

B. HOSTINSKÝ

## Méthodes générales du calcul des probabilités

*Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule 52 (1931)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1931\\_\\_52\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1931__52__1_0)

© Gauthier-Villars, 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CIRM - BIBLIOTHEQUE  
N° d'inventaire L 21365  
Date 4/3/93

# MÉMORIAL

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,

MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

**Henri VILLAT**

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,

Professeur à la Sorbonne,

Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LII

**Méthodes générales du Calcul des Probabilités**

PAR M. B. HOSTINSKÝ

Professeur à la Faculté des Sciences de Brno.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1934

## AVERTISSEMENT

---

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

Les noms russes sont transcrits à la manière française; l'orthographe tchèque (introduite dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*) n'est pas employée ici. Ainsi nous écrivons Liapounoff (= Ljapunov en orthographe tchèque), Markoff (= Markov), Tchebychef (= Čebyšev).

---

---

MÉTHODES GÉNÉRALES  
DU  
CALCUL DES PROBABILITÉS

Par M. B. HOSTINSKÝ,  
Professeur à la Faculté des Sciences de Brno.

---

INTRODUCTION.

D'après la définition classique, la probabilité d'un phénomène s'obtient en divisant le nombre de cas qui lui sont favorables par le nombre total de cas possibles. Cette définition a un grave inconvénient, car elle suppose qu'on regarde tous les cas possibles comme également probables; mais il faut avoir déjà une définition de la probabilité pour pouvoir décider si certains événements doivent être regardés comme également probables ou non.

Pour trouver une meilleure définition de la probabilité ou du hasard, Henri Poincaré a analysé quelques faits qu'on s'accorde à regarder comme fortuits et auxquels le calcul des probabilités paraît s'appliquer. Et, en recherchant leurs caractères communs, il trouve que les causes des phénomènes fortuits sont ou bien très petites (une cause très petite engendre un effet considérable) ou bien très complexes. Dans le premier cas, nous avons à étudier les relations entre la probabilité de la cause et entre celle de l'effet. Or, sous certaines hypothèses, la dernière probabilité s'exprime au moyen d'un paramètre  $n$  et d'une fonction arbitraire qui définit la loi de probabilité pour la cause; et l'on trouve que,  $n$  augmentant indéfiniment, la probabilité de l'effet devient indépendante de la fonction arbitraire. D'où le nom *méthode des fonctions arbitraires* dont nous nous occuperons dans le premier Chapitre.

Dans le second cas, nous avons à analyser les probabilités qui se rattachent à l'accumulation de petits effets dans une suite de  $n$  opérations successives.

Les problèmes qui se présentent ici rentrent dans la *théorie des chaînes* due à Markoff, cette théorie sera exposée dans le second Chapitre. Des problèmes analogues se présentent pour les variables continues: ils seront traités dans le troisième Chapitre.

Nous admettons, dans tout ce qui suit, les *deux principes fondamentaux du Calcul des probabilités*: le principe des probabilités totales et celui des probabilités composées. Le premier principe s'énonce ainsi: Si des événements  $E_1, E_2, \dots, E_n$  de probabilités  $p_1, p_2, \dots, p_n$  se peuvent présenter comme résultats d'une expérience et s'ils s'excluent mutuellement, la probabilité pour qu'un d'eux se produise est égale à  $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ . D'après le second principe, si  $p_1$  est la probabilité de  $E_1$  et  $p_2$  celle de  $E_2$  quand  $E_1$  s'est produit, la probabilité pour que  $E_1$  et  $E_2$  se produisent est égale à  $p_1 p_2$  (voir Borel [6], Chap. I).

## CHAPITRE I.

### MÉTHODE DES FONCTIONS ARBITRAIRES.

**1. Problème de la roulette.** — Le fond d'une très longue rainure horizontale est divisé, par des segments rectilignes perpendiculaires à la longueur et équidistants, en un très grand nombre de bandes étroites alternativement rouges et noires. A l'extrémité A de cette rainure on place une bille et on lui imprime une vitesse initiale. La bille roule sur le fond de la rainure et elle finit par s'arrêter sur une bande rouge ou noire. Soit  $x$  la distance au centre d'une bande au point A et  $dx$  la largeur d'une bande, supposée très petite. Nous admettons que la probabilité pour que la bille se trouve, dans sa position finale, sur la bande d'abscisse  $x$ , soit égale à  $\varphi(x) dx$ . Si la fonction  $\varphi(x)$  varie assez lentement avec  $x$ , les produits  $\varphi(x) dx$  relatifs à un certain nombre de bandes consécutives auront à peu près la même valeur: donc la probabilité totale d'amener (par la position finale de la bille) bande rouge est égale à peu près à celle d'amener bande noire. Tou-

tefois il faut exclure le cas où la fonction  $\varphi(x)$  serait périodique avec une période égale à la largeur d'une bande et où elle aurait une valeur constante pour les bandes rouges, peu différente de celle qui correspond aux bandes noires. Dans ce cas la probabilité totale d'amener bande noire serait différente de celle d'amener bande rouge (*voir* Kries [1], [2]).

Le problème de la roulette proprement dit ne diffère pas au fond du précédent. Supposons que la roulette soit divisée en un très grand nombre de secteurs égaux, alternativement rouges et noirs. Imprimons-lui une rotation rapide. Lorsqu'elle s'arrêtera, une de ses divisions se trouvera en regard d'un point de repère fixe. Le problème consiste à trouver la probabilité  $p$  pour que cette division soit rouge.

Il y a, nous le supposons, une probabilité élémentaire (infiniment petite) pour que la vitesse angulaire initiale soit comprise entre deux limites données infiniment voisines. La probabilité  $f(\theta) d\theta$  pour que la roulette tourne d'un angle total compris entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ , est liée d'une manière déterminée à la précédente. Supposons que chaque secteur de la roulette corresponde à un angle  $\varepsilon$ . Divisons l'axe des abscisses en parties égales à  $\varepsilon$  et, par les points de division, menons des ordonnées jusqu'à la rencontre de la courbe

$$y = f(\theta).$$

L'aire limitée par cette courbe et par l'axe des abscisses se trouve ainsi divisée en bandes de largeur  $\varepsilon$  qui correspondent alternativement aux secteurs rouges et noirs. Supposons qu'on couvre de hachures les aires (bandes) qui correspondent aux secteurs rouges.

La probabilité cherchée sera le rapport de l'aire couverte de hachures à l'aire totale.

Soit  $A$  l'angle maximum dont la roulette peut tourner,  $N$  le nombre de secteurs et  $n$  le nombre de bandes dans la figure de la courbe  $y = f(\theta)$ . Nous avons  $\varepsilon = A : n$ ;  $N = 2\pi n : A$ .

Admettons que la fonction  $f(\theta)$  soit continue, quelle soit dérivable et que sa dérivée  $f'(\theta)$  ne dépasse pas un maximum  $M$

$$|f'(\theta)| \leq M.$$

La différence des aires de deux bandes consécutives est plus petite que  $\varepsilon(\mu' - \mu)$ , où  $\mu'$  et  $\mu$  sont respectivement le maximum et le minimum de  $f(\theta)$  dans l'intervalle de longueur  $2\varepsilon$  correspondant à

nos deux bandes consécutives. La quantité  $(\mu' - \mu)$  étant plus petite que  $2M\varepsilon$ , la différence des deux aires est plus petite que  $2M\varepsilon^2$ . Comme il y a  $\frac{1}{2}n$  aires couvertes de hachures, il faut multiplier par  $\frac{1}{2}n$  pour avoir la différence des deux aires totales, ce qui donne  $M\varepsilon^2 n$  ou  $MA\varepsilon$ . La différence des deux aires totales tend donc vers zéro avec  $\varepsilon$  et la probabilité cherchée sera égale à  $\frac{1}{2}$ .

Si l'on ne savait rien sur  $f$ , on ne pourrait rien calculer : c'est parce qu'on sait quelque chose qu'on peut entreprendre le calcul. (Poincaré [4], [5], [6], [7], p. 148. Borel [3], p. 92; [5], p. 113. Fréchet-Halbwegs [2], p. 63).

Pour démontrer que la probabilité d'amener rouge est égale à  $\frac{1}{2}$ , nous avons supposé que la fonction  $f(\theta)$  soit dérivable. Cette hypothèse n'est pas nécessaire; il suffit de supposer que  $f(\theta)$  soit continue (Borel [5], p. 115. Castelnuovo [1], vol. I, p. 188). On peut aller plus loin encore et supposer seulement que  $f(\theta)$  soit intégrable (Fréchet [1]).

**2. Fonctions arbitraires de plusieurs variables.** —  $\alpha$ . Soit  $A$  un domaine à trois dimensions situé à distance finie. Nous désignons par  $\Lambda$  son volume

$$\Lambda = \int \int \int_A dx dy dz.$$

Une fonction positive et continue  $\varphi(x, y, z)$  est définie dans  $A$ . Nous supposons qu'elle possède des dérivées premières et qu'on ait

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \leq K, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \leq K, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| \leq K.$$

$K$  étant une constante. Divisons le domaine  $A$  en  $m$  domaines élémentaires égaux. Le volume d'un domaine élémentaire est égal à

$$\varepsilon = \frac{\Lambda}{m}.$$

La division doit être faite d'une telle manière que la distance de deux points contenus dans un même domaine élémentaire ne soit jamais plus grande que  $l$ .

Enfin, nous divisons chaque domaine élémentaire en deux parties; le volume de la première ou partie *blanche* est égal à  $\lambda\varepsilon$ , celui de la seconde ou *noire* à  $(1 - \lambda)\varepsilon$ . Le rapport  $\lambda$  de la partie blanche au volume total du domaine élémentaire considéré doit être constant; c'est un nombre compris entre zéro et un qui ne dépend ni du domaine élémentaire considéré ni du nombre  $m$ .

Désignons par  $I$  et par  $I_1$  les intégrales suivantes :

$$I = \int \int \int_A \varphi(x, y, z) dx dy dz, \quad I_1 = \int \int \int_{A_1} \varphi(x, y, z) dx dy dz.$$

La première est étendue au domaine primitif  $A$ , la seconde au domaine  $A_1$  formé par l'ensemble de toutes les parties blanches contenues dans  $A$ .

Il résulte des hypothèses que nous avons faites sur  $\varphi(x, y, z)$  que

$$|\lambda I - I_1| < 3l\lambda KA.$$

Supposons que  $m$  croît indéfiniment et que  $l$  tend vers zéro en même temps. Il vient

$$\lim_{m=\infty} I_1 = \lambda I.$$

Il serait aisé d'étendre la démonstration aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Dans le cas d'une seule variable indépendante, la formule donne, pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ , le théorème de Poincaré, démontré au n° 1.

*b.* Supposons maintenant que la valeur de  $\varphi$  ne dépend pas de  $z$ . Dans ce cas (même si les dimensions de domaines élémentaires, mesurées parallèlement à l'axe  $Oz$  ne tendent pas vers zéro avec  $\frac{1}{m}$ ) l'inégalité obtenue plus haut doit être remplacée par

$$|\lambda I - I_1| < 2l\lambda KA$$

et l'égalité  $\lim_{m=\infty} I_1 = \lambda I$  subsiste encore (Hostinsky [1], [2]).

**3. Applications diverses. — a. Sphère qui roule sur un plan. —** La surface d'une bille sphérique est divisée en six quadrilatères sphériques  $Q_I, Q_{II}, \dots, Q_{VI}$  réguliers et égaux dont les côtés sont des arcs des grands cercles et dont les sommets appartiennent à un cube inscrit

dans la sphère. La sphère repose sur un plan horizontal. On lui imprime une vitesse de rotation de sorte qu'elle roule sans glisser sur le plan; elle s'arrête après avoir fait  $n$  tours au plus. Quelles sont les probabilités  $p_I, p_{II}, \dots, p_{VI}$  pour que le point de contact avec le plan, dans la position finale de la sphère, soit à l'intérieur de  $Q_I, Q_{II}, \dots, Q_{VI}$ ?

Nous allons donner la solution pour deux positions initiales particulières de la sphère.

*Premier cas.* — La sphère touche, dans sa position initiale, le plan en un point  $O_1$  qui coïncide avec le centre du quadrilatère  $Q_I$ . Lorsque la sphère roule, son point de contact avec le plan décrit, dans le plan, une droite  $d$  passant par  $O_1$ . Chaque point de  $d$  correspond ainsi à une position parfaitement déterminée de la sphère. Nous représenterons par  $M_i, N_i, \dots$  les points de  $d$ , où le point de contact est situé, sur la sphère, dans le  $i^{\text{ème}}$  quadrilatère. Faisons tourner la droite  $d$  autour de  $O_1$ ; le lieu des points  $M_i, N_i, \dots$ , dans le plan, se compose d'un nombre infini de quadrilatères curvilignes, dont l'ensemble sera représenté par  $P_i$ . La sphère ne pouvant tourner plus de  $n$  fois, le point de contact ne sort jamais du cercle  $\Pi$  décrit autour de  $O_1$  avec le rayon  $2\pi na$ ,  $a$  étant le rayon de la sphère. L'aire de ce cercle est égale à  $\Pi = 4\pi^3 n^2 a^2$ . Soit  $C_m$  la partie de  $P_i$  comprise à l'intérieur de la couronne circulaire  $\Gamma_m$  de centre  $O_1$  et de rayons  $2(m-1)\pi a$  et  $2m\pi a$ .  $C_m$  se compose de deux couronnes non circulaires. Le rapport des aires de  $C_m$  et de  $\Gamma_m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) est égal à

$$\lambda = \frac{C_m}{\Gamma_m} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3 + \sin 2\varphi}} d\varphi = 0.067\dots$$

il ne dépend pas de  $m$ .

Soient  $\rho$  et  $\varphi$  les coordonnées polaires dans le plan (avec le pôle en  $O_1$ ), et  $f(\rho)$  une fonction positive et dérivable dont la dérivée satisfait à la condition

$$|f'(\rho)| < K.$$

Nous supposons que la quantité  $f(\rho)\rho d\rho d\varphi$  est proportionnelle à la probabilité pour que, dans sa position finale, la sphère touche le plan en un point situé à l'intérieur de l'élément infinitésimal  $\rho d\rho d\varphi$ ; la densité de probabilité, proportionnelle à  $f(\rho)$ , est alors indépendante

de  $\varphi$ . Posons

$$S = \int_{\pi} \int f(\varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi, \quad S' = \int_{P_1} \int f(\varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

On trouve l'inégalité

$$\lambda S - S' \leq \lambda \sqrt{\frac{\Pi^2}{\pi}} \cdot k \cdot \frac{1}{n}.$$

Si  $n$  augmente indéfiniment, la probabilité  $p_1 = S' : S$  tend vers la valeur  $\lambda = 0,267, \dots$

Le nombre  $n$  est égal au rapport du rayon de  $\Pi$  au périmètre  $2\pi a$  du grand cercle de la sphère. Donc pour  $n$  infini la probabilité cherchée ne dépend pas de la fonction  $f(\rho)$ ; elle a la même valeur comme si  $f(\rho)$  était constante. Le rapport  $S' : S$  tend encore vers  $\lambda$  si,  $S$  et  $S'$  augmentant indéfiniment, le second membre de notre inégalité reste plus petit qu'un nombre constant.

$Q_{VI}$  étant la face opposée à  $Q_I$ , on trouve, pour  $n$  infini.

$$\lim p_1 = \lim p_{VI} = \lambda.$$

et pour les autres faces

$$\lim p_{II} = \lim p_{III} = \lim p_{IV} = \lim p_{V} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2}.$$

*Second cas.* — Supposons que, dans la position initiale, le point de contact coïncide avec un sommet  $A$  du cube inscrit et soient  $Q_I$ ,  $Q_{II}$  et  $Q_V$  les trois quadrilatères à sommet commun  $A$ . On trouve, pour  $n$  infini,

$$\lim p_I = \lim p_{II} = \lim p_V = \lim p_{III} = \lim p_{IV} = \lim p_{VI} = \frac{1}{6}.$$

Le calcul de ces probabilités conduit à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5 - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\varphi\right)}} \, d\varphi = \frac{\pi^2}{6} \text{ (Hostinsky [3]).}$$

*b. Problème de l'aiguille.* — On lance une aiguille cylindrique sur un plan horizontal, où sont tracées des parallèles équidistantes; la distance  $2a$  de deux parallèles voisines est supposée plus grande que la longueur  $2b$  de l'aiguille. Quelle est la probabilité pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles?

Le calcul de cette probabilité doit tenir compte des conditions physiques de l'expérience. Considérons par exemple les conditions suivantes. Les parallèles sont tracées sur une table qui a la forme d'un carré. On commence par placer l'aiguille au centre du carré, l'axe de l'aiguille étant vertical; puis on imprime à l'aiguille une vitesse verticale déterminée. Il y a toujours de petites erreurs dans les conditions initiales; l'aiguille commence son mouvement dans une position qui n'est qu'approximativement verticale, et la vitesse initiale varie d'une expérience à l'autre, soit en grandeur, soit en direction. C'est pourquoi l'aiguille tombe, dans des expériences différentes, sur des places différentes de la table. Mais il est nécessaire que les erreurs, dans les conditions initiales, ne soient pas trop grandes, car l'aiguille ne doit pas tomber en dehors de la table. Il faut « viser » en quelque sorte le centre de la table. La probabilité pour que le centre de l'aiguille tombe sur un carré de côté égal à  $1^{\text{cm}}$  dépend de la position du carré; au centre de la table elle sera plus grande qu'au bord.

Supposons que la table ait la forme d'un carré  $C$  horizontal. Les sommets du carré ont les coordonnées  $(0, 0)$ ,  $(s, 0)$ ,  $(s, s)$ ,  $(0, s)$ . L'axe  $Ox$  coïncide avec une des parallèles. Le côté  $s$  du carré est égal à un multiple entier de la distance  $2a$  de deux parallèles voisines; on a  $s = 2na$ .

La probabilité pour que le centre de l'aiguille se trouve à l'intérieur d'une courbe fermée doit être proportionnelle à l'intégrale d'une fonction  $\varphi(x, y)$  étendue à l'intérieur de la courbe. On suppose que

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < k, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < k.$$

La probabilité pour que l'angle  $\omega$  que fait l'axe de l'aiguille avec une droite fixe soit compris entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , est proportionnelle à  $(\omega_2 - \omega_1)$ .

