11, 13, 19, 23$, et d'autres. M. KUMMER, p. 185; sur les nombres complexes (en latin; a paru en 1844).

Journal de M. Crelle, t. III (1828). — M. LEJEUNE DIRICHLET, p. 354; impossibilité de $x^5 + y^5 + z^5 = 0$.

Journal de M. Crelle, t. IX (1833). — M. LEJEUNE DIRICHLET, p. 390; impossibilité de $x^{14} + y^{14} - z^{14} = 0$.

Journal de M. Crelle, t. XVII (1837). — M. E. KUMMER, p. 203; *de æquatione* $x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$.

Nouvelles Annales, t. VIII (1847), p. 132.

EULER, *Éléments d'Algèbre*, t. II.

LEGENDRE, *Théorie des nombres*.

On sait que la question est ramenée à savoir si un nombre complexe composé peut être décomposé en facteurs premiers d'une seule manière ou de plusieurs manières.

THÉORÈMES DE FRENICLE, DE 1676, RÉINVENTÉS EN 1849.

Le *Traité des triangles rectangles en nombres* contient deux parties; la première partie a été imprimée en 1676, in-12, et réimprimée avec la seconde partie, en 1677, à la suite des *Problèmes d'Architecture* de Blondel, in-folio. On trouve ces deux parties dans le tome V des *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1729).

Voici trois propositions :

PROPOSITION XXVIII. *En tout triangle rectangle un des côtés est mesuré par* 4 (p. 164).

Proposition XXIX. *Tout triangle rectangle a un de ses côtés mésuré par* 5 (p. 165).

Proposition XXX. *L'aire de tout triangle rectangle est mesurée par* 6 (p. 165).

Depuis, ces théorèmes ont été démontrés dans les *Annales de Gergonne*, dans le *Journal* de M. Crelle et dans les *Nouvelles Annales*.

Ces propositions ont été réinventées et redémontrées en 1849. (Voir *Comptes rendus*, t. XXVIII, p. 581, 664 et 686.).

Frenicle de Bessy, membre de l'Académie dès 1666, est mort en 1675.

THÉORÈME SUR LE QUADRILATÈRE PLAN;

Par M. BRUNE,

Conseiller à la Chambre des Comptes, à Berlin (*).

(Journal de M. Crelle, t. XXII, p. 379; 1841.)

Théorème. *Par le milieu d'une diagonale d'un quadrilatère plan, on mène une parallèle à la seconde diagonale, et par le milieu de celle-ci une parallèle à la première diagonale. On joint le point d'intersection de ces deux parallèles aux quatre points milieux des quatre côtés du quadrilatère; le quadrilatère sera partagé en quatre quadrilatères équivalents.*

Nous laissons aux élèves studieux le soin de trouver la démonstration de ce théorème qui peut être très-utile dans l'arpentage.

(*) Combien y a-t-il à Paris de conseillers à la Cour des Comptes qui s'occupent de géométrie? On dirait pourtant qu'il y a quelque affinité entre des comptes et la science des calculs.

JOURNAL DE M. CRELLE, t. XXXII (1846)

(Voir t. VIII, p. 228).

QUATRIÈME CAHIER.

27. *Extraits de deux Lettres de* M. CHARLES HERMITE *à* M. C.-G.-J. JACOBI; 277-269 (janvier 1843), *sur la division des arguments dans les transcendantes abéliennes* (ne sont pas insérées dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville).

28. *Propositions sur les courbes de deuxième et troisième ordre; par* M. J. STEINER, à Berlin; 300-304 (juin 1845).

I. Par chaque point D d'une ellipse passent trois cercles de courbure osculant l'ellipse en trois autres points A, B, C; les quatre points A, B, C, D sont sur une même circonférence.

II. En prenant dans une ligne du troisième ordre trois points A, B, C à volonté, il passe en général par ces points neuf coniques K, dont chacune oscule la courbe dans quelque autre point; de ces neuf points d'osculation, trois sont réels et six imaginaires, et nous les désignerons par 3R et 6I; parmi les neuf coniques aussi, il y en a trois réelles et six imaginaires; parmi les neuf points d'osculation $3R + 6I$, il y en a toujours douze fois trois qui sont sur une même conique K_1 avec les points A, B, C; de ces douze coniques K_1, il y en a quatre réelles et huit imaginaires; et d'autres propositions sur les coniques. Une théorie analytique abrégerait considérablement les énoncés et les démonstrations de ce genre de propositions dont le nombre est illimité.

29. *Sur le quadilatère circonscrit au cercle; par* M. le professeur J. Steiner; 305-310.

On lit dans les traités de Géométrie qu'un quadrilatère n'est circonscriptible à un cercle que lorsque les *sommes* des côtés opposés sont égales; cette proposition est défectueuse et incomplète, et ne se rapporte qu'au quadrilatère convexe. Voici l'énoncé complet : Tout quadrilatère dans lequel la somme des deux côtés quelconques est égale à la somme des deux autres, ou dans lequel la différence des deux côtés quelconques est égale à la différence des deux autres, est circonscriptible à un cercle, et réciproquement. Discussion des divers cas.

30. M. Crelle. *Mémoire sur les différentes manières, etc.* (fin du Mémoire V, n° 26); 311-340 (janvier 1844).

31. *De residuis cubicis disquisitiones nonnullæ analyticæ, auct.* E. Kummer, prof. Vratislaviæ; 341-359.

L'auteur déclare n'avoir pas pu se procurer le travail de M. Lebesgue sur les résidus cubiques. (Liouville, t. IV, 9-59, 1839.)

32. *Développement d'une formule qui donne en même temps les nombres de* Bernoulli *et les coefficients de la série qui exprime la sécante* (en français); *par* M. O. Schlömilch, professeur à l'Université de Iena; 360-364.

Fac-simile d'un manuscrit de Newton.

Lettre en latin adressée à Leibnitz, en date de Cambridge le $\frac{16}{26}$ octobre 1693. Nous la donnons ici parce qu'elle jette du jour sur les relations de ces princes de la science :

« Litteræ tuæ, cum non statim acceptis responderem, e manibus elapsæ inter schedas meas diu latentes, nec in eas ante hesternum diem incidere potui. Id quod me moleste habuit, cum amicitiam tuam maximi faciam, teque inter summas hujus sæculi geometras a multis retro annis habuerim quemadmodum etiam data omni occasione testatus sim. Nam quamvis commercia philosophica et mathematica quam maxime fugiam, tamen metuebam ne amicitia nostra ex silentio decrementum acciperet, id que maxime cum Wallisius noster Historiam algebræ in lucem missurus, nova aliqua e litteris inseruit quæ olim per manus D. Oldenburgi ad te conscripsi, et sic ansam mihi dedit ea etiam de re ad te scribendo, postulavit enim ut methodum quandam duplicem aperirem quam litteris transpositis ibi celaveram. Quocirca, coactus sum qua potui brevitate exponere methodum meam fluxionum quam hac celaveram sententia : *Data æquatione quantitates quotcunque fluentes involvente, invenire fluxiones, et vice versa.* Spero autem me nihil scripsisse quod tibi non placeat, et siquid sit quod reprehensione dignum censeas ut litteris id mihi significes, quoniam amicos pluris facio quam inventa mathematica........ Volui me tibi amicum integerrimum esse et amicitiam tuam maximi facere. Vale. Datum Cantabrigiæ, octob. $\frac{16}{26}$ 1693. »

La lettre où Newton annonce à Leibnitz l'invention du calcul fluxionnel, sous une forme anagrammatique, est du 23 juin 1676; et Leibnitz a publié sa notation et hiérarchie différentielles, la première fois dans les Actes de Leipsig, en 1684. Il est évident que Newton était bien persuadé que Leibnitz avait inventé de son côté un calcul semblable au sien, et que l'idée d'un plagiat ne lui est jamais venue à l'esprit. C'est ce qu'il dit d'ailleurs dans le célèbre scolie de la première édition des *Principes.* Ce n'est qu'en 1699 que le brouillon Fatio de Duiller a soulevé une question de priorité en faveur de l'Angleterre, et a trouvé moyen d'envenimer la question par l'excitation de l'amour-propre national.

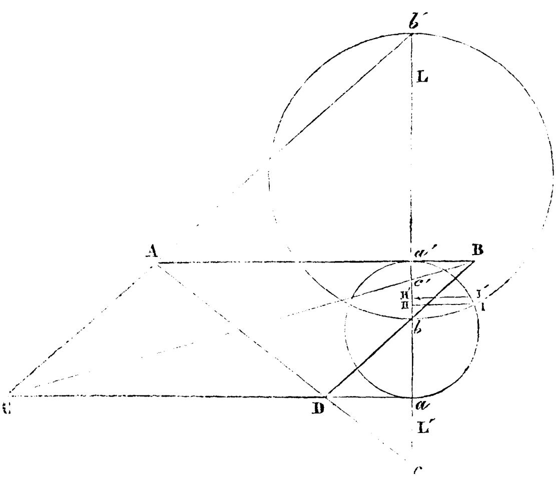
THÉORÈME PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1849

(Mathématiques élémentaires, voir p. 315);

RÉDIGÉ PAR M. E. LORIEUX,
Élève du lycée Monge.

Étant donné un parallélogramme ABCD, on mène une droite LL′ perpendiculaire à ses deux côtés opposés AB, CD, laquelle rencontre le premier côté en a', et le prolongement du second en a; cette droite rencontre les deux autres côtés AC, BD en b' et b, et les deux diagonales BC, AD en c' et c.

On demande de prouver que les circonférences des cercles décrits sur les trois segments aa', bb', cc', comme diamètres, ont les mêmes points d'intersection.



On pourra examiner si le théorème aurait encore lieu dans le cas où la droite LL′ serait oblique aux deux côtés AB, CD, au lieu de leur être perpendiculaire.

Construisons deux des cercles, par exemple ceux qui ont pour diamètres aa' et bb'. Soit I un de leurs points d'intersection. Abaissons de ce point sur $b'c$ la perpendiculaire IH. Dans le cercle $a'\mathrm{I}a$, $a'\mathrm{H} \times a\mathrm{H} = \overline{\mathrm{HI}}^2$; dans le cercle $b'\mathrm{I}b$, $b'\mathrm{H} \times b\mathrm{H} = \overline{\mathrm{IH}}^2$. Donc

$$a'\mathrm{H} \times a\mathrm{H} = b'\mathrm{H} \times b\mathrm{H}.$$

Or

$$b'\mathrm{H} = b'a' + a'\mathrm{H}, \quad \text{et} \quad b\mathrm{H} = a\mathrm{H} - ab.$$

Remplaçons ces lignes par leurs valeurs dans l'équation précédente, nous aurons

$$\begin{aligned} a'\mathrm{H} \times a\mathrm{H} &= (b'a' + a'\mathrm{H})(a\mathrm{H} - ab) \\ &= b'a' \times a\mathrm{H} + a'\mathrm{H} \times a\mathrm{H} - b'a' \times ab - a'\mathrm{H} \times ab, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en réduisant,

$$b'a' \times a\mathrm{H} = b'a' \times ab + a'\mathrm{H} \times ab.$$

Mais $a\mathrm{H} = aa' - a'\mathrm{H}$. Substituant, il vient

$$b'a'(aa' - a'\mathrm{H}) = b'a' \times ab + a'\mathrm{H} \times ab,$$

ou bien

$$(1) \qquad a'\mathrm{H}(ab + b'a') = b'a'(aa' - ab) = a'b' \times a'b.$$

Les triangles $\mathrm{D}ab$, $a'b\mathrm{B}$ sont semblables, puisque les lignes $\mathrm{A}a'$ et CD sont parallèles. Ils donnent la proportion

$$ab : a'b :: \mathrm{D}a : a'\mathrm{B}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} aa' : ab &:: \mathrm{D}a + a'\mathrm{B} : \mathrm{D}a \\ : a'b & \qquad\qquad : a'\mathrm{B}, \end{aligned}$$

d'où

$$ab = \frac{aa' \times \mathrm{D}a}{\mathrm{D}a + a'\mathrm{B}} \quad \text{et} \quad a'b = \frac{aa' \times a'\mathrm{B}}{\mathrm{D}a + a'\mathrm{B}}.$$

Les triangles semblables $b'Ca$ et $Ab'a'$ donnent

$$a'b' : b'a :: Aa' : Ca.$$

On a, par conséquent,

$$aa' : a'b' :: Ca - Aa' : Aa',$$

d'où

$$a'b' = \frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'}.$$

Remplaçons, dans l'équation (1), ab, $a'b'$ et $a'b$ par leurs valeurs

$$a'H\left(\frac{aa' \times Da}{Da + a'B} + \frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'}\right) = \left(\frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'}\right)\left(\frac{aa' \times a'B}{Da + a'B}\right),$$

ou bien

$$\begin{aligned} &a'H[Da(Ca - Aa') + Aa'(Da + a'B)] \\ &= a'A[aa'(Da + a'B) - aa' \times Da], \end{aligned}$$

ou bien encore

$$a'H(Da \times Ca + Aa' \times a'B) = aa' \times Aa' \times a'B,$$

d'où l'on tire

$$a'H = \frac{aa' \times Aa' \times a'B}{Da \times Ca + Aa' \times a'B}.$$

Traçons maintenant le cercle qui a cc' pour diamètre; soit I' un de ses points d'intersection avec le cercle dont le diamètre est aa'. Du point I' abaissons sur $b'c$ la perpendiculaire I'H', et calculons $a'H'$ comme nous avons calculé $a'H$. Pour cela, nous remarquerons qu'en changeant b en c et b' en c' dans l'équation (1), nous avons l'équation

$$(2) \qquad a'H'(ac + a'c') = a'c' \times a'c.$$

Les triangles $a'C'B$, $c'Ca$ sont semblables, puisque les lignes AB et CD sont parallèles. Ils donnent la proportion

$$a'c' : c'a :: a'B : Ca,$$

d'où

$$aa' : ca' :: a'B + Ca : a'B, \quad \text{et} \quad a'c' = \frac{aa' \times a'B}{a'B + Ca}.$$

Les triangles semblables Dac, Aca' donnent

$$ca : ca' :: Da : Aa'.$$

Par suite

$$aa' : ca :: Aa' - Da : Da$$
$$: ca' \qquad\qquad : Aa',$$

d'où

$$ca = \frac{aa' \times Da}{Aa' - Da}, \quad \text{et} \quad ca' = \frac{aa' \times Aa'}{Aa' - Da}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$a'H'\left[\left(\frac{aa' \times Da}{Aa' - Da}\right) + \left(\frac{aa' \times Aa'}{a'B + Ca}\right)\right] = \left(\frac{aa' \times aB}{a'B + Ca}\right)\left(\frac{aa' \times Aa'}{Aa' - Da}\right),$$

ou bien

$$a'H'[Da(aB' + Ca) + a'B(Aa' - Da)] = aa'(a'B \times Aa'),$$

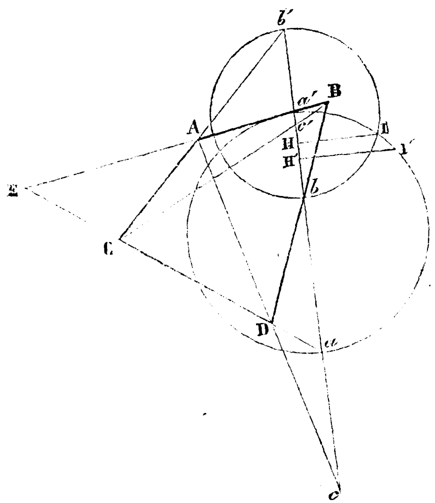
d'où l'on tire

$$a'H' = \frac{aa' \times a'B \times Aa'}{Da \times Ca + a'B \times Aa'}.$$

C'est la valeur que nous avions trouvée pour a'H. Donc le point H' coïncide avec le point H. Mais les points I et I' d'intersection se trouvent à la fois sur la perpendiculaire élevée en ce point et sur le cercle dont le diamètre est aa'. Donc ces deux points coïncident aussi. Il en est de même pour les points situés de l'autre côté, qui sont symétriques.

Pour trouver les équations (1) et (2), nous n'avons fait aucune hypothèse, si ce n'est que sur trois segments quelconques d'une ligne comme diamètres, nous avions décrit trois cercles, et que des points d'intersection nous avions abaissé une perpendiculaire sur cette ligne. Pour obtenir les valeurs de a'H et de a'H', nous ne nous sommes servi que du parallélisme des côtés AB et CD, et nullement de celui des deux côtés AC et BD, pas plus que de la perpendicularité de la ligne aa' sur les côtés AB, CD. Ces deux conditions de l'énoncé sont donc inutiles, et compliquent la question quand, suivant les règles de la méthode, on cherche à les faire entrer dans la démonstration. Il aurait fallu donner un trapèze ABCD et une sécante quelconque aa'.

Le parallélisme même des deux côtés AB, CD est-il une simplification? La démonstration n'est-elle pas aussi simple quand il s'agit d'un quadrilatère quelconque? Alors, en effet, tout se borne à considérer un seul triangle. Dans le cas d'un trapèze ou d'un parallélogramme, le sommet de ce triangle est à l'infini.



Soit ABCD un quadrilatère quelconque, et répétons les mêmes constructions. Soit E le point d'intersection des deux côtés AB et CD prolongés. Les équations (1) et (2) subsistent toujours. Il nous faut, comme précédemment, calculer les lignes ab, $b'a'$ et $a'b$ pour obtenir la valeur de a'H. Au lieu des triangles semblables, nous prendrons ici les transversales BD et Cb' par rapport au triangle Eaa'. La première nous donne

(M) $$ab \times a'B \times ED = EB \times ba' \times Da,$$

d'où

$$\frac{ab}{ab'} = \frac{BE \times Da}{a'B \times DE}.$$

Quand AB et CD sont parallèles, les segments BE, DE sont infinis et, par conséquent, égaux; il reste $\frac{ab}{a'b'} = \frac{Da}{a'B}$. ou la proportion que nous avaient donnée les triangles semblables Dab, ab'B. Nous poserons ce rapport égal à K. Ajoutons 1 aux deux membres, $\frac{ab + ba'}{ba'} = K + 1$. Mais $ab + ba' = aa'$; donc

$$\frac{aa'}{ba'} = K + 1, \quad \text{et} \quad ba' = \frac{aa'}{K + 1}.$$

Nous avons aussi

$$ab = aa' - ba' = aa' - \frac{aa'}{K+1} = \frac{aa'.K}{K + 1}.$$

La transversale Cb' nous donne

(N) $$a'b' \times AE \times Ca = b'a \times Aa' \times CE,$$

d'où

$$\frac{ab'}{a'b'} = \frac{Ca \times AE}{Aa' \times CH},$$

rapport que nous poserons égal à R. Retranchant 1 de part et d'autre, il vient

$$\frac{b'a - a'b'}{a'b'} = R - 1.$$

Mais $ab' - b'a' = aa'$; donc

$$\frac{aa'}{a'b'} = R - 1, \quad \text{et} \quad a'b' = \frac{aa'}{R - 1}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1), nous aurons

$$a'\text{H}\left(\frac{aa'.\text{K}}{\text{K}+1}+\frac{aa'}{\text{R}-1}\right)=\frac{\overline{aa'}^2}{(\text{K}+1)(\text{R}-1)}.$$

On peut diviser le tout par aa' et réduire cette équation, qui devient

$$a'\text{H}(\text{K}.\text{R}+1)=aa',\quad \text{d'où}\quad a'\text{H}=\frac{aa'}{\text{K}.\text{R}+1}.$$

Remplaçons K et R par leurs valeurs, et nous avons

$$a'\text{H}=\frac{aa'\times\text{CE}\times\text{DE}\times\text{A}a'\times\text{B}a'}{\text{AE}\times\text{BE}\times\text{C}a\times\text{D}a+\text{CE}\times\text{DE}\times\text{A}a'\times\text{B}a'}.$$

Si nous prenons le cercle décrit sur cc' comme diamètre, les transversales AC et BC par rapport au même triangle $\text{E}aa'$ nous donneront deux équations qui correspondront, la première à l'équation (M), la seconde à l'équation (N). La transversale $\text{A}c$ nous donne

$$(\text{M}')\qquad ac\times\text{DE}\times\text{A}a'=ca'\times\text{D}a\times\text{AE}.$$

La transversale BC nous donne

$$(\text{N}')\qquad a'c'\times a\text{C}\times\text{BE}=c'a\times\text{CE}\times\text{B}a'.$$

Nous avons en outre

$$ac'+c'a=aa'\quad\text{et}\quad a'c-ac=aa'.$$

Les équations (M') et (N') ne diffèrent des équations (M) et (N) que parce que B est changé en A et A en B. Tout étant du reste symétrique, la valeur de $a'\text{H}'$ ne différera de celle de $a'\text{H}$ que par ce seul changement. Mais, malgré ce changement, la valeur de $a'\text{H}$ reste la même; donc le point H' coïncide avec le point H, et les trois cercles ont les mêmes points d'intersection.

