MUSTAPHA RAIS

Distributions homogènes sur des espaces de matrices

Mémoires de la S. M. F., tome 30 (1972)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__30__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 30, 1972, 109 p.
(Thèse Sc. math. Paris, 1970)

DISTRIBUTIONS HOMOGÈNES SUR DES ESPACES DE MATRICES

Par Mustapha RAÏS

Table des matières

CHAPITRE O

CHAPITRE 1

CHAPITRE II

CHAPITRE III

CHAPITRE IV

CHAPITRE V

CHAPITRE O

0 - Introduction : Les questions auxquelles on apporte des réponses ont été posées par A. Weil (séminaire Bourbaki n° 312, 1965-1966, "fonctions zéta et distributions") ; A. Weil s'intéressait au problème $P(K,K^*,\omega)$: étant donné un corps local (commutatif) K, une représentation ω de dimension 1 de son groupe multiplicatif K^*, trouver toutes les distributions sur K qui se transforment par K^*, (opérant de manière évidente sur K), suivant ω, et donnait :
- un résultat d'existence et d'unicité : l'espace $\mathcal{H}^{\omega}$ des solutions de $P(K,K^*,\omega)$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$.
- des calculs de transformation de Fourier portant sur les distributions mises en évidence.

A la fin de son exposé, A.Weil proposait parmi d'autres deux problèmes :
- celui d'étendre ce qui précède à toute algèbre simple sur un corps local,
- celui de savoir si on peut attacher des distributions à d'autres types de fonctions zéta.

Dans ce qui suit on énonce les résultats obtenus dans le cas des algèbres simples sur le corps des nombres réels.

1 - Le théorème de Glaeser et les distributions invariantes par un groupe linéaire compact : On a généralisé un résultat de G. Glaeser : Soit n un entier $\geqslant 1$, G un sous groupe compact de $GL(n,\mathbb{R})$ et $q_1,\dots,q_p$ un système de générateurs de l'anneau des fonctions polynomes définies sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles et G-invariantes ; l'application $q : x \longmapsto (q_1(x),\dots,q_p(x))$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est propre; si les fonctions $q_1,\dots,q_p$ sont algébriquement indépendantes, q est de rang p dans un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$, et un théorème de Glaeser ([9]) assure alors que l'application $q_* : \mathcal{E}(\mathbb{R}^p) \longmapsto \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, définie par $q_*(f) = f \circ q$, est à image fermée (la topologie de $\mathcal{E}$ est celle de Schartz). Il en résulte alors facilement :

Proposition 1 : Soit $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ un groupe compact dont l'anneau des invariants (dans l'algèbre des fonctions polynomes sur $\mathbb{R}^n$) est un anneau de polynomes, $q_1,\dots,q_p$ un système de générateurs algébriquement indépendants de cet anneau, et $q : x \longmapsto (q_1(x),\dots,q_p(x))$; alors l'image Q de $\mathbb{R}^n$ par q est un ensemble fermé (semi-algébrique, donc régulier au sens de Whitney d'après une démonstration de Losajiewicz), et q_* induit un isomorphisme vectoriel topologique de l'espace des restrictions à Q des fonction C^∞ (resp. C^∞ et à support compact) sur $\mathbb{R}^p$, muni de la topologie quotient de celle de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$), sur l'espace des fonctions C^∞ (resp. C^∞ et à support compact) et G-invariantes sur $\mathbb{R}^n$. Par dualité, il en résulte que l'espace des distributions G-invariantes sur $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à l'espace des distributions sur Q.

Commentaires : -Le théorème de Glaeser cité plus haut a servi à cet auteur dans la démonstration de ce qu'il appelle le théorème de Newton différentiable : une fonction C^∞ symétrique sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction C^∞ des fonctions symétriques élémentaires des coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$; c'est un cas particulier de la proposition 1 , le groupe G étant le groupe fini des permutations des coordonnées ; la démonstration de la proposition 1 est à peu près celle de Glaeser; il a simplement fallu trouver un argument assurant en général que l'application q était propre et de rang maximal dans un ouvert dense.

- Il serait intéressant de caractériser les groupes compacts $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ dont l'anneau des invariants est un anneau de polynomes ; "G est engendré par des symétries" est une condition suffisante qui est nécessaire si G est fini, mais trivialement non nécessaire dans le cas contraire.

2 - Distributions homogènes sur une algèbre simple sur $\mathbb{R}$ (unicité) : Soit K l'une des algèbres à division $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (quaternions), $A = M_n(K)$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans K,$U(n)$ le groupe unitaire réel, complexe ou quaternionnien suivant le cas ; si $x \in A$,x^* est la transposée conjuguée de x ; l'ensemble $MH_n(K)$ des matrices hermitiennes $x = x^*$ est un espace vectoriel réel qui contient le cône convexe C_n des matrices positives.

Proposition 2 : Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynome sur l'espace vectoriel réel A , qui est invariante à gauche par U(n) ; alors il existe une et une seule fonction polynome g sur $MH_n(K)$ telle que $f(x) = g(x^*x)$ pour tout $x \in A$.

Commentaire : Pour $K = \mathbb{R}$, ce résultat est connu (H. Weyl [2]) ; dans les cas complexe et quaternionnien , on a imité la démonstration de Weyl.

Une application de la proposition 1 donne alors :

Proposition 3 : Soit $q : x \longmapsto x^*x$,T une distribution sur A qui est U(n)-invariante à gauche et $q^*T : \varphi \longmapsto \int T(x)\varphi(x^*x)dx$ l'image directe de T par q ; alors q^*T est une distribution sur $MH_n(K)$ à support dans C_n , et q^* est un isomorphisme vectoriel topologique de l'espace des distributions U(n)-invariantes à gauche sur l'espace des distributions sur $MH_n(K)$ qui sont à support dans C_n .

Commentaire : Pour $K = \mathbb{R}$, ce résultat est connu (L.Gårding [11]) ; la comparaison de la démonstration de Gårding et de celle-ci montre l'intérêt de la proposition 1 .

Soit maintenant B (resp. B^*) le groupe des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures (resp. inférieures) à coefficients diagonaux réels positifs, et pour chaque $s = (s_1 ,\dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$,$\alpha_s$ (resp. β_s) la représentation de dimension 1 :

$b \mapsto \prod_i (b_{ii})^{s_i}$ de B (resp. B^*) . Soit maintenant T une distribution sur A qui est invariante à gauche par U(n) et qui se transforme à droite par B (resp. B^*) suivant α_s (resp. β_s) ; en considérant q^*T , puis la transformée de Laplace de q^*T par rapport au cône ouvert $\overset{\circ}{C}_n$ des matrices définies positives ([6]) , qui est une fonction holomorphe sur le tube $\overset{\circ}{C}_n + i\, MH_n(K)$, on constate que cette transformée de Laplace est entièrement déterminée à une constante multiplicative près ; il en résulte que l'espace des telles distributions T est de dimension au plus 1 ; en fait, il est facile de voir que plus généralement l'espace des distributions sur A qui se transforment à gauche par U(n) suivant une représentation de dimension 1 donnée de U(n) et à droite par B (resp. B^*) suivant α_s (resp. β_s) est de dimension ≤ 1 sur $\mathbb{C}$.

3 - <u>Distributions homogènes sur une algèbre simple</u> (<u>existence</u>) : La fonction α_s (resp. β_s) se prolonge de manière unique à A^* en une fonction U(n)-invariante à gauche, qu'on continuera à noter α_s (resp. β_s) ; si on prolonge cette fonction à A en lui donnant la valeur 0 dans le complémentaire de A^* , on constate qu'au moins lorsque s (resp. $\check{s} = (s_n , s_{n-1} ,\dots, s_1)) \in \Omega_n = \{ s \in \mathbb{C}^n ;$ $0 \leq Re(s_n) \leq Re(s_{n-1}) \leq \dots \leq Re(s_1)\}$ ce prolongement définit sur A une fonction Lebesgue - localement intégrable ; soit T_o^s (resp. R_o^s) la distribution sur A qui lui est associée ; elle est invariante à gauche par U(n) et se transforme à droite par B (resp. B^*) suivant α_s (resp. β_s) ; de plus, la fonction $s \mapsto T_o^s$ (resp. R_o^s) à valeurs distributions est analytique dans l'intérieur de Ω_n ; soit ν le degré de K sur $\mathbb{R}$ (ν = 1,2 ou 4).

<u>Proposition 4</u> : La fonction :

$$s \mapsto \mathcal{E}_o^s = \pi^{\Sigma s_i/2}\, T_o^s \Big/ \prod_i \Gamma\left(\frac{s_i + \nu(n+1-i)}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{\nu(n+1-i)}{2}\right)$$

$$\left(\text{resp. } s \mapsto \mathcal{R}_o^s = \pi^{\Sigma s_i/2}\, R_o^s \Big/ \prod_i \Gamma\left(\frac{s_i + \nu i}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{\nu i}{2}\right)\right)$$

à priori définie et analytique dans l'intérieur de Ω_n (resp. $\check{\Omega}_n$) , est prolongeable à $\mathbb{C}^n$ en une fonction analytique et pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{E}_o^s$ (resp. $\mathcal{R}_o^s$) est une distribution invariante à gauche par U(n) , qui se transforme à droite par B (resp. B^*) suivant α_s (resp. β_s) , et telle que

$$\int \mathcal{E}_o^s(x)^{-tr(x^*x)}\, dx = 1$$

$$\left(\text{resp.} \int \mathcal{R}_o^r(x)\, e^{-\pi tr(x^*x)}\, dx = 1\right) .$$

Ceci dit, si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a d'autres représentations de dimension 1 de $U(n)$ qu'il faut considérer : si $K = \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{sgn.}(\text{dét.}x)\,\alpha_s(x)$ (resp. $x \mapsto \mathrm{sgn.}\ \text{dét.}x)\beta_s(x)$) définit dans les mêmes conditions que α_s (resp. β_s) une distribution T_1^s (resp. R_1^s) sur A, et $s \mapsto \mathcal{E}_1^s = \pi^{(n+\sum s_i)/2}\, T_1^s \,/\, \prod_i \Gamma(\frac{s_i+n+2-i}{2}) \,/\, \Gamma(\frac{n+1-i}{2})$ (resp. $s \mapsto \pi^{(n+\sum s_i)/2}\, R_1^s / \prod_i \Gamma(\frac{s_i+1+i}{2}) / \Gamma(\frac{i}{2}) = \mathcal{R}_1^s$ admet un prolongement analytique partout $\neq 0$ dans $\mathbb{C}^n$.

Si $K = \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto [\text{dét.}x]^r \alpha_s(x)$ (resp. $x \mapsto [\det.x]^r\,\beta_s(x)$) où $[\text{dét.}x] = (\text{dét.}x) / |\text{dét.}x|$, définit dans les mêmes conditions que α_s (resp. β_s)) une distribution T_r^s (resp. R_r^s) et

$$s \mapsto \mathcal{E}_r^s = \pi^{(n|r|+\sum s_i)/2}\ T_r^s \,/\, \prod_i \Gamma(\frac{s_i+|r|}{2} + n+1-i) \,/\, \Gamma(n+1-i)$$

(resp. $s \mapsto \mathcal{E}_r^s = \pi^{(n|r|+\sum s_i)/2}\ R_r^s / \prod_i \Gamma(\frac{s_i+|r|}{2} + i) / \Gamma(i)$)
a un prolongement partout $\neq 0$ et analytique dans $\mathbb{C}^n$.