La probabilité  $p$  pour que l'aiguille coupe une quelconque des parallèles situées à l'intérieur de  $C$  est égale à

$$p = \frac{\int \int \int_{\Lambda_1} \varphi(x, y) dx dy d\omega}{\int \int \int_{\Lambda} \varphi(x, y) dx dy d\omega}.$$

Le domaine A est défini par les inégalités

$$0 < x < 2na, \quad 0 < y < 2na, \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2};$$

il sera représenté, dans l'espace à trois dimensions, par un parallélépipède rectangle qui a C pour base et dont la hauteur est égale à  $\frac{\pi}{2}$ . Pour obtenir  $A_1$ , divisons A en  $n^2$  domaines élémentaires (voir n° 2) par des plans verticaux  $\gamma = 2\nu a$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ) et  $x = 2\nu a$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ). Chaque domaine élémentaire a donc une hauteur égale à  $\frac{1}{2}\pi$  et sa base est un carré de côté  $2a$ . Coupons encore ces domaines par les surfaces cylindriques

$$\omega = \arccos \frac{y - 2\nu a}{b} \quad \text{et} \quad \omega = \arccos \frac{2\nu a - y}{b} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Chaque domaine est divisé ainsi en deux parties; la partie blanche est composée des points représentatifs  $(x, y, \omega)$  correspondant aux cas où l'aiguille coupe une parallèle, le reste constitue la partie noire.

Le domaine  $A_1$  est constitué par l'ensemble de toutes les parties blanches.

La formule qui donne  $p$  dépend du nombre  $n$  de parallèles. Cela posé, appliquons le théorème du n° 2. Nous nous trouvons dans les circonstances particulières du n° 2b, car la valeur de la fonction  $\varphi$  ne dépend pas de  $\varepsilon = \omega$ . En revenant aux notations du n° 2, nous avons

$$\omega = \varepsilon, \quad n^2 = m, \quad \lambda = \frac{2b}{\pi a}.$$

Si  $n$  augmente indéfiniment, tandis que  $s = 2na$  et  $\frac{b}{a}$  ne changent pas, le théorème du n° 2 donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p = \frac{2b}{\pi a},$$

ce qui est conforme à la formule classique de Buffon (Hostinsky [1], [2]).

La solution classique du problème ne tient pas compte du nombre de parallèles; elle correspond au cas où la densité de probabilité  $\varphi(x, y)$  se réduit à une constante (Borel [3], p. 80; [5], p. 100. Carvallo [4]).

*c. Probabilités relatives au mouvement des molécules dans un liquide.* — Considérons un liquide incompressible enfermé dans un vase de forme invariable qu'il remplit complètement. Soient  $x, y, z$  les coordonnées d'une molécule liquide,  $u, v, w$  les composantes de sa vitesse, de telle façon que les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt.$$

Supposons que le mouvement soit permanent; les  $u, v, w$  sont fonctions données de  $x, y$  et  $z$ . L'incompressibilité du liquide se traduit par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Soit  $U_0$  un volume quelconque à l'intérieur du vase; les molécules liquides qui remplissent ce volume à l'instant zéro remplissent à l'instant  $\tau$  un certain volume  $U_1$ , à l'instant  $2\tau$  un certain volume  $U_2, \dots$  à l'instant  $n\tau$  un certain volume  $U_n$ . Nous dirons que  $U_{k+1}$  est le *conséquent* de  $U_k$ . Un volume quelconque est égal à son conséquent; cela résulte de l'incompressibilité du fluide.

Nous admettons que  $\varphi(x, y, z)$  étant une fonction positive et continue quelconque, l'intégrale

$$I(V) = \int \int \int_V \varphi(x, y, z) dx dy dz$$

étendue à un volume  $V$ , donne la probabilité pour qu'à l'instant  $t = 0$  une molécule se trouve à l'intérieur de  $V$ . Proposons-nous de trouver la probabilité  $p$  pour qu'une molécule ne traverse pas plus de  $k$  fois la région  $U_0$  entre l'époque  $-n\tau$  et l'époque 0. Soit  $\sigma_0$  une région faisant partie de  $U_0$  et définie par la propriété suivante : toute molécule qui à l'origine du temps sera à l'intérieur de  $\sigma_0$  ne traversera pas  $U_0$  plus de  $k$  fois entre les époques  $-n\tau$  et 0. Si nous admettons que notre molécule est à l'intérieur de  $U_0$  à l'époque zéro, la probabilité cherchée sera

$$p = \frac{I(\sigma_0)}{I(U_0)}.$$

Si  $\mu$  est la limite supérieure de  $\varphi$ ,

$$I(\sigma_0) < \mu \sigma_0.$$

Soient  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$   $n$  premiers conséquents de  $\sigma_0$ . Il ne pourra pas y avoir de région commune à plus de  $k$  des  $n + 1$  régions  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$  sans quoi, toute molécule qui, à l'époque zéro, se trouverait dans cette région commune, traverserait  $\sigma_0$  et, par conséquent,  $U_0$  plus de  $k$  fois entre les époques  $-n\tau$  et  $0$ . On a donc

$$(n + 1)\sigma_0 \leq kV,$$

et par conséquent

$$P = \frac{\mu k V}{(n + 1)I(U_0)}.$$

Quelque petit que soit  $I(U_0)$ , quelque grand que soit  $k$ , on pourra toujours prendre  $n$  assez grand pour que le second membre de cette inégalité soit aussi petit que l'on veut.

En résumé, quelle que soit la fonction  $\varphi$ , les molécules qui ne traversent  $U_0$  qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles au même titre que les nombres commensurables qui ne sont qu'une exception dans la série des nombres, pendant que les nombres incommensurables sont la règle (Poincaré [1], [3]).

*d. Distribution des petites planètes.* — Deux points se déplacent sur une même circonférence d'un mouvement uniforme mais avec des vitesses différentes. Quelle est la probabilité pour que, à un instant donné, les deux points se trouvent sur une même demi-circonférence  $C_1$  donnée ?

La position d'un point sur la circonférence sera fixée par l'angle au centre  $\varphi$ ; les points situés sur  $C_1$  satisfont à la condition  $0 \leq \varphi < \pi$ . Or, si les probabilités pour un point d'être situé sur  $C_1$  ou sur la demi-circonférence complémentaire sont égales et si les mouvements des deux points sont indépendants l'un de l'autre, la probabilité cherchée est égale à  $\frac{1}{4}$ .

Mais on peut, d'après E. Borel, aller plus loin et faire le calcul en cherchant à apprécier l'influence des petites variations dans les conditions initiales sur le mouvement. Si  $u$  et  $v$  désignent les vitesses angulaires des deux points et  $\alpha$  et  $\beta$  les valeurs initiales (pour  $t = 0$ ) des deux angles au centre, les angles à l'époque  $t$  sont exprimés par les formules

$$x = \alpha + ut, \quad y = \beta + vt.$$

Considérons, dans un plan, le point dont les coordonnées carté-

siennes sont  $x$  et  $y$ . La position de ce point représente l'état actuel du système de nos deux points qui se meuvent sur la circonférence. Les cas où les deux points se trouvent sur  $C_1$  seront représentés dans le plan par des points qui se trouvent à l'intérieur de certains carrés  $S$  en nombre infini : un premier carré a ses sommets aux points  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 0)$ ; et tous les autres carrés s'en déduisent par des translations

$$x' = x + 2m\pi, \quad y' = y + 2n\pi \quad (m, n = 1, \pm 2, \dots).$$

Admettons que  $u$  et  $v$  ne sont connues qu'avec une certaine approximation; nous désignerons par  $\varepsilon$  et  $\eta$  les erreurs en plus ou en moins commises sur  $u$  et  $v$ , de sorte que les formules précédentes doivent être remplacées par les suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \alpha + u't, & y &= \beta + v't, \\ |u' - u| &\leq \varepsilon, & |v' - v| &\leq \eta. \end{aligned}$$

Soit  $\xi$  le point de coordonnées  $\alpha + u'$ ,  $\beta + v'$ , et  $\xi'$  le point de coordonnées  $\alpha + u't$ ,  $\beta + v't$ . Quelque petit que soit le rectangle dont les côtés ont  $2\varepsilon$  et  $2\eta$  pour longueurs où se trouve  $\xi$ , un second rectangle décrit par  $\xi$ , homothétique du précédent, mais  $t$  fois plus grand, devient infiniment grand si  $t$  augmente indéfiniment. Et si la probabilité pour que  $\xi$  se trouve à l'intérieur d'une certaine figure est proportionnelle à l'aire de cette figure, la probabilité pour que  $\xi'$  appartienne à un quelconque des carrés  $S$  sera à peu près égale (pour  $t$  très grand) à un quart; car les carrés  $S$  couvrent à peu près le quart de la surface du second rectangle (Borel [1], [4], p. 74; [5], p. 120). Au lieu de supposer que la probabilité, relative à la position de  $\xi$ , soit proportionnelle à l'aire, on pourrait faire l'hypothèse que la densité de probabilité n'est pas uniforme; elle serait donnée par une fonction arbitraire qui serait, comme dans les cas précédents, sans influence sur le résultat final.

**4. Résumé de la méthode.** — La méthode est très générale; elle s'applique à tout problème sur les probabilités géométriques.

Soit  $P$  un point variable placé à l'intérieur d'un domaine  $D$  à  $m$  dimensions,  $f(P)$  étant une fonction positive du point  $P$  et  $dV$  l'élément de volume de  $D$ , et soit  $\int_D f(P) dV$  la probabilité pour que le point se trouve à l'intérieur de l'élément  $dV$ . Supposons de plus

qu'un certain événement fortuit  $E$  se produit toujours quand  $P$  se trouve dans une partie  $D'$  du domaine  $D$ ; nous appellerons  $D'$  le domaine des cas favorables. Si  $P$  est extérieur à  $D'$ , l'événement  $E$  ne se produit pas.

Je dis que, en général, le domaine  $D'$  se compose d'un grand nombre de domaines partiels qui sont séparés les uns des autres par des domaines qui ne font pas partie de  $D'$ . En effet, soient  $P_1$  et  $P_2$  deux points pris à l'intérieur de  $D$ . Le segment  $P_1P_2$  comprend en général un grand nombre de segments partiels contenus à l'intérieur de  $D'$ ; et ces segments seront séparés par des segments extérieurs à  $D'$ . Car si cela n'avait pas lieu pour une valeur convenable de la distance  $P_1P_2$ , nous aurions un segment assez long dont tous les points seraient ou intérieurs à  $D'$  ou extérieurs à  $D'$ ; si le point  $P$  se déplaçait le long de ce segment, aucun changement ne se produirait par rapport au phénomène  $E$ ; ce phénomène se produirait ou toujours (pour toute position de  $P$  sur  $P_1P_2$ ) ou jamais; il ne serait pas fortuit.

On voit que le grand nombre de domaines partiels s'introduit dans tout problème de ce genre; il correspond précisément au nombre  $n$  de secteurs dans le problème de la roulette (Hostinský [4]).

## CHAPITRE II.

### PROBABILITÉ DES PHÉNOMÈNES LIÉS EN CHAÎNE. CAS DES VARIABLES DISCONTINUES.

§. Définition de la chaîne simple <sup>(1)</sup>. — Soit  $x$  une variable (variable aléatoire) qui peut être égale à une des  $r$  valeurs

$$(1) \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_r.$$

distinctes entre elles. Une suite d'expériences déterminent les valeurs successives de  $x$ . Supposons que  $x^{(0)}$  désigne la valeur initiale de  $x$  (c'est-à-dire la valeur que prend  $x$  avant la première expérience), et

<sup>(1)</sup> Voir aussi n° 10.

soient

$$(2) \quad x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

les valeurs assignées à  $x$  par la première, seconde, ...,  $n^{\text{ième}}$  expérience. Tout nombre de la suite (2) est égal à un des nombres (1).

Nous allons étudier le cas suivant : la probabilité pour que  $x^{(n)}$  soit égal à un certain  $\alpha_k$  dépend du résultat de la  $(n-1)^{\text{ième}}$  expérience. Étant donné que  $x^{(n-1)} = \alpha_i$ , soit  $p_{ik}$  la probabilité de l'égalité  $x^{(n)} = \alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ). Cette hypothèse admise, nous dirons avec Markoff [1] que  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , forment une *chaîne simple*. La chaîne est définie quand on donne les quantités  $\alpha_i$  ainsi que les probabilités  $p_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, r$ ). Étant donnée la valeur initiale  $x^{(0)}$  qui elle-même est égale à une des quantités (1), les valeurs (2) s'en déduisent par des expériences successives.

Chaque expérience assigne à  $x$  une valeur déterminée; si  $\alpha_i$  est la valeur déduite de l'expérience précédente, il faut que

$$(3) \quad \sum_{k=1}^r p_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Nous supposons que les probabilités  $p_{ik}$  soient positives :

$$(4) \quad p_{ik} > 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, r).$$

Soit toujours  $x^{(0)} = \alpha_i$   $i$  étant un indice arbitraire, mais déterminé ( $1 \leq i \leq r$ ), et soit

$$P_{ik}^{(n)} \quad (i, k = 1, 2, \dots, r; n = 1, 2, 3, \dots),$$

la probabilité de l'égalité  $x^{(n)} = \alpha_k$ . Les théorèmes sur la multiplication et sur l'addition des probabilités donnent

$$(5) \quad P_{ik}^{(n)} = \sum_{t=1}^r P_{it}^{(n-1)} p_{tk}.$$

d'où l'on déduit facilement

$$(5') \quad P_{ik}^{(n)} = \sum_{a=1}^r \sum_{b=1}^r \dots \sum_{t=1}^r p_{ia} p_{ab} \dots p_{st} p_{tk}.$$

Le second membre de (5') est une somme  $(n-1)$ -uple.

Posons  $n = l + m$ ,  $l$  et  $m$  étant deux indices quelconques. En groupant convenablement les sommations, la formule (5') donne

$$(6) \quad P_{ik}^{l+m} = \sum_{s=1}^r P_{is}^l P_{sk}^m,$$

avec

$$P_{ik}^1 = p_{ik}.$$

Sommons les deux membres de (5') par rapport à  $k$  de  $k=1$  jusqu'à  $k=r$ . D'après (3) la formule (5') donne

$$(7) \quad \sum_{k=1}^r P_{ik}^n = 1 \quad (i=1, 2, \dots, r),$$

pour tout indice  $n$ .

Voici deux remarques sur les quantités  $P_{ik}^n$  : 1° La probabilité de l'équation  $x^{(m+n)} = \alpha_k$ , en supposant que  $x^{(m)} = \alpha_i$ , est égale à  $P_{ik}^n$ . 2° Étant donnée la substitution  $S$  linéaire et homogène à  $r$  variables indépendantes

$$y_k = \sum_{l=1}^r p_{kl} x_l \quad (k=1, 2, \dots, r),$$

écrivons la substitution obtenue en opérant  $S$   $n$  fois successivement. Si les coefficients  $p_{ik}$  de  $S$  satisfont à (3), la substitution obtenue par itération sera exprimée ainsi :

$$y_k = \sum_{l=1}^r P_{kl}^n x_l \quad (k=1, 2, \dots, r).$$

(Hostinsky [5], [6], [7]).

**6. Théorème fondamental sur la limite de la probabilité.** — Nous supposons toujours que l'on ait

$$x^{(0)} = \alpha_i,$$

que les quantités  $p_{ik}$  et  $P_{ik}^n$  soient définies comme au n° 5 et que les conditions (3) et (4) soient satisfaites. L'expression

$$(8) \quad \alpha_{ik}^n = \sum_{k=1}^r P_{ik}^n \alpha_k,$$

représente la *valeur moyenne* (v. m.) ou espérance mathématique de la quantité  $x^{(n)}$  c'est-à-dire l'espérance mathématique d'un joueur qui doit gagner la somme  $\alpha_k$ , si la  $n^{\text{ième}}$  expérience donne

$$x^{(n)} = \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Démontrons, d'après Markoff [1] que  $\alpha_i^{(n)}$  tend vers une limite indépendante de  $i$  quand  $n$  augmente indéfiniment.

La formule (6) donne pour  $l = 1, m = n - 1$

$$(9) \quad P_{ik}^{(n)} = \sum_{s=1}^r p_{is} P_{sk}^{(n-1)},$$

donc

$$(8') \quad \alpha_i^{(n)} = \sum_{s=1}^r \sum_{k=1}^r p_{is} P_{sk}^{(n-1)} \alpha_k = \sum_{s=1}^r p_{is} q_s^{(n-1)},$$

d'où

$$\alpha_i^{(n)} - \alpha_j^{(n)} = \sum_{s=1}^r (p_{is} - p_{js}) \alpha_s^{(n-1)}.$$

La condition (3) donne

$$\sum_{k=1}^r p_{rk} - \sum_{k=1}^r p_{jk} - 1 = 0.$$

par conséquent, dans la suite de  $r$  quantités

$$p_{i1} - p_{j1}, \quad p_{i2} - p_{j2}, \quad \dots, \quad p_{ir} - p_{jr},$$

il y aura des quantités positives  $\beta_1, \beta_2, \dots$ , les autres seront négatives. Nous représenterons ces dernières par  $-\beta'_1, -\beta'_2, \dots$ . Tout nombre  $\beta_k$  ou  $\beta'_k$  est positif et plus petit qu'un certain nombre  $p_{is}$  qui lui-même est plus petit que 1. Donc

$$\sum \beta_k = \sum \beta'_k < 1.$$

Soit  $\Delta^{(n-1)}$  la différence entre la plus grande et la plus petite des quantités

$$(10) \quad \alpha_1^{(n-1)}, \quad \alpha_2^{(n-1)}, \quad \dots, \quad \alpha_r^{(n-1)}.$$

Nous aurons

$$|\alpha_i^{(n)} - \alpha_j^{(n)}| = |\sum \beta_s \alpha_s^{(n-1)} - \sum \beta'_t \alpha_t^{(n-1)}| < h \Delta^{(n-1)},$$

où  $h = \sum \beta_i = \sum \beta'_i < 1$ . Choisissons les indices  $i$  et  $j$  de telle manière que  $a_i^{(n)}$  et  $a_j^{(n)}$  soient égaux respectivement au plus grand et au plus petit nombre de la suite

$$(10) \quad a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_r^{(n)}.$$

Si  $H$  désigne un certain nombre plus petit que 1,

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} = \Delta^{(n)} < H \Delta^{(n-1)},$$

d'où

$$\Delta^{(n)} < H^{n-1} \Delta^{(1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = 0.$$

Il résulte des formules (3) et (8') que le maximum de la suite (10') n'est pas plus grand que le maximum de (10); et que le minimum de (10') n'est pas plus petit que le minimum de (10). La différence  $\Delta^{(n)}$  des extrema tend vers zéro; donc le maximum et le minimum tendent vers la même limite quand  $n$  augmente indéfiniment. Cette limite est en même temps la limite d'une quelconque des quantités (10'). Ainsi

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)} = a,$$

où la constante  $a$  ne dépend pas de  $i$  c'est-à-dire de la valeur initiale  $\alpha_i = x^{(0)}$  de  $x$ .