Nota. La question n'a pas été résolue au grand concours, et aucun prix décerné. Comme nous l'avons déjà observé en 1847 et 1848, la question élémentaire est plus difficile que celle des mathématiques supérieures. D'ailleurs, pourquoi confisquer toute la science au bénéfice de la géométrie analytique? Pourquoi ne pas proposer à la classe supérieure des questions de géométrie supérieure, de géométrie de l'espace (*)? TM.

SOLUTION DE LA QUESTION 198

(voir t. VII, p. 448);

PAR M. EUG. JUBÉ,
Professeur au lycée de Saint-Omer.

PROBLÈME. *Trouver la courbe enveloppe de toutes les hyperboles équilatères concentriques et coupant orthogonalement une même droite donnée.*

Solution. Je prends pour origine le centre commun des hyperboles, et pour axe des x une parallèle à la droite donnée. Celle-ci aura pour équation $y = a$, et l'équation d'une quelconque des hyperboles sera de la forme

$$x^2 - y^2 + Axy = B.$$

Une normale en un point $x'y'$ aura pour équation

$$y - y' = \frac{Ax' - 2y'}{2x' + Ay'}(x - x'),$$

et pour que cette ligne soit la droite donnée $y = a$, il faut que $Ax' - 2a = 0$ (le dénominateur ne pouvant pas être infini), ce qui donne $A = \frac{2a}{x'}$. Comme le point (a, x') est sur l'hyperbole, on a

$$x'^2 - a^2 + Aax' = B, \quad \text{d'où} \quad x'^2 + a^2 = B.$$

(*) A paraître prochainement, une solution élémentaire très-simple par voie de vérification de la question élémentaire.

Une quelconque des hyperboles équilatères, qui ont la droite donnée pour normale, sera donc déterminée par le point où cette ligne la coupe orthogonalement, et aura pour équation

$$x^2 - y^2 + \frac{2a}{x'} yx = x'^2 + a^2.$$

En différentiant par rapport à x', et éliminant cette variable entre l'équation de l'hyperbole et sa dérivée, on obtient pour l'équation de l'enveloppe

$$x^2 - y^2 - a^2 = 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}.$$

SOLUTION DU PROBLÈME 202

(voir t. VIII, p. 45);

PAR M. JANFROID,
Bachelier ès sciences mathématiques.

Si deux paraboles, qui ont une tangente commune et un foyer commun, se coupent sous un angle constant, leur point d'intersection décrira une circonférence de cercle.

Je prends pour axe des x une droite passant par le foyer commun et perpendiculaire à la tangente commune, et pour axe des y une perpendiculaire à l'axe des x au foyer F.

L'équation focale d'une parabole, le foyer étant l'origine, est

$$(y^2 + x^2)(k^2 + k'^2) = (k'y + kx - p),$$

ou, en divisant tous les termes par k^2, et posant $\frac{k'}{k} = m$ et $\frac{p}{k'} = n$,

$$(y^2 + x^2)(1 + m^2) = (my + x - n)^2.$$

Soit $x = -a$ l'équation de la droite AA'; la condition de tangence à cette droite est

$$n + 2a = 0,$$

alors l'équation de la parabole est

$$(1) \qquad (y^2 + x^2)(1 + m^2) = (my + x + 2a)^2.$$

Soit

$$(2) \qquad (y^2 + x^2)(1 + m'^2) = (m'y + x + 2a)^2$$

l'équation d'une seconde parabole, ayant le même foyer F, et tangente aussi à la droite AA'.

Exprimons que ces deux courbes se coupent toujours sous le même angle. Pour cela, soient x, y les coordonnées de leur point d'intersection, le coefficient angulaire de la tangente en ce point à (1) est

$$\alpha = -\frac{m^2 x - my - 2a}{y - mx - 2am},$$

et à (2)

$$\alpha' = -\frac{m'^2 - m'y - 2a}{y - m'x - 2am'}.$$

Soit V la tangente de l'angle constant sous lequel les tangentes doivent se couper, on devra avoir

$$\frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'} = \mathrm{V}.$$

Remplaçant et développant, on a

$$(3) \qquad \frac{(m - m')[(m + m')xy - y^2 - mm'x^2 - 2a(1 + mm')x - 4a^2]}{(1 + mm')[y^2 - (m + m')xy + mm'x^2 + 4a^2] - 2a(m - m')^2 x} = \mathrm{V}.$$

L'équation (1) développée donne

$$(4) \qquad m^2 - \frac{2y(x + 2a)}{x^2}\, m + \frac{y^2 - 4a(a + x)}{x^2} = 0.$$

Et comme l'équation (2) donnerait la même équation en m', il s'ensuit que les deux racines de (4) sont les valeurs de m et de m' ; on en tire

$$m + m' = \frac{2y(x+2a)}{x^2}, \quad mm' = \frac{y^2 - 4a(a+x)}{x^2},$$

$$m - m' = \frac{4}{x^2}\sqrt{a(y^2+x^2)(x+a)}.$$

Substituant dans (4), on trouve, en supprimant le facteur commun et élevant au carré,

$$\left(x - \frac{2a}{V^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2(1+V^2)}{V^4}.$$

On a ainsi un cercle dont les coordonnées du centre sont

$$x = \frac{2a}{V^2}, \quad y = 0, \quad \text{et} \quad R = \frac{2a\sqrt{1+V^2}}{V^4}.$$

Si l'angle est droit, le rayon du cercle devient nul, et l'on a $x^2 + y^2 = 0$, ce qui donne l'origine.

Si l'angle diminue, le rayon augmente et le centre s'éloigne; et si l'angle est nul, le rayon est infini et le centre se trouve à l'infini.

DEUXIÈME SOLUTION DU THÉORÈME 178

(voir t. VII, p. 144) ;

PAR M. LEMOINE,
Professeur à Nantes.

Par le foyer d'une ellipse on mène deux cordes rectangulaires, dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre; les deux cordes sont égales à deux diamètres conjugués de l'ellipse. Et si l'on mène par le centre, dans le cercle, un diamètre parallèle à l'une des cordes, il est partagé par l'autre corde en deux segments égaux aux rayons vecteurs qui vont du foyer aux extrémités d'un des diamètres conjugués dans l'ellipse. (STEINER.)

La solution donnée par M. Janfroid est fort élégante; la suivante semble plus directe.

Si par un point situé à l'intérieur d'un cercle on mène deux cordes perpendiculaires entre elles, la somme de leurs carrés est constamment égale à $8R^2 - 4h^2$, R étant le rayon, h la distance du point au centre. Donc, dans le cas de l'énoncé,

$$l^2 + l'^2 = 8a^2 - 4(a^2 - b^2) = 4a^2 + b^2 = (2a)^2 + (2b)^2.$$

Les deux cordes sont en conséquence égales à deux diamètres conjugués de l'ellipse, si elles sont comprises entre ses deux axes. Or, l étant $> l'$, on a $l < 2a$; par suite, la relation elle-même donne $l' < 2b$. Donc le premier point est démontré.

L'équation polaire de l'ellipse est

$$\rho = \frac{p}{1 + \frac{c}{a}\cos\omega},$$

celle du cercle sera

$$\rho^2 + 2c\rho\cos\omega - b^2 = 0.$$

Comme les racines de cette dernière équation, qui répondent à toute valeur donnée de ω, sont de signes contraires, leurs valeurs absolues répondent l'une à ω, l'autre à $\omega + \pi$. Donc

$$l = \rho' + \rho'' = 2\sqrt{c^2\cos^2\omega + b^2}.$$

Soient x et y les coordonnées de l'une des extrémités du diamètre égal à l dans l'ellipse rapportée à ses axes. Il viendra

$$\frac{l^2}{4} = c^2\cos^2\omega + b^2 = y^2 + x^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + x^2 = b^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

d'où

$$x^2 = a^2\cos^2\omega, \qquad x = \pm a\cos\omega.$$

Mais si l'on mène par le centre un diamètre sous l'angle ω avec l'axe focal, il sera perpendiculaire à la corde l', il la coupera donc à une distance du centre égale à $c\cos\omega$. Les deux parties du diamètre, dans le cercle, seront donc

$$a - c\cos\omega \quad \text{et} \quad a + c\cos\omega.$$

D'autre part, les deux rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités du diamètre dans l'ellipse, seront

$$\delta = a - \frac{cx}{a} = \alpha - c\cos\omega,$$

$$\delta' = a + \frac{cx}{\alpha} = a + c\cos\omega.$$

Ce sont bien les mêmes valeurs.

NOTE

Sur l'article relatif à la plus courte distance de deux droites, et sur un théorème de M. Dupin

(voir t. VIII, p. 236);

PAR M. LEBESGUE.

La formule (c), page 240, est due à M. Joachimsthal, qui l'a donnée dans le paragraphe VI de son Mémoire sur les lignes les plus courtes, et sur les lignes de courbure des surfaces du second degré. Cet intéressant Mémoire se trouve dans le tome XXVI du *Journal* de M. Crelle. J'avais eu le tort de ne pas le lire d'un bout à l'autre. La belle formule de M. Joachimsthal facilite bien des démonstrations. Je prendrai pour exemple le remarquable théorème de M. Dupin : « Trois surfaces qui se coupent deux à deux orthogonalement en tous les points des intersections, se coupent suivant des lignes de courbure. » (*Développements de Géométrie*, p. 333; 1813.)

Voici la démonstration même de M. Dupin, mais abrégée au moyen de la formule en question.

Soient

$$(1)\qquad X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

$$(2)\qquad X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = 0,$$

$$(3)\qquad X_2 dx + Y_2 dy + Z_2 dz = 0$$

trois surfaces; la condition de perpendicularité est exprimée par les équations

$$(a)\qquad \begin{cases} XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0, \\ X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0, \\ X_2X_1 + Y_2Y_1 + Z_2Z_1 = 0; \end{cases}$$

et pour que cela ait lieu en tous les points de l'intersection, il faut poser, en différentiant,

$$(b)\begin{cases} (X dX_1 + Y dY_1 + Z dZ_1) + (X_1 dX + Y_1 dY + Z dZ) = 0, \\ (X_1 dX_2 + Y_1 dY_2 + Z_1 dZ_2) + (X_2 dX_1 + Y_2 dY_1 + Z_2 dZ_1) = 0, \\ (X_2 dX + Y_2 dY + Z_2 dZ) + (X dX_2 + Y dY_2 + Z dZ_2) = 0. \end{cases}$$

Mais remarquons que les équations (1) donnent

$$(c)\qquad \begin{cases} dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz = 0, \\ dX_1\,dx + dY_1\,dy + dZ_1\,dz = 0, \\ dX_2\,dx + dY_2\,dy + dZ_2\,dz = 0. \end{cases}$$

De plus, l'intersection des surfaces (2) et (3) étant perpendiculaire à la surface (1), la tangente à l'intersection sera normale à la surface; de là résulte que les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ seront proportionnels aux cosinus

$$X : \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},\quad Y : \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},\quad Z : \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

ou dx, dy, dz proportionnels à X, Y, Z. Ainsi l'on aura, d'après les équations (*c*),

$$(d)\qquad \begin{cases} X dX_1 + Y dY_1 + Z dZ_1 = 0, \\ X dX_2 + Y dY_2 + Z dZ_2 = 0. \end{cases}$$

On doit conclure de là que les équations (*b*) se partagent :

la première donne

$$X_1 dX + Y_1 dY + Z_1 dZ = 0 \tag{e}$$

avec l'une des équations (d).

Mais comme des équations

$$X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = 0, \quad X_1 X + Y_1 Y + Z_1 Z = 0$$

on tire

$$\frac{X_1}{Y dz - Z dy} = \frac{Y_1}{Z dx - X dz} = \frac{Z_1}{X dy - Y dx},$$

l'équation (e) devient

$$dX(Y dz - Z dy) + dY(Z dx - X dz) + dZ(X dy - Y dx) = 0,$$

ou bien

$$dx(Y dZ - Z dY) + dy(Z dX - X dZ) + dz(X dY - Y dx) = 0;$$

c'est-à-dire l'équation (1) des lignes de courbure.

COMPOSITIONS ÉCRITES

Des six séries dans lesquelles on a partagé les candidats à l'Ecole Polytechnique de Paris

(voir t. VII, p. 315).

Première série.

1°. En quoi consiste la similitude de deux systèmes de points?

Qu'entend-on par lever le plan d'un terrain dont on suppose, pour plus de simplicité, tous les points dans un même plan? Exposer comment on peut résoudre ce problème par la géométrie simple ou par la trigonométrie, sans entrer dans aucun détail d'instrument et d'appareil.

Trouver le lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote commune et un foyer commun.

2°. Attractions et répulsions électriques ; machine électrique.

Iode ; ses propriétés et sa préparation.

3°. Trouver les projections et le rabattement de l'intersection d'un plan et d'une surface engendrés par une droite glissant sur trois autres données de position.

Deuxième série.

1°. Diviser une demi-sphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle au grand cercle, base de la demi-sphère. Calculer à 0,01 près la distance du centre de la sphère à ce plan ; discuter et interpréter les trois racines de l'équation du problème.

Composition des couples ; réduction d'un système quelconque de forces à une force et un couple.

2°. Déclinaison et inclinaison de l'aiguille aimantée ; électrophore.

Soufre ; ses propriétés, son extraction.

3°. Trouver les projections des intersections successives d'une demi-sphère avec une droite qui se meut parallèlement à elle-même le long de la circonférence du grand cercle, base de la demi-sphère.

Troisième série.

Continuité des fonctions algébriques et logarithmiques, quand la variable varie d'une manière continue. Lieu géométrique des centres de gravité des trapèzes ayant même surface, deux angles droits et le côté perpendiculaire aux deux bases commun.

2°. Baromètre ; machine pneumatique.

Oxygène ; ses propriétés, sa préparation.

3°. Trouver les projections et le rabattement de l'intersection d'un plan avec la surface engendrée par une droite s'appuyant sur deux autres droites données et restant constamment tangente à un cylindre de révolution dont l'axe est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Quatrième série.

1°. But que l'on s'est proposé en introduisant les signes en trigonométrie.

Une ellipse tourne autour de son centre; trouver le lieu des intersections de son axe focal avec une tangente à cette ellipse qui reste constamment parallèle à une droite donnée.

2°. Condensateur électrique et pile voltaïque; leurs théories.

Carbone; ses propriétés, son extraction.

3°. Trouver les projections, le rabattement et la tangente en un point déterminé de l'intersection d'un plan avec la surface engendrée par un cercle vertical tournant autour d'une droite verticale située dans son plan et lui étant extérieure.

Cinquième série.

1°. Objet de la trigonométrie.

Si d'un point d'un plan on mène des tangentes à toutes les courbes du second degré passant par quatre points de ce plan, démontrer que toutes les cordes de contact se coupent en un même point.

2°. Attractions et répulsions électriques; machine électrique.

Iode; ses propriétés et sa préparation.

3°. Construire les projections de l'intersection d'un cylindre de révolution avec un cône de révolution ayant son sommet sur l'axe du cylindre et son axe perpendiculaire à celui du cylindre. Tracer le développement de cette courbe lorsque le cylindre est développé sur un plan.

Sixième série.

1°. Pourquoi introduit-on des quantités négatives dans les formules de la trigonométrie et de la géométrie analytique? Comment justifie-t-on leur emploi?

Par le point D où la directrice d'une parabole coupe son grand axe DX on mène une sécante quelconque DMM'; on demande de trouver le rapport des angles DFM, XFM'.

2°. Thermomètre; lois de la chaleur rayonnante.

Hydrogène; ses propriétés et sa préparation.

3°. Construire les projections de l'intersection d'un cylindre de révolution avec un cône de révolution ayant son sommet sur l'axe du cylindre et son axe perpendiculaire à celui du cylindre.

Tracer le développement de cette courbe lorsque le cylindre est développé sur un plan.

BIBLIOGRAPHIE (*).

Traité élémentaire de Cosmographie rédigé d'après le programme universitaire, à l'usage des élèves des classes de rhétorique, des candidats au baccalauréat ès lettres et à l'École militaire; par *B. Amiot*, professeur de mathématiques supérieures au lycée Monge (**). Paris, 1848, in-8°; XII et 282 pages; 7 planches gravées et un planisphère.

Sous le titre modeste de *Cosmographie*, on a ici le rudiment d'une bonne astronomie planétaire et stellaire.

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

(**) Redevenu lycée Saint-Louis.

Le savant auteur a dû faire beaucoup de recherches avant d'écrire, ce qui est rare en France, et il n'est pas dit qu'on en fasse même après avoir écrit. Il est si doux de rester persuadé, qu'à la façon des araignées, comme dit Bacon, on a tout tiré de soi-même! Nous signalons une heureuse exception. Nous essayerons prochainement de justifier cet éloge et d'indiquer quelques améliorations dont la rédaction et le contenu semblent susceptibles.

De novo systemate coordinatarum. Dissertatio mathematica, quam ad summos in philosophia honores ab amplissimo philosophorum ordine in Academia Fridericia Guilelmia Rhenana rite impetrandos scripsit et una cum thesibus adjectis die XVII mensis Martii A. MDCCCXLIX publice defendet Guilelmus Stammer, sod. ext. sem. Phys. Bonn. Bonnæ, MDCCCXLIX; in-8°; 58 p., 3 lithogr.

Voici en quoi consiste ce système: soient $x^2+y^2-1=0$ l'équation d'un cercle; X, Y les coordonnées d'un point M situé dans le plan du cercle, et MP, MP′ deux tangentes menées au cercle; F un point fixe pris sur l'arc PP′. Soient

$$FP=\varphi, \quad FP'=\varphi';$$

on trouve facilement

$$(1)\quad \begin{cases} X\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')=\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'); \\ Y\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')=\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'); \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi=\operatorname{arc\,tang}\sqrt{X^2+Y^2-1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{X}{Y}; \\ \varphi'=\operatorname{arc\,tang}\sqrt{X^2+Y^2-1}-\operatorname{arc\,tang}\frac{X}{Y}. \end{cases}$$

Si donc $F(x, y) = 0$ est l'équation d'une ligne plane, axes rectangulaires, en décrivant une circonférence de l'origine comme centre, avec le rayon $= 1$, à l'aide des formules (1), on peut remplacer les coordonnées x, y par les nouvelles coordonnées φ et φ', et *vice versâ*. Si l'équation de la courbe est exprimée selon le nouveau système, on passe à l'ancien système au moyen des formules (2). Toute la dissertation roule sur la discussion de la courbe donnée par l'équation $\varphi + a\varphi' = 0$. Dans le cas général, la courbe a plusieurs branches infinies qui touchent le cercle *axe* représenté par $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Comme pour tout autre système de coordonnées, il est probable qu'il y a des questions où celui-ci présente des facilités. Il ne peut s'étendre à la géométrie de l'espace, c'est un inconvénient. On peut remplacer le cercle axe par une conique quelconque; alors on n'a plus que des relations *différentielles* qui peuvent, dans certains cas particuliers, devenir algébriques. On en a un exemple dans le théorème de M. Chasles, sur les coniques homofocales (*voir* tome III, page 425).

La dernière page est intitulée *Vita*. L'auteur nous apprend qu'il est né le 10 juin 1826, à Lutzelbourg, dans la foi catholique; que sa mère, Dorothée Cramer, lui a enseigné les premiers éléments de calcul, et son père, Henri, les éléments des langues. En 1838, il est entré à l'*Athénée* de son endroit, et en 1845, il a été admis au nombre des étudiants de l'Université de Bonn. Il a fréquenté le cours de mathématiques de M. Plucker, le célèbre géomètre, aujourd'hui professeur de physique. Cet usage de donner ce genre de renseignements me paraît devoir être imité; il épargnerait des tourments aux biographes futurs, si le candidat acquiert de la célébrité, et, en tous cas, cela ne saurait nuire.