Commentaire : Le résultat donnant le prolongement analytique par rapport à s des fonctions $s \mapsto T_o^s$ et $s \mapsto R_o^s$ est équivalent à un résultat de Gindikin ([23]), qui opère au niveau de $MH_n(K)$; les distributions T_r^s et R_r^s qui correspond à $r \neq 0$ n'apparaisent pas chez Gindikin parce qu'elles ne sont pas invariantes à gauche par $U(n)$.

4 - Distributions homogènes sur une algèbre simple (transformation de Fourier) :

Les paragraphes 2 et 3 permettent d'énoncer :

Théorèmes 1 : Soit $s \in \mathbb{C}^n$, et r un entier ($r=0$ si $K=\mathbb{H}$, $r=0$ ou 1 si $K=\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}$ si $K=\mathbb{C}$) ; Soit χ_r le caractère de $U(n)$ ainsi défini : χ_o est le caractère trivial, et si r n'est pas nul, auquel cas K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\chi_r(x) = (\text{dét.}x/|\text{dét.}x|)^r$; alors l'espace des distributions sur A qui se transforment à gauche par $U(n)$ suivant χ_r et à droite par B (resp. B^*) suivant α_s (resp. β_s) est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$; il est donc engendré par $\mathcal{E}_r^s$ (resp. $\mathcal{R}_r^s$).

Commentaire : Le résultat d'unicité concernant le cas de la représentation triviale de $U(n)$ est équivalent à un résultat énoncé sans démonstration par Gindikin dans [23] ; il suffit en effet d'utiliser la proposition 3 pour se trouver sur le cône C_n.

Ce théorème a comme conséquence immédiate :

Proposition 5 : La transformée de Fourier de $\mathcal{E}_r^s$ est $(-i)^{n|r|}\mathcal{R}_r^{-s-\nu n}$

Remarque : On peut faire la même théorie sur un produit $K^n \times K^n \times \dots K^n$ de m facteurs, avec $m \leq n$.

5 - Le problème $P(A,A^*,\omega)$ (premières réponses) :

Soit ω une représentation de dimension 1 de A^* ; $P(A,A^*,\omega)$ est le problème de la détermination de toutes les distributions sur A qui se transforment à gauche par A^* suivant ω. Pour ce qui est de l'existence de telles distributions, la question a été résolue ci-dessus : il existe r et s tels que $\omega(x) = \chi_r(u)\,\alpha_s(b)$ pour tout $x = ub \in A^*$; en fait les s_i sont tous égaux ; on désignera leur valeur commune par s ; les distributions $\mathcal{T}_r^s$ correspondantes sont invariantes par les automorphismes intérieurs de A de sorte qu'elles se transforment aussi à droite par A^* suivant ω. Pour la commodité des références, on résume tout ceci dans l'énoncé :

Théorème 2 : Soit $s \in \mathbb{C}$, r un entier $(r = 0$ si $K = \mathbb{H}, r = 0$ ou 1 si $K = \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}$ si $K = \mathbb{C})$, ω la représentation de dimension 1 de A^* définie par r et s, et $\mathcal{H}^\omega$ l'espace des distributions sur A qui se transforment à droite et à gauche par A^* suivant ω. Alors $\mathcal{H}^\omega$ est de dimension 1, donc engendré par $\mathcal{T}_r^s$, et les transformées de Fourier des $\mathcal{T}_r^s$ se calculent suivant les formules :

$$\mathcal{F}\mathcal{T}_r^s = (-i)^{n|r|}\,\mathcal{T}_r^{-s-\nu n} .$$

6 - Distributions définies par des fonctions sphériques de A^* :

Soit $s \in \mathbb{C}^n$ et $F_s : A^* \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction sphérique définie par :

$$F_s(x) = \int_{U(n)} \alpha_s(xu)\,du ,$$

où du est la mesure de Haar normalisée de $U(n)$; r étant donné, la fonction $x \longmapsto \chi_r(x)\,F_s(x)$ définit dans les mêmes conditions que α_s une distribution S_r^s sur A, et pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ on a :

$$\int S_r^s(x)\,\varphi(x)\,dx = \int T_r^s(x)\,dx \int_{U(n)} \varphi(xu)\,du .$$

Il en résulte le

Théorème 3 : (i) - La fonction

$$s \longmapsto \mathcal{J}_r^s = \pi^{(n|r| + \Sigma s_i)/2}\, S_r^s \Big/ \prod_i \Gamma\left(\frac{s_i + (n+1-i)}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)$$ est prolongeable à $\mathbb{C}^n$ en une fonction analytique partout $\neq 0$.

(ii) - Chaque distribution $\mathcal{J}_r^s$ est tempérée et

$$\mathcal{F}\mathcal{J}_r^s = (-i)^{n|r|}\,\mathcal{J}_r^{-s-\nu n} .$$

Commentaire : L'auteur ne sait pas si ce résultat a un intérêt.

7 - Distributions homogènes portées par le cône des matrices singulières dans $M_n(\mathbb{R})$:

Les représentations de dimension 1 de $GL(n,\mathbb{R})$ sont les suivantes :

$x \mapsto |\text{dét}.x|^s$, ou $x \mapsto \text{sgn}.(\text{dét}.x)\ |\text{dét}.x|^s$ (s décrivant $\mathbb{C}$) ; soit L_+^s (resp. L_-^s) l'espace des distributions sur $A = M_n(\mathbb{R})$ qui se transforment à gauche par $A^* = GL(n,\mathbb{R})$ suivant $x \mapsto |\text{dét}.x|^s$ (resp. $x \mapsto \text{sgn}.(\text{dét}.x)\ |\text{dét}.x|^s$) et $L^s = L_+^s \oplus L_-^s$; une des questions que pose le problème $P(A,A^*,\omega)$ est de déterminer la dimension des espaces L_+^s et L_-^s . Si on remarque que deux solutions de $P(A,A^*,\omega)$ sont toujours linéairement dépendantes <u>dans</u> <u>l'ouvert</u> <u>A^*</u>, on voit qu'il est naturel de se poser la question de déterminer les distributions homogènes nulles dans A^* ; le cas $n = 1$ est instructif : dans ce cas, on sait écrire toutes les distributions à support $\{0\}$, et on constate que les degrés s correspondants sont les entiers $s \leqslant -1$; il en résulte alors que si s n'est pas l'un de ces entiers, l'espace L_+^s (resp. L_-^s) est de dimension 1 , puis la transformation de Fourier étend ce résultat d'unicité aux s autres que -1 ; lorsque $n > 1$, il n'est plus possible apparamment d'écrire explicitement toutes les distributions portées par la variété des matrices singulières ; par contre, il est possible de démontrer la

<u>Proposition 6</u> : Soit T une distribution non nulle appartenant à L^s , qui est nulle dans A^* ; alors s est l'un des entiers $\leqslant -1$.

Encore une fois, le cas $n = 1$ est instructif : T étant une distribution homogène à support $\{0\}$, il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $S = x^p\ T$ soit non nulle mais xS soit nulle ; alors en dérivant l'égalité $xS = 0$ et en utilisant l'équation d'Euler pour S , il vient $(s+p+1)\ S = 0$, où s est le degré de T ; il en résulte évidemment $s = -p - 1 \leqslant -1$. On a généralisé cette démonstration, et pour ce faire on a redémontré un résultat de Turnbull ([13]). Voici ce dont il s'agit : Soit k un corps (commutatif), ξ et $(x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des éléments (d'une extension de k) algébriquement indépendants sur k, $k[x]$ l'algèbre sur k engendrée par les x_{ij} , et $\tilde{x}$ la matrice "adjointe" de x , qui est définie par la formule :

$$\tilde{x} = (\partial / \partial\, {}^t x)\ \text{dét}.x$$

où $\partial/\partial\,{}^t x$ est la matrice (à coefficients dérivations) dont le coefficient d'indices (i,j) est $\partial/\partial x_{ij}$; plus généralement, si $A \in M_n(k[x])$ est une matrice à coefficients dans $k[x]$, $(\partial/\partial\,{}^t x)\ A$ est la matrice dont le coefficient d'indices (i,j) est $\sum_h (\partial/\partial x_{hi})\ A_{hj}$; on définit alors les polynomes p_i , $(0 \leqslant i \leqslant n)$, et des matrices $B_i \in M_n(k[x])$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, par les formules :

$$\text{dét}.(\xi 1_n - x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (-1)^i\ p_i(x)\ \xi^{\,n-i}$$

$$(\xi 1_n - \tilde{x}) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (-1)^i\ B_i(x)\ \xi^{\,n-i-1} \quad .$$

on a alors :

<u>Proposition 7</u> : a) $(\partial/\partial\,{}^t x)\ p_r = B_{r-1}$

b) $(\partial/\partial^t x)\ B_r = (r-n)\ B_{r-1}$,

pour tous les entiers r tels que $0 \leq r \leq n$ (on convient que $B_{-1} = B_n = 0$) . La proposition 6 en résulte assez facilement, de même que le

Théorème 4 : Si s n'est pas l'un des entiers $-1, -2, \ldots, -n+1$, l'espace L_+^s et l'espace L_-^s sont de dimension 1 ; ils sont donc engendrés respectivement par $\mathscr{C}_0^s$ et $\mathscr{C}_1^s$, qui sont homogènes à gauche et à droite.

Commentaires. - Les formules a) de la proposition 7 sont dûes à Turnbull [13].

- Ce qui précède a presque sûrement un analogue dans le cas complexe et dans le cas quaternionnien.

8 - Le problème $P(M_n(\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R}),\omega)$ (suite) : On vient de voir que si on exclut les positions critiques $s = -1, -2, \ldots, -n+1$, le problème $P(M_n(\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R}),\omega)$ a au plus une solution ; en fait, cet énoncé d'unicité est faux en général, comme le montrent les exemples suivants :

On écrit une matrice générale x sous la forme $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en mettant en évidence ses vecteurs colonnes x_i , et on définit pour chaque entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$ une distribution T_p sur $M_n(\mathbb{R})$ de la manière suivante : pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$,

$$\langle T_p , \varphi\rangle = \int \varphi(x_1 , x_2 , \ldots, x_p , 0 , \ldots, 0)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p \quad .$$

Il est alors évident que T_p se transforme à gauche par $GL(n,\mathbb{R})$ suivant $x \longmapsto |\text{dét}.x|^{-n+p}$; par ailleurs, le support de T_p est l'idéal à gauche $\mathfrak{a}_p$ constitué par les matrices dont les $n-p$ dernières colonnes sont nulles ; $\mathfrak{a}_p$ n'étant pas invariant à droite par $GL(n,\mathbb{R})$, T_p ne peut être homogène à droite par $GL(n,\mathbb{R})$. Il résulte de ceci que la dimension de l'espace L_+^{-n+p} est infinie.

Commentaire : Il est clair que ces exemples valent aussi bien dans d'autres cas que le cas réel.

9 - Distributions invariantes par le groupe $SL(n,\mathbb{R})$:

Ce qui précède est un prétexte à une étude plus ou moins approfondie des espaces de distributions sur $M_n(\mathbb{R})$ qui sont invariantes (à gauche, à droite, ou des deux côtés à la fois, auquel cas on dira qu'elles sont bi-invariantes) par des sous-groupes de $GL(n,\mathbb{R})$ tels que $O(n,\mathbb{R})$ (on a des résultats complets grâce à la proposition 1) ou $SL(n,\mathbb{R})$; l'étude des distributions bi-invariantes par $SL(n,\mathbb{R})$ est résumée dans ce qui suit.