*La valeur moyenne (7) de la quantité  $x^{(n)}$  tend, si  $n$  augmente indéfiniment, vers une limite qui ne dépend pas de la valeur initiale  $\alpha_i$  de  $x$  (Markoff [4]).*

Il ne faut pas oublier que le théorème a été démontré pour les conditions (3) et (4). Dans le cas particulier où, pour une valeur déterminée de  $k$ ,  $\alpha_k = 1$  tandis que les autres  $\alpha_i$  sont égales à zéro,  $a_i^{(n)}$  n'est autre chose que  $P_{ik}^{(n)}$ ; en désignant la limite par  $P_k$ , nous avons

$$(11 a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = P_k.$$

*La probabilité  $P_{ik}^{(n)}$  pour que la quantité  $x$  dont la valeur initiale était  $\alpha_i$  soit égale, après la  $n^{\text{ième}}$  expérience, à  $\alpha_k$ , tend vers une limite  $P_k$  indépendante de  $i$  si  $n$  augmente indéfiniment.*

Revenons au cas, où les  $\alpha$  ont des valeurs quelconques; les for-

mules (8) et (11) donnent

$$(11\ b) \quad \alpha = \sum_{k=1}^r P_k \alpha_k.$$

La quantité  $\alpha$  peut être considérée comme la limite de la moyenne arithmétique

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{v. m.} \frac{1}{n} [\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \dots + \alpha^{(n)}].$$

Remarquons que l'équation (7) donne pour  $n$  infini

$$(11\ c) \quad \sum_{k=1}^r P_k = 1.$$

**7. Équation caractéristique. Racine  $\lambda = 1$ .** — Pour déterminer les valeurs  $P_k$ , faisons, dans les formules (5),  $n$  croître indéfiniment. Il vient

$$(12) \quad P_k - \sum_{s=1}^r p_{sk} P_s = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Écrivons le système adjoint

$$(12') \quad Q_k - \sum_{s=1}^r p_{ks} Q_s = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Ce système admet la solution [voir la condition (3)]

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_r.$$

Tous les mineurs relatifs aux éléments du déterminant [sous les hypothèses (3) et (4)]

$$(13) \quad D_r(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda p_{11} + 1 & -\lambda p_{12} & \dots & -\lambda p_{1r} \\ -\lambda p_{21} & -\lambda p_{22} + 1 & \dots & -\lambda p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda p_{r1} & -\lambda p_{r2} & \dots & -\lambda p_{rr} + 1 \end{vmatrix}$$

ont, pour  $\lambda = 1$ , le même signe. Le déterminant lui-même est égal à zéro, si  $\lambda = 1$ . L'équation caractéristique

$$D_r(\lambda) = 0$$

admet  $\lambda = 1$  comme une racine simple. Les probabilités  $P_k$  sont donc proportionnelles aux mineurs qui, dans  $D_r(1)$ , correspondent aux éléments d'une même colonne; elles sont toutes positives et déterminées complètement par (12) en tenant compte de (11 c).

Ces propriétés des déterminants à éléments positifs ont été étudiées par Perron [1], Frobenius [2], [3] et Markoff [3].

### 8. Fonction génératrice $F(t, z)$ de Markoff et sa formule pour $a$ .

— Markoff [3] a montré que l'étude de certaines questions se ramène à celle de la fonction génératrice

$$(14) \quad F(t, z) = \begin{vmatrix} p_{11}z - t^{-z_1} & p_{12}z & \dots & p_{1r}z \\ p_{21}z & p_{22}z - t^{-z_2} & \dots & p_{2r}z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1}z & p_{r2}z & \dots & p_{rr}z - t^{-z_r} \end{vmatrix}.$$

Il a défini la constante  $a$  par la condition suivante :

« La valeur moyenne de l'expression  $[x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)} - na]$  ne croît pas indéfiniment avec  $n$  ». Il trouve que

$$(15) \quad a = \left[ \frac{\partial F(t, z)}{\partial t} ; \frac{\partial F(t, z)}{\partial z} \right]_{t=1, z=1}.$$

On peut montrer que le second membre de (15) ne diffère pas de celui de (11 b).

Pour cela, introduisons le déterminant aux éléments

$$p_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, r)$$

et soit  $H(i_1, i_2, \dots, i_k)$  son mineur principal du  $k^{\text{ième}}$  degré qui contient, dans la diagonale principale, les éléments  $p_{i_1 i_1}, p_{i_2 i_2}, \dots, p_{i_k i_k}$ . Le déterminant  $D_r(\lambda)$  introduit au n° 7 peut s'exprimer ainsi :

$$(16) \quad D_r(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^r \frac{(-\lambda)^k}{k!} \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \dots \sum_{i_k=1}^r H(i_1, i_2, \dots, i_k).$$

Si  $M_s(\lambda)$  désigne le mineur principal dans le déterminant  $D_r(\lambda)$  qui correspond à l'élément  $-\lambda p_{ss} + 1$ , nous avons

$$(16') \quad M_s(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \dots \sum_{i_k=1}^r H(i_1, i_2, \dots, i_k) \\ (i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, r).$$

Il résulte de ce que nous avons dit au n<sup>o</sup> 7 que

$$P_k = \frac{M_k(1)}{\sum_{s=1}^r M_s(1)}.$$

D'autre part, en substituant le déterminant (14) à la place de  $F(t, z)$  dans la formule (15), on obtient après quelques calculs

$$\alpha = \frac{\sum_{s=1}^r M_s(1) z_s}{\sum_{s=1}^r M_s(1)} = \sum_{s=1}^r P_s z_s;$$

les formules (15) et (11 b) donnent donc la même valeur pour  $\alpha$  (Hostinsky [11]).

**9. Autres racines de l'équation caractéristique. Nouvelle démonstration du théorème fondamental.** — Nous supposons toujours que la condition (3) est vérifiée par les probabilités  $p_{ik}$ . Mais nous admettrons maintenant, au lieu de (4), que

$$p_{ik} \geq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, r).$$

Cela posé considérons les équations suivantes, plus générales que (12) et (12') :

$$\varphi_k - \lambda \sum_{s=1}^r p_{sk} \varphi_s = 0, \quad \psi_h - \lambda \sum_{s=1}^r p_{hs} \psi_s = 0,$$

( $k, h = 1, 2, \dots, r$ ).

$\lambda$  étant une constante. La condition pour que les équations homogènes aux inconnues  $q_k$  aient une solution non nulle s'écrit

$$D_r(\lambda) = 0,$$

et cette même condition doit être satisfaite pour que les équations aux  $\psi_h$  soient résolubles. La constante  $\lambda$  est donc égale à une racine de l'équation caractéristique. La racine  $\lambda_0 = 1$  conduit aux équations (12) et (12'). En supposant que toutes les racines soient simples.

désignons-les par  $\lambda_j (j = 0, 1, \dots, r-1)$  et écrivons

$$(17) \quad \varphi_{kj} - \lambda_j \sum_{s=1}^r p_{sk} \varphi_{sj} = 0,$$

$$(17') \quad \psi_{hj} - \lambda_j \sum_{s=1}^r p_{hs} \psi_{sj} = 0.$$

Le second indice de  $\varphi_{kj}$  ou de  $\psi_{hj}$  indique que ces quantités dépendent de la racine  $\lambda_j$ . On démontre facilement que

$$(18) \quad \sum_{h=1}^r \varphi_{hg} \psi_{hj} = 0 \quad (g, j = 0, 1, \dots, r-1; g \neq j).$$

Si  $\lambda_g = \lambda_j$ , la somme au premier membre sera en général différente de zéro. Supposons qu'il en soit ainsi et multiplions les quantités  $\varphi_{1j}$ ,  $\varphi_{2j}$ , ...,  $\varphi_{rj}$  par une quantité convenable pour que

$$(19) \quad \sum_{h=1}^r \varphi_{hj} \psi_{hj} = 1 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r-1).$$

Les valeurs des produits  $\varphi_{hj} \psi_{hj}$  sont ainsi déterminées d'une manière univoque.

Pour la racine  $\lambda_0 = 1$  nous avons

$$\varphi_{k0} = P_k, \quad \psi_{k0} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

et l'équation (19) (pour  $j = 0$ ) n'est autre chose que (11 c). Les équations (18) deviennent, pour  $j = 0$ ,

$$\sum_{h=1}^r \varphi_{hg} = 0 \quad (g = 1, 2, \dots, r-1).$$

L'équation (17) donne lieu, pour  $j = 0, 1, 2, \dots, r-1$ , à un système de  $r$  équations aux inconnues  $p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{rk}$ . On trouve, en faisant usage de (17'), que (Frobenius [1])

$$p_{ik} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj} \psi_{ij}}{\lambda_j},$$

et, en tenant compte des relations (18) et (19),

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj} \psi_{ij}}{\lambda_j^n},$$

ou, si nous séparons le terme correspondant à  $j = 0$ .

$$(20) \quad P_{ik}^{(n)} = P_k \cdot \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\varphi_{kj} \psi_{ij}}{\lambda_j^n}.$$

La quantité  $P_{ik}^{(n)}$  est positive et, comme le montre (7), plus petite que 1 pour  $n$  quelconque. Donc on a toujours

$$|\lambda_j| \geq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, r-1).$$

car autrement il y aurait, dans la somme au second membre de (20), au moins un terme qui deviendrait infini avec  $n$ .

Si toutes les racines de l'équation  $D_r(\lambda) = 0$  sont simples et différentes de  $-1$ ,  $P_{ik}^{(n)}$  tend, pour  $n$  infini, vers une limite qui ne dépend pas de  $i$  (Romanovsky [1]).

Ce théorème comprend le cas des nos 6 et 7 où nous avons supposé que  $p_{ik} > 0$  (si les racines sont simples).

Si  $\lambda_0 = 1$  est une racine simple, si  $\lambda = -1$  n'est pas une racine et s'il y a d'autres racines multiples, la limite existe encore. Si  $\lambda_0 = 1$  est une racine multiple et si  $\lambda = -1$  n'est pas une racine, la limite existe, mais elle dépend de l'indice  $i$ . Si une racine est égale à  $-1$ , la quantité  $P_{ik}^{(n)}$  n'a pas de limite pour  $n$  infini; elle oscille d'une manière déterminée (Romanovsky [1]).

**10. Remarques sur la définition de la chaîne.** — *a.* Pour définir la chaîne, nous avons supposé au n° 5 que les valeurs (1) sont différentes entre elles. En cherchant à nous approcher de l'énoncé primitif de Markoff, généralisons la définition du n° 5 un peu comme il suit. Les quantités  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ , sont déterminées par les résultats des expériences successives. Supposons que chaque expérience amène nécessairement un et un seul des  $r$  événements  $E_1, E_2, \dots, E_r$  distincts entre eux.

Si  $E_i$  apparaît comme le résultat de la  $n^{\text{ième}}$  expérience, soit  $p_{ik}$  la

probabilité pour que la  $(n+1)^{\text{ième}}$  expérience amène  $E_k$ . A tout phénomène  $E_i$ , nous faisons correspondre une valeur  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Il n'est pas nécessaire de supposer que les  $\alpha_i$  soient distinctes; car les probabilités  $p_{ik}$  se rattachent aux phénomènes E et non pas directement aux valeurs  $\alpha$ .

b. Voici une autre forme, plus géométrique, de la définition. Soient  $A_1, A_2, \dots, A_r$ ,  $r$  points fixes et M un point mobile. La position de M coïncide toujours avec un des points  $A_i$ . Sa position actuelle est déterminée par une expérience, de sorte que  $p_{ik}$  représente la probabilité du passage de la position  $A_i$  à la position  $A_k$ . Soit  $P_{ik}^{(n)}$  la probabilité pour que le point M qui se trouvait d'abord en  $A_i$  soit transporté, par  $n$  passages successifs, en  $A_k$ . Nous faisons correspondre un nombre  $\alpha_i$  à chaque point  $A_i$ .

c. D'après ce que nous avons dit, il faut, pour définir une chaîne simple, donner les probabilités  $p_{ik}$ , les quantités  $\alpha_i$  <sup>(1)</sup> et la valeur initiale  $x^{(0)}$ .

Voici le procédé employé par Markoff dans ses travaux [1], [2], [3], [4], [14] et [15].

On donne les probabilités  $p_{ik}$  assujetties à vérifier les conditions (3), ainsi que les probabilités

$$p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_r^{(0)}$$

pour que, avant la première expérience, le phénomène  $E_1$  ou  $E_2, \dots$ , ou  $E_r$  respectivement se présente. Si  $p_k^{(n)}$  est la probabilité pour que  $E_k$  se présente comme le résultat de la  $n^{\text{ième}}$  expérience, il faut que

$$(21) \quad p_k^{(n+1)} = \sum_{s=1}^r p_s^{(n)} p_{sk}.$$

Les quantités  $p_k^{(n)}$  vérifient donc les mêmes relations comme les  $P_{ik}^{(n)}$ ; nous avons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k^{(n)} = P_k \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

les  $P_k$  étant définies par les équations (11 c) et (12).

Il peut arriver que les probabilités initiales  $p_k^{(0)}$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ )

---

(1) Il y a évidemment des questions qui ne dépendent pas du choix des quantités  $\alpha_i$ .

soient telles que tous les termes de la suite

$$p_k^0, p_k^1, p_k^2, \dots, p_k^n, \dots$$

soient égaux entre eux. S'il en est ainsi, ils sont tous égaux à la limite de la suite

$$p_k^0 = p_k^1 = p_k^2 = \dots = p_k^n = \dots = P_k,$$

et pour que cela ait lieu, il suffit de supposer que  $p_k^{(0)} = P_k$ . Car les formules (21) et (12) donnent

$$p_k^1 = \sum_{s=1}^r p_s^{(0)} p_{sk} = \sum_{s=1}^r P_s p_{sk} = P_k,$$

et, en général,

$$p_k^{(n+1)} = \sum_{s=1}^r p_s^{(n)} p_{sk} = p_k^{(n)} = \dots = p_k^1 = p_k^0 = P_k.$$

Par conséquent, si Markoff parle de « la probabilité, laquelle appartient à l'événement  $E_k$  dans chaque expérience tant que les résultats des autres expériences restent indéterminés », il faut entendre par cela la limite  $P_k$  de  $P_k^{(n)}$  pour  $n$  infini (voir aussi Bernstein [4], Chap. III).

**11. Calcul de la dispersion. Première méthode.** — Revenons à la notation introduite au n° 5. Soit  $x^{(0)} = \alpha_i$  la valeur initiale de  $x$  et  $x^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) la valeur déduite de la  $k^{\text{ième}}$  expérience. Nous avons vu que

$$\text{v. m. } \frac{1}{n} [x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)}]$$

tend vers une limite  $\alpha$ , déterminée par la formule (11 b) quand  $n$  augmente indéfiniment. Maintenant, nous allons étudier la manière dont la valeur moyenne en question s'approche de sa limite. Markoff [3] a démontré : 1° que

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{v. m. } \frac{[x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)} - n\alpha]^2}{n} = \frac{C}{2},$$

où  $C$  est une constante déterminée; nous l'appellerons *dispersion* :

et 2<sup>o</sup> que

$$(23) \quad \frac{C}{2} = \left[ \frac{d^2 \mathcal{F}(e^u, e^{-au})}{du^2} \right]_{u=0} : \left[ \frac{\partial \mathcal{F}(t, z)}{\partial z} \right]_{t=1, z=1},$$

$\mathcal{F}(t, z)$  désignant le déterminant (14).

En introduisant les déterminants  $\mathcal{B}\mathcal{C}(i_1, i_2, \dots, i_k)$  (voir n<sup>o</sup> 8), on peut mettre (23) sous la forme suivante :

$$(24) \quad \frac{C}{2} = \frac{\sum_{k=1}^r \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \dots \sum_{i_k=1}^r (z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_k} - ka)^2 \mathcal{B}\mathcal{C}(i_1, i_2, \dots, i_k)}{\sum_{k=1}^r \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \dots \sum_{i_k=1}^r \mathcal{B}\mathcal{C}(i_1, i_2, \dots, i_k)}$$

(Hostinsky [10], [11]).

**12. Autre méthode pour calculer la dispersion.** —  $\alpha$ . Déjà, dans son premier travail sur les chaînes, Markoff [1] a indiqué une autre méthode pour calculer la dispersion. Cette méthode, plus directe, est basée sur la définition (22) de la constante C. L'expression

$$[(x^{(1)} - \alpha) - (x^{(2)} - \alpha) + \dots + (x^{(N)} - \alpha)]^2$$

donne

$$\begin{aligned} \text{v. m.} \left[ \sum_{n=1}^N (x^{(n)} - \alpha) \right]^2 &= \sum_{n=1}^N \text{v. m.} [x^{(n)} - \alpha]^2 \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-n} \text{v. m.} [(x^{(n)} - \alpha) + (x^{(n+m)} - \alpha)]. \end{aligned}$$

Les valeurs moyennes au second membre se calculent à l'aide des probabilités  $P_{ik}^{(n)}$ . En supposant toujours  $x^{(0)} = \alpha_i$ , la probabilité de l'équation  $x^{(n)} = \alpha_k$  est égale à  $P_{ik}^{(n)}$ . Si  $x^{(m)} = \alpha_h$ , la probabilité de l'équation  $x^{(n+m)} = \alpha_l$  est exprimée par  $P_{hl}^{(m)}$ . Donc,

$$(25) \quad \begin{aligned} \text{v. m.} \left[ \sum_{n=1}^N (x^{(n)} - \alpha) \right]^2 &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^r P_{ik}^{(n)} (z_k - \alpha)^2 \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-n} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r P_{ik}^{(n)} P_{hl}^{(m)} (\alpha_k - \alpha) (\alpha_l - \alpha). \end{aligned}$$

Supposons que toutes les racines de l'équation  $D_r(\lambda) = 0$  soient simples et différentes de  $-1$ .