Il serait convenable d'exiger une dissertation mathématique des aspirants à l'enseignement de la philosophie. Prétendre enseigner cette science sans connaître les procédés et les méthodes de la haute géométrie est une prétention qui aurait paru souverainement absurde à Platon, Aristote, Descartes, Leibnitz, Gassendi, Spinosa, Malebranche, Kant, hommes compétents. Il est singulier qu'aucun de nos philosophes ne s'occupe de sciences, soit exactes, soit physiques ou naturelles. Pourtant, sans ces connaissances fondamentales, la philosophie, devenue une branche purement littéraire, dégénère en un beau parlage, fournissant matière à des écrits éloquents, à des livres plus ou moins amples, mais ne créant, ne fondant rien. Aussi les jeunes adeptes de cette école semblent, comme les *goules* des *Mille et une Nuits*, ne se repaître que de cadavres, et, sous le nom d'*histoire*, ne chercher qu'à *repenser* ce qu'ont pensé d'illustres morts, et qui, s'ils ressuscitaient, penseraient, le plus souvent, bien différemment. Si ce divorce entre la science et la philosophie se continue, celle-ci seule aurait à en souffrir et tomberait dans un grand discrédit; et toutefois la philosophie est un des plus nobles besoins de l'esprit humain.

COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE, professé à la Faculté des sciences de Paris; par *J.-A. Serret*, examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique. Paris, 1849; in-8° de 400 pages, 1 planche (chez Bachelier, libraire).

Ouvrage destiné à exercer une heureuse influence, dans les lycées, sur l'étude des mathématiques supérieures, admettant qu'on attache un sens à cette nouvelle dénomination. Les professeurs trouvent ici réunies des théories très-disséminées, formant par leur importance l'âme de la science. L'exposition est constamment élémentaire; car lorsque les échelons sont en nombre suffisant, bien placés et clairement indiqués, tout devient élémentaire, même les plus hautes abstractions de l'arithmologie, les calculs les plus compliqués de la *Mécanique céleste*. Nous aurons souvent occasion de citer cette importante production, d'enrichir nos *Annales* de ses résultats, d'en signaler les lacunes et même quelques légers défauts. Aux riches, on a le droit de demander beaucoup.

Analyse de l'ouvrage de Stewart (*), intitulé : QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX D'UN GRAND USAGE DANS LES HAUTES MATHÉMATIQUES ; par M. *Breton* (de Champ), ingénieur des Ponts et Chaussées. In-4° de 52 pages, 1849. (Extrait du *Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1848.)

Le titre anglais est : *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics; by* Mattew Stewart. Edimburgh, 1746. C'est ce premier ouvrage qui a établi tout de suite sa réputation. M. Gérono, mon corédacteur, a en portefeuille une traduction complète qu'il a faite, il y a plusieurs années, de cet ouvrage rare, même en Angleterre. Le problème qui est énoncé aux *Nouvelles Annales* (tome II, page 96) est extrait de cette traduction. Ce même problème a attiré l'attention de M. Breton, et nous a valu le travail distingué que nous devons faire connaître.

L'ouvrage de Stewart renferme soixante-quatre énoncés, et il n'en a démontré que *cinq*. Trois de ces propo-

---

(*) Né à Rothsay (Écosse), en 1717, la même année que d'Alembert; mort à Édimbourg, le 23 janvier 1785; il a eu pour successeur, dans la chaire de professeur à l'Université, son fils, le célèbre philosophe Dugald Stewart; succession tellement rare, qu'on n'en connaît encore que deux exemples dans les illustres familles de Bernouilli et de Herschel. Il est vrai que Louis Euler était un géomètre de grand mérite; mais son éclat se perd dans les rayons de l'auréole paternelle.

sitions, savoir : la quarante-quatrième, la quarante-sixième et la quarante-huitième, sont d'un énoncé extrêmement général; les autres propositions en sont des simples corollaires; il y a, en outre, quelques théorèmes particuliers. Le but du Mémoire est de démontrer que les *trois* propositions fondamentales sont *fausses* dans leur énoncé général, et ne sont vraies que pour les cas particuliers qui forment les autres propositions. Voici une de ces propositions analytiquement exposée.

Soient a_i, b_i les coordonnées rectangulaires données d'un point; l'indice i peut prendre les m valeurs de 1 à m, nombre entier donné; de sorte qu'on a $2m$ coordonnées de m points donnés. Soient α_p, β_p les coordonnées rectangulaires d'un point *cherché* et à déterminer; l'indice p peut prendre n valeurs de 1 à $n+1$, de sorte qu'il y a $2n+2$ coordonnées de $n+1$ points à déterminer. On suppose $n < m-1$; x, y sont les coordonnées d'un point quelconque du plan. Faisons

$$(x-a_i)^2+(y-b_i)^2=d_i^2,\quad (x-\alpha_p)^2+(y-\beta_p)^2=\delta_p^2.$$

Stewart avance qu'on peut toujours déterminer α_p, β_p, de telle sorte que l'on ait l'*identité*

$$(1)\qquad \frac{S.\,k_i d_i^{2n}}{k_1+k_2+\ldots k_m}=\frac{S.\,\delta_p^{2n}}{n+1},$$

où k_i présente un coefficient donné; dans le membre à gauche, le signe S est une somme où l'on prend i de 1 à m, et dans le membre à droite la somme s'étend de 1 à $n+1$. C'est la proposition quarante-quatrième. L'équation (1) est de degré $2n-1$ en x et y, et contient, par conséquent, $n(2n+1)$ coefficients, lesquels, devant s'annuler, fournissent autant d'équations entre $2n+2$ indéterminées; lorsque $n>1$, le nombre des équations dépasse le nombre des indéterminées; il reste donc $2n^2-n-2$ équations de conditions entre les données de la question. La proposition n'est donc vraie qu'autant que ces conditions subsistent, et M. Breton démontre que cela n'arrive pas toujours. Pour $n = 2$, on a dix équations entre six indéterminées; mais l'auteur fait un tel choix d'axes, qu'on n'a plus que huit équations symétriques entre six inconnues. En combinant habilement ces équations, l'auteur obtient une équation entre les données de la question, qui devrait être indépendante de ces données et disparaître d'elle-même, et il est facile de s'assurer qu'*en général* cela n'a pas lieu. Donc la proposition quarante-quatrième n'est pas exacte ; inexactitude qui affecte également les deux autres propositions fondamentales. Nous n'avons pas le temps de vérifier ces calculs; mais le talent et le soin consciencieux de l'opérateur sont des garanties. M. Breton aura rendu un grand service en signalant des erreurs qui remontent à un siècle, et que la grande autorité de Stewart a empêché de soupçonner. Cette *Analyse* est terminée par une table de concordance entre les soixante-quatre propositions de Stewart et les articles du Mémoire. A l'aide de cette table, nous donnerons successivement les principales propositions. Ce sont des exercices pour les deux géométries, synthétique et analytique.

QUESTIONS.

210. D'un point M pris dans le plan d'une conique, on mène deux tangentes MP, MP' à cette conique; r et r' étant les rayons de courbure en P et P', on a la proportion

$$\frac{\overline{MP}^3}{\overline{MP'}^3} = \frac{r}{r'}.$$

(UMPFENBACH.)

211. Si l'on prolonge le rayon de courbure d'une conique, à l'extérieur, d'une longueur égale à ce rayon, le cercle décrit sur ce prolongement comme diamètre coupe orthogonalement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à la même conique.

(STEINER.)

212. Soit DEF un triangle équilatéral circonscrit au triangle ABC; A, B, C sont respectivement sur DF, DE, EF. Appelons φ et γ les angles CBE, BCA, on aura

$$\mathrm{DE} = \mathrm{DF} = \mathrm{EF} = \frac{a \sin\varphi + b \cos\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma\right)}{\sin\frac{1}{3}\pi},$$

ou

$$a = \mathrm{BC}, \quad b = \mathrm{AC}.$$

Si en A, B, C on élève des perpendiculaires aux côtés du premier triangle équilatéral, on formera un second triangle équilatéral; la somme des aires des deux triangles équilatéraux est

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma\right)}{\sin\frac{1}{3}\pi};$$

lorsque le second triangle est nul, l'aire du premier est un maximum; le point de rencontre des trois perpendiculaires est le point dont la somme des distances aux trois sommets A, B, C est maximum. (FASSBENDER.)

213.

$$\log(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots a_nx^n + \ldots \quad a_n = -\frac{\mathrm{S}(n)}{n}.$$

Euler ?!

S(n) désigne la somme des diviseurs du nombre n.

214. Si l'on coupe un cône droit par un plan et qu'on projette la section sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône et mené par le sommet, la projection aura ce sommet pour foyer, et pour directrice la trace du plan sécant sur le plan de projection. (JULES VIEILLE.)

215. Par tout point A d'une conique passent quatre cercles osculateurs, ayant leurs points de contact en A, B, C, D; le centre de la conique est le centre de moyenne distance des trois points B, C, D.

(JOACHIMSTHAL.)

216. Dans un tétraèdre OABC trirectangle en O, la somme des carrés des tangentes des angles ABO, ACO est égale au carré de la tangente de l'angle dièdre qui a pour arête BC. (DE SAINT-VENANT.)

CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES, EN 1849

(voir t. VII, p. 338).

Composition d'analyse.

1°. Condition d'intégrabilité de l'équation

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

dans laquelle X, Y, Z désignent des fonctions de trois variables x, y, z.

2°. Étant donnée une surface, et par chaque point de cette surface une droite qui fait avec les axes coordonnés rectangulaires des angles dont les cosinus sont des fonctions continues des coordonnées de ce point, trouver les conditions pour qu'il existe une surface normale à toutes ces droites.

3°. Un système de rayons lumineux normaux à une même surface se réfléchit sur une surface donnée : démontrer que les rayons réfléchis sont aussi normaux à une même surface.

Composition de mécanique.

Deux points matériels pesants s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances; ils ont des vitesses initiales parallèles et dirigées dans un même plan vertical. Quel sera le mouvement de ces points?

THÉORIE DES LUNULES GÉOMÉTRIQUEMENT CARRABLES,

D'APRÈS M. TH. CLAUSEN, à Altona.

(Journal de M. Crelle, tome XXI, page 375; 1841.)

Soient deux secteurs de cercle *équivalents* et ayant même corde AB, les centres C et C′ étant du même côté de la corde commune; il est évident que l'aire comprise entre les deux arcs de cercle formant *lunule* est égale à l'aire du quadrilatère ABCC′.

Faisons

$AC = r$; angle $ACB = 2m\alpha$; $AC' = r'$; angle $AC'B = 2n\alpha$;

on a évidemment les deux équations

$$r^2 m = r'^2 n; \quad r \sin m\alpha = r' \sin n\alpha;$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad n^{\frac{1}{2}} \sin m\alpha = m^{\frac{1}{2}} \sin n\alpha.$$

Si m et n sont des nombres entiers, cette dernière équation s'exprime rationnellement en $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ (*voir* t. V, p. 223). Il s'agit donc de savoir quand cette équation est susceptible d'une solution *géométrique*.

Voici quelques cas :

(*a*) $m = 1; \quad n = 2;$

on obtient les lunules connues d'Hippocrate.

(*b*) $m = 1; \quad n = 3;$

l'équation (1) devient

$$\sqrt{3}\sin\alpha = \sin 3\alpha;$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right);$$

radical géométriquement construisible; on a, à peu près,

$$AC'B = 68°,5; \quad ACB = 205°,6.$$

(*c*) $m = 2; \quad n = 3;$

on a

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \frac{4\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha + 2} = \frac{3}{2};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{33} - 1}{8};$$

$$AC'B = 107°,2; \quad ACB = 160°,9 \text{ environ.}$$

(*d*) $m = 1; \quad n = 5;$

on a

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = \frac{-1 + \sqrt{(5 + 4\sqrt{5})}}{4};$$

$$AC'B = 46°,9; \quad ACB = 234°,4 \text{ environ.}$$

(*e*) $m = 3; \quad n = 5;$

on a

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{4\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{5}{3}};$$

d'où

$$\cos 2\alpha = -1 + \sqrt{\frac{5}{8}} + \sqrt{\frac{20}{3} + \sqrt{\frac{20}{3}}};$$

$$AC'B = 100^{\circ},8; \quad ACB = 168^{\circ} \text{ environ.}$$

Dans tous ces radicaux, il n'y a qu'un seul signe applicable à la question. Ainsi, outre la lunule d'Hippocrate, on a encore quatre nouvelles lunules géométriquement carrables. En existe-t-il encore d'autres?

Note. En projetant orthogonalement les lunules circulaires, on obtient des lunules elliptiques carrables. Si sur les côtés d'un polygone *équilatère* d'un nombre pair de côtés, on construit des segments égaux, alternativement à l'intérieur et à l'extérieur, on construit un polygone formé de côtés curvilignes, et ayant évidemment même aire que le polygone rectiligne.

CALCUL AUX DIFFERÉNTIELLES PARTIELLES (*). (Charpit).

On sait que ce sont des questions de physique qui ont donné naissance au calcul aux différentielles partielles inventé par d'Alembert et Euler; mais c'est à ce dernier et à Lagrange que ce calcul doit ses principaux progrès. Dans les équations aux différentielles partielles, une variable est considérée comme fonction de plusieurs autres

(*) On dit ordinairement aux *différences partielles;* mais Lacroix fait observer, avec raison, que le vrai mot est *différentielles partielles.*

variables *indépendantes* les unes des autres, tandis que dans les équations aux *différentielles ordinaires* plusieurs variables sont considérées comme fonctions d'une seule. Or les équations aux différentielles partielles sont dites *résolues* lorsqu'on peut les réduire à un système d'équations aux différentielles ordinaires. Cette réduction est le sujet des travaux de Lagrange dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, années 1772, 1779 et 1785. En 1772, il a indiqué comment il était possible de ramener les équations aux différentielles partielles du premier ordre à trois variables où les coefficients différentiels passent le premier degré, à des équations différentielles partielles du premier ordre et du premier degré à quatre variables; en 1779, il montre transitoirement, et en 1785, il démontre la résolution des équations différentielles du premier ordre linéaires, c'est-à-dire la réduction à des équations différentielles ordinaires. De sorte que la *résolution* des équations du premier ordre et non linéaires était trouvée. Toutefois, il paraît que Lagrange oublia sa découverte de 1772; car en 1785, il regarde cette *résolution* comme chose impossible. En effet, dans le Mémoire cité, on trouve, page 188, cette équation

$$1+X\frac{dz}{dx}+Y\frac{dz}{dy}=\cos\omega\sqrt{1+X^2+Y^2}\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

X et Y désignant des fonctions de x, y, z. Lagrange dit que cette équation n'est intégrable par *aucune méthode connue*, que lorsque $\cos\omega=0$; car alors elle devient *linéaire*. Un jeune géomètre, nommé Charpit, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 30 juin 1784, donna le premier, en suivant les indications de Lagrange, la réduction des équations aux différentielles partielles du premier ordre, non linéaires, entre m variables, à des équations différentielles ordinaires à $m+1$

variables. On lit dans Lacroix : « La mort enleva ce jeune homme au moment où il donnait de grandes espérances, et son Mémoire ne fut pas imprimé. » (*Calcul différentiel*, t. II, p. 548; seconde édition, 1814.)

Nous avons extrait ce qui précède d'un Mémoire que M. Jacobi a publié en 1842 dans le *Journal* de M. Crelle, sous ce titre : *Dilucidationes de æquationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum æquationibus differentialibus linearibus primi ordini*. Dans une note, au bas de la page 3, parlant de ce singulier *oubli* de Lagrange, il fait observer que les progrès de l'esprit humain sont si lents, que lorsqu'on a trouvé $A = B$ et $B = C$, il peut s'écouler un long intervalle avant que l'on conclue que $A = C$. Dans cette même note, M. Jacobi manifeste le désir que M. Liouville veuille faire des recherches dans les archives de l'Académie pour retrouver le Mémoire de Charpit (*), et l'insérer dans le *Journal des Mathématiques*. Nous sommes en 1849; sept années se sont écoulées, nous ne savons pas si ces recherches ont eu lieu et quel en a été le résultat. Nous croyons utile d'appeler de nouveau l'attention sur le désir exprimé par un illustre géomètre étranger, dans l'intérêt de la science, et qui est, en outre, pour nous un intérêt national. Les *Nouvelles Annales* accueilleront avec une vive satisfaction des renseignements biographiques sur Charpit, jeté prématurément hors d'une carrière qu'il aborda d'une manière si brillante. Cette perte est d'autant plus regrettable, que les grands géomètres, comme les grands poëtes, les grands artistes, s'annoncent presque toujours par des débuts marqués au coin du génie.

(*) Lacroix donne l'analyse de ce Mémoire, dès la première édition de son ouvrage, en 1798, le Mémoire existait donc encore à cette époque (*voir* t. II, première édition, p. 496 et 513).

SUR LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE,

D'APRÈS M. UMPFENBACH,
Professeur à Giessen.

(Journal de M. Crelle, tome XXVI, page 92; 1843.)

THÉORÈME. *Soient* ABC *un triangle plan; a, b, c les côtés respectivement opposés;* A *est constant. On a la relation constante $a^n = b^n + c^n$, où n est constant.*

On aura nécessairement $n = 2$, et $A = \frac{1}{2}\pi$.

Démonstration. La relation donnée fournit celle-ci :

$$\sin^n A = \sin^n B + \sin^n (A + B).$$

Faisant varier B, le membre à droite doit rester constant, et, par conséquent, les dérivées par rapport à B doivent être nulles. Les deux premières dérivées donnent

$$\sin^{n-1} B \cos B + \sin^{n-1}(A + B) \cos (A + B) = 0,$$

$$(n - 1) \sin^{n-2} B \cos^2 B - \sin^n B$$
$$+ \overline{n - 1} \sin^{n-2}(A + B) \cos^2 (A + B) - \sin^n (A + B) = 0;$$

remplaçant $\cos^2 B$ et $\cos^2 (A + B)$ par $1 - \sin^2 B$ et $1 - \sin^2 (A + B)$, et faisant les réductions, on obtient

$$(n - 1) [\sin^{n-2} B + \sin^{n-2} (A + B)] = n \sin^n A.$$

Cette équation devant subsister, quel que soit B, on doit donc avoir $n = 2$; alors

$$2 = 2 \sin^2 A, \quad \sin^2 A = 1, \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}\pi. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le théorème de Pythagore n'est donc pas susceptible d'être généralisé.

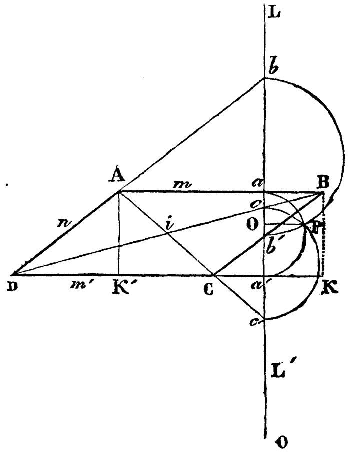
Observation. Ce théorème a donc, dans la géométrie, quelque analogie avec le théorème de Fermat, dans l'arithmologie.

SOLUTION

De la question de géométrie proposée en mathématiques élémentaires, au concours général de 1849;

PAR M. S.

Il s'agit de prouver que, *si une droite* LL', *perpendiculaire à deux côtés opposés d'un parallélogramme, rencontre ces deux côtés en deux points a, a', les deux autres côtés en deux points b, b', et les deux diagonales en deux points c, c', les circonférences de cercle décrites sur les trois segments aa', bb', cc', comme diamètres, se couperont toutes trois aux mêmes points.*



Première démonstration. On voit immédiatement que la question revient à prouver qu'il existe sur la droite LL' un point O tel, que les trois produits $Oa.Oa'$, $Ob.Ob$

et $Oc.Oc'$ sont égaux entre eux. Sous cette forme, la question est réduite à une simple vérification qui ne présente aucune difficulté. Il suffit d'exprimer cinq des segments Oa, Oa', etc., en fonction du sixième, considéré comme inconnu, et de voir si une valeur de ce sixième segment peut satisfaire à la fois aux deux équations

$$Oa.Oa' = Ob.Ob' = Oc.Oc'.$$

Prenons Oa' pour le segment inconnu, et désignons-le par x.

Appelons m et n les deux côtés DC, DA du parallélogramme; D l'angle qu'ils comprennent, et l la distance Da' de la transversale LL' au point D. Ces quatre quantités m, n, D et l constituent les données de la question : les trois premières déterminent, de forme et de grandeur, le parallélogramme, et la quatrième fixe la position de la droite LL' perpendiculaire aux côtés AB, CD.