9.1 - Soit $\mathcal{O}$ l'ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ constitué par les matrices de rang $> n-2$; dans cet ouvert, les orbites de $SL(n,\mathbb{R})$ opérant à droite et à gauche, sont les hypersurfaces régulières $\Sigma_u = \{x \in \mathcal{O} ; \text{dét}.x = u\}$ u parcourant $\mathbb{R}$, et l'application $x \longmapsto \text{dét}.x$ de $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{R}$ est partout de rang 1 ; par ailleurs, il est possible de définir pour chaque $u \in \mathbb{R}$ une mesure $\delta(\text{dét}.x - u)$ dans $\mathcal{O}$, qui est bi-invariante par $SL(n,\mathbb{R})$ (dorénavant, bi-invariant(e)(s) concernera toujours $SL(n,\mathbb{R})$) , et à support Σ_u ; φ étant une fonction de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, on pose $M\varphi(u) = \langle \delta(\text{dét}.\ x - u) , \varphi \rangle$; alors M (qui est l'opération "intégrale sur les fibres") applique linéairement et continûment $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et la transposée M^* de M est un isomorphisme de $\mathcal{D}'(R)$ sur l'espace des distributions dans $\mathcal{O}$ qui sont bi-invariantes.

9.2 - On s'est intéressé à des opérateurs différentiels bi-invariants qui apparaissent naturellement ; il s'agit de l'opérateur de Cayley $\Delta = \text{dét}.\ (\partial/\partial x)$, de l'opérateur ϑ de multiplication par la fonction déterminant, et de l'opérateur de Capelli $D = \vartheta\Delta$.

- On écrit la composante radiale de Δ: si $F(x) = f(\text{dét}.\ x)$, f étant suffisamment dérivable, alors $(\Delta F)(x) = \prod_{p=2}^{n} (u\ d/du + p)\ d/du\ f\big|_{u=\text{dét}.\ x}$ et ceci permet de montrer que pour $\text{Re}(s)$ assez grande, on a la formule de Cayley :

$$\Delta(\text{dét}.\ x)^s = s(s+1)..(s+n-1)\ (\text{dét}.\ x)^{s-1} ,$$

laquelle à son tour, permet d'écrire explicitement des formules donnant les distributions $\mathcal{E}_0^s$ et $\mathcal{E}_1^s$ en fonction des distributions définies par les fonction continues $x \longmapsto |\text{dét}.x|^s$ et $x \longmapsto \text{sgn}.(\text{dét}.x)\ |\text{dét}.x|^s$ (où $\text{Re}(s) > 0$) .

- On a déterminé toutes les distributions bi-invariantes qui sont annulées par Δ , ϑ et D ; soit $\mathcal{H}_+^s$, $(\mathcal{H}_-^s)$ l'espace des distributions dans $M_n(\mathbb{R})$ qui se transforment à gauche et à droite par $GL(n,\mathbb{R})$ suivant $x \longmapsto |\text{dét}.\ x|^s$ $(\text{sgn}.(\text{dét}.\ x^s))$; alors le noyau de l'opérateur Δ (resp. ϑ , D) dans l'espace des distributions bi-invariantes est l'espace $\mathcal{H}_+^0 \oplus \mathcal{H}_+^{-1} \oplus .. \oplus \mathcal{H}_+^{-n+1}$ (resp. $\mathcal{H}_+^{-1} \oplus \mathcal{H}_+^{-2} \oplus .. \oplus \mathcal{H}_+^{-n}$, $\mathcal{H}_+^0 \oplus \mathcal{H}_-^0 \oplus \mathcal{H}_+^{-1} \oplus \mathcal{H}_-^{-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_+^{-n+1} \oplus \mathcal{H}_-^{-n+1}$) ; il est donc de dimension n (resp. $n,2n$) . On a aussi trouvé les solutions élémentaires de Δ , etc...

- Enfin on a écrit toutes les distributions bi-invariantes qui sont portées par la variété des matrices de déterminant nul ; le résultat n'est pas inattendu : ce sont celles qui interviennent dans les premiers termes des développements de Taylor au voisinage des s entiers négatifs des fonctions $s \longmapsto \mathcal{E}_+^s$ et $s \longmapsto \mathcal{E}_-^s$.

10 - <u>Invariants caractéristiques des groupes d'automorphismes de certaines algèbres de Jordan</u>

Dans le but d'éclairer la relation entre le groupe $SL(n,\mathbb{R})$ et la fonction polynome $x \longmapsto \text{dét}.x$, on s'est posé la question de savoir quel était le plus grand groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ qui laisse invariant le déterminant ; il est facile de voir que cette question se ramène à celle de la détermination du groupe des automorphismes de l'algèbre de Jordan $(M_n(\mathbb{R}))_+$ associé à l'algèbre $M_n(\mathbb{R})$ (la multiplication dans cette algèbre est donnée par la formule $x * y = xy + yx$) ; dans cet ordre d'idées on a obtenu le

<u>Théorème 5</u> : Soit $E \subset M_n(k)$ une algèbre de Jordan simple sur un corps k de caractéristique $\neq 2$ ou 3 ; le groupe Aut.(E) est le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ qui admettent comme invariant le polynome caractéristique générique $x \longmapsto \text{dét}.(\xi 1_n - x)$.

D'autre part, on a écrit deux lemmes généraux et faciles qui permettent de retrouver des résultats de J.Dieudonné, N.Jacobson et T.Ono, de répondre à la question soulevée plus haut sous la forme suivante :

<u>Théorème 6</u> : Le sous-groupe de $GL_k(M_n(k))$ admettant la fonction déterminant comme invariant est le groupe des applications de la forme $x \longmapsto y\check{x}z$, où $\text{dét}.(yz) = 1$ et $x \longmapsto \check{x}$ est soit l'identité, soit la transposition.

11 - Signalons maintenant que les développements correspondants aux paragraphes 1 à 6 ci-dessus se trouvent dans le chapitre II ($K = \mathbb{R}$) et dans le chapitre IV ($K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$) ; ceux correspondant aux paragraphes 7 à 9 ci-dessus se trouvent dans les chapitres I et III, de sorte que tout ce qui concerne $M_n(\mathbb{R})$ est regroupé dans les trois premiers chapitres de ce travail ; enfin le paragraphe 10 est développé dans le chapitre V.

- Les notations sont en général celles de la théorie des distributions ; les formules et propositions sont numérotées par chapitre : par exemple, la proposition II - 3 se trouve dans le chapitre II ; les nombres en chiffres arabes entre crochets tels que [2] renvoient à la bibliographie.

- Enfin, il est peut-être préférable de dire explicitement qu'on entend par distribution un courant impair de degré zéro, ou de façon plus parlante une fonction généralisée.

CHAPITRE I

On définit les distributions homogènes auxquelles on va s'intéresser et on démontre leurs propriétés immédiates et les équations d'Euler correspondantes. On introduit les opérateurs différentiels de Cayley et de Capelli, qui sont invariants par le groupe des multiplications à droite ou à gauche par des matrices de déterminant 1, on calcule leurs composantes radiales sur la droite réelle et on montre comment ils opèrent sur les distributions homogènes ; cela permet déjà de voir que les prolongements au plan complexe des fonctions $\lambda \longmapsto T_+^\lambda$ et $\lambda \longmapsto T_-^\lambda$ ont des pôles aux entiers négatifs, et donne des formules explicites pour ces prolongements. On étudie de manière sommaire les distributions bi-invariantes par le groupe $SL(n,\mathbb{R})$, et on montre que dans l'ouvert Ω_1 des matrices de rang $> n-2$, ces distributions proviennent de distributions $T(u)$ sur la droite réelle que l'on remonte sur $M_n(\mathbb{R})$ par le changement de variables $u = \text{dét. } x$; les distributions homogènes dans Ω_1 sont alors entièrement déterminées et l'étude complète du cas $n = 2$ montre l'intérêt qu'il y a à écrire explicitement toutes les distributions bi-invariantes par $SL(n,\mathbb{R})$ qui sont nulles dans $\Omega_o = GL(n,\mathbb{R})$ (ceci sera fait au chapître III).

1. Equation d'Euler ; les opérateurs de Cayley et Capelli.

1.1. Soit Ω un ouvert non vide de l'espace $M_n(\mathbb{R})$ dans lequel le groupe $GL(n,\mathbb{R})$ opère par multiplication à gauche, c'est-à-dire stable par les multiplications : $x \longmapsto mx$ $(m \in GL(n,\mathbb{R}))$, λ un nombre complexe et $\mathcal{L}_+^\lambda(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}_-^\lambda(\Omega)$) l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui vérifient la condition d'homogénéité suivante:

(I,0) $$\int_\Omega T(x)\ \varphi(mx)\ dx = |\text{dét } m|^{-\lambda-n} \int_\Omega T(x)\ \varphi(x)\ dx$$
(resp.

(I,0') $$\int T(x)\ \varphi(mx)\ dx = \text{sgn}(\text{dét } m)\ |\text{dét } m|^{-\lambda-n} \int_\Omega T(x)\ \varphi(x)\ dx)$$

pour tous $m \in GL(n,\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Lorsque T est une fonction numérique localement sommable (dans (0) et (0') dx est la mesure de Lebesque de $M_n(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$)(0) et (0') s'écrivent respectivement :

(I,1) $$T(mx) = |\text{dét } m|^\lambda\ T(x)$$

(I,1') $$T(mx) = \text{sgn}(\text{dét. } m)\ |\text{dét } m|^\lambda\ T(x)$$

pour tout $m \in GL(n,\mathbb{R})$, p.p en x dans Ω, et on écrira souvent (0) et (0') sous la forme (1) et (1') même lorsque T n'est pas une fonction.

1.2. De la même manière, si Ω est un ouvert invariant par les multiplications à droite $x \longmapsto xm$ ($m \in GL(n,\mathbb{R})$), $\mathcal{R}_+^\lambda(\Omega)$ (resp. $\mathcal{R}_-^\lambda(\Omega)$) désignera l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que :

$$(I,2) \qquad T(xm) = |\text{dét } m|^\lambda \; T(x)$$

(resp.

$$(I,2') \qquad T(xm) = \text{sgn}(\text{dét}.m)\, |\text{dét } m|^\lambda \; T(x))$$

pour tout $m \in GL(n,\mathbb{R})$.

En fait, on peut se contenter d'étudier les espaces $\mathcal{L}_{\pm}^\lambda$, car on vérifie facilement que l'application : $x \longmapsto {}^t x$ (où ${}^t x$ est la transposée de la matrice x) induit un isomorphisme de $\mathcal{R}_+^\lambda(\Omega)$ (resp. $\mathcal{R}_-^\lambda(\Omega)$) sur $\mathcal{L}_+^\lambda({}^t\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}_-^\lambda({}^t\Omega)$).