La formule (11 b) donne

$$\sum_{k=1}^r P_k(z_k - a) = \sum_{k=1}^r P_k z_k - a \sum_{k=1}^r P_k = a - a = 0.$$

En tenant compte de cette relation, éliminons dans le second membre de (21 a) les expressions  $P_k^{(n)}$  au moyen de la formule (20). Il vient

$$v. m. \left[ \sum_{n=1}^N (x^{(n)} - a) \right]^2 = x + \beta + \gamma + \delta,$$

où

$$\begin{aligned} x &= N \sum_{k=1}^r P_k (z_k - a)^2, \\ \beta &= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1 - \lambda_j^{-N}}{\lambda_j - 1} \varphi_{kj} \psi_{ij} (z_k - a), \\ \gamma &= 2 \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{s=1}^{r-1} P_k \varphi_{ls} \psi_{ks} (z_k - a) (z_l - a) \left[ \frac{\lambda_s^{-N+1} - 1}{(\lambda_s - 1)^2} + \frac{N-1}{\lambda_s - 1} \right], \\ \delta &= 2 \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{s=1}^{r-1} \varphi_{kj} \psi_{ij} \varphi_{ls} \psi_{ks} (z_k - a) \\ &\quad \times (z_l - a) \left[ \frac{\lambda_j^{-N+1} - \lambda_s^{-N+1}}{(1 - \lambda_s)(\lambda_s - \lambda_j)} + \frac{1 - \lambda_j^{-N+1}}{(1 - \lambda_s)(1 - \lambda_j)} \right]; \end{aligned}$$

l'expression qui figure entre crochets dans la dernière formule n'est valable que si  $s$  est différent de  $j$ ; si  $s = j$ , elle doit être remplacée par

$$\frac{(N-1)\lambda_j^{-N}}{1 - \lambda_j} + \frac{1 - \lambda_j^{-N+1}}{(1 - \lambda_j)^2}.$$

Nous avons donc le résultat suivant :

*La quantité*

$$v. m. [x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(N)} - Na]^2$$

*est égale à la somme*  $x + \beta + \gamma + \delta$ .

Pour obtenir la dispersion  $C$ , il suffit, d'après la formule (22), de

diviser par  $N$  et ensuite faire croître  $N$  indéfiniment. La quantité  $\alpha$  divisée par  $N$  donne un quotient fini même pour  $N$  infini; les quantités  $\beta$  et  $\delta$  tendent vers zéro; il en est de même avec la partie de  $\gamma$  qui provient du premier terme entre crochets, tandis que le second terme, divisé par  $N$ , donne une limite différente de zéro. Ainsi, nous obtenons

$$(25) \quad \frac{C}{2} = \sum_{k=1}^r P_k (\alpha_k - \alpha)^2 + 2 \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\varphi_{ls} \psi_{ks}}{\lambda_s - 1} P_k (\alpha_k - \alpha) (\alpha_l - \alpha).$$

La quantité

$$v. m. \frac{[x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(N)} - Na]^2}{N}$$

tend, si  $N$  augmente indéfiniment, vers une limite déterminée qui est égale au second membre de (25) (voir Hostinsky [1]).

Remarquons que la démonstration s'appuie sur la formule (20); elle suppose que les racines de  $D_r(\lambda) = 0$  soient simples et différentes de  $-1$ .

b. Au lieu d'employer la définition (22) de la constante  $C$ , on peut introduire la définition équivalente

$$(22a) \quad \frac{C}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} v. m. \frac{[x^{(1)} - \alpha_i^{(1)} + x^{(2)} - \alpha_i^{(2)} + \dots + x^{(n)} - \alpha_i^{(n)}]^2}{n},$$

où  $\alpha_i^{(k)}$  est la valeur moyenne de  $x^{(k)}$  en supposant que  $x^{(0)} = \alpha_{ij}$ , voir la formule (8). Pour démontrer que le second membre de (22a) n'a pas de limite différente de celle de l'expression (22), il suffit de supposer que les formules du n° 6 soient valables; cela a lieu, par exemple, dans le cas où toutes les probabilités  $p_{ik}$  sont positives (Markoff [1], Hostinsky [11]).

13. **Chaîne simple pour  $r = 2$ .** — a. Si  $r = 2$ , il y a quatre probabilités  $p_{ik}$ ; elles satisfont aux équations (3),

$$p_{11} + p_{12} = 1, \quad p_{21} + p_{22} = 1.$$

Supposons qu'elles soient toutes positives. L'équation caractéristique a deux racines distinctes

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = (p_{11} - p_{21})^{-1}.$$

avec  $|\lambda_1| > 1$ . Les équations (12) donnent pour  $n$  infini

$$\lim P_{11}^{(n)} = \lim P_{21}^{(n)} = P_1 = \frac{P_{21}}{1 - \lambda_1^{-1}}, \quad \lim P_{12}^{(n)} = \lim P_{22}^{(n)} = P_2 = \frac{P_{12}}{1 - \lambda_1^{-1}}.$$

Les équations (17) et (17') s'écrivent, pour  $\lambda = \lambda_1$ ,

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_1 p_{11}) \varphi_{11} - \lambda_1 p_{21} \varphi_{21} &= 0, & -\lambda_1 p_{12} \varphi_{11} + (1 - \lambda_1 p_{22}) \varphi_{21} &= 0, \\ (1 - \lambda_1 p_{11}) \psi_{11} - p_{12} \psi_{21} &= 0, & -\lambda_1 p_{21} \psi_{11} + (1 - \lambda_1 p_{22}) \psi_{21} &= 0. \end{aligned}$$

La condition (19) devient

$$\varphi_{11} \psi_{11} - \varphi_{21} \psi_{21} = 1$$

et, si nous posons  $\varphi_{11} = 1$ , nous avons

$$\varphi_{21} = -1, \quad \psi_{11} = \frac{P_{12}}{1 - \lambda_1^{-1}}, \quad \psi_{21} = \frac{P_{21}}{1 - \lambda_1^{-1}}.$$

La formule (20) donne

$$P_{ik}^{(n)} = P_k + \frac{\varphi_{k1} \psi_{i1}}{\lambda_1^n} \quad (j, k = 1, 2).$$

Dans le cas particulier où  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha = P_1$ , la formule (25) s'écrit

$$(25a) \quad \frac{G}{2} = P_1 (1 - P_1) \frac{1 - \lambda_1^{-1}}{1 - \lambda_1^{-1}} = P_1 (1 - P_1) \frac{1 + P_{11} - P_{21}}{1 - P_{11} - P_{21}}$$

ce qui est en accord avec la formule que Markoff a obtenue ([15], p. 559 en bas) en utilisant la fonction génératrice  $F(t, z)$ . Pour obtenir le résultat de Markoff, il faut écrire

$$P_1 = p, \quad 1 - P_1 = q, \quad p_{11} - p_{21} = \delta.$$

b. Dans un travail sur le mouvement Brownien, R. Fürth a calculé la valeur moyenne de  $[x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(N)} - Na]^2$  en supposant

$$r = 2, \quad \alpha_1 = \xi, \quad \alpha_2 = -\xi, \quad p_{11} = p_{22} = p, \quad p_{12} = p_{21} = 1 - p.$$

Ces hypothèses donnent

$$\begin{aligned} P_1 = P_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 0, \quad \varphi_{11} = 1, \quad \varphi_{21} = -1, \\ \psi_{11} = \frac{1}{2}, \quad \psi_{21} = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2p-1}. \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans les expressions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et faisons la

somme  $S$ . Il vient

$$S = N \frac{p}{1-p} \xi^2 + \frac{(2p-1)\xi^2}{2(p-1)^2} [(2p-1)^N - 1]$$

ce qui est le résultat obtenu par Fürth [1].

*c. Remarque.* — Markoff [9], [15] a donné l'application suivante à la statistique des voyelles dans un texte russe. Soit  $p_{11}$  la probabilité pour que la lettre qui suit immédiatement une voyelle soit une voyelle et  $p_{21}$  la probabilité pour que la lettre qui suit une consonne soit une voyelle. 100000 lettres d'un texte, prises dans leur ordre naturel, permettent de déterminer la valeur empirique de  $p_{11}$  et de  $p_{21}$  ainsi que la dispersion au moyen de (25a). En faisant le même calcul avec des lettres qui ne forment pas un texte (par exemple, si l'on supprime les lettres d'un rang pair dans un texte donné, en ne conservant que la 1<sup>re</sup>, 3<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, ... lettre), on obtient des valeurs de  $p_{11}$ , de  $p_{21}$  et de la dispersion qui diffèrent beaucoup des valeurs déduites précédemment.

**14. Cas des épreuves indépendantes.** — Le cas des épreuves indépendantes répétées (ou « cas Bernoulli ») est un cas particulier de la chaîne simple. Dans ce cas spécial, le résultat d'une expérience quelconque ne dépend pas des résultats des expériences précédentes; la probabilité  $p_{ik}$  ne dépend que du second indice et nous avons

$$p_{ik} = P_{ik}^{(n)} = P_k$$

pour  $n$  quelconque. Les formules (11b) et (24) deviennent

$$(26) \quad \alpha = \sum_{k=1}^r P_k \alpha_k,$$

$$(27) \quad \frac{C}{2} = \sum_{k=1}^r P_k (\alpha_k - \alpha)^2.$$

Le cas traité au n° 13a ( $r = 2$ ) devient un cas Bernoulli, si

$$p_{11} = p_{21} = P_1, \quad p_{12} = p_{22} = 1 - P_1.$$

Si (comme au n° 13a)  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ , et si  $m$  désigne le nombre des expériences qui amènent le phénomène  $E_1$  (voir n° 10a) et  $n$  le

nombre total d'expériences, (25 a) se transforme en la formule bien connue pour la dispersion dans le cas Bernoulli

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{v. m.} \frac{(m - n P_1)^2}{n} = P_1(1 - P_1).$$

15. Cas où  $p_{1k} + p_{2k} + \dots + p_{rk} = 1$ . — Ajoutons, aux hypothèses (3) et (4), les conditions supplémentaires suivantes

$$(29) \quad \sum_{i=1}^r p_{ik} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Les conditions (3), (4) et (29) étant supposées satisfaites, les équations (12) donnent

$$P_1 = P_2 = \dots = P_r.$$

et il résulte de la relation (11 c) que

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = P_1 = P_2 = \dots = P_r = \frac{1}{r}$$

pour  $r$  et  $k$  quelconques. Considérons les  $P_{ik}^{(n)}$  comme coefficients d'une substitution linéaire à  $r$  variables (voir la seconde remarque à la fin du n° 5). Si, dans le tableau formé par les coefficients d'une substitution  $S$  linéaire et homogène à  $r$  variables tous les éléments sont positifs et si, dans chaque ligne et dans chaque colonne, leur somme est égale à l'unité, la substitution obtenue en itérant  $S$  une infinité de fois a tous ses coefficients égaux à  $r^{-1}$  (Hostinský [6], [7]).

La formule (11 b) s'écrit dans ce cas

$$a = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \alpha_k.$$

Le théorème exprimé par la formule (30) admet la réciproque suivante : Si les conditions (3), (4) et (30) sont satisfaites, les équations (29) le sont aussi.

16. Le problème du battage des cartes proposé par Poincaré. — Soient  $S_1, S_2, \dots, S_r$  ( $r = q!$ ) les opérations qui consistent à permuter deux cartes. Supposons que chaque opération  $S_i$  peut se pré-

senter avec une certaine probabilité  $p_i$  et que

$$p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Le joueur bat successivement les cartes; chaque battement consiste à appliquer une des opérations  $S_i$ . Quelle est la probabilité pour que, après un nombre infini de battages successifs, les cartes présentent un ordre déterminé?

Une permutation initiale étant donnée appliquons aux cartes une opération  $S_i$ , et désignons par cette même lettre la permutation qui résulte de cette opération.

Ainsi, une correspondance biunivoque se trouve établie entre les opérations  $S_i$  et entre les permutations que peuvent présenter les cartes. Convenons de désigner par  $S_i S_j$  l'opération qui résulte de l'application successive de  $S_i$  et de  $S_j$ , et par  $S_i^{-1}$  l'opération inverse de  $S_i$ . Le symbole  $S_i^{-1} S_k$  représente l'opération qui, appliquée à la permutation  $S_i$ , amène les cartes dans la permutation  $S_k$ ; soit  $p_{ik}$  la probabilité de cette opération. Toute probabilité  $p_{ik}$  est égale à une probabilité  $p_j$ ; car  $S_i^{-1} S_k$  est équivalente à une opération  $S_j$ . Le tableau à double entrée formé par les opérations

$$S_i^{-1} S_k (i, k = 1, 2, \dots, r)$$

contient, dans chaque ligne et dans chaque colonne, toutes les  $S_j$ ; il en résulte que

$$\sum_{k=1}^r p_{ik} = \sum_{j=1}^r p_j = 1, \quad \sum_{k=1}^r p_{ki} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Toutes les conditions du théorème démontré au n° 15 sont remplies; donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = \frac{1}{r} = \frac{1}{q!}.$$

*La probabilité pour qu'une permutation finale donnée se présente après un nombre infini de battages successifs, est constante; elle ne dépend ni de la permutation initiale, ni de la permutation finale, ni des valeurs  $p_i$ .*

L'ensemble de quantités  $p_i$  caractérise les « habitudes du joueur ».

Poincaré [7, Chap. XVI] a résolu ce problème en faisant usage de la multiplication de nombres complexes. Hadamard [1] a donné une démonstration plus simple basée sur le calcul des moyennes arithmétiques successives (voir aussi Urban [1, p. 166], Hostinský [5], [6], [7]).

17. **Un autre problème sur le battage des cartes.** — *a.* On peut, suivant P. Lévy [1], considérer le problème du battage des cartes sous un autre point de vue.

Convenons de marquer par  $1, 2, \dots, q$  les rangs occupés par les cartes dans une permutation, et cherchons la probabilité  $a_{ik}$  pour qu'une carte passe, par un seul battage, du rang  $i$  au rang  $k$ . On a

$$a_{ik} = \sum_l p_l$$

où la somme est étendue à tous indices  $l$  déterminés par la condition suivante :  $S_l$  transporte la carte qui, avant le battage, occupait le rang  $i$ , au rang  $k$ . On démontre facilement que

$$\sum_{k=1}^q a_{ik} = \sum_{i=1}^q a_{ik} = 1.$$

Si donc  $a_{ik}^{(n)}$  est la probabilité pour qu'une carte passe, pour  $n$  battages successifs, du rang  $i$  au rang  $k$ , on a, d'après ce qui a été dit au n° 15,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ik}^{(n)} = \frac{1}{q}.$$

*Quel que soit le rang initial de la carte, la probabilité pour qu'elle occupe, après un nombre infini de battages successifs, un rang déterminé, est égale à  $q^{-1}$ ,  $q$  étant le nombre de cartes.*

*b.* Considérons, en particulier, le cas de trois cartes ( $q = 3$ ). Il y a six manières  $S_i$  de permuter trois cartes. Nous les représenterons par

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, & S_2 &= \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, & S_3 &= \begin{pmatrix} 123 \\ 313 \end{pmatrix}, \\ S_4 &= \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, & S_5 &= \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, & S_6 &= \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$S_1$  est l'opération identique;  $S_2$  ne permute que les cartes qui se trouvent au deuxième et au troisième rang, elle laisse immobile la carte qui se trouve au premier rang, et ainsi de suite. On a ici

$$(31) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = p_1 + p_2, & \alpha_{12} = p_3 + p_4, & \alpha_{13} = p_5 + p_6, \\ \alpha_{21} = p_3 + p_5, & \alpha_{22} = p_1 + p_6, & \alpha_{23} = p_2 + p_4, \\ \alpha_{31} = p_4 + p_6, & \alpha_{32} = p_2 + p_5, & \alpha_{33} = p_1 + p_3, \end{cases}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{ik}^n = \frac{1}{3}.$$

Il résulte de ce que nous avons dit au n° 6 que la valeur moyenne de  $(m : n)$  tend vers  $\frac{1}{3}$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment; nous désignons par  $n$  le nombre de battages et par  $m$  le nombre de ceux qui ont amené une carte déterminée (par exemple le roi) au premier rang. Si  $n$  est très grand, le rapport  $m : n$  sera à peu près égal à  $\frac{1}{3}$ , (voir n° 11) et nous aurons la relation approchée

$$\left(m - \frac{n}{3}\right)^2 \sim \frac{C}{2} n.$$

Pour trouver  $C$ , il faut substituer, dans la formule (24)

$$r = 3, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad p_{ik} = \alpha_{ik}.$$

Ainsi  $C$  sera égale à une fonction rationnelle des quantités  $p_1, p_2, p_3, p_4$  et  $p_5$ ; nous supposons toujours que

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1, \quad p_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Considérons les trois cas suivants où la dispersion (mesurée par  $C$ ) prend des valeurs différentes :

I. Si  $p_1$  diffère peu de l'unité et si les autres  $p_i$  sont très petites,  $C$  est très petite.

II. Si  $p_6$  diffère très peu de l'unité (c'est-à-dire, si le joueur est disposé d'exécuter l'opération  $S_6$  plus souvent que les autres),  $C$  est très grand.

III. Si  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$ , on a

$$\frac{1}{2} C - \frac{2}{q}.$$

Dans ce dernier cas, la dispersion ne diffère pas de celle qui se présenterait dans le cas d'épreuves indépendantes (c'est-à-dire si les trois cartes étaient disposées dans une urne et si l'on désignait par  $n$  le nombre total de tirages successifs et par  $m$  le nombre de cas où le roi apparaît) (voir Hostinsky [11]).