Prenons le point O, hypothétiquement, au-dessous du point c' pour que tous les segments Oa, Oa', etc., soient de même signe; on aura

$$Oa = Oa' + a'a = x + aa' = x + n.\sin D,$$

$$Ob = Oa' + a'b = x + Da'.\operatorname{tang} D = x + l \operatorname{tang} D = x + l.\frac{\sin D}{\cos D},$$

$$Ob' = Oa' + a'b' = x + Ca'.\operatorname{tang} D = x + (l - m).\frac{\sin D}{\cos D},$$

$$Oc = Oa' + a'c = x + a'c.$$

Or BK étant perpendiculaire sur DC, on a, dans les deux triangles semblables BDK, cDa',

$$a'c = \frac{BK}{DK}\,Da' = l.\frac{n.\sin D}{m + n\cos D}.$$

Donc

$$Oc = x + \frac{l.n.\sin D}{m + n\cos D}.$$

Et pareillement,

$$Oc' = Oa' - a'c' = x - \frac{AK'}{CK'}\,Ca' = x - (l-m)\,\frac{n\sin D}{m - n\cos D}.$$

D'après ces expressions des six segments, on a

$$Oa.Oa' = x^2 + x.n\sin D,$$

$$Ob.Ob' = x^2 + x.\frac{\sin D}{\cos D}(2l-m) + l(l-m)\frac{\sin^2 D}{\cos^2 D},$$

$$Oc.Oc' = x^2 + x.n.\sin D\,\frac{m^2 - (2l-m)n\cos D}{m^2 - n^2\cos^2 D} - \frac{l(l-m)n^2\sin^2 D}{m^2 - n^2\cos^2 D}.$$

Égalant les expressions des deux produits $Oa.Oa'$ et $Ob.Ob'$, on a

$$x.n.\sin D = x\frac{\sin D}{\cos D}(2l-m) + l(l-m)\frac{\sin^2 D}{\cos^2 D}.$$

D'où l'on tire cette valeur de x,

$$x = \frac{l(l-m)\dfrac{\sin D}{\cos D}}{n\cos D - (2l-m)}.$$

L'équation

$$Oa.Oa' = Oc.Oc',$$

ou

$$x.n.\sin D = x.n.\sin D\,\frac{m^2 - (2l-m)n\cos D}{m^2 - n^2\cos^2 D} - \frac{l(l-m)n^2\sin^2 D}{m^2 - n^2\cos^2 D},$$

ou, en divisant par $n\sin D$,

$$x\left[1 - \frac{m^2 - (2l-m)n\cos D}{m^2 - n^2\cos^2 D}\right] = -\frac{l(l-m)n\sin D}{m^2 - n^2\cos^2 D},$$

donne

$$x = \frac{l(l-m)\dfrac{\sin D}{\cos D}}{n\cos D - (2l-m)};$$

c'est la même valeur que précédemment. Donc cette expression détermine la position d'un point O qui satisfait aux conditions

$$Oa.Oa' = Ob.Ob' = Oc.Oc'.$$

Le théorème est donc démontré.

Observation. Ce mode de démonstration s'applique au cas où la transversale LL' est supposée inclinée sur le côté CD; mais les expressions des segments que l'on a à calculer sont un peu moins simples par ce qu'elles se calculent dans des triangles obliques, au lieu de triangles rectangles, et qu'il y entre le sinus de l'inclinaison de la droite LL'.

Deuxième démonstration. La notion du rapport anharmonique fournit une démonstration très-simple du théorème. On sait que l'on appelle *rapport anharmonique* de quatre points a, b, c, d situés en ligne droite, une fonction de quatre segments compris entre ces points, telle que $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$; et *rapport anharmonique* de quatre droites A, B, C, D concourantes en un même point, une fonction des sinus de quatre angles compris entre ces droites, telle que $\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)}$.

La propriété du rapport anharmonique, dont nous allons nous servir, est celle-ci :

Théorème. *Quand quatre droites* A, B, C, D, *concourantes en un même point, sont rencontrées par une transversale quelconque, en quatre points a, b, c, d, le rapport anharmonique de ces quatre points est égal à celui des quatre droites.* C'est-à-dire que l'on a

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)}.$$

Corollaire. Il suit de là que : *Quand quatre droites* A, B, C, D *concourent en un même point, deux transversales quelconques les rencontrent en deux séries de* *quatre points dont les rapports anharmoniques sont égaux.*

Cela posé : soit i le point de rencontre des deux diagonales du parallélogramme. Considérons sur la diagonale DB les quatre points B, c, i, D : le faisceau formé par les quatre droites menées du sommet A à ces quatre points, et le faisceau de quatre droites menées du sommet opposé C aux mêmes points, ont leurs rapports anharmoniques égaux à celui de ces quatre points, et, par conséquent, égaux entre eux ; il s'ensuit, d'après le corollaire ci-dessus, que ces deux faisceaux de quatre droites rencontrent la transversale LL' en deux séries de quatre points a, c, c', b et b', c, c', a', qui ont le même rapport anharmonique. Par conséquent, si d'un point P, pris arbitrairement, on mène à ces points deux séries de quatre droites que j'appelle A, C, C', B et B', C, C', A', elles formeront deux faisceaux ayant le même rapport anharmonique. De sorte qu'on aura

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, B)} : \frac{\sin(C', C)}{\sin(C', B)} = \frac{\sin(B', C)}{\sin(B', A')} : \frac{\sin(C', C)}{\sin(C', A')}.$$

Prenons pour le point P l'un des points d'intersection des circonférences de cercle décrites sur les deux segments aa', bb' comme diamètres ; les deux droites A, A' seront rectangulaires, ainsi que les deux droites B, B'. Il s'ensuit que angle (A, B) = angle (A', B'), et que l'égalité précédente se réduit à

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(B', C)} = \frac{\sin(A', C')}{\sin(B, C')};$$

ou, en désignant par B'' le prolongement de la droite B au delà du point P,

$$\frac{\sin(C, A)}{\sin(C, B')} = \frac{\sin(C', A')}{\sin(C', B'')}.$$

Or l'angle (A, B') est égal à l'angle (A', B''); l'équation prouve donc que les deux droites C, C' sont placées *semblablement*, dans ces deux angles; c'est-à-dire que ces deux droites sont également inclinées sur les deux droites A et A' respectivement; d'où il suit qu'elles sont rectangulaires, de même que ces deux-là, et, par conséquent, que la circonférence décrite sur le segment cc', comme diamètre, passe par le point P. C. Q. F. D.

Observation. Nous n'avons pas tenu compte de la forme particulière du quadrilatère, c'est-à-dire du parallélisme de ses côtés opposés; de sorte que la démonstration doit s'entendre d'un quadrilatère quelconque. Ainsi le théorème est vrai pour tout quadrilatère coupé par une transversale.

Troisième démonstration. Nous nous proposons de prouver qu'il existe sur la droite LL' un point O satisfaisant aux équations

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} Oa.Oa' &= Ob.Ob',\\ Ob.Ob' &= Oc.Oc',\\ Oc.Oc' &= Oa.Oa'.\end{aligned}\right.$$

La première équation s'écrit

$$\frac{Oa}{Ob}=\frac{Ob'}{Oa'};$$

d'où

$$\frac{Oa}{Ob-Oa}=\frac{Ob'}{Oa'-Ob'};$$

ou

$$\frac{Oa}{Ob'}=\frac{ab}{b'a'}.$$

On tire, de même, de la deuxième équation,

$$\frac{Ob'}{Oc'}=\frac{b'c}{c'b};$$

et de la troisième,

$$\frac{Oc'}{Oa} = \frac{c'a'}{ac}.$$

Multipliant ces trois équations membre à membre, on a une équation dont le premier membre est égal à l'unité, et qui se réduit à

$$(b) \qquad ab.b'c.c'a' = b'a'.ac.c'b.$$

Cette équation exprime une relation entre les six points a, a', etc., liés entre eux par les équations (a). Réciproquement, quand six points ont entre eux la relation (b), il existe un point O qui satisfait aux équations (a); car les cinq premiers points a, a', b, b' et c étant donnés, on peut en trouver un sixième c'' tel, que l'on ait, à l'égard du point O déterminé par l'équation

$$Oa.Oa' = Ob.Ob',$$

les deux autres équations

$$Ob.Ob' = Oc.Oc'', \quad \text{et} \quad Oc.Oc'' = Oa.Oa'.$$

Mais il vient d'être démontré que ces trois équations comportent celle-ci,

$$ab.b'c.c''a' = b'a'.ac.c''b.$$

Et puisque, par hypothèse, on a l'équation (b), on conclut de là que

$$\frac{c''a'}{c''b} = \frac{c'a'}{c'b}.$$

Ce qui prouve que le point c'' se confond avec le point c'. Donc si l'équation (b) a lieu entre les six points a, a', b, b' et c, c', il existera un point O qui satisfera aux équations (a). Or l'équation (b) a lieu; car nous avons vu, dans la démonstration précédente, que les quatre points a, c, c', b ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre b', c, c', a'; de sorte qu'on a

$$\frac{ac}{ab} : \frac{c'c}{c'b} = \frac{b'c}{b'a'} : \frac{c'c}{c'a'},$$

ou

$$ac.c'b.b'a' = ab.b'c.c'a'.$$

Ce qui est l'équation (b). Donc les équations (a) ont lieu. C. Q. F. D.

Observation. Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la forme du quadrilatère; de sorte que la démonstration et les propositions qu'elle comporte, relativement aux équations (a) et (b), et aux circonférences décrites sur les trois segments aa', bb', cc', s'entendent d'un quadrilatère quelconque coupé par une transversale menée arbitrairement.

ROTATION D'UN CORPS AUTOUR D'UN POINT FIXE.

Lieu de l'axe du couple des forces centrifuges, lorsque le corps n'est sollicité par aucune force accélératrice;

PAR M. G.-J. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

M. Poinsot, dans sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, détermine le mouvement de l'axe du couple d'impulsion et celui de l'axe du couple des quantités de mouvement. Chacun de ces axes décrit un cône du second degré, dont la représentation donne une idée claire de la rotation du corps.

L'axe du couple des forces centrifuges décrit aussi un cône, mais qui est du quatrième degré. M. Poinsot n'en parle pas dans son Mémoire, et M. Briot n'en fait aucune mention dans les démonstrations qu'il a données des principaux théorèmes énoncés dans ce Mémoire. Cependant le mouvement de cet axe appartient à celui du corps. Nous croyons donc utile de remplir cette lacune, en donnant le calcul du cône des forces centrifuges.

Représentons, avec M. *Briot*, par p, q, r les composantes autour des axes principaux du corps de sa vitesse angulaire, et désignons par A, B, C ses trois moments d'inertie principaux.

Lorsque le corps n'est sollicité par aucune force accélératrice, son mouvement est déterminé par le système

$$(1)\qquad \begin{cases} C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)qp = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0, \\ A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)rq = 0; \end{cases}$$

et les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} (B - A)px - (C - B)rz = 0, \\ (B - A)qy - (A - C)rz = 0 \end{cases}$$

fixent à chaque instant la position de l'axe du couple des forces centrifuges.

Pour trouver le lieu de cet axe pendant le mouvement, il suffit d'éliminer entre (1) et (2) les variables p, q, r.

Dans ce but, multiplions les équations (1) par les quantités respectives Cr, Bq, Ap, puis par r, q, p, et faisons chaque fois la somme des résultats; nous trouvons, après avoir intégré,

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

L'élimination de p, q, r, entre les deux équations (2) et ces deux dernières, donne ensuite

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{A(A-u)(B-C)^2}{x^2}+\frac{B(B-u)(C-A)^2}{y^2} \\ & +\frac{C(C-u)(A-B)^2}{z^2}=0, \end{aligned} \right.$$

pour l'équation de la surface décrite par l'axe du couple des forces centrifuges, dans laquelle $\frac{k^2}{h}=\frac{1}{\delta}=\omega$. Donc :

Le lieu de l'axe du couple des forces centrifuges dans l'intérieur du corps est un cône du quatrième degré.

Dans la discussion de cette surface, supposons

$$A > B > C.$$

Il y a deux cas à distinguer, suivant que

$$\frac{1}{\sqrt{B}} > \delta > \frac{1}{\sqrt{A}}; \quad \text{ou que} \quad \frac{1}{\sqrt{C}} > \delta > \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

1°. Lorsque 2δ est compris entre l'axe moyen et l'axe minimum de l'ellipsoïde central, de sorte que $A > u > B$, l'équation (3) prend la forme

$$(4)\qquad \frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}-\frac{c}{z^2}=0,$$

dans laquelle a, b, c désignent la valeur absolue des coefficients des trois termes.

2°. Lorsque 2δ est compris entre l'axe moyen et l'axe maximum, ou que $B > u > C$, l'équation (3) devient

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}-\frac{c}{z^2}=0,$$

qu'on rend identique avec la précédente par le changement de $\frac{a}{x^2}$ en $\frac{c}{z^2}$, et réciproquement.

Il suffit donc de discuter l'équation (4).

La section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des z, est déterminée par

$$\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = \frac{c}{\gamma^2};$$

c'est une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport aux deux axes coordonnés, présentant un point multiple à l'origine, et renfermée entre deux asymptotes parallèles à l'axe des y, dont les équations sont

$$x = \pm \gamma \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

La section perpendiculaire à l'axe des y et située à la distance $y = \beta$ de l'origine est de même une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à ses deux axes, et comprise entre deux asymptotes parallèles à l'axe des xz déterminées par les équations $x = \pm \beta \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Enfin, le cône, étant coupé par un plan perpendiculaire à l'axe des x, présente une section entièrement différente des précédentes, dont l'équation est

$$\frac{b}{y^2} + \frac{c}{z^2} = \frac{a}{\alpha^2}.$$

Cette courbe, du quatrième degré, a un point isolé à l'origine; elle est munie de quatre asymptotes, deux à deux parallèles aux axes et équidistantes deux à deux de l'origine. Leurs équations sont

$$y = \pm \alpha \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad z = \pm \alpha \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

La section présente donc quatre branches, situées dans les angles qui se trouvent formés par les asymptotes, et tournent leur convexité vers les sommets de ces angles.

De ce qui précède, il résulte que :

Le lieu de l'axe du couple des forces centrifuges est une surface du quatrième degré, composée de quatre cônes, partant du centre fixe, leur sommet commun, et s'étendant dans les quatre angles dièdres formés autour de l'axe des x, en s'appuyant sur les deux autres axes par leurs arêtes extrêmes.

On peut consulter, pour l'étude complète du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, le *Traité de Mécanique* de POISSON, 2e édition, 1833, tome II, page 121 ; SAINT-GUILHEM : *Théorie nouvelle de rotation des corps,* insérée dans le *Journal* de M. LIOUVILLE, 1836 ; et avant tout, le savant Mémoire qui termine les *Éléments de Statique* de M. POINSOT, que ce géomètre, auteur de cette belle théorie, a présenté à l'Académie, le 19 mai 1834, et dont M. BRIOT a démontré les principaux résultats dans une thèse, qui fut publiée en 1842 dans le *Journal de Mathématiques*.

SOLUTION DE LA QUESTION 100

(Voir t. VIII, p. 107) ;

PAR M. J. MURENT (DE CLERMONT-FERRAND).

Inscrivant une droite dans l'angle des asymptotes d'une hyperbole, de telle sorte qu'elle intercepte un triangle dans cet angle, et un segment dans l'hyperbole ; la droite allant en s'éloignant du centre parallèlement à elle-même, la limite de l'aire du segment, divisée par l'aire du triangle, est égale à l'unité.

Démonstration. Concevons l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués, dont l'un passe par le milieu de la droite interceptée, l'autre étant alors parallèle à cette droite. Soient S l'aire du segment, T l'aire du triangle et A l'aire asymptotique variable ; nous aurons identiquement

$$\frac{S}{T} = \frac{T - A}{T} = 1 - \frac{A}{T};$$

et, en supposant que la droite s'éloigne indéfiniment du centre en restant parallèle à elle-même,

$$\lim \frac{S}{T} = 1 - \lim \frac{A}{T}.$$

Or, d'après une remarque de M. Terquem (*voir* t. V, p. 388), l'aire asymptotique, quoique devenant infinie à la limite, est cependant infiniment petite par rapport à l'aire du segment, et, à fortiori, par rapport à l'aire du triangle ; donc

$$\lim \frac{A}{T} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\lim \frac{S}{T} = 1.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 197

(Voir t. VII, p. 448) ;

PAR M. J. MURENT (DE CLERMONT-FERRAND).

Une tangente à une conique à centre, étant interceptée par deux autres tangentes parallèles ; le produit des segments formés sur la première tangente par le point de contact est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente. (HAMILTON.)

1. *Ellipse.* Prenons pour axe des x le diamètre mené au point de contact A de la première tangente CAC′, et pour axe des y le diamètre parallèle à cette tangente. Les axes coordonnés étant ainsi deux diamètres conjugués, l'équation de l'ellipse est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

a et b désignant les deux demi-diamètres OA, OB.

Les équations de deux tangentes parallèles quelconques TC, T′C′, seront

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

où m est variable; en sorte que le système de ces deux tangentes sera représenté par l'équation du deuxième degré

$$(1) \qquad y^2 - 2mxy + m^2 x^2 - a^2 m^2 - b^2 = 0.$$

La première tangente ayant pour équation

$$x = a,$$

si dans (1) on remplace x par a, l'équation résultante

$$y^2 - 2may - b^2 = 0$$

aura pour racines les ordonnées des points d'intersection C, C′. Le dernier terme montre que ces deux ordonnées AC et — AC′ sont de signes contraires et donne, pour leur produit,

$$-\mathrm{AC}' \times \mathrm{AC} = -b^2,$$

d'où

$$\mathrm{AC} \times \mathrm{AC}' = b^2.$$

2. *Hyperbole.* On choisira les axes coordonnés comme pour l'ellipse, et l'on arrivera de la même manière à l'équation

$$y^2 - 2may + b^2 = 0.$$

Le dernier terme étant positif, les deux ordonnées sont de même signe, et l'on a encore

$$AC.AC' = b^2.$$

SUR UN THÉORÈME DE COLLINÉATION SPHÉRIQUE;

PAR M. FÉLIX LAROCHE.

Le théorème de collinéation une fois démontré sur un plan (*voir* t. VIII, p. 295), on passe immédiatement au même théorème sur la sphère par la méthode des projections centrales.

Supposons au point O (même figure) une sphère tangente au plan. Par chaque ligne du triangle et le centre de la sphère, faisons passer des plans; chacun d'eux coupera la sphère suivant un grand cercle, et, à cause du contact, les droites perpendiculaires sur le plan donneront lieu à des arcs de grands cercles perpendiculaires sur la sphère. Donc le théorème subsiste. C. Q. F. D.

On peut d'ailleurs donner une démonstration par le calcul segmentaire.

THÉORÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION,

D'APRÈS M. CAYLEY.

(Journal de M. Crelle, t. XXXI, p. 213, 1846; en français.)

1. Soient n points dans l'espace désignés par les chiffres $1, 2, 3, \ldots, n$; en les joignant deux à deux, on obtient N_2 droites; prenant ces points trois à trois, on obtient N_3 plans. Menons un plan sécant, il coupera

les N_2 droites en N_2 points désignés par la droite sur laquelle il se trouve, par exemple, les points 12, 13, 23, etc., et il coupera les N_3 plans en N_3 droites désignées chacune par le plan sur lequel se trouvent, par exemple, les droites 123, 124, 234, etc. Il est évident que les trois points pq, qr, rp sont sur la même droite pqr; on a donc :

THÉORÈME I. *On peut former un système de* N_2 *points situés trois à trois sur* N_3 *droites.*

2. Soit $n=5$, on a $N_2=10$, $N_3=10$. Les cinq points 12, 23, 34, 45, 51 forment un pentagone, représentons-le par A; il a pour côtés, 123, 234, 345, 451, 512. Les cinq autres points 13, 35, 52, 24, 41 forment un second pentagone B, ayant pour côtés 135, 352, 524, 241, 413. Chacun des cinq côtés du polygone B passe par un sommet du polygone A; ainsi le côté 135 passe par le point 51, le côté 352 par le point 23, et ainsi de suite; donc le pentagone B est circonscrit au pentagone A, et *vice versâ*, le pentagone A est circonscrit au pentagone B; donc :

THÉORÈME II. *La figure composée de dix points, trois à trois sur dix droites, peut être considérée (même de six manières différentes) sous la forme de deux pentagones, inscrits et circonscrits l'un à l'autre.*

3. Soient $n=7$, $N_2=21$, $N_3=35$; on obtient les trois heptagones (12345671); (13572461); (15263741); c'est-à-dire formés par les sept points 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71, etc.; le premier est circonscrit au deuxième, le deuxième au troisième et le troisième au premier; et cette décomposition en trois heptagones peut se faire de cent vingt manières différentes. On a le théorème général suivant :

4. THÉORÈME III. *n étant un nombre premier, le système de* N_2 *points situés sur* N_3 *droites peut être consi-*

déré comme composé de $\frac{n-1}{2}$ *polygones de n sommets chacun, le premier circonscrit au deuxième, le deuxième au troisième, etc., et le dernier au premier, et cette décomposition peut se faire de* $\frac{1.2\ldots(n-2)}{n-1}$ *manières.*

On voit que ce théorème se rattache à la théorie des polygones étoilés.