1.3 Soit donc Ω un ouvert invariant à gauche, $T \in \mathcal{L}_+^\lambda(\Omega)$ et $S \in \mathcal{E}'(GL(n,\mathbb{R}))$ une distribution à support compact sur $GL(n,\mathbb{R})$; le produit de convolution $S * T$ est une distribution sur Ω définie par :

$$\int S * T(x)\ \varphi(x)\ dx = \int S(m)\ d^*m \int T(x)\ \varphi(mx)\ dx$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, d^*m étant une mesure de Haar de $GL(n,\mathbb{R})$), et la formule (0) montre aussitôt que :

$$S * T = X_\lambda(S)\ T$$

où $X_\lambda : S \longmapsto \int_{GL(n,\mathbb{R})} S(m)\ |\text{dét } m|^{-\lambda - n}\ d^*m$ est un caractère continu de l'algèbre de convolution $\mathcal{E}'(GL(n,\mathbb{R}))$. Les distributions $T \in \mathcal{L}_+^\lambda(\Omega)$ et d'ailleurs aussi celles appartenant à $\mathcal{L}_-^\lambda(\Omega)$ sont donc des "fonctions propres" de l'algèbre des opérateurs : $T \longrightarrow S * T$ ($S \in \mathcal{E}'(GL(n,\mathbb{R}))$; ce résultat n'est pas sans intérêt, d'abord parce qu'il montre que chaque distribution dans Ω_0 qui est homogène est proportionnelle à ses régularisées, de sorte qu'on a le

<u>Lemme</u> : Dans $\Omega_0 = GL(n,\mathbb{R})$, tous les espaces introduits sont des espaces de fonctions et il en résulte que $\mathcal{L}_+^\lambda(\Omega_0) = \mathcal{R}_+^\lambda(\Omega_0)$ (resp. $\mathcal{L}_-^\lambda(\Omega_0) = \mathcal{R}_-^\lambda(\Omega_0)$) est un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) de dimension 1, dont un élément privilégié est la fonction $m \longmapsto |\text{dét}.m|^\lambda$ (resp. $m \longmapsto \text{sgn}(\text{dét}.m)\ |\text{dét}.m|^\lambda$).

et ensuite parce que les formules d'Euler et Capelli, qui seront écrites plus loin, n'en sont que des illustrations.

1.4. Soit maintenant $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$ et $\sigma \longmapsto \rho(\sigma)$ la représentation linéaire de $\mathfrak{S}_n$ dans $M_n(\mathbb{R})$ ainsi définie : $\rho(\sigma)x$ est la matrice obtenue à partir de x en permutant suivant σ les lignes de x ; (en fait, pour chaque σ, il existe $\tilde{\sigma} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(\sigma)x = \tilde{\sigma}x$ et le groupe des $\tilde{\sigma}$ est le groupe des matrices de permutation).

Sachant que toute matrice inversible s'écrit comme un produit d'une matrice de permutation, d'une matrice de determinant 1 et d'une matrice scalaire à terme diagonal >0, on voit que $T \in \mathcal{L}_+^\lambda(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}_-^\lambda(\Omega)$) si et seulement si T est homogène au sens ordinaire (Ω est un cône ouvert dans $\mathbb{R}^{n^2}$) de degré $n\lambda$, invariante à gauche par $SL(n,\mathbb{R})$ (i.e. invariante par les multiplications $x \longmapsto mx$, $m \in SL(n,\mathbb{R})$), et vérifie la condition d'homogénéité suivante relative à $\mathfrak{S}_n$:

$$T(\rho(\sigma)x) = T(x)$$

$$(\text{resp. } T(\rho(\sigma)x) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, T(x)) \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_n .$$

Dans le même ordre d'idées, la possibilité d'écrire toute matrice m sous la forme $m = u\,d\,v$, avec v et u orthogonales, et d diagonale à termes diagonaux > 0 donne le résultat suivant : $T \in \mathcal{L}_+^\lambda(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}_-^\lambda(\Omega)$) si seulement si T est homogène au sens ordinaire de degré λ séparément par rapport à chaque vecteur ligne, invariante à gauche par $SO(n,\mathbb{R})$, et vérifie la même condition d'homogénéité relative à $\mathfrak{S}_n$ déjà écrite.

Comme une distribution homogène dans un espace $\mathbb{R}^p$ est tempérée (L.Gårding, Bull. Soc. Math. France, 89, p. 321-428) , il en résulte :

<u>Lemme</u> : Les espaces $\mathcal{L}_\pm^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$, $\mathcal{R}_\pm^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ sont des espaces de distributions tempérées et de la transformation de Fourier : $T \longrightarrow \mathcal{F}T$, définie par:

$$\langle \mathcal{F}T , \varphi \rangle = \langle T , \mathcal{F}\varphi \rangle$$
$$\mathcal{F}\varphi(y) = \int \varphi(x)\, e^{-2i\pi \operatorname{tr.}(x\, {}^t y)}\, dx$$

est un isomorphisme de $\mathcal{L}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{L}_-^\lambda$, $\mathcal{R}_+^\lambda$, $\mathcal{R}_-^\lambda$) sur $\mathcal{L}_+^{-\lambda-n}(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{L}_-^{-\lambda-n}$, $\mathcal{R}_+^{-\lambda-n}$, $\mathcal{R}_-^{-\lambda-n}$) .

1.5. On va maintenant écrire des équations différentielles (équations d'Euler) qui caractérisent à peu près les distributions homogènes. Soit $x = (x_{ij})_{i,j}$ un élément général de $M_n(\mathbb{R})$; les équations (0) et (0') montrent qu'une distribution $T \in \mathcal{L}_+^\lambda(\Omega)$ vérifie les équations différentielles :

$$\sum_{\ell} x_{j\ell} \frac{\partial T}{\partial x_{i\ell}} = \lambda \, \delta^i_j \, T \qquad (1 \leqslant i,j \leqslant n)$$

(avec $\delta^i_i = 1$, $\delta^i_j = 0$ si $i \neq j$)

Réciproquement, soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant ce système différentiel (pour exprimer celà, on dira qu'elle est Euler-homogène à gauche de degré λ) ; il est clair qu'alors, en vertu de choses élémentaires concernant les invariants des groupes de transformations de Lie, on a : $T(mx) = (\text{dét. } m)^{\lambda} \; T(x)$ pour toute matrice m à déterminant positif, i. e. pour tout m dans la composante neutre de $GL(n,\mathbb{R})$ on peut alors écrire :

$$T(x) = (T(x) + T(\rho(\sigma)x)/2 + (T(x) - T(\rho(\sigma)x)/2 \, ,$$

où σ est telle que $\text{sgn}(\sigma) = -1$, et cette décomposition prouve que $T \in \mathcal{L}^{\lambda}_{+}(\Omega) \oplus \mathcal{L}^{\lambda}_{-}(\Omega)$.

Soit maintenant $\mathbb{1}_n$ la matrice unité $n \times n$, $\partial/\partial^t x$ la matrice dont l'élément d'indices (i,j) est la dérivation $\partial_{ji} = \partial/\partial x_{ji}$; la matrice $x.\,\partial/\partial^t x$ est alors une matrice à coefficients opérateurs différentiels, le coefficient d'indices (i,j) étant l'opérateur $\sum_{l} x_{il} \quad \partial/\partial \, x_{jl}$,

et on a :

<u>Lemme</u> I-1 $\quad T \in \mathcal{L}^{\lambda}_{+}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}^{\lambda}_{-}(\Omega)$) si et seulement si :

(i) $T(\rho(\sigma)\, x) = T(x)$

(resp. $T(\rho(\sigma)\, x) = \text{sgn}(\sigma)\, T(x)$) pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

(ii) $\left(x \dfrac{\partial}{\partial^t x} - \lambda . \mathbb{1}_n\right) T = 0$

On remarquera que les équations d'Euler relatives aux espaces $\mathcal{R}_{\pm}(\Omega)$ s'écrivent : $\left({}^t x \dfrac{\partial}{\partial x} - \lambda \cdot \mathbb{1}_n\right) T = 0$

1.6. Soit $\Delta = \text{dét.} \dfrac{\partial}{\partial x} = \text{dét.} \left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{ij}\right)$ l'opérateur différentiel de <u>Cayley</u>.

<u>Lemme</u> I-2

a) $\Delta_x (\varphi(mx)) = (\text{dét. } m) \, (\Delta \varphi)(mx)$

b) $\Delta : \mathcal{L}^{\lambda}_{+}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}^{\lambda-1}_{-}(\Omega)$

$\qquad \mathcal{L}^{\lambda}_{-}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}^{\lambda-1}_{+}(\Omega)$

Démonstration : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; on a : $\dfrac{\partial}{\partial x_{i\sigma_i}}(\varphi(mx)) = \sum_h m_{hi}(\partial_{h\sigma_i}\varphi)(mx)$,

$$\Delta_x(\varphi(mx)) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}\\ h_1,\dots,h_n}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, m_{h_1 1}\dots m_{h_n n}(\partial_{h_1\sigma_1}\dots\partial_{h_n\sigma_n}\varphi)(mx)$$

$$= \sum_{h_1,\dots,h_n} m_{h_1 1}\dots m_{h_n n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(\partial_{h_1\sigma_1}\dots\partial_{h_n\sigma_n}\varphi)(mx) .$$

Or $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\,\partial_{h_1\sigma_1}\;\partial_{h_n\sigma_n} = 0$ si $\{h_1,\dots,h_n\}$ n'est pas une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ et vaut sgn $(h)\Delta$ si $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n\end{pmatrix}$ est une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$. IL vient donc $\Delta_x(\varphi(mx) =$ $= \sum_{h\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(h)\, m_{h_1 1} m_{h_n n}(\Delta\varphi)(mx) = (\text{dét. } m)(\Delta\varphi)(mx)$; b) résulte de a) et de la définition des distributions homogènes.

Remarques : 1) On a aussi $\Delta : \mathcal{R}^\lambda_{\pm} \longrightarrow \mathcal{R}^{\lambda-1}_{\pm}$, parce que Δ est invariant par la transposition $x \longrightarrow {}^t x$, de sorte que $\Delta_x(\varphi(xm)) = \text{dét. } m\,(\Delta\varphi)(xm)$.
2) Evidemment, la multiplication par la fonction $x \longmapsto \text{dét. } x$ envoie $\mathcal{L}^\lambda_+(\Omega)$ resp. $\mathcal{L}^\lambda_-(\Omega)$) dans $\mathcal{L}^{\lambda+1}_-(\Omega)$ (resp. $\mathcal{L}^{\lambda+1}_+(\Omega)$).

1.7. Au moyen de cet opérateur Δ , qui n'est pas invariant par les multiplications $x \longmapsto mx$ ou $x \longmapsto xm$, on fabrique les opérateurs de Capelli :

$D_1 : T \longmapsto (\text{dét. } x)\,\Delta T$

$D_2 : T \longmapsto \Delta((\text{dét. } x)\, T)$

qui sont invariants à droite et à gauche. D'après ce qui a été dit plus haut, chacun de ces opérateurs opère "scalairement" dans chaque espace $\mathcal{L}^\lambda_{\pm}(\Omega)$, et en fait, on va déterminer explicitement l'action de D_1 et D_2 sur les distributions homogènes.

Soit donc $d_{ij} = \sum_\ell x_{i\ell}\dfrac{\partial}{\partial x_{j\ell}}$: c'est un opérateur différentiel invariant à droite sur $GL(n,\mathbb{R})$, qui provient de la manière que l'on devine de l'élément e_{ij} de la base canonique de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$; on peut s'attendre à ce que sur $GL(n,\mathbb{R})$, D_1 et D_2 s'écrivent comme "polynômes" non commutatifs) en les d_{ij} : ce sont les identités de Capelli qui fournissent les expressions de ces polynômes. Dans ces identités que l'on va écrire, on parle de déterminant pour des matrices à coefficients dans l'anneau non commutatif des opérateurs différentiels sur $M_n(\mathbb{R})$; comme indiqué dans [2], on entend par déterminant d'une telle matrice, l'opérateur différentiel obtenu en écrivant le développement classique du déterminant de telle sorte que les facteurs figurant dans chaque terme de ce développement s'écrivent de gauche à droite comme ils se trouvent dans le déterminant ; de manière plus précise, on définit le déterminant d'une matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})_{ij}$ de la manière suivante :

$$\text{dét } A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} B_{1i}$$

où les B_{i1} sont les cofacteurs habituels, et on fait une récurrence sur n . Ceci dit, soit $A_1 = (a_{ij})_{i,j}$ avec $a_{ij} = d_{n-i+1,n-j+1} + (n-i)\,\delta^i_j$, et

$A_2 = (a_{ij} + \delta^i_j)_{i,j}$

<u>Lemme</u> I-3 $D_i = \text{dét } A_i$ $(i = 1,2)$

<u>Démonstration</u> : La formule $D_1 = \text{dét } A_1$ n'est pas autre que l'identité "spéciale" de Capelli démontrée dans [2] (théorème 2.4. A), à ceci près qu'il faut la lire après avoir effectué l'automorphisme $x \longmapsto {}^t x$ (H. Weyl utilise au lieu des d_{ij} les opérateurs $\sum_{\ell} x_{\ell i} \frac{\partial}{\partial x_{\ell j}}$ qui sont leurs images par $x \longrightarrow {}^t x$).