**18. Problème généralisé du battage des cartes.** — La démonstration du théorème de Poincaré donnée au n° 16 suppose que

$$(32) \quad p_{ik} > 0, \quad \sum_{k=1}^r p_{ik} = 1, \quad \sum_{i=1}^r p_{ik} = r.$$

Nous avons ici  $r^2$  quantités  $p_{ik}$  ( $r = q!$ ,  $q$  étant le nombre de cartes) et la démonstration de ce que  $P_{ik}^{(n)}$  tend vers une limite constante, ne suppose pas qu'on impose aux  $p_{ik}$  des conditions autres que (32). Mais l'énoncé même du problème de Poincaré suppose que toute quantité  $p_{ik}$  soit égale à une probabilité  $p_j$ ; par conséquent nous n'avons, dans ce problème, que  $r = q!$  quantités distinctes  $p_{ik}$ .

Abstraction faite de cette dernière supposition nous obtenons le résultat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = \frac{1}{r}$$

plus général que celui du n° 16. En effet, si les  $p_{ik}$  ne satisfont qu'aux conditions (32), la probabilité  $p_{ik}$  de passer, par un seul battage, d'une permutation à l'autre dépend en général non seulement de la probabilité de l'opération à effectuer, mais aussi de l'ordre actuel de cartes avant l'opération.

**19. Cas où quelques  $p_{ik}$  sont nuls.** — La démonstration du théorème fondamental (n° 6) suppose que les  $p_{ik}$  soient positifs. Si quelques  $p_{ik}$  sont nuls et si l'équation  $D_r(\lambda) = 0$  n'a que des racines simples et différentes de  $-1$ , le théorème fondamental subsiste encore (n° 9); cela résulte de la formule (20). Mais dans d'autres cas,

la limite de  $P_{ik}^{(n)}$  peut ne pas exister (voir, pour le problème du batage des cartes, Hadamard [1]).

Il y a des cas qui se ramènent au cas de  $p_{ik}$  positifs par itérations successives. En effet, si les  $p_{ik}$  satisfont aux conditions (3) et si, après un nombre fini  $m$  d'itérations, toutes les quantités  $P_{ik}^{(m)}$  sont positives, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = P_k, \quad \sum_{k=1}^r P_k = 1.$$

Pour démontrer ce théorème, on prouve d'abord que  $P_{ik}^{(nm)}$  tend vers une limite pour  $n$  infini, et ensuite que cette limite ne diffère pas de celle de  $P_{ik}^{(n)}$ .

Par exemple, si les éléments  $p_{ii}$  situés sur la diagonale principale du tableau «  $p_{ik}$  » sont positifs et si en même temps les éléments  $p_{21}$ ,  $p_{32}$ ,  $p_{43}$ , ...,  $p_{r,r-1}$  et  $p_{12}$ ,  $p_{23}$ , ...,  $p_{r-1,r}$  sont positifs, un nombre fini d'itérations suffit pour rendre tous les  $P_{ik}^{(m)}$  positifs (voir Hostinsky [6], [7], [11]).

20. Tirages de deux urnes avec échange des boules. —  $e$  boules blanches et  $f$  boules noires sont distribuées dans deux urnes de sorte que chaque urne contient la moitié

$$g = \frac{1}{2}(e + f)$$

du nombre total de boules; soit  $i$  le nombre de boules blanches dans la première urne. Un tirage consiste à extraire une boule de la première urne et en même temps une de la seconde urne; ensuite on met la boule extraite de la première (seconde), une dans la seconde (première). Quelle est la probabilité  $P_{ik}^{(n)}$  pour que, après  $n$  tirages successifs, la première urne contienne  $k$  boules blanches?

Laplace [1] a montré que  $P_{ik}^{(n)}$  satisfait, par rapport à  $k$  et  $n$ , à une équation aux différences finies partielles. Mais pour trouver le nombre moyen de boules blanches dans la première urne après un nombre infini de tirages, il remplace les variables discontinues par des variables continues et il obtient ainsi une équation aux dérivées partielles (1). Ensuite, par un calcul approché, il démontre que,

(1) M. von Smoluchowski [1] a rencontré la même équation dans sa théorie de la diffusion.

après un nombre infini de tirages, chaque urne contiendra en moyenne le même nombre de boules blanches.

Markoff [8], [10], [11] a donné une solution exacte de ce problème. En donnant à ses calculs une forme convenable, on trouve qu'il s'agit du cas envisagé à la fin du n° 19. Soit  $p_{is}$  la probabilité pour que le nombre de boules blanches dans la première urne passe, par un seul tirage, de  $i$  à  $k$ , et supposons que  $f < e$ . Évaluons les  $p_{is}$  suivant la définition classique. Si nous diminuons, pour simplifier, tous les indices  $r$  et  $s$  de  $(e - g - 1)$ , nous aurons, au lieu des  $p_{is}$ , un système de quantités  $p'_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, e + 1)$ , et

$$\begin{aligned} p'_{\alpha\alpha} > 0, \quad p'_{21} > 0, \quad p'_{32} > 0, \quad \dots \quad p'_{e-1,e} > 0, \\ p'_{12} > 0, \quad p'_{23} > 0, \quad \dots \quad p'_{e,e-1} > 0. \end{aligned}$$

Revenons aux  $p_{is}$ , d'après ce que nous avons dit au n° 19,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^n = P_k$$

et les valeurs limites  $P_k$  sont déterminées par les équations (12) :

$$\sum_{s=e-g} P_s p_{s,i} = P_k, \quad e - g \leq k \leq g, \quad g = \frac{1}{2}(e + f).$$

La solution de ces équations est représentée par

$$(33) \quad P_k = \binom{e+f}{g}^{-1} \binom{f}{g-k} \binom{e}{k},$$

d'où la conclusion : *Après un nombre infini de tirages successifs, la probabilité pour que le nombre de boules blanches dans la première urne soit égal à  $k$  ne diffère pas de celle pour que  $k$  soit le nombre de boules blanches qui se trouvent dans une moitié du nombre total  $e + f$  de boules prises au hasard.*

La valeur moyenne du nombre de boules blanches dans la première urne est égale à

$$\sum_{k=g-f}^g P_k k = \frac{e}{2};$$

donc : *Après un nombre infini de tirages successifs les valeurs moyennes du nombre de boules blanches seront, pour les deux urnes, égales entre elles; en d'autres mots, chaque urne contiendra*

en moyenne la moitié de boules blanches ce qui est conforme au résultat de Laplace.

Markoff [13] a donné aussi la démonstration du théorème plus général suivant dont Laplace s'est occupé :  $a$  urnes sont disposées circulairement; chacune contient le même nombre de boules. On extrait simultanément une boule de chaque urne; ensuite on met la boule extraite de la première, seconde, . . . ,  $a^{\text{ième}}$  urne dans la seconde, troisième, . . . , première urne. Après un nombre infini de tels tirages successifs, chaque urne contiendra, en moyenne, le même nombre de boules blanches, quels que soient les nombres de boules blanches dans les urnes avant le premier tirage.

Voir, pour le calcul de la dispersion, n° 22b.

Dans deux travaux Markoff [1], [12] s'est occupé du problème suivant : une urne contient  $a$  boules blanches et  $b$  noires. On extrait  $n$  boules successivement mais on remet après chaque tirage,  $\alpha + 1$  boules de la couleur possédée par la boule extraite. La probabilité pour que, après  $n$  tirages successifs,  $m$  boules blanches soient extraites est égale à

$$P_{m,n}^{a,b} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(\mu+m)\Gamma(\lambda+l)\Gamma(\mu+\lambda)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu+\lambda+m)},$$

avec

$$\mu = \frac{a}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{b}{\alpha}, \quad l = n - m.$$

La question ne se ramène pas à l'étude d'une chaîne proprement dite. L'allure de  $P_{m,n}^{a,b}$ , pour  $n$  très grand, dépend des relations que l'on établit entre  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  et  $n$ . Le problème a été traité aussi par Eggenberger-Pólya [1], [2].

**21. Chaîne multiple.** — Soient  $E_1, E_2, \dots, E_r$ ,  $r$  événements qui peuvent se présenter comme résultat d'une expérience. Faisons une série d'expériences successives sous l'hypothèse suivante : la probabilité pour que  $E_k$  se présente comme le résultat d'une expérience dépend des résultats de deux expériences immédiatement précédentes. Considérons trois expériences successives. Si la première donne  $E_i$  et la seconde  $E_j$ , soit  $p_{ijk}$  la probabilité pour que la troisième donne  $E_k$ .

Nous supposons que

$$\sum_{s=1}^r p_{ijs} = 1, \quad p_{ijk} > 0 \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, r).$$

En supposant que la première expérience donne  $E_i$ , et la seconde  $E_j$ , la probabilité  $P_{ijk}^{(n)}$  pour que l'expérience d'ordre  $n + 2$  donne  $E_k$  est exprimée par

$$P_{ijk}^{(n)} = \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^r \dots \sum_{z=1}^r p_{ijs} p_{jst} p_{stu} \dots p_{vzk};$$

la somme est  $(n - 1)$ -uple. On démontre que

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ijk}^{(n)} = P_k,$$

ne dépend pas de  $i$  ni de  $j$ . La dispersion dans le cas d'une telle « chaîne multiple » peut être calculée au moyen d'une fonction génératrice, plus complexe que (14).

En général la dispersion dite « normale » dans le cas Bernoulli (voir n° 14) diffère toujours de celle qui se présente dans le cas d'une chaîne simple. Mais, dans le cas d'une chaîne multiple, la dispersion peut être normale, si les  $p_{ijk}$  sont choisies convenablement (Markoff [6]).

**22. Phénomènes dont la probabilité dépend d'autres phénomènes liés en une chaîne simple.** — *a.* En généralisant un peu l'énoncé primitif de Markoff [8], considérons  $r$  événements  $E_1, E_2, \dots, E_r$  qui peuvent se présenter comme résultat d'une expérience et supposons que les épreuves successives soient liées en une chaîne simple. Nous allons conserver toutes les notations introduites au n° 5,  $p_{ik}$  étant la probabilité pour qu'une expérience donne  $E_k$ , si la précédente a donné  $E_i$ ; les conditions (3) et (4) doivent être vérifiées. Soient maintenant  $e_1, e_2, \dots, e_s$  autres phénomènes qui se présentent comme résultats d'autres expériences. Il y a une suite illimitée des expériences de cette seconde sorte; chacune donne un  $e_k$  sous l'hypothèse suivante: si, dans la suite des expériences de première sorte, le phénomène  $E_i$  apparaît comme résultat de la  $n^{\text{ième}}$  expérience, soit  $\rho_{ik}$  la probabilité pour que la  $n^{\text{ième}}$  expérience de seconde sorte donne  $e_k$ . La probabilité pour que, dans la suite des résultats fournis

par les expériences de seconde sorte,  $e_k$  présente à la  $n^{\text{ième}}$  place, est égale à

$$R_{ik}'' = \sum_{u=1}^s P_{iu}'' \rho_{uk} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

L'indice  $i$  marque le phénomène  $E_i$  qui figure au début de la première suite (chaîne simple). Si  $n$  augmente indéfiniment,  $R_{ik}^{(n)}$  tend vers une limite  $R_k$  :

$$R_k = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{ik}^{(n)} = \sum_{u=1}^s P_u \rho_{uk} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Les résultats des expériences de seconde sorte ne forment pas une chaîne proprement dite. Le calcul de la dispersion pour les  $e_k$  est complexe, mais Markoff [8] a donné, même pour ce cas, une formule générale.

*b.* Considérons en particulier le problème de deux urnes avec échange des boules (n° 20). Le phénomène  $E_k$  se présente, quand la première urne contient précisément  $k$  boules blanches :

$$(k + g - f, g - f + 1, \dots, g);$$

$e_1$  sera l'extraction d'une boule blanche de la première urne et  $e_2$  celle d'une noire.

Nous avons

$$\rho_{u1} = \frac{u}{g}, \quad \rho_{u2} = \frac{g-u}{g}, \quad u = g - f, g - f + 1, \dots, g.$$

La probabilité pour qu'une boule blanche soit extraite au  $n^{\text{ième}}$  tirage tend, pour  $n$  infini, vers la limite

$$\sum_{u=g-f}^g P_u \cdot \rho_{u1} = \frac{e}{e+f},$$

$P_u$  étant déterminé par la formule (33). Ce n'est autre chose que la probabilité d'extraire une boule blanche d'une urne où toutes les  $(e+f)$  boules seraient déposées.

Si  $m$  désigne le nombre de tirages, où une boule blanche est sortie de la première urne, et si  $n$  est le nombre total de tirages, on a,

suivant Markoff

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{v. m.} \frac{1}{n} \left( \frac{m}{n} - \frac{e}{e+f} \right)^2 = \frac{ef}{(e+f)^2} \left[ 1 - \frac{2g(e+f-g)}{(e+f)(e+f-1)} \right].$$

**23. Chaîne simple aux éléments variables.** — Introduisons avec Markoff [7] la probabilité  $p_{ik}^{(n)}$  pour que la  $n^{\text{ième}}$  expérience donne  $E_k$ , si la  $(n-1)^{\text{ième}}$  a donné  $E_i$  ( $i, k = 1, 2$ ; donc  $r = 2$ ), et supposons qu'elle dépend de  $n$ . Nous aurons ainsi une « chaîne aux éléments variables » tandis que, dans le cas considéré au n° 5, les  $p_{ik}$  étaient indépendants de  $n$ .

Soit encore  $x^{(n)}$  une variable qui reçoit la valeur 1, si la  $n^{\text{ième}}$  expérience donne  $E_1$ , et la valeur zéro, si elle donne  $E_2$ ;  $P_{ik}^{(n)}$  a la même signification qu'au n° 5. Un des plus importants résultats de Markoff est exprimé par la formule suivante :

$$(35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{v. m.} \left[ \frac{x^{(1)} - P_{i1}^{(1)} + x^{(2)} - P_{i1}^{(2)} + \dots + x^{(n)} - P_{i1}^{(n)}}{\sqrt{\text{v. m.} (x^{(1)} - P_{i1}^{(1)} + x^{(2)} - P_{i1}^{(2)} + \dots + x^{(n)} - P_{i1}^{(n)})^2}} \right]^m \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt.$$

Cette formule est valable pour tout entier positif  $m$  sous la condition que

$$(36) \quad p_{i1}^{(n)} > \alpha, \quad p_{i2}^{(n)} > \alpha, \quad p_{21}^{(n)} > \alpha, \quad p_{22}^{(n)} > \alpha,$$

où  $\alpha$  est un nombre positif qui ne dépend pas de  $n$ .

S. Bernstein [1] [2] [3] a étendu les résultats de Markoff aux cas où quelques-unes des quantités  $p_{ik}^{(n)}$  tendent vers zéro, si  $n$  augmente indéfiniment. Il a aussi indiqué des problèmes plus généraux.

**24. Second théorème sur la limite de la probabilité.** — Soit

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

une suite illimitée de variables aléatoires. La valeur de  $x_n$  se déduit d'une certaine expérience. Posons

$$a_n = \text{v. m.} x_n, \quad b_n = \text{v. m.} (x_n - a_n)^2.$$

Nous dirons que le second théorème sur la limite de la probabilité s'applique aux quantités  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , si la probabilité des

inégalités

$$t_1 \sqrt{2 \sum_{k=1}^n b_k} < \sum_{k=1}^n (x_k - a_k) < t_2 \sqrt{2 \sum_{k=1}^n b_k},$$

tend, pour deux nombres  $t_1, t_2$  quelconques ( $t_1 < t_2$ ), vers la limite

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2} dx,$$

$n$  augmentant indéfiniment.

L'idée d'obtenir la dernière formule (loi des erreurs) en partant d'une somme d'un grand nombre de variables aléatoires est due à Laplace [1]. Suivant Bienaimé [1] Laplace attachait à cette méthode une grande importance. En suivant la voie ouverte par Laplace, Tchébycheff [1] donne d'abord en 1867 un théorème élémentaire sur les valeurs moyennes. Plus tard [2] il a essayé de démontrer le second théorème sur la limite en faisant certaines hypothèses sur les variables  $x_i$ . Les résultats ont été rendus plus rigoureux et plus généraux par Liapounoff [1], [2]. Liapounoff a montré que le théorème en question s'applique lorsque  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sont indépendantes et si elles satisfont à la condition

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1^{\delta} + c_2^{\delta} + \dots + c_n^{\delta}}{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^{1 + \frac{\delta}{2}}} = 0,$$

où

$$c_n^{\delta} = \text{v. m. } |x_n - a_n|^{2+\delta}$$

et où  $\delta$  désigne un nombre positif donné (aussi petit que l'on veut). Markoff [15] a simplifié la démonstration de Liapounoff (1) et, dans les travaux que nous avons cités aux numéros précédents, il a montré que le théorème s'applique aussi aux variables liées en chaînes simples ou multiples, même au cas de la chaîne aux éléments variables (voir n° 23) ainsi qu'à d'autres cas. S. Bernstein (voir n° 23) a montré que le théorème reste valable dans les cas plus généraux encore; pour le cas considéré au n° 23, il résulte des travaux de S. Bernstein que le théorème s'applique même si les  $p_{ik}^{(n)}$  convergent

---

(1) Voir aussi Castelnuovo [1].

vers zéro mais de telle façon que

$$(36') \quad p_{11}^{(n)} > \frac{1}{n\alpha}, \quad p_{12}^{(n)} > \frac{1}{n\alpha}, \quad p_{21}^{(n)} > \frac{1}{n\alpha}, \quad p_{22}^{(n)} > \frac{1}{n\alpha}; \quad \alpha > \frac{1}{3}.$$

Les conditions (36') sont plus générales que celles de Markoff (36).

### CHAPITRE III.

#### PROBABILITÉS DES PHÉNOMÈNES LIÉS EN CHAÎNE. CAS DES VARIABLES CONTINUES.

23. **Définition de la chaîne simple dans le cas d'une variable continue.** — *a.* Soit  $M(x)$  un point dont l'abscisse est égale à  $x$  et qui se meut sur le segment allant de  $x = a$  jusqu'à  $x = b$ . Au début, le point se trouve dans la position  $M_0(x_0)$ ; après un premier déplacement dû au hasard il vient en  $M_1(x_1)$ ; un second déplacement dû au hasard le transporte en  $M_2(x_2)$  et ainsi de suite. Soit  $p(x, y)dy$  la probabilité pour que l'abscisse du point mobile qui, avant un déplacement, était égale à  $x$ , soit comprise, après le déplacement, entre  $y$  et  $y + dy$ ,  $dy$  étant infiniment petit. La fonction  $p(x, y)$  mesure la *densité de probabilité* pour le passage, par un seul déplacement, de la position  $M(x)$  à une autre  $M'(y)$ . La probabilité du passage de  $M(x)$  à  $N(\xi)$ ,  $\xi$  étant entre les limites  $y$  et  $y + dy$ , sera égale à  $P^{(n)}(x, y)dy$ ; le coefficient  $P^{(n)}(x, y)$  donne la densité de probabilité pour le passage de  $M(x)$  à  $M'(y)$  par  $n$  déplacements successifs. Le théorème sur les probabilités totales donne la condition nécessaire

$$(38) \quad \int_a^b p(x, y)dy = 1.$$

qui doit subsister pour tout  $x (a \leq x \leq b)$ . Nous supposons que

$$(39) \quad p(x, y) > 0.$$

pour toutes les valeurs de  $x$  et de  $y$  comprises dans l'intervalle  $(a, b)$ .