Observation. Lorsque n n'est pas un nombre premier, il existe aussi des théorèmes, mais sans élégance.

TRANSFORMATION REMARQUABLE D'UNE FONCTION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

D'APRÈS MM. EISENSTEIN ET CAYLEY.

(Journal de M. Crelle, tome XXIX, page 54; 1845.)

THÉORÈME. *Soit*

$$u = a^2h^2 + b^2g^2 + c^2f^2 + d^2e^2 - 2ahbg - 2ahcf - 2ahde - 2bgcf - 2bgde - 2cdef + 4adfg + 4bceh;$$

faisons

$$(1)\quad A = \frac{1}{2}\frac{du}{da},\quad B = \frac{1}{2}\frac{du}{db},\quad C = \frac{1}{2}\frac{du}{dc},\ldots,\quad H = \frac{1}{2}\frac{du}{dh}.$$

Représentons par U *ce que devient u en remplaçant a, b, c,..., h par* A, B, C,..., H; *on a* $U = u^3$.

Démonstration. Faisons

$$a' = v_1a + v'_1e,\quad b' = v_1b + v'_1f,\quad c' = v_1c + v'_1g,\quad d' = v_1d + v'_1h,$$
$$e' = v_2a + v'_2e,\quad f' = v_2b + v'_2f,\quad g' = v_2c + v'_2g,\quad h' = v_2d + v'_2h.$$

Représentons par u' ce que devient u en y mettant d'abord a', b', c',..., h' au lieu de a, b, c,..., h; et, ensuite, pour a', b', c',..., h' les valeurs données ci-dessus; il vient

$$u' = (v_1 v'_2 - v_2 v'_1)^2 u.$$

Faisons

$$v_1 = v'_2 = ah - bg - cf - de, \quad v'_1 = -2(ad - bc),$$
$$v_2 = -2(eh - fg);$$

on aura

$$v_1 v'_2 - v_2 v'_1 = u, \quad \text{d'où} \quad u' = u^3.$$

Or, d'après les valeurs (1), on a

$$a' = \mathrm{H}, \quad b' = -\mathrm{G}, \quad c' = -\mathrm{F}, \quad d' = \mathrm{E},$$
$$h' = \mathrm{A}, \quad g' = -\mathrm{B}, \quad f' = -\mathrm{C}, \quad e' = \mathrm{D};$$

donc

$$\mathrm{U} = u^3.$$

Remarque. M. Eisenstein avait donné sans démonstration la formule suivante

$$(a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd)^3$$
$$= \mathrm{A}^2\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{B}^2\mathrm{C}^2 + 4\mathrm{AC}^3 + 4\mathrm{DB}^3 - 6\mathrm{ABCD};$$

A, B, C, D ayant les valeurs (1). (Crelle, tome XXVII, page 105; 1844.)

M. Cayley a démontré cette formule et l'a même considérablement généralisée, de cette manière :

Imaginons la fonction u

$$ax_1y_1z_1 + bx_1y_1z_2 + cx_1y_2z_1 + dx_1y_2z_2$$
$$+ ex_2y_1z_1 + fx_2y_1z_2 + gx_2y_2z_1 + hx_2y_2z_2.$$

Posons

$$x_1 = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2, \quad y_1 = \mu_1 y'_1 + \mu_2 y'_2, \quad z_1 = \nu_1 z'_1 + \nu_2 z'_2,$$
$$x_2 = \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2, \quad y_2 = \mu'_1 y'_1 + \mu'_2 y'_2, \quad z_2 = \nu'_1 z'_1 + \nu'_2 z'_2.$$

Faisant les substitutions, on obtient une fonction de la forme

$$a'x'_1y'_1z'_1 + b'x'_1y'_1z'_2 + \ldots + h'x'_2y'_2z'_2.$$

Remplaçant dans u les lettres a, b, c, ..., h par a', b', c', ..., h', il vient

$$u' = (\lambda_1\lambda'_2 + \lambda_2\lambda'_1)^2 (\mu_1\mu'_2 - \mu_2\mu'_1)^2 (\nu_1\nu'_2 - \nu_2\nu'_1)^2 u.$$

En effet, changeant seulement z_1 et z_2, on obtient, comme ci-dessus,

$$(\nu_1\nu'_2 - \nu_2\nu'_1)^2 u;$$

et changeant dans celle-ci y_1 et y_2, il suffit de multiplier le résultat par $(\mu_1\mu'_2 - \nu_2\nu'_1)^2$, etc.

NOUVELLE DÉMONSTRATION

De l'irréductibilité de l'équation $1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = 0$; p étant un nombre premier;

D'APRÈS M. L. KRONECKER,
Étudiant à Berlin.

(Journal de M. Crelle, tome XXIX, page 250; 1845.)

1. *Lemme.* p étant un nombre premier, soit α une racine imaginaire de l'équation $x^p - 1 = 0$; a, $a_1 \ldots a_{p-1}$ sont p nombres entiers donnés; faisant

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} = f(x),$$

et

$$a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = f(1) = \text{A},\quad f(\alpha) f(\alpha^2) \ldots f(\alpha^{p-1}) = \text{B}.$$

On sait que B est un nombre rationnel entier; on aura

$$\text{B} - \text{A}^{p-1} = \dot{p}\ (*).$$

Démonstration. Posant

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^{p-1} = f(x),$$

(*) Je désigne par le point leibnitzien placé au-dessus d'un nombre le multiple de ce nombre.

on aura

$$f(x)f(x^2)\ldots f(x^{p-1}) = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1 x + \mathrm{M}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{M}_n x^n + \ldots$$

Faisant successivement x égal à 1, α, $\alpha^2 \ldots \alpha^{p-1}$, le membre à gauche devient d'abord A^{p-1}, et pour les autres racines le produit reste toujours égal à B; il n'y a de changement que dans l'ordre des facteurs. Donc la somme de ces membres à gauche est $\mathrm{A}^{p-1} + (p-1)\mathrm{B}$. Prenons dans le membre à droite le terme général $\mathrm{M}_n x^n$, la somme sera

$$\mathrm{M}_n\left[1 + \alpha^n + \alpha^{2n} + \ldots + \alpha^{(p-1)n}\right].$$

On sait que lorsque n n'est pas un multiple de p, ce qui multiplie M_n est nul; et lorsque n est un multiple de p, ce coefficient est égal à p; donc

$$\mathrm{A}^{p-1} + (p-1)\mathrm{B} = p(\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_p + \mathrm{M}_{2p} + \ldots);$$

de là

$$\mathrm{B} - \mathrm{A}^{p-1} = \dot{p}. \qquad\qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Théorème II. *La fonction* $\mathrm{X} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$, *où p est un nombre premier, ne peut être le produit de deux fonctions rationnelles à coefficients entiers.*

Démonstration. Soit

$$\mathrm{X} = \varphi(x)\ \psi(x),$$

φ et ψ sont des fonctions rationnelles à coefficients entiers; ils ne peuvent avoir des coefficients fractionnaires (t. III, p. 47); faisant $x = 1$, on obtient

$$p = \varphi(1)\ \psi(1);$$

il faut que l'une de ces deux valeurs $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ soit égale à l'unité et l'autre à p. Supposons donc $\varphi(1) = 1$; α étant une racine imaginaire quelconque de $\mathrm{X} = 0$, on a, d'après le lemme,

$$\varphi(\alpha)\ \varphi(\alpha^2)\ldots\varphi(\alpha^{p-1}) - 1 = \dot{p};$$

car

$$A = \varphi(1) = 1.$$

En prenant pour α une racine commune à $X = 0$ et $\varphi(x) = 0$, on aurait donc $-1 = \dot{p}$, résultat absurde; donc, etc.

Remarque. Ce théorème fondamental est dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 599, § CCCXLI; et l'on en trouve aussi une démonstration dans Legendre. Celle de M. Kronecker semble la plus simple.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA QUESTION ARITHMÉTIQUE

(Voir p. 354);

PAR E. C.

Soit

$$S = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n;$$

d'où

$$S(1-q) = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n - nq^{n+1}$$
$$= \frac{q(q^n - 1)}{q-1} - nq^{n+1};$$

puis

$$S = \frac{q(1-q^n)}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} = \frac{q[1 - q^n(n+1) + nq^n]}{(1-q)^2}.$$

Lorsque $q = 1$, $S = \frac{0}{0}$; on prend, d'après la méthode connue, la dérivée seconde, et l'on trouve $S = \frac{n(n+1)}{2}$, comme cela doit être.

Note. Soit

$$(1) \qquad S = A_0 x^0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n;$$

de là

$$(2)\begin{cases} S(1-x) = x^0(A_0 - A_{-1}) + x(A_1 - A_0) + x^2(A_2 - A_1) + \ldots \\ \qquad + x^n(A_n - A_{n-1}) + x^{n+1}(A_{n+1} - A_n); \end{cases}$$

retranchant de la série (2) cette série, multipliée par x, on obtient

$$(3)\begin{cases} S(1-x)^2 = x^0(A_0 - 2A_{-1} + A_{-2}) + x(A_1 - 2A_0 + A_{-1}) \\ \qquad + x^2(A_2 - 2A_1 + A_0)\ldots x^n(A_n - 2A_{n-1} + A_{n-2}) \\ \qquad + x^{n+1}(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}) + x^{n+2}(A_{n+2} + 2A_{n+1} + A_n); \end{cases}$$

et, en continuant de même, on trouve

$$(4)\qquad S(1-x)^m = \sum_0^{n+m} \Delta_m A_p x^p.$$

$\Delta_m A_p$ désigne la différence $m^{ième}$ des coefficients. On sait que l'on a

$$\Delta_m A_p = A_p - m A_{p-1} + \frac{m(m-1)}{2} A_{p-2} + \ldots + (-1)^m A_{p-m},$$

et l'on rejette comme nuls les indices au-dessous de zéro et au-dessus de n; on ne les conserve que pour faire ressortir l'uniformité de la loi.

$\sum\limits_0^{n+m}$ indique la somme de tous les termes que l'on obtient en donnant à p successivement toutes les valeurs de 0 à $m+n$.

Il est évident que si la différence $m^{ième}$ des coefficients est constante, alors la série (4) est une progression géométrique; on tirera donc de l'équation (4) la valeur de S. Donc, lorsque $A_p = F(p)$, F représentant une fonction algébrique entière de p, on pourra toujours trouver la somme de la série (1).

Exemple :

$$\Delta_1 \text{ constant},\quad S(1-x) = \frac{\Delta_1 . x(1-x^n)}{1-x} + A_0 x^0 - A_n x^{n+1};$$

$$\Delta_2 \text{ constant},\quad S(1-x)^2 = \frac{\Delta_2 . x^2(1-x^{n-1})}{1-x} + A_0 x^0 + x(A_1 - 2A_0)$$
$$+ x^{n+1}(-2A_n + A_{n-1}) + A_n x^{n+2};$$

$$\Delta_3 \text{ constant},\quad S(1-x)^3 = \frac{\Delta_3 . x^3(1-x^{n-2})}{1-x} + A_0 x^0 + x(A_1 - 3A_0)$$
$$+ x^2(A_2 - 3A_1 + 3A_0) + \ldots$$
$$+ x^{n+1}(-3A_n + 3A_{n-1} + A_{n-2})$$
$$+ x^{n+2}(+3A_n - A_{n-1}) - A_n x^{n+3},$$

et ainsi de suite.

SIX PROPOSITIONS ARITHMOLOGIQUES DÉDUITES DU CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE;

PAR M. ALPHONSE DE POLIGNAC,
Élève de l'École Polytechnique.

L'opération qui sert à obtenir ce qu'on appelle le *crible d'Ératosthène* fournit un moyen commode d'étudier les nombres premiers au moyen de certaines suites que j'ai appelées *suites diatomiques* (*).

Soit la suite naturelle des nombres

$$(a)\left\{\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13, \\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ldots, \end{array}\right.$$

Si nous effaçons tous les nombres de deux en deux, à commencer par zéro, nous obtiendrons le tableau (a_1),

$$(a_1)\ \cancel{0},\ 1,\ \cancel{2},\ 3,\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ 9,\ \cancel{10},\ 11,\ \cancel{12},\ 13,\ \cancel{14},\ldots$$

(*) L'auteur avait d'abord adopté le nom de suites *distanciées*. Il conviendrait peut-être de les appeler suites *cribrogènes*. TM.

Nous avons toujours *un* nombre effacé compris entre deux conservés; donc, après cette première opération, ces permanences de termes effacés se succèdent comme les termes de la suite

(1) $\qquad\qquad 1, 1, 1, 1, \ldots,$

que nous appellerons *suite diatomique de* 2, ou première suite diatomique.

Si nous effaçons maintenant derechef de trois en trois, dans le tableau (a_1), nous obtenons le tableau (a_2) :

$$(a_2) \quad \begin{cases} \cancel{0},\ 1,\ \cancel{2},\ \cancel{3},\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{10}, \\ 11,\ \cancel{12},\ 13,\ \cancel{14},\ \cancel{15},\ \cancel{16},\ 17 \ldots \end{cases}$$

Nous avons le nombre effacé zéro, puis *trois* nombres effacés entre deux conservés, puis *un* seul effacé entre deux conservés, et ainsi de suite; de telle sorte que ces séquences de termes effacés se suivront dans cette seconde opération, comme les termes de la suite (2)

(2) $\qquad 1, 3;\ 1, 3;\ 1, 3;\ 1, 3;$ etc....

Nous appellerons cette suite, *suite diatomique de* 3, ou deuxième suite diatomique.

La suite diatomique de 5 serait

1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5.

On conçoit dès lors ce que nous entendons par le tableau (a_n), et par suite diatomique de P_n ou $n^{ième}$ suite diatomique, P_n désignant le $n^{ième}$ nombre premier.

Nous appelons *période du tableau* (a_n) la série des nombres consécutifs qui forment la période correspondante de la $n^{ième}$ suite, et nous entendons par *place d'un nombre, dans la période du tableau,* le rang de ce nombre dans la période considérée.

Ceci posé, nous avons les six propositions suivantes :

1°. Toute suite diatomique est périodique, et la période commence avec la suite.

2°. Le premier nombre du tableau (a_n), après lequel les séquences de termes rayés se reproduisent périodiquement, nombre que nous désignons par (μP_n), est le produit de tous les nombres premiers jusqu'à P_n inclusivement. Il suit évidemment de là que le premier terme d'une diatomique quelconque est égal à l'unité; car, $\mu P_n - 1$ et $\mu P_n + 1$ ne sont divisibles par aucun des nombres premiers non supérieurs à P_n. Donc, après la $n^{ième}$ opération, $\mu P_n - 1$ et $\mu P_n + 1$ ne seront effacés ni l'un ni l'autre, et μP_n seul sera effacé entre eux.

3°. Dans toute suite diatomique, la période a pour premier terme l'unité, et, dans la série de tous les autres, les termes également distants des extrêmes sont égaux.

4°. Si nous désignons par $\varphi(\mu P_n)$ le nombre des termes de la période de la $n^{ième}$ suite diatomique, $\varphi(\mu P_n)$ sera aussi égal au nombre des termes non effacés jusqu'à μP_n; or ce nombre est celui des nombres inférieurs et premiers à μP_n. Donc, d'après une formule connue,

$$\varphi(\mu P_n) = (2-1)(3-1)(5-1)\ldots(P_{n-3}-1)$$
$$(P_{n-2}-1)(P_{n-1}-1)(P_n-1).$$

On voit que le nombre des termes augmente très-rapidement,

Pour $n = 1\ldots$	$\varphi(\mu P_n)$ devient	1,
$n = 2$	....	2,
$n = 3$	....	8,
$n = 4$	....	48,
$n = 5$	....	480.

5°. Si nous désignons par S_n la somme des termes de la période de la $n^{ième}$ suite, ou, ce qui revient au même, le nombre des entiers inférieurs à μP_n et divisibles par un ou par plusieurs facteurs premiers non supérieurs à

P_n, on aura, d'après les deux numéros précédents,

$$S_n = \mu P_n - \varphi(\mu P_n).$$

6°. Les multiples de P_n occupent toutes les places par rapport à la période du tableau (a_{n-1}), et ne les occupent qu'une seule fois dans chaque période du tableau (a_n).

Théorème I. Admettons qu'il soit vrai pour la $n-1^{ième}$ suite; si celle-ci est périodique, en effaçant dans le tableau (a_{n-1}) les nombres de P_n en P_n pour former le tableau (a_n), je finirai nécessairement par trouver deux multiples de P_n déjà effacés et occupant la même place relativement à la suite $n-1^{ième}$. Soient KP_n et $K'P_n$ ces nombres; alors les termes de la $n^{ième}$ suite, trouvés en allant de KP_n vers $K'P_n$, se répéteront après $K'P_n$ indéfiniment et dans le même ordre, et, réciproquement, on trouvera ces mêmes termes dans le même ordre en allant de $K'P_n$ vers KP_n, ou de KP_n vers zéro. Maintenant, je puis supposer que la distance entre $K'P_n$ et KP_n est plus grande qu'entre KP_n et zéro; donc, puisque tous les termes en allant de KP_n vers zéro se suivent dans le même ordre qu'en allant de $K'P_n$ vers KP_n, il arrivera que je trouverai entre KP_n et $K'P_n$ un certain multiple rP_n qui occupera, par rapport à la période de la $n-1^{ième}$ suite diatomique, la même place que zéro. Donc les termes trouvés en allant de zéro vers rP_n se répéteront indéfiniment et dans le même ordre après rP_n; donc, si le théorème existe pour la suite $(n-1)$, il existe aussi pour la suite (n). Or le théorème est vrai pour $n=1$; donc, etc.

Théorème II. En partant du nombre μP_n, et effaçant les nombres de deux en deux, puis de trois en trois, puis de cinq en cinq, etc., et, enfin, de P_n en P_n, on efface-rait juste les mêmes nombres qu'en partant de zéro, et faisant les mêmes n opérations. Donc μP_n est égal au produit $2.3.5\ldots P_n$, ou à un sous-multiple de ce produit.

Or ce sous-multiple contenant au moins un nombre premier de moins, on ne serait pas dans les mêmes conditions que si l'on partait de zéro. Donc, $\mu P = 2.3.5.7 \ldots P_n$.

Théorème. III. Considérons, dans le tableau (a_n), deux multiples consécutifs de μP_n, par exemple, μP_n et $2\mu P_n$; il est évident que les termes de la période de la suite (n), qui seront à égale distance de μP_n et de $2\mu P_n$, seront égaux ; le nombre des termes d'une suite étant impair, il y a toujours un terme du milieu, et nous pouvons démontrer que ce terme est toujours le nombre 3, et qu'à mesure qu'on fait croître l'indice des suites diatomiques, les termes, à partir du terme milieu, prennent des valeurs fixes, déterminées, et forment une série qui jouit de propriétés curieuses.

Théorème VI. Le nombre des places dans la période de la $n - 1^{ième}$ suite est $\frac{(\mu P_n)}{P_n}$. Il faut prouver que les μ places occupées par les multiples de P_n, depuis P_n jusqu'à (μP_n), sont toutes différentes par rapport à la période du tableau a_{n-1}. Or cela a lieu, sans quoi (μP_n) ne serait pas le premier à partir duquel la période de la $n^{ième}$ suite recommencerait, comme à partir de zéro.

Ce dernier théorème est d'une haute importance.

Note. Dans la séance de l'Académie des Sciences du 15 octobre 1849, l'auteur a lu un Mémoire sur les suites diatomiques, divisé en quatre parties (*) : la première contient des définitions; la deuxième contient les énoncés de neuf théorèmes : les six propositions rapportées ci-dessus et les trois suivants.

Théorème VII. Au-dessous d'une certaine limite, chaque suite diatomique comprend tous les nombres impairs possibles.

(*) *Comptes rendus*, tome XXIX, page 387.