La deuxième formule $D_2 = \text{dét } A_2$ peut être démontrée ainsi : f étant une fonction C^∞ , on calcule $D_1((\text{dét } x) f)$ en utilisant la première identité de Cappelli ; sachant que : $d_{ij}((\text{dét } x) f) = (\text{dét } x)(\delta^i_j f + d_{ij} f)$, on voit, en appliquant $\text{dét } A_1$ à la fonction $x \longmapsto (\text{dét } x) f(x)$, que $\text{dét } x$ passe à gauche de chaque a_{ij} à condition d'additionner à a_{ij} le terme correctif δ^i_j ; on a donc :

$$D_1((\text{dét } x) f) = (\text{dét } x)\,\Delta((\text{dét } x) f) = (\text{dét } x)\, D_2 f = (\text{dét } x)(\text{dét } A_2) f,$$

d'où résulte évidemment : $D_2 = \text{dét } A_2$.

1.8. Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution invariante à gauche par $SL(n,\mathbb{R})$ ou ce qui revient au même, telle que : $d_{ij} T = 0$ si $i \neq j$ et $d_{ii} T = d_{jj} T$ pour tous les couples (i,j) tels que $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Une remarque utile est la suivante : si T est une telle distribution, $S = d_{ii} T$ (pour n'importe quel i entre 1 et n) est invariante à gauche par $SL(n,\mathbb{R})$.

On a en effet (ce sont les relations de commutation dans $\mathfrak{gl}(n,R)$) :

$$d_{sr}\, d_{ii}\, T - d_{ii}\, d_{sr}\, T = (\delta^r_i\, d_{si} - \delta^s_i\, d_{ir})\, T \quad ,$$

et par suite :

$$d_{sr}\, S = \delta^r_s\, d_{ii}\, S$$

ce qui prouve que S est invariante.

En utilisant cette remarque, on voit aussitôt que pour toute distribution invariante T, on a :

$$D_1\, T = \prod_{i=1}^{n} (d_{ii} + i - 1)\, T$$

$$D_2\, T = \prod_{i=1}^{n} (d_{ii} + i)\, T\ ,$$

et en particulier :

<u>Lemme</u> I-4 : Si $T \in \mathcal{L}^{\lambda}_{\pm}\ (\Omega)$, on a :

$$D_1\, T = \prod_{i=1}^{n} (\lambda + i - 1)\, T$$

$$D_2\, T = \prod_{i=1}^{n} (\lambda + i)\, T$$

Ces formules montrent qu'une distribution homogène de degré $-p$, où p est un entier tel $0 \leqslant p \leqslant n - 1$ (resp. $1 \leqslant p \leqslant n$) est dans le noyau N_1 (resp. N_2) de D_1 (resp. D_2) opérant dans l'espace des distributions invariantes par $SL(n,\mathbb{R})$ dans Ω. En fait :

<u>Proposition</u> I-1 : $$N_1 = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n-1} \mathcal{L}^{-p}_{+}\ (\Omega) \oplus \mathcal{L}^{-p}_{-}\ (\Omega)$$

$$N_2 = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathcal{L}^{-p}_{+}\ (\Omega)\ \ \mathcal{L}^{-p}_{-}\ (\Omega)$$

<u>Démonstration</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'\ (\Omega)$ une distribution invariante telle que $D_1\, T =$ $= (d_{nn} + n - 1) \prod_{i=1}^{n-1} (d_{ii} + i - 1)\, T = 0$; alors $S = \prod_{i=1}^{n-1} (d_{ii} + i - 1)\, T$ est invariante, et $(d_{nn} + n - 1)\, S = 0$;

l'équation d'Euler prouve alors que $S \in \mathcal{L}^{-n+1}_{+}\ (\Omega) \oplus \mathcal{L}^{-n+1}_{+}\ (\Omega)$. On raisonne par récurrence : soit S une distribution invariante telle que :

$(d_{ii} + n - m + 1)\, S \in \sum_{1 \leqslant r \leqslant m - 2} \mathcal{L}^{-n+r}_{+} \oplus \mathcal{L}^{-n+r}_{-}$; comme sur chacun des espaces

$\mathcal{L}^{-n+r} (1 \leqslant r \leqslant m - 2)$, $d_{ii} + n - m + 1$ opère par multiplication par $r - m + 1$, on voit que S est une distribution homogène de degré $-n + m - 1$, modulo l'espace $\sum_{1 \leqslant r \leqslant m - 2} \mathcal{L}^{-n+r}_{+} \oplus \mathcal{L}^{-n+r}_{-}$. D'où le résultat.

2. Distributions bi-invariantes par $SL(n,\mathbb{R})$.

2.1. Dans chaque ouvert Ω invariant à gauche, la fonction $x \longrightarrow |\text{dét } x|^{\lambda}$ (resp. $x \longrightarrow \text{sgn}(\det x\ |\text{dét } x|^{\lambda})$ définit une distribution T_+^{λ} (resp. T_-^{λ}), au moins lorsque $\Re e(\lambda) > 0$, et cette distribution est un élément de $\mathcal{S}_+^{\lambda}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{S}_-^{\lambda}(\Omega)$)

Lemme I-5 : Au moins dans le demi-plan $\Re e(\lambda) > 1$ on a :

$$(I,3) \qquad \Delta T_+ = \frac{\Gamma(\lambda + n)}{\Gamma(\lambda)} T_-^{\lambda - 1}$$

$$(I,3') \qquad \Delta T_- = \frac{\Gamma(\lambda + n)}{\Gamma(\lambda)} T_+^{\lambda - 1}$$

Démonstration : On écrit : $\Delta T_+^{\lambda} = \Delta((\text{dét } x)\ T_-^{\lambda - 1}) = D_2\ T_-^{\lambda - 1} =$

$$= \prod_{1 \leq i \leq n} (\lambda - 1 + i)\ T_-^{\lambda - 1} = \lambda(\lambda + 1) \ldots (\lambda + n - 1)\ T_-^{\lambda - 1} .$$

Remarque : En fait, la même application de la deuxième identité de Capelli prouve que si $\Re e(\lambda)$ est assez grand pour que : $x \longmapsto (\text{dét } x)^{\lambda}$ soit suffisamment dérivable, on a :

$$\Delta (\text{dét } x)^{\lambda} = \lambda(\lambda + 1) .. (\lambda + n - 1)\ (\text{dét } x)^{\lambda - 1}$$

les dérivations du premier membre étant des dérivations usuelles. Cette formule est attribuée à Cayley dans [3] (Chap. VII , § 3), au moins lorsque λ est un entier > 0. En fait, plus généralement, on va écrire les composantes "radiales" des opérateurs Δ, D_1 et D_2, lesquels opérateurs sont tous trois invariants aussi bien à droite qu'à gauche par le groupe unimodulaire (on dira dans la suite bi-invariants par $SL(n,\mathbb{R})$).

Lemme I-6 : Soit $F : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^m (resp. une fonction polynome) invariante (à gauche, ou à droite, ou bi-invariante) par $SL(n,\mathbb{R})$; il existe une unique fonction C^m (resp. polynomiale) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in M_n(\mathbb{R})$: $F(x) = f(\text{dét } x)$. De plus, l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients constants invariants à gauche, (ou à droite) par $SL(n,\mathbb{R})$ est engendré par Δ.

Démonstration : f est tout simplement la restriction de F à la sous-variété U de $M_n(\mathbb{R})$, constituée par les matrices de la forme $x = \text{diag.}(1,1\ldots,1,u)$, cette sous-variété étant identifiée à $\mathbb{R}$. Le résultat concernant les opérateurs différentiels invariants provient de ce qu'une distribution tempérée est invariante si et seulement si sa transformée de Fourier est elle-même invariante.

2.2. Ceci étant, soit $F : x \longmapsto f$ (dét x) une fonction C^∞ invariante et D un opérateur différentiel invariant ; il existe un unique opérateur différentiel $\bar{D}$ tel que :

$$D\,F(x) = (\bar{D}\,f)\,(\text{dét } x) \quad (x \in M_n(\mathbb{R}))$$

et cet opérateur $\bar{D}_n$ est ce qu'on appelle la composante radiale de D .Compte-tenu de ce que $D_1\,F = \prod_{i=1} (d_{ii} + i - 1)\,F$, il vient aussitôt :

$$\bar{D}_1 = \prod_{p=1}^{n} (u \frac{d}{du} + p - 1) \,, \tag{I,4}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\bar{D}_1 = u \prod_{p=2}^{n} (u \frac{d}{du} + p) \frac{d}{du} \quad .$$

ce qui prouve :

$$\bar{\Delta} = \prod_{p=2}^{n} (u \frac{d}{du} + p) \frac{d}{du} \tag{I,5}$$

<u>Remarques</u> : Dans ces formules l'ordre des différents facteurs $u \frac{d}{du} + p$ est indifférent.

La formule donnant $\bar{\Delta}$ permet de retrouver la formule de Cayley : $\Delta u^\lambda = (\lambda + 1)..(\lambda + n - 1)\,u^{\lambda - 1}$.

On a de même :

$$\bar{D}_2 = \prod_{p=1}^{n} (u \frac{d}{du} + p) \tag{I,6}$$

2.3. On remarque maintenant que les fonctions $\lambda \longmapsto T_+^\lambda$ et $\lambda \longmapsto T_-^\lambda$, à valeurs dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$ sont analytiques dans le demi-plan $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$; les formules :

$$T_+^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + n + 1)} \,\Delta\, T_-^{\lambda + 1}$$

$$T_- = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + n + 1)} \,\Delta\, T_+^{\lambda + 1}$$

qui ont été démontrées plus haut, et qui sont vraies dans le demi-plan $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$, permettent d'effectuer le prolongement dans le plan complexe des fonctions $\lambda \longmapsto T_\pm^\lambda$. Plus précisément, on vérifie facilement que la formule suivante :

$$T_+^\lambda = \prod_{r=1}^{2p} \frac{\Gamma(\lambda + r)}{\Gamma(\lambda + n + r)} \,\Delta^{2p}\, T_+^{\lambda + 2p}$$

(resp.

$$T_-^\lambda = \prod_{1 \leqslant r \leqslant 2p} \frac{\Gamma(\lambda + r)}{\Gamma(\lambda + n + r)} \,\Delta^{2p}\, T_-^{\lambda + 2p} \quad)$$

définit le prolongement analytique de la fonction $\lambda \longmapsto T_+^\lambda$ (resp. $\lambda \longmapsto T_-^\lambda$) au demi-plan $\mathcal{R}e(\lambda) > -2p$ (p entier > 0) privé des points $\lambda = 1, -2, \ldots, -2p+1$ de plus, il est clair que les pôles éventuels des fonctions ainsi définies sont les entiers négatifs $\lambda < -1$, et on peut voir que chaque entier $-p (1 \leqslant p \leqslant n)$ est un pôle d'ordre au plus p, tandis que chaque entier $-p (p \geqslant n)$ est d'ordre au plus n. Ces estimations des ordres des pôles sont grossières : un calcul direct et immédiat prouve que l'éventuel résidu au point $\lambda = -1$ de la fonction $\lambda \longmapsto T_-^\lambda$ est nul :

$$\operatorname{Rés}_{\lambda = -1} T_-^\lambda = \frac{1}{\Gamma(n)} \Delta T_+^0 = 0 ,$$

de sorte que $\lambda \longmapsto T_-^\lambda$ est analytique dans le demi-plan $\mathcal{R}e(\lambda) > -2$.