La méthode employée au n° 5 conduit aux formules

$$(40) \quad P^{(n)}(x, y) = \int_a^b P^{(n-1)}(x, t) p(t, y) dt,$$

$$(40') \quad P^{(n)}(x, y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b p(x, t) p(t, u) \dots p(z, y) dt du \dots dz.$$

La dernière intégrale est  $(n - 1)$ -uple; en groupant convenablement les intégrations, on obtient

$$(41) \quad P^{(l+m)}(x, y) = \int_a^b P^{(l)}(x, t) P^{(m)}(t, y) dt, \quad P^{(1)}(x, y) = p(x, y),$$

pour toute valeur entière et positive de  $l$  et de  $m$ .

Il résulte de la formule (40) que

$$(42) \quad \int_a^b P^{(n)}(x, y) dy = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

quel que soit  $x$ . On peut dire que, dans la suite indéfinie de fonctions

$$P^{(1)}(x, y), \quad P^{(2)}(x, y), \quad \dots \quad P^{(n)}(x, y), \quad \dots,$$

le  $n^{\text{ième}}$  terme se déduit du précédent par la transformation fonctionnelle  $T$  itéré  $(n - 1)$  fois;  $T$  est définie par

$$g(x, y) = \int_a^b P^{(1)}(x, t) f(t, y) dt;$$

elle fait correspondre à toute fonction donnée  $f(x, y)$  une autre fonction  $g(x, y)$ .

*b.* Les formules précédentes s'étendent immédiatement au cas où le domaine du point mobile n'est pas un segment mais une partie  $V$  d'un espace à un nombre quelconque de dimensions. Il faut, dans ce cas, introduire, au lieu de  $p(x, y)$ , une fonction  $p(A, B)$  de deux points  $A$  et  $B$  situés dans  $V$ , remplacer  $dx$  par l'élément  $d\tau_A$  de  $V$  situé au voisinage du point  $A$ , et écrire partout, à la place des intégrales simples prises de  $a$  à  $b$ , des intégrales multiples étendues au domaine  $V$  (voir Hostinský [5], [6], [7]).

26. **Théorème sur la limite.** — Au lieu de quantités  $\alpha_i$  (voir n° 5),

introduisons une fonction continue  $\alpha(x)$  du point  $M(x)$ . Si  $x$  est la valeur initiale que prend l'abscisse du point mobile, et  $x_k$  la valeur qu'elle prend après le  $k^{\text{ième}}$  déplacement, les valeurs correspondantes de  $\alpha$  sont

$$\alpha(x), \alpha(x_1), \alpha(x_2), \dots, \alpha(x_n), \dots$$

En supposant toujours que (38) et (39) soient satisfaites et en conservant les notations introduites au n° 23a, nous définissons la valeur moyenne de la fonction  $\alpha$  après le  $n^{\text{ième}}$  déplacement par la formule

$$(43) \quad \text{v. m. } \alpha(x_n) = a^{(n)}(x) = \int_a^b P^{(n)}(x, y) \alpha(y) dy \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La formule (41) donne pour  $l = 1, m = n - 1$

$$(44) \quad P^{(n)}(x, y) = \int_a^b p(x, t) P^{(n-1)}(t, y) dt$$

d'où l'on déduit

$$(43') \quad a^{(n)}(x) = \int_a^b p(x, t) a^{(n-1)}(t) dt.$$

Formons la différence  $a^{(n)}(x) - a^{(n)}(y)$  et introduisons (au lieu de la somme de quantités  $\beta_i$  ou  $\beta'_i$  du n° 6) les intégrales

$$\int_e [p(x, t) - p(y, t)] dt, \quad \int_f [p(x, t) - p(y, t)] dt;$$

$e$  désigne l'ensemble des parties de l'intervalle  $(a, b)$  où la fonction  $p(x, t) - p(y, t)$  est positive;  $f$  est l'ensemble des parties où elle est négative. Un calcul tout à fait analogue à celui de Markoff (n° 6), avec cette différence toutefois que certaines sommes doivent être remplacées par des intégrales, montre que

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)}(x) = \bar{a},$$

$\bar{a}$  étant une constante. Donc la valeur moyenne  $a^{(n)}(x)$  de la fonction  $\alpha$  après le  $n^{\text{ième}}$  déplacement tend, quand  $n$  augmente indéfiniment, vers une limite constante qui ne dépend pas de la valeur initiale de  $x$  (voir Hostinský [10], [11]).

Choisissons en particulier la fonction  $\alpha(x)$  de la manière suivante :  $\alpha = 0$  à l'exception du voisinage du point  $x = y$ , où elle devient

infinie de telle façon que

$$\int_a^b z(x) dx = 1.$$

La formule (43) montre que, dans ce cas particulier,

$$\alpha^{(n)}(x) = P^{(n)}(x, y)$$

et

$$(46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(x, y) = P(y).$$

Soit  $x$  la valeur initiale de l'abscisse du point mobile; la densité de probabilité pour qu'elle reçoive, après  $n$  déplacements successifs, la valeur  $y$  tend, quand  $n$  augmente indéfiniment, vers une limite  $P(y)$  indépendante de  $x$  (Hadamard [2]).

Il résulte des équations (43), (45) et (46) que

$$(47) \quad \bar{\alpha} = \int_a^b P(y) z(y) dy.$$

L'équation (42) donne

$$(47a) \quad \int_a^b P(y) dy = 1.$$

On peut écrire aussi

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{v. m.} \frac{z(x_1) + z(x_2) + \dots + z(x_n)}{n}.$$

**27. Équation de Fredholm pour  $P(y)$ . La racine  $\lambda = 1$  de  $D(\lambda) = 0$ .** — Pour transporter les résultats obtenus au n° 7 et suivants au cas des variables continues, il faut passer à la limite pour  $p = \infty$  suivant la méthode classique de Fredholm. Nous aurons, au lieu de (12), l'équation intégrale homogène

$$(48) \quad P(y) - \int_a^b p(x, y) P(x) dx = 0$$

qui détermine  $P(x)$ . On obtient (48) en posant  $n = \infty$  dans les formules (40) et (46). De même, (12') devient

$$(48') \quad Q(y) - \int_a^b p(x, y) Q(x) dx = 0.$$

La condition (38) montré que (48') admet la solution  $Q(x) = 1$ ; donc l'équation associée (48) doit avoir une solution non nulle. Cette solution  $P(y)$  est positive dans tout l'intervalle  $(a, b)$ , on le sait, elle est définie par la formule (46).

Écrivons l'équation homogène

$$(49) \quad F(y) - \lambda \int_a^b p(x, y) F(x) dx = 0.$$

La fonction  $D_r(\lambda)$  définie par la formule (16) devient, pour  $r = \infty$ , le « déterminant de Fredholm »

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b p \left( \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_k \\ x_1, x_2, \dots, x_k \end{matrix} \right) dx_1, dx_2, \dots, dx_k,$$

où

$$(50) \quad p \left( \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_k \\ y_1, y_2, \dots, y_k \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) & \dots & p(x_1, y_k) \\ p(x_2, y_1) & p(x_2, y_2) & \dots & p(x_2, y_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_k, y_1) & p(x_k, y_2) & \dots & p(x_k, y_k) \end{vmatrix}.$$

L'équation  $D(\lambda) = 0$  admet  $\lambda = 1$  comme une racine simple. Jentzsch [1] a démontré le théorème suivant : L'équation (49), où  $p(x, y) > 0$ , admet une solution positive et telle que la racine correspondante de  $D(\lambda) = 0$  est positive, simple et plus petite en valeur absolue que toutes les autres. Dans le cas qui nous intéresse, la racine  $\lambda = 1$  a la plus petite valeur absolue. Car l'équation homogène associée (48') admet la solution  $Q = 1$ , donc toute fonction  $F(x)$  qui pour une valeur  $\lambda$  du paramètre  $\lambda$ , différente de 1, satisfait à (49) a la propriété

$$\int_a^b F(x) dx = 0.$$

Une telle fonction n'est pas positive dans tout l'intervalle  $(a, b)$ .  $P(x)$  est la seule fonction positive qui satisfait à (49); et la valeur correspondante  $\lambda = 1$  est, en valeur absolue, la plus petite racine de  $D(\lambda) = 0$ . Il résulte de la théorie générale de Fredholm que ( $\lambda = 1$  étant une racine simple)  $Q = \text{const.}$  est la seule solution de (48').

**28. Les autres racines de  $D(\lambda) = 0$ . Nouvelle expression de  $P^{(n)}(x, y)$ .** — Supposons que la fonction  $p(x, y)$ , continue dans le

domaine  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$  satisfasse à la condition (38). Mais, au lieu de (39), nous admettrons que

$$(39b) \quad \rho(x, y) \geq 0$$

et que toutes les racines  $\lambda_i$  de  $D(\lambda) = 0$  soient simples et supérieures en valeur absolue à 1, sauf  $\lambda_0$  qui est égale à 1. Les équations intégrales homogènes

$$\varphi_i(y) - \lambda_i \int_a^b \rho(x, y) \varphi_i(x) dx = 0.$$

$$\psi_i(y) - \lambda_i \int_a^b \rho(y, x) \psi_i(x) dx = 0$$

admettent,  $\lambda_i$  étant les racines de  $D(\lambda) = 0$  rangées d'après les valeurs absolues croissantes, des solutions non nulles. Les fonctions  $\varphi_i(x)$  et  $\psi_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) multipliées par des constantes convenables satisfont aux conditions

$$\int_a^b \varphi_i \psi_i dx = 1, \quad \int_a^b \varphi_i \psi_k dx = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots; i \neq k).$$

Pour  $i = 0$  nous avons  $\varphi_0(x) = P(x)$ ,  $\psi_0(x) = 1$ . Si la série

$$(51) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(y) \psi_k(x)}{\lambda_k}$$

est uniformément convergente, nous avons le développement

$$\rho(x, y) = P(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(y) \psi_k(x)}{\lambda_k}$$

et, pour les fonctions itérées

$$(52) \quad P^{(n)}(x, y) = P(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(y) \psi_k(x)}{\lambda_k^n}.$$

On voit que  $P(y)$  est la limite de  $P^{(n)}(x, y)$ , si toutes les racines  $\lambda_i$  ( $i \geq 1$ ) sont, en valeur absolue, plus grandes que 1. La limite n'existe pas, si une racine est égale à  $-1$  (Romanovsky [1]).

**29. Calcul de la dispersion.** —  $a$ . Soit  $x$  la valeur initiale de la variable (abscisse du point mobile) et  $x_k$  sa valeur après le  $k^{\text{ième}}$  dépla-

cement. La valeur moyenne de  $\alpha(x)$  après un nombre infini de déplacements successifs est égale à une constante  $\bar{\alpha}$  (voir n° 26). La dispersion sera définie comme dans le cas des variables discontinues (voir n°s 11 et 12). On a

$$(53) \quad \frac{C}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{v. m.} \frac{[x(x_1) + x(x_2) + \dots + x(x_n) - n\bar{\alpha}]^2}{n},$$

la constante  $\bar{\alpha}$  étant définie par (47). La démonstration du n° 12b s'étend aux variables continues; on peut remplacer (53) par

$$\frac{C}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{v. m.} \frac{[x(x_1) - \alpha^{(1)} + x(x_2) - \alpha^{(2)} + \dots + x(x_n) - \alpha^{(n)}]^2}{n},$$

où les  $\alpha^{(k)}$  sont déterminées par (43).

La limite ne dépend pas de  $x$ . Pour calculer  $C$  il suffit de transformer la formule (24) en lui appliquant le passage à la limite suivant la méthode de Fredholm [on remplace  $p_{ik}$ ,  $\alpha_s$ ,  $\bar{\alpha}$  respectivement par  $p(x_i, x_k) dx_k$ ,  $\alpha(x_s)$ ,  $\bar{\alpha}$ ; puis on fait croître  $n$  indéfiniment) ce qui donne (Hostinsky [10])

$$(54) \quad \frac{C}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^k x(x_i) - k\bar{\alpha} \right]^2 p(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b p(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1, dx_2, \dots, dx_k};$$

le symbole  $p$  est défini par la formule (20). Ces calculs sont valables dans le cas où la fonction  $p(x, y)$  est positive.

b. Une autre méthode pour calculer la dispersion consiste à employer la formule (52) qui suppose que les racines de  $D(\lambda) = 0$  soient simples et que la série (51) soit uniformément convergente. En désignant toujours par  $x_k$  la valeur que prend l'abscisse variable après le  $k^{\text{ième}}$  déplacement, pour calculer la limite (53) on n'a qu'à se reporter au n° 12. Pour appliquer le passage à la limite pour  $n$  infini, à la formule (25), il faut écrire

$$P(x), \quad \varphi_s(y), \quad \psi_s(x), \quad \alpha(x), \quad \alpha(y), \quad \bar{\alpha}$$

au lieu de

$$P_k, \quad \varphi_{ks}, \quad \psi_{ks}, \quad x_k, \quad x_l, \quad \alpha,$$

et de remplacer les sommes par rapport à  $k$  et  $l$  par des intégrales. On obtient ainsi (Höstinsky [11]).

$$(55) \quad \frac{G}{2} = \int_a^b P(x) [z(x) - \bar{a}]^2 dx \\ + 2 \int_a^b \int_a^b \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z_s(y) \psi_s(x)}{\lambda_s - 1} P(x) [z(x) - \bar{a}] [z(y) - \bar{a}] dx dy.$$

**30. Cas des épreuves indépendantes.** — Supposons que la densité de probabilité pour qu'un seul déplacement transporte le point de la position  $x$  à la position  $y$  ne dépende pas de  $x$ . Dans ce cas, tous les déterminants qui figurent dans (54) sont égaux à zéro; seulement les déterminants du premier degré  $p(x, x) = P(x)$  sont différents de zéro et nous avons, au lieu de (54),

$$\frac{G}{2} = \int_a^b [z(x) - \bar{a}]^2 P(x) dx,$$

car le dénominateur  $\int_a^b P(x) dx$  est égal à l'unité;

$$\bar{a} = \int_a^b z(x) P(x) dx.$$

Le même résultat peut être déduit de la formule (55), car ici  $D(\lambda) = 0$  n'a pas d'autre racine que  $\lambda = 1$ ; les autres racines doivent être regardées comme infiniment grandes de sorte que l'intégrale double dans (55) est égale à zéro; le second membre de (55) se réduit au premier terme.

**31. Second théorème sur la limite de la probabilité.** — Ce théorème (voir n° 24) s'étend aussi au cas de variables continues. En posant

$$a^{(n)} = \int_a^b z(y) P^{(n)}(x, y) dy, \quad b^{(n)} = \int_a^b [z(y) - a^{(n)}]^2 P^{(n)}(x, y) dy$$

la probabilité des inégalités

$$t_1 \sqrt{2 \sum_{k=1}^n b^{(k)}} < \sum_{k=1}^n (x_k - a^{(n)}) < t_2 \sqrt{2 \sum_{k=1}^n b^{(k)}}$$

tend pour  $n$  infini vers la limite ( $t_1 < t_2$ )

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-z^2} dz.$$

**32. Cas où  $\int_a^b p(x, y) dx = 1$ .** — Si la fonction  $p(x, y)$  satisfait aux conditions (38) et (39) et si, outre cela,

$$(56) \quad \int_a^b p(x, y) dx = 1$$

pour toute valeur de  $y$  ( $a \leq y \leq b$ ), l'équation de Fredholm homogène (48) admet la solution  $P(x) = \text{const}$ . La constante doit être choisie de telle manière que l'intégrale de  $P(x)$  prise de  $a$  à  $b$  soit  $= 1$ , donc

$$P(x) = (b - a)^{-1}.$$

Si les conditions (38), (39) et (56) sont remplies, la probabilité  $P^{(n)}(x, y)$  tend, pour  $n$  infini, vers une limite constante indépendante de  $x$  et de  $y$  (Hostinský [6], [7]).

Inversement si les conditions (38) et (39) sont vérifiées et si la limite est constante, la condition (56) doit être aussi remplie.

La formule (47) qui donne la valeur moyenne de  $\alpha(x)$  devient

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \alpha(y) dy.$$

**33. Sur un cas où  $p(x, y)$  n'est pas partout positive.** — La limite de  $P^{(n)}(x, y)$  n'existe pas en général, si (39) n'est pas vérifiée. Mais il y a des cas où  $p(x, y)$  est égale à zéro dans une certaine partie du carré ( $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ ) et où la limite existe. En particulier, si un nombre fini d'itérations successives, appliquées à la fonction  $p(x, y)$ , donne une fonction partout positive, la limite existe. Par exemple, si  $p(x, y)$  est positive à l'intérieur de la bande limitée par les droites

$$y = x + \varepsilon, \quad y = x - \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant une constante quelconque, un nombre fini d'itérations suffit pour obtenir une fonction  $P^{(n)}(x, y)$  positive (voir Hostinský [6], [7], [11]).