Théorème VIII. Tous les nombres de la $(n - 1)^{ième}$ suite diatomique sont compris au moins un nombre égal de fois dans la $n^{ième}$ suite.

Théorème IX. Dans toute suite diatomique, en faisant abstraction du premier terme, le terme milieu de la période est toujours 3, et l'on peut remarquer qu'à mesure qu'on fait croître l'indice des suites diatomiques, les termes, à partir du terme milieu, prennent des valeurs fixes, déterminées, et forment une série qui jouit de propriétés curieuses.

Troisième partie : *Applications*.

Théorème I. Entre P_n et P_n^2, il y a toujours un nombre premier.

Théorème II. Entre a^n et a^{n+1}, il y a toujours un nombre premier.

Quatrième partie : *Inductions*.

Théorème I. Tout nombre pair est égal à la différence de deux nombres premiers *consécutifs* d'une infinité de manières.

Théorème II. Tout nombre impair est égal à une puissance de 2 plus à un nombre premier. (Vérifié jusqu'à 3 millions.)

Observations. Le théorème suivant n'est pas encore démontré : *tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*. Ce théorème est énoncé par Euler, qui le tenait de Goldbach. C'est ce qu'on lit dans la Lettre XLIV, de 1742, page 135 de cet ouvrage : *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du* XVIII^e^ *siècle, précédée d'une Notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits, et publiée sous les auspices de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg; par* P. H. Fuss, membre et secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg; 2 tomes in-8°; 1842.

Quand notre Académie publiera-t-elle la correspondance de d'Alembert, Lagrange, Laplace, etc.? Quand publiera-t-elle l'ouvrage de Desargues, dont tant était bruit il y a quelques années? Se contentera-t-on du bruit? C'est toujours quelque chose. Souvent même, chez nous, c'est tout. TM.

BIBLIOGRAPHIE (*).

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ALGÈBRE; par MM. *Choquet*, docteur ès sciences, ancien répétiteur à l'École d'artillerie de la Flèche, professeur de mathématiques; et *Mayer* (**), ancien élève de l'École Polytechnique, chef d'une institution préparatoire pour cette École, membre de la Légion d'honneur; ouvrage autorisé par l'Université. Cinquième édition, revue, corrigée et augmentée. Paris, 1849; in-8° de XV et 638 pages. M. *Bachelier*, imprimeur libraire.

La réputation de ce Traité a commencé avec son apparition en 1832. Cette réputation s'est toujours maintenue dans les éditions subséquentes et augmentera avec cette cinquième édition. C'est que le savant auteur sait approprier à l'enseignement les travaux des géomètres qui agrandissent ou transforment la science. L'ouvrage n'est pas seulement augmenté, mais encore enrichi; ce qui n'est pas toujours la même chose. On y lit une discussion *générale* des formules relatives à un système de n équations du premier degré à n inconnues; le théorème de Fermat

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. BACHELIER, libraire, quai des Augustins, n° 55.

(**) Mort en 1841.

et d'autres théorèmes arithmologiques. Le chapitre XX, entièrement nouveau, traite de l'élimination, des fonctions symétriques et des racines imaginaires, des convergences de séries, le tout d'après M. Cauchy. Fidèle à la maxime, *suum cuique*, si rarement pratiquée, l'auteur indique les ouvrages dont il s'est inspiré : ce qui est d'un bon exemple dans un temps où tant d'honnêtes philosophes attaquent théoriquement la propriété, en attendant mieux.

On doit attribuer à un oubli involontaire l'omission des noms d'Euler et de Bret, créateurs d'une méthode d'élimination perfectionnée par M. Labbatie et à laquelle M. Sarrus a donné de l'élégance; méthode pénible qui devrait disparaître des éléments pour être remplacée par la méthode si simple de M. Sylvester. Nous croyons aussi devoir signaler comme lacunes regrettables : 1° les procédés de formation effective des classes combinatoires; sans ces procédés, on ne peut former les fonctions cramériennes; 2° quelques théorèmes sur ces fonctions, autrement dites *déterminantes*, qui occupent aujourd'hui une si grande place dans l'analyse; 3° l'algorithme leibnitzien pour les dérivées; 4° les dérivées des monômes transcendants; 5° les théorèmes principaux sur les dérivées et sur les fonctions homogènes.

Ce Traité est un ouvrage sérieux, destiné à ceux qui veulent apprendre la science et non exclusivement à ceux qui ont tel ou tel examen à subir, tel ou tel examinateur à satisfaire; en un mot, nous possédons maintenant d'excellents prolégomènes à l'*Algèbre supérieure* de M. Serret. Une analyse complète nous mènerait trop loin. Nous aurons d'ailleurs souvent occasion de mentionner cette riche collection de vérités mathématiques. Nous conseillons aux élèves de copier par ordre de matières les théorèmes de cette collection et de les étudier sur la copie. Car la science ne se compose pas de connaissances juxtaposées dans la mémoire, mais de vérités enchaînées les unes aux autres dans l'intelligence. C'est là l'immense prépondérance, souvent incomprise et méconnue, de l'analyse algébrique, d'avoir établi une concaténation entre le *nombre*, l'*espace*, le *temps*, la *force*; quatre idées primordiales qui rendent l'apperception de l'univers matériel possible à l'esprit.

L'exécution typographique de cette cinquième édition ne laisse rien à désirer, et justifie les récompenses (*médailles d'argent*) que le Jury de l'Exposition vient d'accorder à M. Bachelier, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique et du Bureau des Longitudes; et à son intelligent Prote, M. Bailleul, Président de la Société fraternelle des Protes des Imprimeries typographiques de Paris.

MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS ARBITRAIRES EXPRIMÉES PAR DES INTÉGRALES DOUBLES; par M. *A. Pioche*, professeur d'analyse à l'École militaire. In-4° de 74 pages, 1 lithographie.

Ce Mémoire, couronné par l'Académie de Bruxelles, doit plaire particulièrement aux personnes qui aiment les représentations graphiques des expressions analytiques. On fait voir très-clairement comment certaines intégrales doubles peuvent exprimer des polygones fermés ou ouverts, dont les côtés sont des courbes de diverses espèces, ou même des portions de courbes de diverses espèces entièrement séparées les unes des autres; et, dans une note, l'auteur démontre la *discontinuité réelle* et non *formelle* de ce genre d'intégrales, et il a l'idée singulière d'exprimer, par une intégrale double, l'air national des Anglais : *God save the king* (*), l'intégrale double

(*) On dit que l'air est de Lulli. (Les paroles sont aussi d'origine française.)

devient ici une intégrale simple (*voir* page 41). La représentation graphique est une réunion consécutive d'autant de droites parallèles à un axe qu'il y a de notes. La longueur et la hauteur de chaque parallèle correspondent à la durée et la hauteur du ton relativement à la tonique, le tout est fondé sur le célèbre théorème créateur de Fourier. On en possède au moins six à sept démonstrations. Celle de M. Pioche, et c'est l'objet spécial du Mémoire, est la plus directe, à ce que je sache, et elle est déduite d'une méthode qui mérite d'être méditée par tous les professeurs. Quelques intégrales déterminées pourraient s'obtenir plus simplement : il n'est pas exempt de quelques inexactitudes.

MÉMOIRE SUR LES POINTS SINGULIERS DES SURFACES ; par M. *Benjamin Amiot*. In-4° de 48 pages, 1 lithographie ; 1846. (Extrait du tome XXI des *Mémoires couronnés de l'Académie royale de Bruxelles*.)

On a beaucoup écrit sur les points singuliers des lignes et très-peu sur ceux des surfaces : c'est que la matière est plus difficile. Signaler les divers genres de singularités, les classer et les énumérer, ne sont pas choses aisées. Il est vrai que toutes les fois qu'en un point d'une surface, un coefficient différentiel ou certaine fonction de coefficients différentiels, se présente sous la forme 0, $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, ou sous une forme imaginaire, il peut y avoir quelque *singularité* en ce point, et *vice versâ*. Mais la question est de décrire la singularité *géométrique* qui correspond à la singularité analytique, ou bien on peut se donner la singularité géométrique et chercher la propriété analytique qui y correspond. La première marche, plus philosophique, est très-longue. Par ce motif, sans doute, l'auteur a suivi la seconde marche. Il considère d'abord le *sens* des courbures de la surface. Un plan tangent divise l'espace général en deux régions. Il s'agit de savoir si la surface se trouve dans l'une seulement de ces régions ou dans les deux à la fois. Le paraboloïde elliptique présente le premier cas, et le paraboloïde hyperbolique le second; aussi, en chaque point M de la surface, l'auteur conçoit un paraboloïde osculateur, ayant son axe parallèle à celui des z, ce qui le détermine complétement. Le *sens* des courbures de ce paraboloïde indique le sens des courbures de la surface. Ainsi deux points M et M′ ont des courbures dans des *sens* différents, parce qu'à l'un correspond un paraboloïde osculateur elliptique, et à l'autre un paraboloïde osculateur hyperbolique, ou bien encore, les deux paraboloïdes peuvent être de même espèce, mais tournés dans des sens opposés. Si l'on mène entre M et M′ une ligne arbitraire sur la surface, il y aura nécessairement un point N compris entre M et M′ où la courbure d'une partie de la surface changera de sens et non l'autre. M et M′ étant suffisamment rapprochés, si les deux paraboloïdes sont d'espèces différentes, le point intermédiaire N est un point d'inflexion *partielle;* s'ils sont de même espèce, l'inflexion est *complète;* la ligne MM′ étant arbitraire, l'ensemble des points N donne une *ligne d'inflexion* soit *partielle,* soit *complète.* De là, l'auteur passe aux *points multiples*, aux *lignes multiples,* aux *lignes de rebroussement*, aux *points de jonction* (tel est le sommet d'un cône); aux *points saillants* (tel est le point culminant d'une surface engendrée par une courbe plane, à point de rebroussement, tournant autour de la tangente en ce point). Par des considérations simples, claires, l'auteur obtient, pour ces divers cas, les conditions *analytiques.* Pour les points multiples, etc., on examine l'intersection du plan tangent avec une sphère différentielle ayant son centre au point de contact. Ce moyen, aujourd'hui si fréquemment employé, n'a-t-il pas été indiqué une première fois par M. Sturm (*)? Voici les équations des surfaces discutées dans ce Mémoire :

$$z^2 + y^2 - x^3 - ax^2 = 0; \qquad z^3 + xy^2 - x = 0;$$
$$a^2z^2 + x^4 + x^2y^2 - a^2x^2 = 0; \quad (z - x^2)^2 - (x - y)^5 = 0.$$

L'auteur ne fait usage que de coordonnées rectangulaires, c'est-à-dire qu'il considère chaque surface comme le lieu géométrique du sommet d'un parallélipipède rectangle, opposé à un sommet fixe dont partent trois arêtes données de directions et dont les tangentes sont liées par une équation donnée. On peut espérer que le savant géomètre auquel on doit de si belles propriétés focales voudra compléter son travail et, adoptant la méthode commode de M. Plücker, considérer les surfaces comme enveloppes de plans; cette méthode procure de nouvelles conditions analytiques, et montre les relations entre les *singularites* de la surface et celles de sa polaire réciproque, par rapport à une sphère. En même temps, cette méthode remplit une lacune; il s'agit de savoir combien une surface de degré donné peut avoir de points singuliers, de lignes singulières, et même combien elle admet de plans tangents touchant les surfaces en plusieurs points, ou même suivant une ligne, comme dans les surfaces développables ou dans le tore, etc.

(*) On a dit de Sieyès, que son silence était une calamité. Cela s'applique avec plus de vérité à d'autres esprits éminents.

NOTE

Sur quelques formules de trigonométrie sphérique et sur le quadrilatère sphérique inscrit;

PAR M. J. COLLÈTE,

Ancien élève de Saint-Cyr, soldat au 3me régiment de marine.

I. Les formules suivantes ont été données par M. Schmeisser, professeur à Francfort-sur-l'Oder (t. VII, p. 269) :

$$(1)\qquad \sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = \sin\frac{1}{2}c\cos(P - A),$$

$$(2)\qquad \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = \cos\frac{1}{2}c\cos(P - C),$$

$$(3)\qquad \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C = \cos\frac{1}{2}c\cos P\ (^*),$$

$$P = \frac{A + B + C}{2}.$$

L'objet de cette Note est de démontrer ces formules, et d'en déduire d'autres formules, ainsi que quelques théorèmes de géométrie sphérique.

La démonstration consiste à prendre, en fonction des angles A, B, C du triangle, les valeurs de $\sin\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}b$, et de les combiner entre elles de la façon dont l'indiquent les formules en question.

(*) Il y a une erreur typographique; au lieu de sin P, dans la troisième formule, il faut cos P, comme je l'ai mis ici.

Et d'abord, faisons subir à la forme générale des valeurs de $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, une modification rendue nécessaire par la question.

Dans ces valeurs générales, on suppose (voy. *Trigon. sph.*, Delisle et Gérono) que $2P = (A + B + C) - 180°$, tandis qu'ici, il faut que $P = \frac{1}{2}(A+B+C)$; ce qui, soit dit en passant, est plus logique, puisqu'on agit ainsi en trigonométrie rectiligne.

On sait que

$$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\sin B\,\sin C}}.$$

Si l'on suppose

$$\frac{A+B+C}{2} = P,$$

il en résulte

$$\frac{B+C-A}{2} = P - A;$$

la formule devient

$$(4)\qquad \sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\,\sin C}}.$$

On trouvera de même

$$(5)\qquad \cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\,\sin C}}.$$

Enfin, on a encore les deux formules

$$(6)\qquad \sin\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\sin A\,\sin C}},$$

et

$$(7)\qquad \cos\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-C)}{\sin A\,\sin C}}.$$

Cela fait, multiplions l'équation (4) par l'équation (7), il vient

$$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)\cos^2(P-A)}{\sin A\sin B\sin^2 C}};$$

d'où l'on tire

$$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C=\sin\frac{1}{2}C\cos(P-A),$$

puisque

$$\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\sin A\sin B}}.$$

C'est la formule (1).

On voit qu'au moyen d'une permutation de lettres, cette formule en fournit cinq antres.

Multiplions maintenant la formule (5) par la formule (7), il vient

$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-A)\cos^2(P-C)}{\sin A\sin B\sin^2 C}};$$

d'où

$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C=\cos\frac{1}{2}C\cos(P-C).$$

C'est la formule (2); elle en fournit deux autres.

Enfin, en multipliant la formule (4) par la formule (6), on a

$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos^2 P}{\sin A\sin B\sin^2 C}},$$

ou bien

$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C=\cos\frac{1}{2}c\cos P.$$

C'est la formule (3); elle en fournit deux autres. Ces expressions vont nous conduire à quelques théorèmes.

En appelant S la surface du triangle sphérique, on a

$$S = (A + B + C) - 180°;$$

donc

$$\frac{S}{2} = P - 90°; \quad \text{d'où} \quad \sin\frac{S}{2} = \cos P.$$

Or la formule (3) nous donne

$$\cos P = \frac{\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin C}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\sin\frac{S}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin C}{\cos\frac{C}{2}},$$

formule à laquelle M. Vannson (t. VII, p. 17) est arrivé autrement.

II. On sait que le quadrilatère rectiligne plan et inscriptible jouit de diverses propriétés remarquables ; cherchons les propriétés correspondantes sur le quadrilatère inscrit à un petit cercle, et dont les côtés seront d'ailleurs des axes de grands cercles.

Rappelons-nous que si ρ désigne la distance polaire du petit cercle circonscrit au triangle ABC, on a

$$2 \operatorname{tang}\frac{a}{2} \operatorname{tang}\frac{b}{2} \operatorname{tang}\frac{c}{2} = \operatorname{tang}\rho \sin\frac{S}{2},$$

S désignant la surface.

Remplaçant $\sin\frac{S}{2}$ par la valeur trouvée ci-dessus, il vient, réduction faite,

$$(a) \qquad \operatorname{tang}\rho = \frac{2\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C}.$$

Soit, maintenant, un quadrilatère sphérique ABCD, que je suppose inscrit dans un petit cercle dont ρ est la distance polaire.

Appelons a, b, c, d les côtés, et m et n les diagonales BD et AC.

En appliquant la formule (a) au triangle ABC, on aura

$$\tang \rho = \frac{2 \sin \frac{n}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin B};$$

de même, le triangle ADC nous donne

$$\tang \rho = \frac{2 \sin \frac{n}{2}}{\cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2} \sin D}.$$

Par conséquent

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} : \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2} :: \sin D : \sin B.$$

C'est le théorème correspondant à celui-ci, de géométrie plane :

Dans le quadrilatère inscrit, les angles opposés sont supplémentaires.

Si l'on fait le rayon de la sphère $= \infty$, alors $\cos \frac{a}{2}$, $\cos \frac{b}{2}$... deviennent l'unité, si l'on conserve aux côtés des longueurs finies (*). Donc,

$$\sin D = \sin B.$$

Ce qu'on pouvait prévoir.

(*) Car

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2 \sin \frac{1}{2} a},$$

En général, la relation

$$\frac{\sin\frac{n}{2}}{\cos\frac{a}{2}\sin B} = \frac{\sin\frac{m}{2}}{\cos\frac{c}{2}\sin C}$$

servira à établir toute relation cherchée entre les diagonales.

Par exemple, faisons $r = \infty$, la relation donne

$$m : n :: \sin C : \sin B.$$

Ainsi l'on a ce théorème de géométrie plane :

Dans le quadrilatère inscriptible les diagonales sont en raison inverse des sinus des angles dont elles partent.

On voit ici que ce théorème, dont j'ignorais l'existence, a été entièrement déduit de la géométrie sphérique.

On peut, d'ailleurs, le démontrer très-simplement.

En géométrie plane, on a encore, sur le quadrilatère inscrit, les deux théorèmes suivants :

1°. *Les diagonales sont comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent ensemble à leurs extrémités ;*

2°. *Le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Les théorèmes correspondants sur la sphère ne se démontreraient qu'au moyen de calculs très-longs et très-laborieux ; mais il existe un moyen simple d'y arriver.

En effet, supposons joints entre eux, par des lignes droites, les points A, B, C, D, et nous aurons formé un

---

et si l'on suppose le rayon de la sphère $= \infty$, on a

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{a}{2 \times \frac{1}{2}a} = 1.$$

Il en est de même des autres.

quadrilatère plan inscrit ABCD, dans lequel on a

$$
\text{(A)}\ \begin{cases} AC : BD :: AD.AB + DC.CB : AD.DC + AB.CB. \\ AC.BD = AD.BC + AB.CD. \end{cases}
$$

Mais, en supposant le rayon de la sphère $= 1$, on a

$$
AC = 2 \sin \frac{n}{2}, \quad BD = 2 \sin \frac{1}{2} m, \ldots
$$

ainsi de suite ; remplaçant dans (A), on a

$$
\text{(B)}\ \begin{cases} \sin \frac{1}{2} n : \sin \frac{1}{2} m :: \sin \frac{a}{2} \sin \frac{d}{2} + \sin \frac{c}{2} \sin \frac{b}{2} : \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \sin \frac{d}{2} \sin \frac{c}{2} \\ \sin \frac{1}{2} n \sin \frac{1}{2} m = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c + \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} d, \end{cases}
$$

formules qui deviennent celles du quadrilatère plan quand on suppose $r = \infty$.

On pourrait encore, de tout ce qui précède, déduire d'autres formules et d'autres théorèmes ; je ne m'y arrêterai pas.

Enfin, on pourrait, comme précédemment, démontrer les formules suivantes :

$$
\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin c = \cos \frac{C}{2} \sin (p - b),
$$

$$
\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin c = \sin \frac{C}{2} \sin p,
$$

$$
\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin c = \sin \frac{C}{2} \sin (p - c),
$$

$$
p = \frac{a + b + c}{2};
$$

et celles qu'on en déduit par des permutations entre les lettres. Toutes ces formules peuvent être obtenues aussi en appliquant celles M. Schmeisser au triangle polaire du proposé.

Note. Il reste à démontrer les réciproques des propositions B.

QUESTION 216

(voir p. 394) ;

PAR M. L. NICOLAS,
Élève au lycée d'Aix.

Dans un tétraèdre OABC, trirectangle en O, la somme des carrés des tangentes des angles ABO, ACO est égale au carré de la tangente de l'angle dièdre qui a pour arête BC.

Abaissons OD perpendiculaire sur l'arête BC, et joignons DA ; l'angle ODA sera l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre BC.