2.4. D'après le théorème de l'unicité du prolongement analytique, pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ qui n'est pas un pôle de la fonction $\lambda \longmapsto T_+^\lambda$ (resp. $\lambda \longmapsto T_-^\lambda$) , $T_+^{\lambda_0} \in \mathcal{L}_+^{\lambda_0}(\Omega)$ (resp. $T_-^{\lambda_0} \in \mathcal{L}_-^{\lambda_0}(\Omega)$); par contre si λ_0 est un pôle, disons d'ordre q, du prolongement construit, c'est la distribution coefficient du terme en $(\lambda - \lambda_0)^{-q}$ dans le développement en série de Laurent de ce prolongement au voisinage de λ_0 qui est homogène ; par exemple, si S est la distribution coefficient du terme en $(\lambda - \lambda_0)^{-q+1}$ dans le développement en série Laurent de $\lambda \longmapsto T_+^\lambda$, on voit que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int S(x) \varphi(mx)\, dx = |\text{dét } m|^{\lambda_0 - n} \int S(x) \varphi(x)\, dx - |\text{dét } m|^{-\lambda_0 - n} \log|\text{dét } m| \int T_+^{\lambda_0}(x) \varphi(x)\, dx$$

où $T_+^{\lambda_0}$ est le coefficient de $(\lambda - \lambda_0)^{-q}$; la distribution S est dite "associée" à la distribution homogène $T_+^{\lambda_0}$ (c'est en tout cas la terminologie de [4] .) Toujours est-il que par ce procédé, on a construit pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ une distribution appartenant à $\mathcal{L}_+^\lambda(\Omega)$ et une distribution appartenant à $\mathcal{L}_-^\lambda(\Omega)$. D'ailleurs si on suppose que Ω est bi-invariante par $GL(n,\mathbb{R})$, le même raisonnement prouve que les distributions homogènes obtenues sont aussi bien homogènes à droite qu'à gauche, parce que les fonctions $x \longmapsto |\text{dét } x|^\lambda$ et $x \longmapsto \text{sgn}(\text{dét } x)\, |\text{dét } x|^\lambda$ sont elles-mêmes homogènes à droite et à gauche, de sorte que pour $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$, $T_+^\lambda \in \mathcal{L}_+^\lambda(\Omega) \cap \mathcal{R}_+^\lambda(\Omega) = \mathcal{H}_+^\lambda(\Omega)$ et de même $T_-^\lambda \in \mathcal{H}_-^\lambda(\Omega) = \mathcal{L}_-^\lambda(\Omega) \cap \mathcal{R}_-^\lambda(\Omega)$.

Remarquons maintenant qu'un ouvert Ω qui est bi-invariant est nécessairement l'un des $(n+1)$ ouverts $\Omega_k = \{x \ ; \ rg(x) = \text{rang de } x \geqslant n-k\}$ $(k = 0,1,\ldots, n)$; pour voir cela, on peut se rappeler qu'une orbite dans $M_n(\mathbb{R})$ pour le groupe des transformations de la forme : $x \longmapsto m\,x\,n$, m et n parcourant

$GL(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices ayant un rang donné). D'autres part, les espaces $\mathcal{H}_{+}^{\lambda}(\Omega_0)$ ont été **entièrement déterminés** plus haut, et on va voir que dans l'ouvert bi-invariant immédiatement plus grand, à savoir $\Omega_1 = \{x \; ; \; rg\,(x) \geqslant n-1\}$, l'étude de ces espaces est une conséquence facile de celle des distributions bi-invariantes (par $SL(n,\mathbb{R})$) dans Ω_1.

2.5. On fait donc opérer le groupe $SL(n,\mathbb{R}) \times SL(n,\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ en disant qu'un couple (y,z) de matrices unimodulaires opère par : $x \longmapsto y\,x\,z^{-1}$, et on vérifie facilement que les orbites relatives à cette action sont d'une part les hypersurfaces $\Sigma_u = \{x \; ; \; \text{dét}\; x = u\}$ $(u \neq 0)$ et d'autre part les n ensembles $R_p = \{x \,; \; rg(x) = p\}$ $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$. Dans l'ouvert Ω_1, (auquel on se restreint désormais), les orbites Σ_u $(u \neq 0)$ et $\Sigma_0 = R_{n-1}$ sont des hypersurfaces régulières parce que Ω_1 est exactement le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ où l'application $x \longmapsto \text{dét}\; x$ est de rang 1 ; on dispose alors sur chaque Σ_u d'une mesure positive ω_u telle que la distribution $\delta(\text{dét}\; x - u)$ ([4] chap. III) à support Σ_u qu'elle définit dans Ω_1 soit bi-invariante, et la donnée des ω_u $(u \in \mathbb{R})$ permet de définir une opération "intégrale sur les fibres" ; de manière précise, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, on pose :

$$(I,7) \qquad M\varphi(u) = \int_{\Sigma_u} \varphi(x)\, d\omega_u(x)$$

Alors, il est connu que $M : \varphi \longrightarrow M\varphi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (cf. par exemple, Harich-Chandra, "Invariant Distributions on Lie Algebras", Amer. J. Math. 86, 1964, p. 271-309; théorème 1). Il résulte de cela que pour toute distribution $\bar{T}$ sur $\mathbb{R}$, l'application : $\varphi \to \int \bar{T}(u) M\varphi(u)\, du$ définit dans Ω_1 une distribution $M^{*}\bar{T}$ (qu'il est naturel de noter aussi $\bar{T}$ (dét x)), et que M^{*} est une application linéaire continue injective de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$. On vérifie par ailleurs (en approchant $\bar{T}$ par des fonctions continues) que pour chaque $\bar{T}$, $M^{*}\bar{T}$ est bi-invariante ; en fait, chaque distribution T bi-invariante dans Ω_1 est de la forme $M^{*}\bar{T}$; ceci peut-être démontré par deux méthodes distinctes :

a) par une méthode "infinitésimale", qui est celle utilisée dans des situations analogues par P.D. Méthée, L. Gårding et ses élèves, et dont le principe est le suivant : on écrit les champs de vecteurs provenant de l'algèbre de Lie de $SL(n,\mathbb{R}) \times SL(n,\mathbb{R})$ (une distribution $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{R}))$ est bi-invariante si et seulement si elle est annulée par ces champs de vecteurs) et on vérifie que dans Ω_1 le rang de cette algèbre de Lie de champs de vecteurs est constant et égal à $n^2 - 1$; on démontre alors le résultat localement en utilisant le théorème de

Frobenius et on "récolle les morceaux", en remarquant que $x \longmapsto \text{dét}\, x$ est continue ouverte de Ω_1 sur $\mathbb{R}$.

b) par une méthode globale, inspirée des techniques utilisées par Harish-Chandra, et exposée par Helgason dans [5] (théorème 1 - 2) ; la situation générale est la suivante : soit V (ici $V = \Omega_1$) une variété différentiable, G un groupe de Lie (unimodulaire) opérant dans V (ici $G = SL(n,\mathbb{R}) \times SL(n,\mathbb{R})$) , et U une sous-variété de V transversale aux orbites de G , i.e. telle que : $V_u = U_u \oplus (G.u)_u$ (W_u étant l'espace tangent en u à la variété W), pour tout $u \in U$ (ici $U = \{ x = \text{diag}\,(1,1,1,u) ; u \in \mathbb{R}\}$ a déjà apparu plus haut) ; dans cette situation une distribution $T \in \mathcal{D}'(V)$ se remonte en une distribution sur $G \times U$ au moyen de l'application $(g,u) \longmapsto g.u$, qui est de rang maximum et surjective sur V , et si T était G-invariante, la distribution remontée sur $G \times U$ ne dépend que des "variables provenant de U" , d'où une distribution sur U . De façon plus précise, à toute distribution G-invariante dans Ω_1 , on associe une unique distribution $\bar{T}$ sur U , telle que pour toute $\phi \in \mathcal{D}(G \times U)$:

$$(I,8) \qquad \int_R \bar{T}(u)\, du \int_G \phi(g,u)\, dg = \int_{\Omega_1} T(x)\, N\phi(x)\, dx$$

où $N\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ est déterminé de façon unique par la relation :

$$(I,9) \qquad \int_{G \times \mathbb{R}} \psi(g.u)\, \phi(g,u)\, dg\, du = \int_{\Omega_1} \psi(x)\, N\phi(x)\, dx \quad , \quad (\psi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

et dg est une mesure de Haar de G. De plus, toujours dans cette situation, tout opérateur différentiel D sur V donne naissance à un opérateur différentiel $\bar{D}$ sur U , qui est sa "composante radiale" et qui a la propriété suivante :

$$\overline{D\,T} = \bar{D}\,\bar{T}$$

pour toute distribution T , G-invariante dans V .

2.6. Ceci étant, il rest à voir que la distribution $\bar{T}$ ainsi définie est telle que $M^* \bar{T} = T$, i.e. telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$:

$$\int T(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{T}(u)\, M\varphi(u)\, du$$

Pour voir cela, on peut utiliser le lemme suivant :

Lemme I-7 : Soit $\phi \in \mathcal{D}(G \times U)$ et $u \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_G \phi(g,u)\, dg = (M_\circ N\, \phi)(u)$$

Démonstration : Il est immédiat que $M_\circ N\phi$ est l'unique fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(u)\, (M_\circ N\, \phi)(u)\, du = \int_{\Omega_1} \theta(\text{dét } x)\, N\, \phi(x)\, dx ,$$

pour toute fonction $\theta\, C^\infty$ sur $\mathbb{R}$; Or, d'après (9), qui est encore vraie même lorsque ψ n'est pas à support compact :

$$\int \theta(\text{dét } x)\, N\phi\ (x)\, dx = \int \theta(\text{dét } g.u)\ \phi\ (g,u)\, dg\, du$$
$$= \int \theta(u)\ \phi\ (g,u)\, dg\, du ,$$

car $g.u$ est un produit m diag $(1,\ldots,1,u)n$, où m et n sont unimodulaires. Dès lors, on a :

$$\int \overline{T}\ (u)\, du \int \phi\, (g,u)\, dg = \int \overline{T}\ (u)\ (M_\circ N\ \phi)\ (u)\ du$$
$$= \int \overline{T}\ (x)\ N\ \phi(x)\ dx \quad ,$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(G \times U)$. Comme N applique $\mathcal{D}(G \times U)$ sur $\mathcal{D}(\Omega_1)$, on a bien : $T = M^* \overline{T}$.

En résumé on a :

Proposition I-2 : M^* est un isomorphisme (d'ailleurs vectoriel topologique) de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sur l'espace des distributions bi-invariantes dans Ω_1 .