34. **Le mouvement d'un point sur la circonférence.** — Un point mobile se déplace sur une circonférence. Sa position actuelle est déterminée par l'angle  $x$  compris entre le rayon et une droite fixe. La densité de probabilité pour que le point passe, par un seul déplacement, de la position  $x$  à la position  $y$ , est donnée par  $p(x, y)$ . Nous supposons que

$$\int_0^{2\pi} p(x, y) dy = 1, \quad p(x, y) > 0, \quad p(x + 2k\pi, y + 2h\pi) = p(x, y),$$

$h$  et  $k$  étant des entiers quelconques. En général, la limite  $P(y)$  de  $P^{(n)}(x, y)$  dépend de  $y$ . Mais si

$$(56') \quad \int_0^{2\pi} p(x, y) dx = 1,$$

on a  $P(y) = (2\pi)^{-1}$ , suivant n° 32. La condition (56') peut être interprétée comme il suit : Supposons que les déplacements s'effectuent par la rotation de la circonférence entière autour de son axe. Ainsi c'est l'angle de rotation  $u$  ( $0 \leq u < 2\pi$ ) qui est pris au hasard ; si  $f(u) du$  est la probabilité pour que cet angle soit compris entre  $u$  et  $u + du$ , on a

$$\int_0^{2\pi} f(u) du = 1, \quad f(u + 2k\pi) = f(u).$$

Si  $x$  est constant, nous avons

$$u = y - x, \quad f(u) du = f(y - x) dy = p(x, y) dy,$$

donc

$$\int_0^{2\pi} p(x, y) dy = \int_{-x}^{2\pi-x} f(u) du = \int_0^{2\pi} f(u) du = 1.$$

Si  $y$  est constant,

$$f(u) du = -f(y - x) dx = -p(x, y) dx$$

donc

$$\int_0^{2\pi} p(x, y) dx = -\int_y^{y+2\pi} f(u) du = \int_{y-2\pi}^y f(u) du = \int_0^{2\pi} f(u) du = 1.$$

La fonction  $p$  satisfait à la condition (56'), par conséquent la limite de  $P^{(n)}$  est constante. Pour donner au résultat une forme intuitive,

introduisons deux circonférences : une circonférence fixe  $\Sigma$  et une mobile  $\Sigma'$  qui coïncide avec  $\Sigma$  et qui glisse sur elle. Après un nombre infini de rotations successives, les angles de rotation étant pris au hasard, la probabilité pour qu'un point lié à  $\Sigma'$  soit situé sur un arc quelconque  $\alpha$  pris sur  $\Sigma$  est égale à  $\alpha : 2\pi$ . Cette probabilité ne dépend ni du choix du point A sur  $\Sigma'$ , ni de l'arc  $\alpha$ , ni de la densité de probabilité  $f(u)$ .

### 33. Rotations d'une sphère autour des axes passant par son centre.

— a. Soit  $\Sigma$  une sphère fixe de centre O et de rayon égal à l'unité, et  $\Sigma'$  une sphère mobile qui, dans chaque position, coïncide avec  $\Sigma$  et qui peut tourner autour des axes passant par O. Supposons que la densité de probabilité pour une telle rotation dépend des paramètres qui le définissent. Soit P un point sur  $\Sigma$  que nous prenons pour pôle d'un système de coordonnées sphériques sur  $\Sigma$ . La position d'un point A sur  $\Sigma$  sera définie par ses coordonnées  $x_1$  (distance polaire de A à P) et  $x_2$  (angle compris entre le plan OPA et entre un plan fixe passant par  $\overline{OP}$ ). Une rotation  $U(u_1, u_2, u_3)$  sera définie par les coordonnées sphériques  $u_1$  et  $u_2$  du point d'intersection  $C(u_1, u_2)$  de son axe avec  $\Sigma$  et par l'angle de rotation  $2u_3$ . Ainsi à toute rotation autour d'un axe passant par O correspond un point dans un espace à trois dimensions que nous nommerons E. Soit

$$d\tau_U = \sin u_1 \sin^2 u_3 du_1 du_2 du_3$$

l'élément du volume dans E au voisinage du point U (voir F. Perrin [1]). Le second membre de cette formule ne change pas quand on passe de U à la rotation inverse  $U^{-1}$  (on remplace  $u_1$  par  $\pi - u_1$ ;  $u_2$  et  $u_3$  ne changent pas). Pour obtenir toutes les rotations, il faut faire varier  $u_1$  de 0 à  $\pi$ ,  $u_2$  de 0 à  $2\pi$ , et  $u_3$  de 0 à  $\frac{1}{2}\pi$ . Le volume total de E est égal à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 u_1 \sin u_3 du_1 du_2 du_3 = \pi^2.$$

Cela posé, soit

$$F(u_1, u_2, u_3) \sin u_1 \sin^2 u_3 du_1 du_2 du_3$$

ou  $F(U) d\tau_U$  la probabilité pour que le point représentatif d'une

rotation prise au hasard se trouve à l'intérieur de l'élément  $d\tau_U$ . Le théorème sur les probabilités totales donne

$$(57) \quad \int \int \int_E \mathbf{F}(U) d\tau_U = 1.$$

Imaginons que  $\Sigma'$  subisse une rotation  $U$ . Un point lié à  $\Sigma'$  qui, avant la rotation, occupait la place  $A(x_1, x_2)$  sur  $\Sigma$  va occuper, après elle, la place  $A'$ . Soit  $d\sigma_B = \sin \gamma_1 d\gamma_1 d\gamma_2$  l'élément de surface de  $\Sigma$  au voisinage du point  $B(\gamma_1, \gamma_2)$ , et soit

$$f(x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2) \sin \gamma_1 d\gamma_1 d\gamma_2 = f(A, B) d\sigma_B$$

la probabilité pour que  $A'$  soit situé à l'intérieur de  $d\sigma_B$ .  $f(A, B)$  mesure la densité de probabilité pour le passage d'un point, lié à  $\Sigma'$ , de  $A$  à  $B$  par une seule rotation; et la fonction

$$P^{(n)}(A, B) = \int \int_{\Sigma} \dots \int \int_{\Sigma} f(A, M_1) f(M_1, M_2) \dots f(M_{n-1}, B) d\sigma_1 \dots d\sigma_{n-1}$$

(où  $P^{(1)} = f$ , et  $d\sigma_r$  désigne l'élément de  $\Sigma$  au voisinage du point  $M_r$ ) mesure la densité de probabilité pour le même passage mais effectué par  $n$  rotations successives. Introduisons encore la densité de probabilité  $\Phi^{(n)}(b, b')$  relative au passage d'une position  $b$  de la sphère mobile à une autre position  $b'$  par  $n$  rotations successives. Soit  $a$  une position fixe de  $\Sigma'$  et soient  $b$  et  $b'$  deux autres qui s'en déduisent par la rotation  $U(u_1, u_2, u_3)$  ou par  $V(v_1, v_2, v_3)$ . Nous écrivons

$$U(a) = b, \quad V(a) = b', \quad U^{-1}V(b) = b'.$$

Une position quelconque  $b$  de  $\Sigma'$  sera donc représentée par le point unique dans  $E$  qui correspond à  $U$ . Un point de  $E$ , situé à l'intérieur de l'élément  $d\tau_V$  représente ainsi soit une rotation qui change  $a$  en une autre position  $m$  (voisine de  $b'$ ), soit la position  $m$  elle-même. Et la probabilité pour que  $\Sigma'$  passe de  $b$  à  $b'$  par  $n$  rotations successives sera désignée par  $\Phi^{(n)}(b, b') d\tau_V$ .

Nous nous proposons de résoudre les quatre problèmes suivants :

- 1° La fonction  $F(U)$  étant donnée, trouver  $f(A, B)$ ;
- 2° Trouver la limite de  $P^{(n)}(A, B)$  quand  $n$  augmente indéfiniment;
- 3° La fonction  $F(U)$  étant donnée, trouver  $\Phi^{(n)}(b, b')$ .

4° Trouver la limite de  $\Phi^{(n)}(b, b')$  quand  $n$  augmente indéfiniment.

*b.* Soit  $C(u_1, u_2)$  le point où l'axe d'une rotation  $U(u_1, u_2, u_3)$  coupe  $\Sigma$ . Un point lié à  $\Sigma'$  sera transporté par  $U$  de  $A(x_1, x_2)$  en  $B(y_1, y_2)$ . Posons, pour abrégé, dans le triangle sphérique  $ABC$

$$AB = 2c, \quad \cos \angle C = \cos BC = k, \quad \widehat{BAC} = \alpha.$$

Si  $D$  est le milieu de  $AB$ , et  $CD$  la hauteur du triangle,

$$(58) \quad \begin{cases} \cos u_1 \cos x_1 + \sin u_1 \sin x_1 \cos(x_2 - u_2) = k, \\ \cos u_1 \cos y_1 + \sin u_1 \sin y_1 \cos(y_2 - u_2) = k, \end{cases}$$

$$k = \cos c \cos CD, \quad \sin CD = \cot u_3 \operatorname{tang} c,$$

$$(59) \quad k \sin u_3 = \sqrt{\cos 2c - \cos^2 u_3}.$$

$$(60) \quad \cos 2c = \cos x_1 \cos y_1 + \sin x_1 \sin y_1 \cos(x_2 - y_2).$$

$$(61) \quad \cos u_3 = \sin \alpha \cos c.$$

Les formules précédentes permettent de calculer le déterminant fonctionnel de  $u_1, u_2$  et  $u_3$  par rapport aux variables  $x_1, x_2$  et  $\alpha$ , à condition de supposer que  $B(y_1, y_2)$  soit un point fixe. On peut aussi calculer le déterminant fonctionnel par rapport à  $y_1, y_2$  et  $\alpha$  en supposant que  $A(x_1, x_2)$  soit un point fixe. Il vient

$$(62) \quad \frac{1}{\sin x_1} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, \alpha)} = \frac{1}{\sin y_1} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(y_1, y_2, \alpha)} = - \frac{1}{4 \sin u_1 \sin^2 u_3}.$$

Si nous prenons  $y_1, y_2$  et  $\alpha$  pour coordonnées de  $U$ , l'expression de  $F(U) d\tau_U$  se change en

$$(63) \quad F \sin u_1 \sin^2 u_3 \left| \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(y_1, y_2, \alpha)} \right| dy_1 dy_2 d\alpha = \frac{F}{4} d\tau_U d\alpha$$

et il en résulte que

$$(64) \quad f(A, B) = \int_0^\pi \frac{F}{4} d\alpha;$$

il faut exprimer, dans la fonction  $F$  sous le signe d'intégration, les variables  $u_1, u_2, u_3$  en fonction de  $y_1, y_2, \alpha$ . La formule (64) donne la solution du premier problème.

*c.* Les formules (57), (62), (63) et (64) montrent qu'en prenant

soit  $y_1, y_2, \alpha$  pour variables d'intégration, soit  $x_1, x_2, \alpha$  (à la place de  $u_1, u_2, u_3$ ), on aura

$$(65) \quad \int \int_{\Sigma'} f(A, B) d\tau_B = \int \int_{\Sigma} f(\Lambda, B) d\tau_{\Lambda} = 1.$$

Or, ces équations correspondent aux équations (38) et (56) obtenues plus haut dans le cas du mouvement sur un segment. On peut donc appliquer le théorème du n° 32, car la fonction  $f(A, B)$  est toujours positive. La valeur limite de  $P^{(n)}$  qui, dans le cas envisagé au n° 32 était égale à  $(b - a)^{-1}$ , est ici égale à l'inverse de l'aire totale de  $\Sigma$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(A, B) = \frac{1}{4\pi}.$$

*Si A est la position initiale d'un point lié à  $\Sigma'$ , et B sa position finale après un nombre infini de rotations successives, la densité de probabilité relative au déplacement AB est constante: elle ne dépend ni des points A et B ni de la fonction F.*

d. Enfin, pour résoudre le troisième et le quatrième problème, écrivons la formule symbolique

$$U = VW$$

où  $U(u_1, u_2, u_3)$  désigne la rotation qui résulte de l'application successive des rotations  $V(v_1, v_2, v_3)$  et  $W(w_1, w_2, w_3)$ . En introduisant les paramètres d'Olinde Rodrigues et en faisant usage des formules qui relient les paramètres des rotations composantes  $V$  et  $W$  à ceux de la rotation résultante  $U$  on trouve

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(v_1, v_2, v_3)} = \frac{\sin v_1 \sin^2 v_3}{\sin u_1 \sin^2 u_3}, \quad \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(w_1, w_2, w_3)} = \frac{\sin w_1 \sin^2 w_3}{\sin v_1 \sin^2 v_3}.$$

Le premier déterminant fonctionnel est calculé en admettant que les  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont constants, tandis que le second est calculé pour le cas des  $v_i$  constants.

Si nous introduisons les  $v_i$  pour variables d'intégrations dans (57),

$$(66) \quad \int \int \int_E F(VW) d\tau_V = 1 \quad \text{pour } W \text{ quelconque,}$$

et si nous prenons les  $w_i$  pour variables :

$$(67) \quad \int \int \int_E F(VW) d\tau_W = 1 \quad \text{pour } V \text{ quelconque.}$$

Désignons toujours par  $U$  la rotation qui amène  $\Sigma'$  de la position  $\alpha$  en  $b$  et par  $V$  celle qui change  $\alpha$  en  $b'$ . Le troisième problème se résout par la formule

$$\Phi^{(1)}(b, b') = F(U^{-1}V),$$

et l'on a

$$\Phi^{(n)}(b, b') = F^{(n)}(U^{-1}V)$$

avec

$$F^{(n)}(U^{-1}V) = \int \int \int_E F^{(n-1)}(U^{-1}T)F(T^{-1}V) d\tau_T, \quad F^{(1)} = F.$$

Remplaçons, dans les formules (66) et (67),  $V$  par  $U^{-1}$  et  $W$  par  $V$ . Nous aurons

$$\int \int \int_E F(U^{-1}V) d\tau_U = 1 \quad \text{pour } V \text{ quelconque,}$$

$$\int \int \int_E F(U^{-1}V) d\tau_V = 1 \quad \text{pour } U \text{ quelconque.}$$

donc  $F(U^{-1}V)$ , envisagée comme fonction de deux points  $U$  et  $V$  dans  $E$  (ou bien fonction de deux positions  $b$  et  $b'$  de  $\Sigma'$ ), satisfait aux conditions du théorème n° 32 et nous avons le résultat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{(n)}(b, b') = \frac{1}{\pi^2}.$$

*Quelle que soit la densité de probabilité  $F(U)$  pourvu qu'elle satisfasse à la condition (57) et qu'elle soit positive, après un nombre infini de rotations successives, toute position de  $\Sigma$  pourra être atteinte avec une densité de probabilité uniforme (voir Hostinsky [9]).*

**36. Équation fonctionnelle de Smoluchowski.** — Remplaçons, dans la formule (41), l'indice d'itération par une variable continue  $t$ . Si nous écrivons  $\Phi(x, y, t)$  au lieu de  $P^{(n)}(x, y)$ , la formule (40) devient

$$(68) \quad \Phi(x, y, t + t') = \int_a^b \Phi(x, s, t)\Phi(s, y, t') ds.$$

La fonction  $\Phi$  doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$(69) \quad \Phi > 0, \quad \int_a^b \Phi(x, y, t) dy = 1.$$

Les théorèmes du n° 26 permettent d'étendre le résultat fondamental aux fonctions  $\Phi$ . Si une fonction continue  $\Phi(x, y, t)$  satisfait aux conditions (68) et (69) pour toutes valeurs de  $t$  et  $t'$  comprises dans les intervalles  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq t' \leq T$ , la valeur limite

$$(70) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x, y, t) = \varphi(y),$$

est parfaitement déterminée et elle ne dépend pas de  $x$ . Smoluchowski [1] a rencontré l'équation (68) dans la théorie du mouvement brownien, il en a donné quelques solutions et il a trouvé, dans des cas particuliers, la formule (70). F. Perrin a étudié le cas où le domaine d'intégration est formé par la surface de la sphère et où  $\Phi$  ne dépend que d'un angle et de  $t$ . Le théorème général (70) — qui n'est d'ailleurs autre chose que le théorème de Markoff du n° 6 transporté au cas de variables continues — peut être appliqué à l'étude de différents phénomènes de diffusion (*voir* Hostinský [12] [13]).

**37. Conclusions.** — Dans les problèmes traités aux Chapitres II et III un paramètre  $n$  (indice d'itération) intervient. Les expressions des probabilités cherchées se simplifient, quand on fait augmenter  $n$  indéfiniment. On voit comment le hasard s'introduit, d'après Poincaré, comme résultat complexe d'un très grand nombre de causes; le degré de complexité est précisément défini par la valeur de  $n$  (Vorovka [1]). Si, par exemple, le joueur bat les cartes  $n$  fois,  $n$  étant un très grand nombre, la permutation finale de cartes doit être regardée comme résultant d'un grand nombre de causes très complexes.

## COMPLÉMENTS

SUR QUELQUES TRAVAUX RÉCENTS.



**38. Sur les racines de l'équation caractéristique.** — Si les quantités  $p_{ik}$  sont toutes positives, les racines de  $D_r(\lambda) = 0$ , autres

que  $\lambda_0 = 1$ , sont plus grandes que 1 en valeur absolue (Frobenius, [2], [3]). Une démonstration simple de ce théorème a été donnée par Rajchman [1].

Le théorème énoncé par Romanovsky [1] sur la valeur limite de  $P_{ik}^{(n)}$  pour  $n$  infini dans le cas où les  $p_{ik}$  ne sont pas toutes positives, a été complété et précisé par Kaucky [1] comme il suit : Si parmi les racines de l'équation caractéristique seulement la racine 1 a la valeur absolue égale à 1, les expressions  $P_{ik}^{(n)}$  tendent pour  $n \rightarrow \infty$  vers certaines limites qui dépendent en général de  $i$ . Si la racine 1 est simple et si les limites de  $P_{ik}^{(n)}$  pour  $n \rightarrow \infty$  existent, elles sont indépendantes de  $i$ .

D'autres propriétés de l'équation caractéristique ont été indiquées par Romanovsky [2] sans démonstration.