Désignons OD par r et DOB par a, nous aurons

$$\mathrm{OB} = \mathrm{séc}\, a, \quad \mathrm{OC} = \mathrm{coséc}\, a,$$

et la formule

$$\frac{1}{\mathrm{séc}^2 a} + \frac{1}{\mathrm{coséc}^2 a} = \frac{1}{r^2},$$

nous donnera

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OB}}^2} + \frac{1}{\overline{\mathrm{OC}}^2} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OD}}^2};$$

et de là

$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OB}}^2} + \frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OC}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OB}}^2},$$

ou bien

$$\mathrm{tang}^2\, \mathrm{OBA} + \mathrm{tang}^2\, \mathrm{OCA} = \mathrm{tang}^2\, \mathrm{ODA}. \qquad C.Q.F.D.$$

Note. Ce théorème a été aussi démontré et généralisé par M. E. Ploix, du lycée de Versailles. Nous donnerons ce travail prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 208

(voir p. 236);

PAR M. F. AGARRAT,
Professeur de mathématiques supérieures au lycée d'Aix.

$F(x) = 0$ *est une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales; démontrer qu'en égalant à zéro la dérivée seconde de* (Fx^{-1}), *l'équation* $(F'x)^2 - \frac{1}{2} F(x) F''(x) = 0$, *qu'on obtient ainsi, a toutes ses racines imaginaires.* (CATALAN.)

Supposons que l'équation $F(x) = 0$ soit du degré m, et désignons ses racines par α, β, γ, δ,..., nous pourrons écrire

$$F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots.$$

Posons, pour abréger,

$$a = x-\alpha,\quad b = x-\beta,\quad c = x-\gamma,\quad d = x-\delta,\ldots,$$

nous aurons

$$(1)\qquad F(x) = abcd\ldots;$$

$$(2)\qquad F'(x) = F(x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\ldots+\right);$$

$$(3)\qquad \frac{F''(x)}{2} = F(x)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\ldots+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\ldots+\frac{1}{cd}\right).$$

Élevons les deux membres de l'équation (2) au carré, il viendra

$$(F'x)^2 = (Fx)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\ldots\right)$$
$$+2F(x).F(x)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\ldots+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\ldots+\frac{1}{cd}+\ldots\right).$$

On aura donc

$$(F'x)^2 = (Fx)^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \ldots\right) + Fx.F''(x),$$

d'où

$$\frac{(F'x)^2}{2} - \frac{1}{2}F(x)\,F''(x) = \frac{(Fx)^2}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \ldots\right).$$

Le second membre, étant une somme de carrés, ne peut jamais devenir nul; donc le premier membre ne peut s'annuler par aucune valeur réelle de x. Cette conclusion est vraie, à plus forte raison, pour le premier membre de l'équation

$$(F'x)^2 - \frac{1}{2}Fx\,F''x = 0;$$

donc, etc.

RÉSOLUTION DE LA QUESTION 210

(voir p. 392) ;

PAR M. EDM. PLOIX,
Bachelier ès sciences.

Théorème. *D'un point* M *pris dans le plan d'une conique, on mène deux tangentes* MP, MP′ *à cette conique; r et r′ sont les rayons de courbure en* P *et* P′ : *on a la proportion*

$$\frac{\overline{MP}^3}{\overline{MP'}^3} = \frac{r}{r'}.$$

Démonstration. Aux points P et P′ menons les normales PN, P′N′, nous savons que l'on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{\overline{PN}^3}{\overline{P'N'}^3}.$$

Il suffit donc de démontrer que l'on a

$$\frac{MP}{MP'} = \frac{PN}{P'N'};$$

et, comme les angles P et P' sont droits, cela revient à démontrer que les triangles MPN, M'P'N' sont semblables, et que l'on a

$$\text{angle PNM} = \text{angle MN'P'}.$$

Abaissons du point M sur l'axe la perpendiculaire MA; joignons PA, P'A. Les deux quadrilatères MPAN, MAN'P' sont inscriptibles; donc

$$\text{PNM} = \text{PAM} \quad \textit{et} \quad \text{MN'P'} = \text{MAP'}.$$

Or, AP, AM, AP', AN forment un faisceau harmonique, et l'angle MAN étant droit, MA est la bissectrice de l'angle PAP; donc

$$\text{angle PAM} = \text{angle MAP'};$$

donc, etc.

SOLUTION DE LA QUESTION 214

(voir p. 393) ;

PAR M. JAUFROID,
Bachelier ès sciences mathématiques.

Si l'on coupe un cône droit par un plan, et que l'on projette la section sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône et mené par le sommet, la projection aura ce sommet pour foyer, et pour directrice la trace du plan sécant sur le plan de projection.

Je prends l'axe des z pour axe du cône, et l'origine pour sommet.

Soit a la tangente de l'angle que fait la génératrice avec l'axe, l'équation du cône sera

$$(1) \qquad z = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soit

$$(2) \qquad Ax + By + Cz = D$$

l'équation d'un plan; (1) et (2) sont alors les équations de la section du cône par ce plan; en éliminant z entre elles, on a l'équation de sa projection sur le plan xy, savoir :

$$y^2 + x^2 = \frac{1}{Ca}(D - Ax - By)^2.$$

Cette équation montre que la distance d'un point quelconque de la courbe à l'origine est une fonction linéaire des coordonnées de ce point; l'origine est donc un foyer.

On sait, de plus, que cette fonction égalée à zéro constitue l'équation de la directrice; par conséquent, cette directrice est représentée par

$$Ax + By = D.$$

Or, si l'on fait $z = 0$ dans l'équation du plan, on obtient sa trace avec le plan xy, savoir :

$$Ax + By = 0.$$

Donc le théorème est démontré.

Note. M. E. Ploix, bachelier ès sciences, nous a adressé une belle démonstration synthétique du même théorème; nous la donnerons incessamment.

Le théorème est implicitement énoncé dans les *Propriétés projectives* de M. Poncelet, § 457. Nous devons cette indication à M. Gentil, chef d'institution, auteur d'une démonstration synthétique d'un célèbre théorème d'Euler, attribué communément à Lambert, sur les arcs paraboliques; nous donnerons cette démonstration en 1850.

NOTE SUR UNE ABRÉVIATION DANS LA RECHERCHE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX NOMBRES;

Par M. G.-H. NIEVENGLOSKI,
Répétiteur au lycée Saint-Louis.

Toutes les fois qu'en cherchant le plus grand commun diviseur de deux nombres, on trouve un reste plus grand que la moitié du diviseur correspondant, on dit habituellement que l'on *réduira deux divisions en une*, et, au lieu de diviser le diviseur par le reste, on le divise par son excès sur ce reste. Examinons.

En cherchant le plus grand commun diviseur de 360 et 99 d'après la méthode générale, on a

$$360 \mid 99 \mid 63 \mid 36 \mid 27 \mid 9.$$

Or, en forçant le quotient (je passe l'explication que tout le monde connaît), on dit : $63 > \frac{99}{2}$; donc, *si l'on divise* 99 *par l'excès* 36, *au lieu de le diviser par* 63, *on a une division de moins à écrire*. C'est là une illusion. Pour avoir l'excès 36, il faut faire une soustraction; on l'effectue justement en suivant la méthode générale, quand on divise 99 par 63, car le quotient étant 1, cette division revient à une simple soustraction.

Ensuite, dans la méthode générale on divise le premier reste 63 par le second 36, et il peut arriver, comme c'est le cas ici, que cette opération revienne encore à une soustraction; tandis que, dans la méthode du quotient forcé, en divisant le diviseur (99) par son excès (36) sur le reste (63), le quotient étant *au moins* 2, il faut *toujours* faire une division. Donc on ne réduit rien. Donc, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, non-seulement on ne gagne rien, on n'abrége rien, en prenant le quotient par excès; mais, bien au contraire, on peut allonger inutilement les calculs.

Note. Les quotients *en dehors* abrégent l'écriture des fractions continues.

BIOGRAPHIE.

RICHARD, Professeur.

La réputation d'un professeur s'établit par des ouvrages ou par ses élèves. Ces ouvrages consistent souvent en livres qui enrichissent les catalogues, parfois les auteurs, très-rarement la science. Richard, résistant aux pressantes instances de ses collègues, n'a jamais voulu rien publier (*). Il fuyait avec des soins inquiets tout ce qui pouvait fixer sur lui l'attention publique, et menait une vie tellement retirée, qu'il craignait même que le bruit des éloges ne vînt troubler, interrompre le silence habituel de sa chère solitude. Jamais je ne l'ai rencontré et crois toutefois l'avoir connu, tant et depuis si longtemps ses élèves m'ont entretenu de ses vertus, de son savoir, de son talent de professeur. D'éminents élèves se sont

(*) Vingt siècles au moins avant l'invention de l'imprimerie, l'Ecclésiaste donnait cet avertissement : *Mon fils, prends garde de faire trop de livres; ce sont des peines d'esprit et de corps, sans fin* (ch. XII, v. 12).

assis sur les bancs de sa classe; car il était lui-même un professeur éminent, sachant deviner les hommes de l'avenir, et donnant à chaque nature d'esprit la direction et la culture convenables. D'un caractère très-timide, nullement solliciteur, aucune démarche ne lui coûtait, en faveur de ses élèves. Aussi tous en parlent avec amour et vénération; tous pleurent un ami. Les grandes supériorités intellectuelles excitent l'admiration; mais le respect et l'estime ne s'accordent qu'au mérite moral; vérité vulgaire qu'on a besoin de souvent rappeler, parce qu'elle est souvent oubliée, surtout dans les positions élevées : il semble que, placé à certaine hauteur, on n'aperçoit plus ce qui est au fond de la conscience.

Richard (Louis-Paul-Émile) est né à Rennes, le 31 mars 1795. Son père, originaire des Vosges (Baubervillers), lieutenant-colonel d'artillerie, a servi honorablement dans les armées de la République et de l'Empire, et a été décoré sur le champ de bataille de Lutzen. Retiré depuis 1815, il est mort octogénaire à Rennes en 1843, et laissant sans fortune une veuve et quatre enfants dont Richard était l'aîné. Une défectuosité corporelle, suite d'un accident, empêcha le fils de suivre la carrière paternelle. Il se voua à l'enseignement. Entré, en 1814, comme maître d'étude au lycée impérial de Douai, il se lia d'amitié avec l'élève Vincent, depuis professeur au collége Saint-Louis. En 1815, il fut nommé professeur de sixième au collége royal de Pontivy, et, en 1816, professeur de mathématiques spéciales au même collége où son oncle maternel, M. l'abbé Grandmoulin, mort curé à Saint-Quentin, était alors proviseur. Ce n'est qu'en 1820 qu'il fut appelé à Paris pour enseigner les élémentaires au collége Saint-Louis. De là, il passa avec le même titre au collége Louis-le-Grand, et l'année suivante, on lui confia enfin la chaire de mathématiques spéciales qu'il a professées avec grande distinction. S'élevant au-dessus de la maigreur classique du terrain officiel, il enseigna les principales théories analytiques de la nouvelle géométrie segmentaire, aujourd'hui si universellement cultivée, hormis dans l'Université (*). Richard était un des plus zélés partisans de cette géométrie : on l'a vu, lui qui n'allait nulle part, auditeur assidu en Sorbonne, au cours de M. Chasles, le célèbre promoteur des méthodes homographiques. Se tenant constamment au courant des progrès de la science, Richard en enrichissait son cours; les *questions* qu'il proposait étaient recherchées des élèves; elles tendaient à élargir l'esprit et non à le rétrécir, comme il arrive trop souvent : aussi il a formé grand nombre d'hommes distingués, dont plusieurs sont parvenus à la célébrité. Galois (*voir* la note, p. 452) aurait doté la France d'un Abel, si une mort violente n'avait rompu la trame d'une vie courte et turbulente. M. Le Verrier est universellement connu par ses calculs astronomiques. MM. les examinateurs Hermite et Serret marchent, encore jeunes, au premier rang parmi les géomètres français. Tous les services publics comptent des fonctionnaires de mérite que Richard a fait entrer à l'École Polytechnique, où la plupart ont amélioré leurs rangs d'admission : critérium d'une instruction préliminaire solide. Animé pour la sainte science d'un zèle pur et désintéressé, zèle excessivement rare, il encourageait toute entreprise propre à propager la vérité mathématique. C'est à ce sentiment généreux seul que nous attribuons l'intérêt qu'il prenait aux *Nouvelles Annales;* la générosité était la qualité prédominante de ce caractère exceptionnel : nous n'en citerons qu'un seul trait. Diverses circonstances avaient

(*) L'insuccès du dernier concours (élémentaires) en est une triste conséquence.

placé un fonctionnaire public dans une position fâcheuse : risquant de perdre son emploi, et, pis encore, l'honneur, il s'adresse à Richard, son ami d'enfance. En pareille occasion, s'adressant à l'amitié, on en obtient facilement des conseils, des remontrances, et très-difficilement des secours pécuniaires ; mais Richard n'était pas un ami ordinaire. Il n'hésita pas de faire le sacrifice de toutes ses économies, fruit de plusieurs années de labeur : exemple peu contagieux.

Richard n'a jamais été marié ; mais il a constamment rempli et supporté les charges d'un chef de famille dans toute leur étendue. Pourquoi de tels hommes n'obtiennent-ils que peu de jours, tandis que des égoïstes, au cœur glacé, comptent souvent des jours nombreux ? Anomalie *en deçà*, dont l'explication est *au delà*. Après une assez longue maladie, Richard a rendu le dernier soupir le 11 mars 1849. MM. les professeurs Lionnet et Vincent ont prononcé quelques paroles touchantes sur la tombe de leur ami, et se sont montrés dignes interprètes de leur douleur personnelle et des regrets de tous leurs collègues. Au nom de la classe, un élève a adressé des adieux au cher professeur.

Richard a été décoré le 10 janvier 1837. M. Vieille continue son enseignement : digne remplaçant qui maintiendra l'esprit de progrès dans cette classe supérieure. Des travaux sérieux montrent, dans ce jeune agrégé, une intelligence animée, en mouvement avec la science ; tandis que tant d'autres cristallisent doucement sous l'influence concrétionnante des programmes (*).

(*) Richard a laissé beaucoup d'écrits sur les diverses parties du cours. La famille devrait faire compulser ces papiers par un homme compétent. C'est à M. le professeur Lionnet que nous devons ce renseignement et tous les faits de cette Notice.

Note. Galois (Évariste) a été assassiné le 31 mai 1832, dans une rencontre dite d'*honneur*, par antiphrase. Né à Bourg-la-Reine (Seine) le 26 octobre 1811, il est entré au collége Louis-le-Grand en 1823; bientôt il attira l'attention de Richard, qui devina un esprit destiné à sonder toutes les profondeurs et à étendre le domaine de la science. S'étant présenté aux examens de l'École Polytehnique en 1828 et 1829, Galois fut déclaré inadmissible. Nous répéterons ici, et nous ne cesserons de répéter une réflexion que nous avons déjà consignée mainte fois : Un candidat d'une intelligence supérieure est perdu chez un examinateur d'une intelligence inférieure. *Hic ego barbarus sum quia non intelligor illis*. Certes, M. Liouville, qui nous a fait connaître le génie de Galois (*Journal de Mathématiques*, tome XI, page 381, année 1846), ne l'aurait pas jugé incapable.

Un jeune arithmologue, de belle espérance, vient de lire à l'Académie un Mémoire qui a été écouté avec intérêt par les *Dii majores* de l'Olympe scientifique; ce même jeune homme est admis le quatre-vingt-troisième sur cent à l'École Polytechnique! le quatre-vingt-dixième de la même liste est admis le *premier*, sur *quatorze*, à l'École Normale! Les examens ont des mystères devant lesquels je m'incline. Comme les mystères de la théologie, la raison doit les admettre avec humilité, sans chercher à les comprendre.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. STEINER SUR LES CONIQUES INSCRITES A UN TRIANGLE;

PAR M. PAUL SERRET,
Élève de l'École Normale.

1. *Lemme.* Le lieu des centres des coniques tangentes à trois droites données, et dont la somme (algébrique) des carrés des axes est constante, est un cercle ayant pour centre le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois tangentes.

Démonstration. Prenons pour axe des y l'une des hauteurs BO du triangle ABC formé par les trois tangentes, et pour axe des x le côté opposé AC; posons

$$\mathrm{OA} = a, \quad \mathrm{OC} = a', \quad \mathrm{OB} = b,$$

et que la conique soit représentée par l'équation ordinaire à six termes. Adoptant la notation des *identités* de M. Terquem, on aura, pour exprimer que la droite $dy + ex + f = 0$, est tangente à la conique, la relation suivante :

$$(\mathrm{T}) \qquad l'd^2 - den + le^2 + mf^2 + 2dfk' + 2ef.k = 0.$$

$$(\mathrm{D}) \qquad dy + ex + f = 0.$$

Exprimons que la relation fondamentale a lieu pour chacun des côtés du triangle ABC,

$$(1) \quad \mathrm{AC}, \quad y = 0; \ (d = 1, \ e = 0, \ f = 0);$$

$$(2) \ \mathrm{AB}, \quad ay + bx - ab = 0; \ (d = a, \ e = b, \ f = -ab);$$

$$(3) \ \mathrm{BC}, \quad a'y + bx - a'b = 0; \ (d = a', \ e = b, \ f = -a'b).$$

L'équation de condition (T) appliquée à AC, donne tout d'abord la condition

$$(\mathrm{I}) \qquad l' = 0.$$

Introduisant immédiatement ce résultat dans (T), on peut écrire cette équation sous cette forme :

$$(\mathrm{T}') \qquad 2de\cdot\frac{n}{m} - e^2\cdot\frac{l}{m} = 2df\cdot\frac{k'}{m} + 2ef\cdot\frac{k}{m} + f^2.$$

Appliquant à AB et BC cette nouvelle forme de l'équation de condition, nous arrivons aux équations suivantes :

$$2ab\cdot\frac{n}{m} - b^2\cdot\frac{l}{m} = -2a^2b\cdot\frac{k'}{m} - 2ab^2\frac{k}{m} + a^2b^2,$$

et

$$2a'b\cdot\frac{n}{m} - b^2\cdot\frac{l}{m} = -2a'^2b\cdot\frac{k'}{m} - 2a'b^2\frac{k}{m} + a'^2b^2,$$

ou bien

$$(\mathrm{II}) \qquad 2a\cdot\frac{n}{m} - b\cdot\frac{l}{m} = a\left(ab - 2a\frac{k'}{m} - 2b\frac{k}{m}\right),$$

et

$$(\mathrm{III}) \qquad 2a'\cdot\frac{n}{m} - b\cdot\frac{l}{m} = a'\left(a'b - 2a'\frac{k'}{m} - 2b\frac{k}{m}\right).$$

Les équations (I), (II) et (III) que nous venons d'obtenir, expriment que la conique proposée est tangente aux trois côtés du triangle, représentés par les équations (1), (2) et (3).

Exprimons maintenant la deuxième condition, à savoir que la somme des carrés des axes de la conique est égale à une quantité connue H^2; il vient

$$\mathrm{H}^2 = +\frac{4m\,\mathrm{NL}}{m^3} = +\frac{4.\mathrm{NL}}{m^2} \qquad (\text{t. I, p. } 493).$$

Or ici les axes étant rectangulaires, on a

$$\mathrm{N} = \mathrm{A} + \mathrm{C};$$

d'ailleurs, on sait que

$$\mathrm{A}\times 4\mathrm{L} = k^2 - ml,$$

que

$$C \times 4L = k'^2 - ml' = k'^2,$$

à cause de $l' = 0$.