3. Distributions homogènes sur l'ouvert des matrices de rang $\geqslant n - 1$.

3.1. Soit donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ une distribution bi-invariante et $\overline{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ "sa trace" sur $\mathbb{R}$:

$$T = M^* \overline{T} = \overline{T}\ (\text{dét } x)$$

Un calcul de composante radiale, ou ce qui revient au même, la formule de dérivation des fonctions composées [6], formule (IX,5,3)) montre que :

$\left(\sum_{i,j} x_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_{ij}} - n\,\lambda \right) T = n\, M^* \left(u \dfrac{d\overline{T}}{du} - \lambda\, \overline{T}\right)$, de sorte que T est homogène au sens ordinaire de degré $n\lambda$ si et seulement si $\overline{T}$ est homogène de degré λ .

D'autre part, on vérifie facilement que pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$:

$$\int_{\Sigma_u} \varphi(\tilde{\sigma}.x)\, d\omega_u(x) = M\varphi\ (\mathrm{sgn}\,(\sigma)\, u) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

Il en résulte que $T \in \mathcal{H}_+^{\lambda}(\Omega_1)$ (resp $\mathcal{H}_-^{\lambda}(\Omega_1)$) si et seulement si $\bar{T}$ est homogène de degré λ et paire (resp. impaire). Sachant ce que l'on sait sur ces distributions sur $\mathbb{R}$ ([4], chap.I) on peut énoncer :

<u>Proposition</u> I-3 : Pour chaque λ, l'espace $\mathcal{H}_+(\Omega_1)$ (resp. $\mathcal{H}_-(\Omega_1)$) est de dimension 1 . Soit $T^{\lambda}_{+,1}$ (resp. $T^{\lambda}_{-,1}$) la distribution sur Ω_1 définie pour $\Re e\,(\lambda) > 0$ par la fonction $\lambda \longmapsto |\text{dét}\ x|^{\lambda}$ (resp. $\lambda \longmapsto \mathrm{sgn}(\text{dét}\ x)\ |\text{dét}\ x|^{\lambda}$) ; la fonction $\lambda \longmapsto T^{\lambda}_{+,1}$ (resp. $\lambda \longmapsto T^{\lambda}_{-,1}$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe ayant pour pôles (simples) les entiers impairs $\leqslant -1$ (resp. pairs $\leqslant -2$) , de sorte que

$$\lambda \longmapsto \frac{T^{\lambda}_{+,1}}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} \quad (\text{resp } \lambda \longmapsto \frac{T^{\lambda}_{-,1}}{\Gamma(\frac{\lambda+2}{2})} \quad \text{se prolonge en une fonction entière.}$$

Ceci permet de définir sans ambiguité dans Ω_1 les distributions

$\mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{(\text{dét}\ x)^{2p}} \in \mathcal{H}_+^{-2p}(\Omega_1)$, $\mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{(\text{dét}\ x)^{2p+1}} \in \mathcal{H}_-^{-2p-1}(\Omega_1)$ (où le symbole Pf. se lit pseudo-fonction) et les distributions $\delta^{(2p-2)}(\text{dét}\ x) \in \mathcal{H}_+^{-2p+1}(\Omega_1)$, $\delta^{(2p-1)}(\text{dét}\ x) \in \mathcal{H}_-^{-2p}(\Omega_1)$ (p entier $\geqslant 1$) dont il sera facile de voir plus loin qu'aucune d'entres elles n'est prolongeable à $M_n(\mathbb{R})$ en une distribution homogène, sauf $\delta(\text{dét}\ x)$; pour voir que $\delta(\text{dét}\ x)$ est prolongeable en une distribution homogène (nécessairement de degré - 1) , il suffit de remarquer que $\lambda \longmapsto T^{\lambda}_+$ a un pôle simple au point $\lambda = -1$, que le résidu en ce pôle vaut $\dfrac{1}{\Gamma(n)}$ $\Delta\, T^{\circ}_-$ (T°_- est la distribution définie par la fonction $x \longmapsto \mathrm{sgn}\,(\text{dét}\ x)$) , et enfin que la restriction à Ω_1 de ce résidu est la distribution $2\,M^{*}\delta =$ $= 2\,\delta\,(\text{dét}\ x)$.

3.2. D'autre part, on constate que toute distribution T bi-invariante dans Ω_1 telle que $D_1\,T = 0$ (resp $D_2\,T = 0$) s'écrit de manière unique sous la forme

$$T = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (\alpha_p\ \mathrm{Pf}\ \frac{1}{(\text{dét}\ x)p} + \beta_p\ \delta^{(p-1)}(\text{dét}\ x)) + \alpha_o + \beta_o\ \mathrm{sgn}\,(\text{dét}\ x)$$

$$(\text{resp. } T = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} (\alpha_p\ \mathrm{Pf}\,\frac{1}{(\text{dét}\ x)^p} + \beta_p\ \delta^{(p-1)}(\text{dét}\ x))$$

Ces résultats ne sont pas inattendus d'une part parce que les opérateurs $\bar{D}_1$ et $\bar{D}_2$ sont des opérateurs d'ordre n du type de Fuchs à l'origine sur $\mathbb{R}$ et P.D. Méthée (Comm. Math. Helv. 33,(1959), p. 38-46) a démontré que l'espace des distributions solutions de tels opérateurs est toujours de dimension $2n$, et d'autre partparce qu'on démontrera plus bas (cf. lemme III-5) que la proportion I-1 se généralise aux distributions bi-invariantes dans Ω . Signalons enfin qu'une distribution T bi-invariante dans Ω_1 telle que $\Delta T = 0$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$T = \alpha_0 + \sum_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (\alpha_p \operatorname{Pf.} \frac{1}{(\text{dét } x)^p} + \beta_p \delta^{(p-1)} (\text{dét } x)) , (\alpha_i , \beta_i \in \mathbb{C}) .$$

3.3 Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(R))$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e (\lambda) > 0$; alors, tout comme dans Ω_1 :

(I,10) $$\int_{M_n(\mathbb{R})} |\text{dét } x|^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^\lambda M\varphi(u)\, du$$

(I,11) $$\int_{M_n(\mathbb{R})} \operatorname{sgn} (\text{dét } x) |\text{dét } x|^\lambda \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(u) |u|^\lambda M\varphi(u)\, du$$

Ce qui diffère de la situation précédente, c'est que $M\varphi$ n'est plus une fonction C^∞ à l'origine dès que le support de φ contient des points singuliers de la variété des matrices de déterminant nul, c'est-à-dire des matrices de rang $\leqslant n-2$. En fait, les fonctions $M\varphi$ ont un développement asymptotique près de zéro d'un certain type, et la donnée de ce développement donne les pôles (et les ordres en ces pôles) des prolongement à $\mathbb{C}$ des fonctions $\lambda \longmapsto T_-^\lambda$; supposons par exemple $n = 2$; dans ce cas, la fonction $x \longmapsto \text{dét } x$ est une forme quadratique non dégénérée sur $M_2(\mathbb{R})$ et on constate (cf. chapitre 5) qu'il revient au même de dire qu'une distribution sur $M_2(\mathbb{R})$ est bi-invariante par $SL(2,\mathbb{R})$ ou qu'elle est invariante par le groupe orthogonal de cette forme quadratique ; on peut alors utiliser les résultats de Tengstrand ([7]) et démontrer :

<u>Proposition</u> I-4 ($n = 2$) : la fonction $\lambda \longmapsto T_+^\lambda$ (resp. $\lambda \longmapsto T_-^\lambda$) se prolonge au plan complexe en une fonction méromorphe ayant pour pôles simples les entiers $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant -2$) , de sorte que la fonction

$$\lambda \longmapsto \frac{T_+^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})\Gamma(\frac{\lambda+2}{2})} \quad (\text{resp. } \lambda \longmapsto \frac{T_-^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+2}{2})\Gamma(\frac{\lambda+3}{2})})$$

se prolonge en une fonction entière. De plus, pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, les espaces $\mathcal{H}_+^\lambda (M_2(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{H}_-^\lambda (M_2(\mathbb{R}))$ sont de dimension 1 .

<u>Démonstration</u> : a) D'après [7], l'espace des fonctions $M\varphi$, φ décrivant $\mathcal{D}(M_2(\mathbb{R}))$ est constitué par les fonctions de la forme : $u \longrightarrow \psi_1(u) + Y(u)\, u\, \psi_2(u)$ avec $\psi_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($i = 1,2$) et $Y(u) = 1$ si $u \geqslant 0$, $Y(u) = 0$ si $u < 0$. Cela suffit pour prouver la premièrè partie de la proposition.

b) Si T_1 et T_2 sont deux éléments de $\mathcal{H}_+$ $(M_2(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{H}_-^\lambda$ $(M_2(\mathbb{R}))$, la proposition 3 montre qu'il existe une combinaison linéaire non triviale $c_1 T_1 + c_2 T_2$ qui soit à support dans le complémentaire de Ω_1 , i.e. dont le support est $\{0\}$. Il résulte alors du lemme 6 que si λ n'est pas l'un des entiers $-2p$ (resp. $-2p-1$) (p entier $\geqslant 1$) , $c_1 T_1 + c_2 T_2 = 0$ de sorte que dans ce cas $\mathcal{H}_+^\lambda(M_2(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{H}_-^\lambda(M_2(\mathbb{R}))$ est de dimension 1 . On a le même résultat même si λ est l'un des entiers "litigieux", parce que la transformation de Fourier transforme $\mathcal{H}_+^{-2p}$ (resp. $\mathcal{H}_-^{-2p-1}$) en $\mathcal{H}_+^{2p-2}$ (resp. $\mathcal{H}_-^{2p-1}$) .

3.4. Il est clair que la démonstration b) concerne la situation plus générale des distributions homogènes et invariantes par le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée sur un espace numérique $\mathbb{R}^n$. Voici un cas où la forme quadratique est définie positive :

Soit $\mathbb{H}$ le corps des quaternions $x = x_o 1_{\mathbb{H}} + x_1 u + x_2 v + x_3 w$ ($x_i \in \mathbb{R}$, $uv = -vu = w$) , $x \longmapsto N(x) = \sum_i x_i^2$ la fonction norme sur $\mathbb{H}$, et $\mathbb{H}^*$ le groupe des unités de $\mathbb{H}$; pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}^\lambda$ $(\mathbb{H})$ (resp. $\mathcal{R}^\lambda(\mathbb{H})$) est l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'$ $(\mathbb{H})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{H}^*$:

$$T(xy) = (N(x))^\lambda \; T(y)$$

$$(\text{resp. } T(yx) = (N(x))^\lambda \; T(y))$$

On est dans la situation envisagée plus haut : une distribution $T \in \mathcal{L}^\lambda(\Omega) \cap \mathcal{R}^\lambda(\Omega)$ est invariante par le groupe des transformations de la forme $x \longrightarrow y\,x\,z$, où y et z sont tels que $N(yz) = 1$, il est connu que ce groupe est la composante neutre du groupe orthogonal de N(cf. par exemple le chapitre 5 plus bas, où un résultat de ce type est démontré pour les algèbres simples ; on a donc ici aussi $\dim. \mathcal{L}^\lambda \cap \mathcal{R}^\lambda = 1$, mais en réalité on a plus (grâce au fait que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$) :

<u>Proposition I-5</u> : Si $\mathcal{R}e\,(\lambda) > 0$, la fonction $y \longmapsto (N(y))^\lambda$ définit une distribution $T^\lambda \in \mathcal{L}^\lambda(\mathbb{H}) \cap \mathcal{R}^\lambda$ $(\mathbb{H})$ et la fonction $\lambda \longmapsto \mathcal{E}^\lambda = \pi^\lambda \dfrac{T^\lambda}{\Gamma(\lambda+2)}$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction entière ; de plus :

$$\mathcal{F}\,\mathcal{E}^\lambda = \mathcal{E}^{-\lambda-2}$$

Enfin, pour tout $\lambda \in C$, $\mathcal{L}^\lambda(\mathbb{H}) = \mathcal{R}^\lambda(\mathbb{H})$ est de dimension 1 .