39. Sur l'équation fonctionnelle de Chapman. — Considérons d'abord une chaîne simple aux éléments constants; nous avons alors à étudier les propriétés des coefficients d'une substitution linéaire obtenue par des itérations d'une substitution donnée (n° 5). Dans le cas de la chaîne simple aux éléments variables (n° 23), soit  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  une suite indéfinie de substitutions linéaires et homogènes à  $r$  variables; désignons par  $p_{ik}^{(n)}$  les coefficients de  $S_n$ . Il faut que

$$\sum_{k=1}^r p_{ik}^{(n)} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, r; n = 1, 2, 3, \dots).$$

La théorie de la chaîne conduit à l'étude du coefficient  $P_{ik}(m, n)$  de la substitution obtenue en opérant successivement  $S_n, S_{n-1}, \dots, S_m$  ( $m < n$ ), et nous avons, au lieu de (6), la formule

$$P_{ik}(m_1, m_3) = \sum_{s=1}^r P_{is}(m_1, m_2) P_{sk}(m_2, m_3),$$

$m_1, m_2$  et  $m_3$  étant trois entiers positifs et tels que  $m_1 < m_2 < m_3$ . Introduisons maintenant : 1° au lieu des indices  $i$  et  $k$ , deux variables continues  $x_1$  et  $x_3$  dont les valeurs sont comprises dans l'intervalle  $(a, b)$  et 2° au lieu de  $m_1$  et  $m_3$ , deux variables continues  $t_1$  et  $t_3$ .  $P_{ik}(m_1, m_3)$  devient ainsi une fonction continue  $\Phi$  de quatre

variables et notre formule devient

$$(71) \quad \Phi(x_1, x_3, t_1, t_3) = \int_a^b \Phi(x_1, x_2, t_1, t_2) \Phi(x_2, x_3, t_2, t_3) dx_2,$$

avec la condition  $t_1 < t_2 < t_3$ . L'équation (71) a été obtenue, sous une forme un peu différente, par Chapman [1] dans ses recherches sur la diffusion. Si, pour  $t_1 > T > 0$ , où  $T$  est une constante, la fonction  $\Phi(x_1, x_3, t_1, t_3)$  qui satisfait à (71) reste positive et si

$$\int_a^b \Phi(x_1, x_3, t_1, t_3) dx_3 = 1,$$

on a

$$\lim_{t_3 \rightarrow +\infty} \Phi(x_1, x_3, t_1, t_3) = \varphi(x_3),$$

où  $\Phi$  ne dépend pas de  $x_1$  ni de  $t_1$  (voir Kolmogoroff [1], Hostinsky [14]).

Kolmogoroff [1] montre (pour le cas  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ ) que la fonction  $\Phi = \Phi(x, y, s, t)$  satisfait aux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -A(x, s) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - B^2(x, s) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial [A(y, t) \Phi]}{\partial y} + \frac{\partial^2 [B^2(y, t) \Phi]}{\partial y^2},$$

où les fonctions  $A$  et  $B^2$  sont définies par

$$A(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_a^b (y-x) \Phi(x, y, t, t+\Delta) dy.$$

$$B^2(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_a^b (y-x)^2 \Phi(x, y, t, t+\Delta) dy.$$

sous la condition que le rapport du moment d'ordre trois de la fonction  $\Phi$  et du moment d'ordre deux tende vers zéro pour  $\lim t = 0$ .

Dans le cas particulier où la fonction  $\Phi(x, y, s, t)$  ne dépend que de  $x, y$ , et de la différence  $s - t$ , l'équation (71) se réduit à l'équation de Smoluchowski (68).

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

(R.) = Mémoire écrit en russe.

- BERNSTEIN (S.). — [1] Sur l'extension du théorème limite du Calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes (*Math. Ann.*, Bd. 97, 1926, p. 1-59).  
 [2] Sur les sommes de quantités dépendantes (*Bull. Acad. Sc.*, Leningrad, 1926, p. 1459-1478).  
 [3] Sur les sommes de quantités dépendantes (*Doklady Ak. Nauk*, Leningrad, 1928, A, p. 55-60).  
 [4] Teoria verojatnostej (R.) (*Calcul des probabilités*, Moscou, 1927).
- BIENAIMÉ. — [1] Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés (*Journ de math. pures et appl.*, 2<sup>e</sup> série, XII, 1867, p. 158-176; voir p. 160-161).
- BOREL (E.). — [1] Sur les principes de la Théorie cinétique des gaz (*Ann. sci. Éc. Norm. sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. 23, 1906; réimprimé dans [4], note I).  
 [2] Sur le battage des cartes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 154, 1912, p. 23-25).  
 [3] *Le hasard* (Paris, 1914).  
 [4] *Introduction géométrique à quelques théories physiques* (Paris, 1914).  
 [5] *Calcul des probabilités*, 3<sup>e</sup> édition (Paris, 1924).  
 [6] Principes et formules classiques du Calcul des probabilités (*Traité du Calcul des probabilités et de ses applications*, t. I, fasc. 1, rédigé par R. LAGRANGE Paris, 1925).  
 Voir aussi EHRENFEST.
- CARVALLO (E.). — [1] *Le Calcul des probabilités et ses applications* (Paris, 1912, p. 150).
- CASTELNUOVO (G.). — [1] *Calcolo delle probabilità*, I, II, 2<sup>e</sup> édition (Bologna, 1926-1928).
- CHAPMAN (S.). — [1] On the Brownian displacements and Thermal Diffusion of Grains suspended in a Non-Uniform Fluid (*Proceedings of the Royal Society, A*, vol. 119, p. 34-54; London, 1928).
- EGGENBERGER (F.) et PÓLYA (G.). — [1] Ueber die Statistik verketteter Vorgänge (*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 3, 1923, p. 279-289).  
 [2] Sur l'interprétation de certaines courbes de fréquence (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 187, 1928, p. 870-872).
- EHRENFEST (P. et T.) et BOREL (E.). — Mécanique statistique (*Encyclopédie des sciences mathématiques*, Paris-Leipzig, 1915, t. IV, vol. I, fasc. 1).
- FRÉCHET (M.). — [1] Remarque sur les probabilités continues (*Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 45, 1921, p. 87-88).

- FRÉCHET et HALBWACHS. — [2] *Le calcul des probabilités à la portée de tous* (Paris, Dunod, 1924).
- FROBENIUS (G.). — [1] Ueber vertauschbare Matrizen (*Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, Berlin, 1896, p. 614).
- [2] Ueber Matrizen aus positiven Elementen, I (*Ibid.*, 1908, p. 471-476).
- [3] Ueber Matrizen aus positiven Elementen, II (*Ibid.*, 1909, p. 514-518).
- FÜRTH (R.). [1] Die Brown'sche Bewegung bei Berücksichtigung einer Persistenz der Bewegungsrichtung (*Zeitschrift für Physik*, II, 1920, p. 244-256).
- HADAMARD (J.). — [1] Sur le battage des cartes (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 183, 1927, p. 5-9).
- [2] Sur les opérations itérées en Calcul des probabilités (*Ibid.*, t. 186, 1928, p. 189-192).
- [3] Sur le principe ergodique (*Ibid.*, t. 186, 1928, p. 275-276).
- HALBWACHS. — Voir FRÉCHET [2].
- HOPF (E.). — [1] Ueber lineare Integralgleichungen mit positivem Kerne (*Sitzungsberichte d. preuss. Akad. d. Wiss.*, Berlin, 1928, p. 233-245).
- HOSTINSKÝ (B.). — [1] Une nouvelle solution du problème de Buffon de l'aiguille (en tchèque) (*Rozpravy České Akademie*, Classe II, t. 26, n° 13, 1917).
- [2] Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille (*Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 44, 1920, p. 126-136).
- [3] Sur la méthode des fonctions arbitraires dans le calcul des probabilités (*Acta math.*, t. 49, 1926, p. 95-113).
- [4] Sur une méthode générale du calcul des probabilités (*Ass. franç. avanc. Sc.*, Congrès de Lyon, 1926, p. 194-196).
- [5] Sur les probabilités relatives aux transformations répétées (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 186, 1928, p. 59-61).
- [6] Compléments à la Note sur les Probabilités relatives aux transformations répétées (*Ibid.*, p. 487-489).
- [7] Sur les transformations itérées des variables aléatoires (*Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryck*, Brno, n° 93, 1928).
- [8] Sur les probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 187, 1928, p. 1014-1016).
- [9] Probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe (*Journ. math. pures et appl.*, 9<sup>e</sup> série, t. VIII, 1929, p. 35-43).
- [10] Sur les probabilités des phénomènes liés en chaînes de Markoff (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 189, 1929, p. 78-80).
- [11] Sur la probabilité des phénomènes liés en chaînes de Markoff (en tchèque, paraîtra dans le *Sbornik přírodovědecký*, publié par l'Académie tchèque des Sciences à Prague, t. VII, 1929, p. 289-340).
- [12] Ein allgemeiner Satz über die Brown'sche Bewegung (*Physikalische Zeitschrift*, t. 30, 1929, p. 894-895).
- [13] Sur la théorie générale des phénomènes de la diffusion (*Comptes rendus du Congrès des mathématiciens des Pays slaves*, Varsovie, 1929, p. 341-347).

- [14] Sur la théorie de la diffusion (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 192, 1931, p. 546-548).
- JENTZSCH (R.). — [1] Ueber Integralgleichungen mit positivem Kern (*Crelles Journal*, Bd. 144, 1912, p. 235-244).
- KAUCKÝ (J.). — [1] Quelques remarques sur les chaînes de Markoff (en tchèque; résumé en français) (*Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk*, n° 131; Brno, 1930).
- KOLMOGOROFF (A.). — [1] Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Math. Annalen*, t. 104, 1931, p. 415-458).
- KRIES (Joh. v.). — [1] Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Freiburg i. B.*, 1886).
- [2] Logik (*Tübingen*, 1926), Kap. 26.
- LAGRANGE (R.). — Voir BOREL (E.) [6].
- LAPLACE (P.-S.). — [1] *Théorie analytique des probabilités*, Livre II, Chap. III et IV.
- LÉVY (P.). — [1] *Calcul des probabilités* (Paris, 1925, p. 49).
- LIAPOUNOFF (A.). — [1] Sur une proposition de la théorie des probabilités (*Bull. Acad. Imp. Sc.*, Saint-Petersbourg, 5<sup>e</sup> série, t. 13, 1900, p. 359-386).
- [2] Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité (*Mém. Ac. Imp. Sc.*, Saint-Petersbourg, 8<sup>e</sup> série, t. 12, n° 5, 1901).
- MARKOFF (A. A.). — [1] Extension de la loi de grands nombres aux événements dépendants les uns des autres (R.) (*Bull. Soc. physico-math.*, Kasan, 2<sup>e</sup> série, t. 13, n° 4, 1907, p. 135-156).
- [2] Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes (R.) (*Bull. Acad. Imp. Sc.*, Saint-Petersbourg, 6<sup>e</sup> série, t. 1, 1907, p. 61-80).
- [3] Extension des théorèmes limites du calcul des probabilités à la somme des valeurs liées en chaîne (R.) (*Mém. Acad. Imp. Sc.*, Saint-Petersbourg, classe Phys.-Math., 8<sup>e</sup> série, t. 22, n° 9, 1908).
- Une traduction allemande de ce travail se trouve dans [14], *Anhang*, II.
- [4] Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes (*Acta math.*, t. 33, 1910, p. 87-104).
- [5] Sur les valeurs liées qui ne forment pas une chaîne véritable (R.) (*Bull. Acad. Imp. Sc.*, Saint-Petersbourg, 6<sup>e</sup> série, t. 5, 1911, p. 113-126).
- [6] Sur un cas d'épreuves liées en chaîne multiple (R.) (*Ibid.*, 1911, p. 171-186).
- [7] Recherches sur le cas général d'épreuves liées en chaîne (R.) (*Mém. Acad. Imp. Sc.*, Saint-Petersbourg, classe Math.-Phys., 8<sup>e</sup> série, t. 25, n° 3, 1911).
- [8] Sur les épreuves liées en chaîne par les événements laissés sans observation (R.) (*Bull. Acad. Imp. Sc.*, Saint-Petersbourg, 6<sup>e</sup> série, t. 6, 1912, p. 551-572).
- [9] Essai d'une recherche statistique sur le texte du roman *Eugène Onégin*, illustrant la liaison des épreuves en chaîne (R.) (*Ibid.*, 6<sup>e</sup> série, t. 7, 1913, p. 153-162).
- [10] Sur un problème de Laplace (R.) (*Ibid.*, 6<sup>e</sup> série, t. 9, 1915, p. 87-101).
- [11] Sur l'application de la méthode des espérances mathématiques aux sommes liées (R.) (*Ibid.*, 6<sup>e</sup> série, t. 9, 1915, p. 1453-1484).

- [12] Sur quelques formules limites du Calcul des probabilités (R.) (*Ibid.*, 6<sup>e</sup> série, t. 11, 1917, p. 177-186).
- [13] Généralisation du problème de l'échange successif de boules (R.) (*Bull. Acad. Sc. de Russie*, 6<sup>e</sup> série, t. 12, 1918, p. 261-266).
- [14] *Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach der zweiten Auflage der russischen Werkes übers. von H. Liebmann* (Leipzig-Berlin, 1912).
- [15] Izcislenie vërojatnostej (*Calcul des probabilités*, 4<sup>e</sup> édition, Moscou, 1924).
- PERRIN (F.). — [1] Étude mathématique du mouvement brownien de rotation (*Thèse, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. 45, 1928).
- PERRON (O.). — [1] Zur Theorie der Matrices (*Math. Ann.*, Bd. 64, 1907, p. 248-263).
- POINCARÉ (H.). — [1] Sur le problème des trois corps (*Acta math.*, XIII, 1890, § 8).
- [2] Réflexions sur le calcul des probabilités (*Rev. gén. Sc. pures et appl.*, t. 10, 1899, p. 262-269).
- [3] *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. III, p. 151 et suiv. (Paris, 1899).
- [4] *La science et l'hypothèse* (Paris, 1902).
- [5] Le hasard (*La Revue du Mois*, t. III, 1907, p. 257-276).
- [6] *Science et Méthode* (Paris, 1908).
- [7] *Calcul des probabilités*, 2<sup>e</sup> édition (Paris, 1912).
- PÓLYA (G.). — Voir EGGENBERGER (F.).
- RAJCHMAN (A.). — [1] Sur une équation qui intervient dans la théorie cinétique des gaz (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 190, 1930, p. 729-730).
- ROMANOVSKY (V.). — [1] Sur les chaînes de Markoff (*C. R. Acad. Sc. de l'U.R.S.S.*, 1929, A, n<sup>o</sup> 9, p. 203-208).
- [2] Sur les zéros de matrices stochastiques (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 192, 1931, p. 266-269).
- SMOLUCHOWSKI (M.). — [1] Einige Beispiele Brown'scher Molekularbewegung unter Einfluss äusserer Kräfte (*Bull. intern. Acad. Sc.*, Cracovie, A, 1913, p. 418-434). Voir *Œuvres de S.*, t. II.
- [2] Ueber Brown'sche Molekularbewegung unter Einwirkung äusserer Kräfte und deren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Diffusionsgleichung (*Ann. Phys.*, 4<sup>e</sup> série, t. 48, 1915, p. 1103-1112). Voir *Œuvres de S.*, t. II.
- [3] Ueber den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik (*Die Naturwissenschaften*, VI, 1918, p. 253-263).
- TCHÉBYCHEFF (P.). — [1] Des valeurs moyennes (*Journ. math. pures et appl.*, 2<sup>e</sup> série, t. 12, 1867, p. 177-184). Réimprimé dans les *Œuvres de Tch.*, t. I.
- [2] Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités (*Acta math.*, t. 14, 1891, p. 305-315). Voir *Œuvres*, t. II.
- URBAN (F. M.). — [1] *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler* (Leipzig, 1923).
- VOROVKA (K.). — [1] Portée philosophique du Calcul des probabilités (en tchèque) (*Česká Mysl*, Prague, 1913).



---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

INTRODUCTION .....	Pages. I
--------------------	-------------

### CHAPITRE I.

#### MÉTHODE DES FONCTIONS ARBITRAIRES.

1. Problème de la roulette.....	2
2. Fonctions arbitraires de plusieurs variables.....	4
3. Applications diverses.....	5
4. Résumé de la méthode.....	12

### CHAPITRE II.

#### PROBABILITÉ DES PHÉNOMÈNES LIÉS EN CHAÎNE.

##### CAS DES VARIABLES DISCONTINUES.

5. Définition de la chaîne simple.....	13
6. Théorème fondamental sur la limite de la probabilité.....	15
7. Équation caractéristique. Racine $\lambda = 1$ .....	18
8. Fonction génératrice $F(t, z)$ de Markoff et sa formule pour $a$ .....	19
9. Autres racines de l'équation caractéristique. Nouvelle démonstration du théorème fondamental.....	20
10. Remarques sur la définition de la chaîne.....	22
11. Calcul de la dispersion. Première méthode.....	24
12. Autre méthode pour calculer la dispersion.....	25
13. Chaîne simple pour $r = 2$ .....	27
14. Cas des épreuves indépendantes.....	29
15. Cas où $p_{1k} + p_{2k} + \dots + p_{rk} = 1$ .....	30
16. Le problème du battage des cartes proposé par Poincaré.....	30
17. Un autre problème sur le battage des cartes.....	32
18. Problème généralisé du battage des cartes.....	34
19. Cas où quelques $p_{ik}$ sont nuls.....	34
20. Tirages de deux urnes avec échange des boules.....	35
21. Chaîne multiple.....	37

	Pages.
22. Phénomènes dont la probabilité dépend d'autres problèmes liés en une chaîne simple.....	38
23. Chaîne simple avec éléments variables.....	40
24. Second théorème sur la limite de la probabilité.....	40

### CHAPITRE III.

#### PROBABILITÉS DES PHÉNOMÈNES LIÉS EN CHAÎNE. CAS DES VARIABLES CONTINUES.

25. Définition de la chaîne simple dans le cas d'une variable continue.....	42
26. Théorème sur la limite.....	43
27. Équation de Fredholm pour $P(y)$ . La racine $\lambda = 1$ de $D(\lambda) = 0$ .....	45
28. Les autres racines de $D(\lambda) = 0$ . Nouvelle expression de $P^{(n)}(x, y)$ .....	46
29. Calcul de la dispersion.....	47
30. Cas des épreuves indépendantes.....	49
31. Second théorème sur la limite de la probabilité.....	49
32. Cas où $\int_a^b p(x, y) dx = 1$ .....	50
33. Sur un cas où $p(x, y)$ n'est pas partout positive.....	50
34. Le mouvement d'un point sur la circonférence.....	51
35. Rotations d'une sphère autour des axes passant par son centre.....	52
36. Équation fonctionnelle de Smoluchowski.....	56
37. Conclusions.....	57
Compléments sur quelques travaux récents.....	57
38. Sur les racines de l'équation caractéristique.....	57
39. Sur l'équation fonctionnelle de Chapman.....	58
<i>Index bibliographique</i> .....	60