Donc, la deuxième condition est exprimée par cette équation :

$$H^2 = + \frac{k^2 + k'^2 - ml}{m^2} = + \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{k'}{m}\right)^2 - \frac{l}{m}\right],$$

ou

$$\text{(IV)} \qquad \left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{k'}{m}\right)^2 - \frac{l}{m} (-) H^2 = 0.$$

Des équations (I) et (II) tirant la valeur du rapport $\frac{l}{m}$, pour la substituer ensuite dans l'équation (IV), on obtient successivement

$$\frac{l}{m} = \frac{aa'\left(b - 2\frac{k'}{m}\right)}{b},$$

et

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad \left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{k'}{m}\right)^2 + 2\frac{aa'}{b} \cdot \frac{k'}{m} - H^2 - aa' = 0,$$

ou bien, remplaçant enfin $\frac{k}{m}$, $\frac{k'}{m}$ par x, y coordonnées du centre de la courbe, il viendra, pour le lieu cherché des centres,

$$\text{(V)} \qquad x^2 + y^2 + 2\frac{aa'}{b} \cdot y - H^2 - aa' = 0;$$

équation d'un cercle ayant son centre situé sur l'axe des y, l'une des hauteurs du triangle considéré. Donc, ce centre est le point de rencontre des trois hauteurs, comme on peut d'ailleurs le vérifier facilement; car on a pour l'ordonnée 6 du centre,

$$(a) \qquad 6 = -\frac{aa'}{b},$$

et, pour son rayon,

$$(b) \qquad \mathrm{R}^2 = \beta^2 + aa' + \mathrm{H}^2.$$

On peut mettre la valeur du carré du rayon sous une autre forme équivalente plus simple. Soit I le point de rencontre des hauteurs, et BIO l'une des hauteurs. On aura, d'après l'équation (b),

$$\mathrm{R}^2 = \overline{\mathrm{IO}}^2 + \mathrm{OA}.\mathrm{OC} + \mathrm{H}^2,$$

OA, OC étant d'ailleurs de mêmes signes ou de signes contraires, suivant que, etc.; mais on voit facilement que $\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OC} = -\,\mathrm{OB}\,.\,\mathrm{OI}$; donc

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{H}^2 + \mathrm{OI}(\mathrm{OI} - \mathrm{OB}) = \mathrm{H}^2 + \mathrm{OI}.\mathrm{IB};$$

ainsi donc,

$$(b') \qquad \mathrm{R}^2 = \mathrm{H}^2 + \mathrm{OI}.\mathrm{IB};$$

le produit OI . IB étant d'ailleurs positif ou négatif, suivant que le triangle ABC est *obtusangle* ou *non*.

On pourrait tirer de la formule (b') plusieurs conséquences, que je passe sous silence.

2. Théorème de M. Steiner. *On peut inscrire ou ex-inscrire à un triangle six coniques égales à une conique donnée; leurs centres appartiennent à une même circonférence de cercle ayant pour centre le point de rencontre des hauteurs du triangle.*

Démonstration. La même que ci-dessus, page 453.

Observation. On pourrait peut-être démontrer directement et géométriquement la formule (b').

3. Théorème *Par le centre* I *d'une ellipse, menons un diamètre indéfini quelconque* BIO; *menons à la courbe une tangente* COA *perpendiculaire à ce diamètre, et le rencontrant en* O; *puis, sur le prolongement de* OI, *prenons le point* B *tel, que l'on ait en valeur absolue* $\mathrm{IO}\,.\,\mathrm{IB} = a^2 + b^2$ (*a et b étant les demi-*

axes de la courbe); *du point* B *ainsi déterminé, menons deux tangentes* BA, BC *à la courbe. Le point de rencontre des hauteurs du triangle circonscrit à la courbe, et formé par les trois tangentes* AC, BC, BA, *sera le centre même* I *de la courbe.*

N. B. Le cas où l'ellipse devient un cercle, se vérifie immédiatement. Le triangle circonscrit est alors le triangle équilatéral.

Démonstration. Si le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC n'est pas le point I, ce sera un autre point tel que I′ situé sur le diamètre BIO, et l'on aura alors, d'après la formule (b'), et en prenant les produits de lignes en valeur absolue :

$$\overline{\mathrm{II'}}^2 = r^2 = a^2 + b^2 - \mathrm{OI'}.\mathrm{BI'};$$

mais déjà, par construction, on a

$$\mathrm{IO}.\mathrm{IB} = a^2 + b^2;$$

il viendra donc

$$\overline{\mathrm{II'}}^2 = r^2 = \mathrm{IO}.\mathrm{IB} - \mathrm{I'O}.\mathrm{I'B}.$$

Posons

$$\mathrm{IO} = \alpha, \quad \mathrm{IB} = \beta;$$

d'où, à cause de

$$\mathrm{II'} = r, \quad \mathrm{I'O} = \alpha + r, \quad \mathrm{I'B} = \beta - r,$$

il viendrait donc

$$r^2 = \alpha\beta - (\alpha + r)(\beta - r) = r^2 + (\alpha - \beta)r,$$

ou, enfin,

$$(a) \qquad (\alpha - \beta) r = 0.$$

Or, on a toujours, d'après notre construction,

$$\alpha = \mathrm{IO} < \beta = \mathrm{IB}.$$

Car,

$$\text{IO} < a \quad \text{ou} \quad \text{IO} < \sqrt{a^2 + b^2};$$

et comme $\text{IO}.\text{IB} = a^2 + b^2$,

$$\text{IB} > \sqrt{a^2 + b^2};$$

donc on a toujours $\text{IB} > \text{IO}$; et la relation (a) devient

$$(a') \qquad r = \text{II}' = 0.$$

Ainsi le point I′ coïncide avec le centre I de l'ellipse, qui est bien le point de rencontre des hauteurs. C. Q. F. D.

4. La formule (b') permet de résoudre ce problème : *Circonscrire à une ellipse donnée un triangle dont le point de rencontre des trois hauteurs soit donné.*

SECONDE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 50

(voir t. II, p. 245);

PAR M. G. MARQFOY,

Élève en spéciales (Sainte-Barbe).

Une corde étant inscrite dans une parabole, le produit des distances des extrémités de cette corde à un diamètre quelconque est égal à la partie de ce diamètre interceptée entre la courbe et la corde multipliée par le paramètre de l'axe principal.

Soient

$y^2 = 2px$, équation de la parabole, axes rect.;

$y = mx + n$, équation de la corde;

$y = b$, équation du diamètre;

(x', y'), les coordonnées du point A, extrémité de la corde;

(x'', y''), celles de B, seconde extrémité de la corde;

$$AP = b - y' = b - \frac{p + \sqrt{p^2 - 2pmn}}{m} = \text{distance du point A au diamètre;}$$

$$BQ = y'' - b = \frac{p + \sqrt{p^2 - 2pmn}}{m} - b = \text{distance du point B au diamètre;}$$

$$AP . BQ = \frac{p^2 - 2pmn}{m^2} - \left(\frac{p}{m} - b\right)^2 = 2p . \left(\frac{b-n}{m} - \frac{b^2}{2p}\right).$$

Mais $\frac{b-n}{m}$ est l'abscisse correspondante au point de la corde dont l'ordonnée est b. De même $\frac{b^2}{2p}$ est l'abscisse correspondante au point de la courbe dont l'ordonnée est b. Donc, en prenant la différence de ces deux abscisses,

$$AP . BQ = 2p . CD. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LIMITE D'UN PRODUIT DE COSINUS EN NOMBRE INFINI.

(Briot, Géométrie analytique.)

Théorème. *La limite du produit infini*

$$\cos a \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3} \cdots$$

est $\frac{\sin 2a}{2a}$.

Démonstration. Soient

$$\cos a \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cdots \cos \frac{a}{2^n} = P,$$

$$\sin a \sin \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2^2} \cdots \sin \frac{a}{2^n} = Q;$$

on en tire, par voie de multiplication,

$$\frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin 2aQ}{\sin \frac{a}{2^n}} = PQ;$$

d'où

$$P = \frac{\sin n\, 2a}{2^{n+1} \sin \frac{a}{2n}};$$

n devenant infini, $\sin \frac{a}{2^n}$ devient égal à $\frac{a}{2^n}$, et par là $P = \frac{\sin 2a}{2a}$ à la limite.

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES AUTEURS (*).

Pages.

(*) Nous devons ces tables à l'extrême obligeance de M. le professeur Anne (Léon).

Pages.

TABLE
PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. Arithmétique et Arithmologie.

II. Algèbre élémentaire.

III. Algèbre supérieure.

IV. Géométrie élémentaire.

V. Trigonométrie rectiligne.

Pages.

VIII. Géométrie analytique à trois dimensions.

IX. Statique.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Algèbre supérieure.

II. Géométrie élémentaire.

III. Géométrie analytique à deux dimensions.

Pages.

QUESTIONS D'EXAMEN.

I. Arithmétique.

II. Algèbre élémentaire.

III. Algèbre supérieure.

IV. Géométrie élémentaire.

V. Géométrie analytique à deux dimensions.

VI. Géométrie analytique à trois dimensions.

VII. Questions à résoudre.

VIII. Notes diverses.

IX. Bibliographie.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les huit premiers volumes.

Observation. Sur 215 questions, il en reste 46 à résoudre.

ERRATA.

TOME II. (*Sixième supplément.*)

Page 102, ligne 14 en descendant, *au lieu de* A′ *lisez* B′.

TOME V. (*Troisième supplément.*)

Page 191, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $P_n x^4 z^n$ *lisez* $P_n x^n z^n$.
Page 640, ligne 8 en remontant, *au lieu de* (4) *lisez* (A).

TOME VI. (*Deuxième supplément.*)

Page 160, ligne 4 en remontant, au lieu de $a^2 b^4 y^2 + b^2 a^4 a^2$ lisez $a^2 b^4 y^2 + b^2 a^4 x^2$.
Page 393, ligne 7 en descendant, au lieu de u lisez x.

TOME VII. (*Premier supplément.*)

Page 24, ligne 7 en remontant, au lieu de ι' lisez u'.
Page 319, ligne 2 en descendant, *au lieu de* ω *lisez* $\cos\omega$.

TOME VIII.

Page 44, ligne 4 en remontant, *au lieu de* A_n *lisez* $A_{n(n-1)}$.
Page 45, ligne 2 en remontant, *au lieu de* (-1) *lisez* $(-1)^n$.
Page 58, ligne 7 en remontant, *au lieu de* BQ *lisez* PQ.
Page 58, ligne 14 en descendant, *au lieu de* AP^2 *lisez* $\overline{AP}^2$.
Page 141, ligne 16 en descendant, *au lieu de* quatre *lisez* quinze.
Page 393, ligne 9 en descendant, *au lieu de* $\cos(\frac{1}{3}\pi + \gamma)$ *lisez* $\sin(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi)$.
Page 393, ligne 16 en descendant, *au lieu de* $\sin\frac{1}{3}\pi$ *lisez* $2\sin\frac{1}{3}\pi$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

Question d'examen sur le cône droit par M. Et. Bigourdan.

Fig. 1.

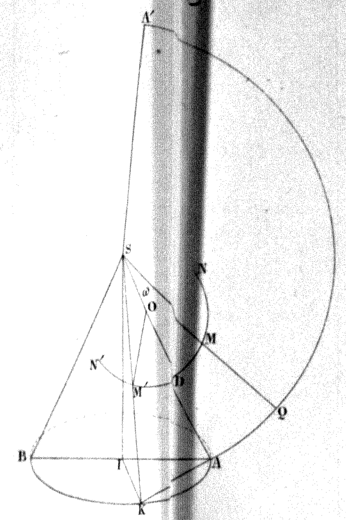


Fig. 2.

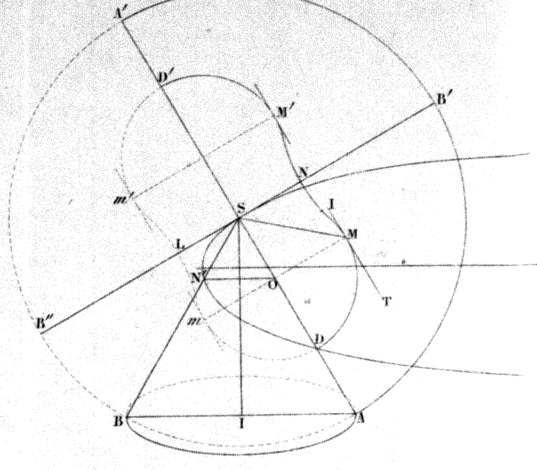
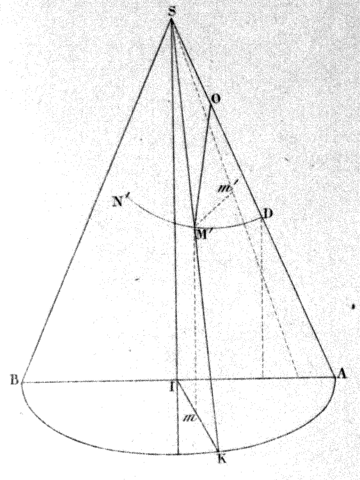


Fig. 3.



Solution géométrique de la Question 151, par M. Mannheim.

Fig. 6.

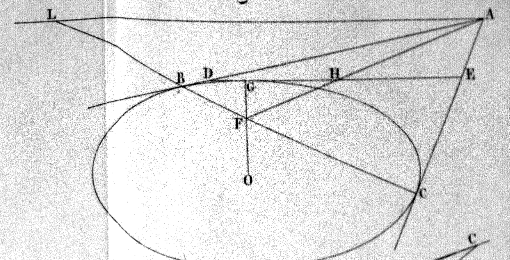
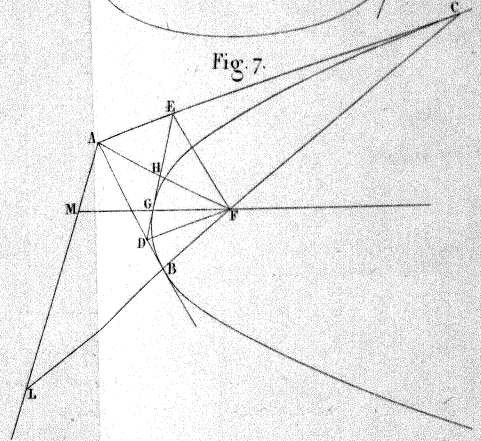
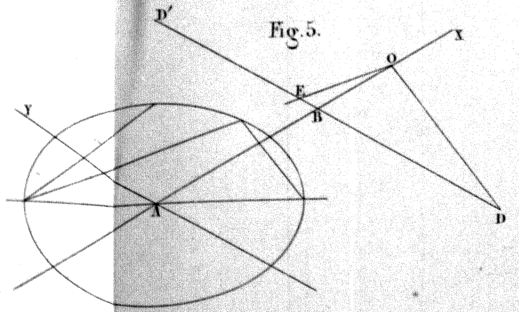


Fig. 7.



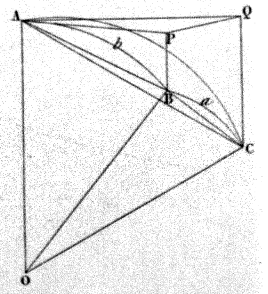
Théorème sur le système de droites conjuguées à une conique et passant par le même point; par M. L. Gilles.

Fig. 5.



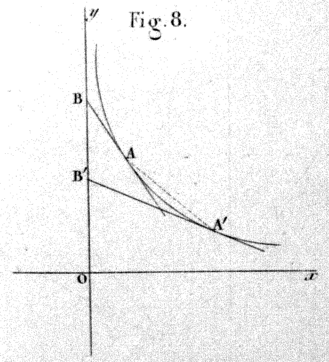
Principe fondamental de la trigonométrie sphérique, par M. C. Foucaut.

Fig. 4.



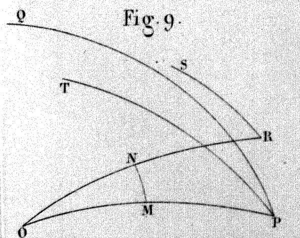
Courbe de poursuite.

Fig. 8.



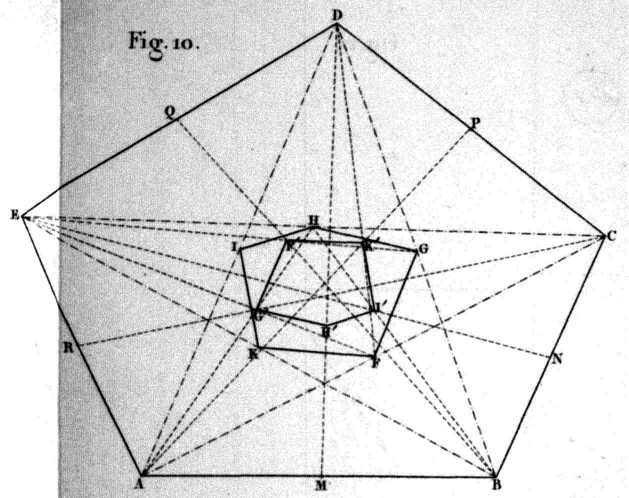
Question 101.

Fig. 9.



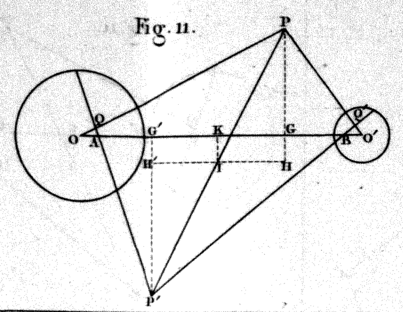
Solution de la Question 203; par M. E. Ferier.

Fig. 10.



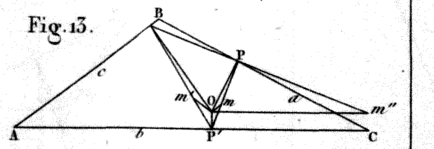
Théorème sur les Polaires; par M. Et. Ploix.

Fig. 11.



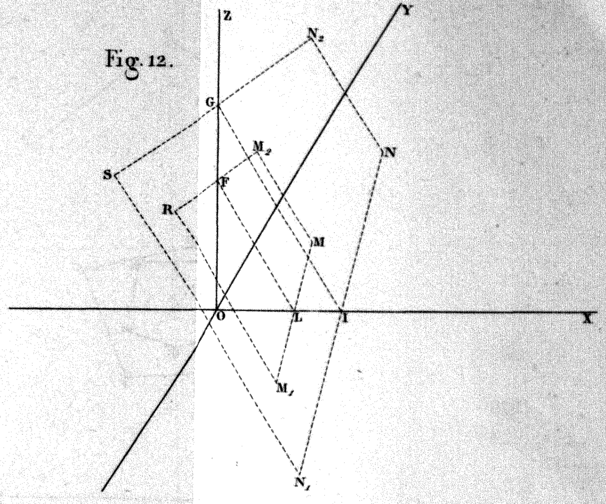
Solution sur la Question 103; par M. F. Laroche.

Fig. 13.



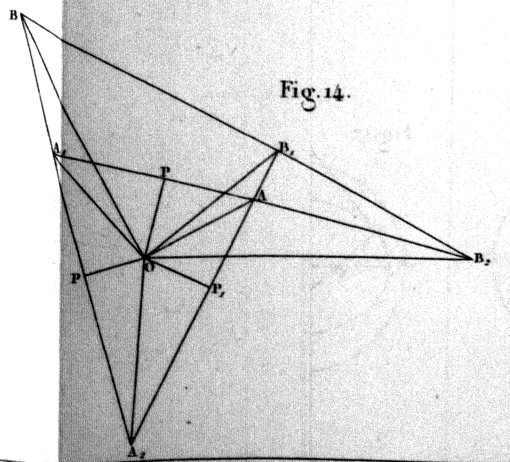
Question d'examen sur les Diamètres; par M. Choquet.

Fig. 12.



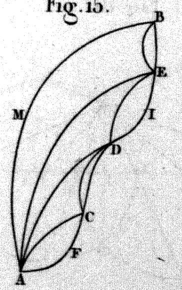
Triangle rectiligne; par M. F. Laroche.

Fig. 14.



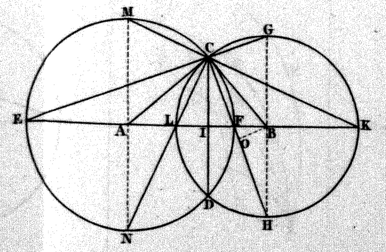
La plus courte distance sur la Sphère; par M. L. Thomas.

Fig. 15.



Intersection de deux cercles; par M. G. J. Dostor.

Fig. 16.



Solution de la Question 201; par M. E. Douliot.

Fig. 17.

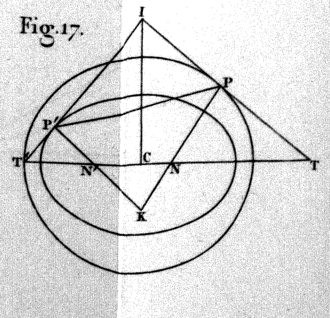
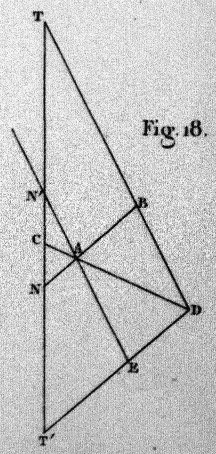


Fig. 18.



Bachelier, Éditeur. Gravé par E. Wormser.