Une démonstration de ces résultats est donnée en détail dans [8] ; d'ailleurs une telle démonstration s'étend au cas d'une algèbre de composition sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire mis à part le cas du corps des complexes, au cas du corps (non associatif) des octaves de Cayley.

CHAPITRE II

En utilisant un théorème de Glaeser, on détermine la structure de l'espace des distributions sur un $\mathbb{R}^q$ qui sont invariantes par l'action d'un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^q)$, et on applique ce résultat général aux espaces de distributions invariantes et bi-invariantes par le groupe orthogonal ; cela permet de ramener l'étude des espaces $\mathcal{H}_-^\lambda$ à celle des espaces $\mathcal{H}_+^\lambda$. Ceci étant, sachant que chaque $s \in \mathbb{C}^n$ définit un caractère α_s du groupe B_o des matrices triangulaires supérieures à termes diagonaux > 0, on étudie les distributions invariantes à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ qui se transforment à droite par B_o suivant α_s ; on montre que pour chaque s, l'espace des telles distributions est de dimension 1 et on met en évidence un élément particulier ($\neq 0$) de cet espace qui s'obtient par prolongement analytique à partir de la distribution $\frac{\alpha_s}{\gamma(s)}$ où α_s (pour s dans un ouvert convenable de $\mathbb{C}^n$) est une fonction continue sur $M_n(\mathbb{R})$ invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$, et $\gamma(s)$ est un produit de fonctions Γ classiques ; on calcule les transformées de Fourier de ces distributions. Il résulte de cela que chaque espace $\mathcal{H}_+^\lambda$, $\mathcal{H}_-^\lambda$ est de dimension 1 et on écrit les formules de Fourier correspondantes. L'introduction de ces distributions permet d'autre part de définir dans $M_n(\mathbb{R})$ des distributions associées aux fonctions sphériques de $GL(n,\mathbb{R})$ et d'écrire leurs équations fonctionnelles en calculant leurs transformées de Fourier.

1. Distributions bi-invariantes par le groupe orthogonal.

1.1. On s'intéresse aux fonctions polynomes, fonctions C^∞, distributions f sur $M_n(\mathbb{R})$ qui sont bi-invariantes par le groupe orthogonal, c'est-à-dire telles que pour tout couple (u,v) de matrices orthogonales : $f(uxv) = f(x)$

La formule suivante :

$$\text{(II,1)} \qquad \text{dét}(\xi \,.1_n - {}^t xx) = \sum_{0 \leq r \leq n} (-1)^r\, q_r(x)\, \xi^{n-r}$$

où ξ est une "indéterminée", définit sur $M_n(\mathbb{R})$ des fonctions polynomes bi-invariantes $q_o = 1, q_1, \ldots, q_n$, et on a :

<u>Lemme II.1</u> : Soit f une fonction polynome bi-invariante ; alors il existe une unique fonction polynome g sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x \in M_n(\mathbb{R})$, on ait : $f(x) = g(q_1(x), \ldots, q_n(x))$.

<u>Démonstration</u> : La restriction $\overline{f}$ de f au sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ constitué par les matrices diagonales est une fonction polynome de n variables qui est paire par rapport à chaque variable et invariante par le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations des n variables dont elle dépend. Le théorème classique concernant les polynomes symétriques prouve alors qu'il existe une unique fonction polynome g sur $\mathbb{R}^n$ telle que : $\overline{f}(t_1, \ldots, t_n) = g(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \ldots, \sigma_n(t))$, pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, les $\sigma_i(t)$ étant les fonctions symétriques élémentaires des nombres $t_1^2, \ldots, t_n^2$:

$$\text{(II,2)} \qquad \prod_{1 \leq i \leq n} (\xi - t_i^2) = \sum_{0 \leq r \leq n} (-1)^r \sigma_r(t) \xi^{n-r}$$

Il en résulte que si $x = u \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n) v$, $u,v \in O(n,\mathbb{R})$ on a : $f(x) = g(q_1(x), \ldots, q_n(x))$, et le lemme résulte de ce que toute matrice x est de cette forme.

Soit $\mathcal{W}$ le groupe engendré par $\mathfrak{S}_n$ et par les symétries par rapport aux hyperplans d'équations $t_i = 0$ $(i \leq i \leq n)$; $\mathcal{W}$ est fini (le groupe de ces symétries est normalisé par $\mathfrak{S}_n$; $\mathcal{W}$ est le groupe de Weyl des algèbres de Lie simples de type B_n et C_n). Le lemme II-1 dit en particulier que $f \mapsto \overline{f}$ est un isomorphisme de l'anneau des fonctions polynomes bi-invariantes sur $M_n(\mathbb{R})$ sur l'anneau des fonctions polynomes $\mathcal{W}$-invariantes sur $\mathbb{R}^n$.

Appelons Q l'image de $M_n(\mathbb{R})$ par l'application : $x \longmapsto (q_1(x), \ldots, q_n(x))$; d'après le théorème de Seïdenberg-Tarski (A. Seidenberg, "A new decision method for elementary algebra", Ann. of Math. (2) 60, 1954, p. 365), Q est un sous ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$, et il est clair que Q est aussi l'ensemble des $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que l'équation en ξ : $\sum_{0 \leq r \leq n} (-1)^r q_r \xi^{n-r} = 0$ (où $q_0 = 1$), ait toutes ses racines réelles et ≥ 0. De plus, il est évident que Q s'identifie à l'ensemble quotient de $\mathbb{R}^n$ par $\mathcal{W}$, mais ce qui est aussi vrai, c'est qu'il s'identifie à l'espace quotient de $M_n(\mathbb{R})$ par le groupe des isomorphismes de la forme $x \longmapsto uxv$, u et v parcourant $O(n,\mathbb{R})$; (en fait, si $q_i(x) = q_i(y)$ $(1 \leq i \leq n)$ les 2 matrices symétriques (donc diagonalisables) ${}^t xx$ et ${}^t yy$ ont même spectre et par suite, il existe $v \in O(n,\mathbb{R})$ telle que : ${}^t v\, {}^t x\, xv = {}^t(xv)\, xv = {}^t yy$, et il est connu qu'alors il existe $u \in O(n,\mathbb{R})$ telle que : $y = u\, x\, v$).

1.2. En réalité, on peut dire à peu prés la même chose dans la situation où on considère un sous-groupe compact K d'un $GL(\mathbb{R}^q)$ $(q \geq 2)$ et où on appelle $(q_1, \ldots, q_n)$ un système minimal de générateurs de l'anneau des fonctions polynomes, (à valeurs réelles sur R^q), qui sont K-invariantes ; alors n'importe quelle orbite de K est l'ensemble des zéros réels de l'ensemble des polynomes K-invariants qui s'annulent dessus ; ce fait est sûrement connu, et en tout cas peut être démontré ainsi : soit $x_1 \notin K.x_o$, f une fonction continue réelle valant 1 sur $K.x_1$ et zéro sur $K.x_o$, P une fonction polynome réelle sur R^q telle que pour tout x dans un compact contenant $K.x_1$ et $K.x_o$, on ait : $|P(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant donné ; si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, la fonction polynome $x \mapsto \int_K P(kx)dk - \int_K P(kx_o)dk$, où dk est la mesure de Haar normalisée de K , est nulle sur $K.x_o$ et non nulle en x_1 . Il résulte en particulier de cela que $K.x_o = \{x \in \mathbb{R}^q \ ; \ q_i(x) = q_i(x_o) \ , \ i = 1, 2 ,..., n\}$ et que l'image de $\mathbb{R}^q$ par l'application $x \mapsto (q_1(x) ,..., q_n(x))$ s'identifie à l'ensemble des orbites de K dans $\mathbb{R}^q$. On a aussi :

<u>Lemme</u> II-2 : L'application $\theta : x \mapsto (q_1(x) ,..., q_n(x))$ est une application propre.

<u>Démonstration</u> : C'est clair si $K \subset O(q,\mathbb{R})$ parce qu'alors la fonction polynome $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_q^2$ étant K-invariante, est bornée sur chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}^q$ où chacune des fonctions q_i $(1 \leq i \leq n)$ est bornée, de sorte que l'image réciproque par θ de toute partie bornée de $\mathbb{R}^n$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^q$. En général K est conjugué d'un sous-groupe $H = g^{-1} K g$ de $O(q,\mathbb{R})$ $(g \in GL(\mathbb{R}^q))$, et il est immédiat que les fonctions polynomes $x \mapsto q_i(gx)$ $(1 \leq i \leq n)$ engendrent l'anneau des fonctions polynomes H-invariantes ; dès lors, un sous ensemble de $\mathbb{R}^q$ où chacune des fonctions q_i $(1 \leq i \leq n)$ est bornée, est l'image par g d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^q$ où chacune des fonctions $x \mapsto q_i(gx)$ $(1 \leq i \leq n)$ est bornée, et comme $H \subset O(q,\mathbb{R})$ on a le résultat voulu.

1.3. Ceci étant, supposons que l'anneau des fonctions polynomes K-invariantes sur $\mathbb{R}^q$ soit un anneau de polynomes (on entend par là que les fonctions $q_1 ,..., q_n$ sont algébriquement indépendantes, ce qui implique d'ailleurs $n \leq q$) ; alors l'application θ a les propriétés suivantes :

a) θ est analytique réelle de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^n$

b) Il existe un ouvert dense de $\mathbb{R}^q$ où θ est une submersion (une démonstration en est donnée en 7. plus bas).

c) θ est propre.

Dans ces conditions (et en fait sous des hypothèses un peu plus générales) un théorème de G. Glaeser ([9]), (voir le paragraphe 7 de ce chapitre), affirme que l'application linéaire continue $\theta_* : \varphi \mapsto \varphi \circ \theta$ de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q)$ est à **image fermée**. Soit alors $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^q)$ une fonction K-invariante ; comme elle peut être approchée dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q)$ par une suite de fonctions polynomes que l'on peut supposer K-invariantes (si elles ne l'étaient pas, une intégration sur K les rendrait invariantes), et comme l'image de θ_* contient toutes les fonctions polynomes K-invariantes, une telle fonction f est dans l'image de θ_* ; (c'est exactement là le raisonnement que fait Glaeser dans [9] où K est le groupe $\mathfrak{S}_q$ des permutations des coordonnées dans $\mathbb{R}^q$, pour obtenir ce qu'il appelle le théorème de Newton différentiable) ; on peut dire que θ_* induit un isomorphisme $\overline{\theta}_*$, d'espaces de Fréchet, de l'espace des restrictions à $Q = \theta(\mathbb{R}^q)$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ sur l'espace des fonctions C^∞ K-invariantes sur $\mathbb{R}^q$, et remarquer qu'il revient au même, dans cette situation, de dire que θ_* est à image fermée ou de dire que $\theta_*(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$ est l'espace des fonctions C^∞ K-invariantes sur $\mathbb{R}^q$.

Soit maintenant $\mathcal{E}(Q)$ l'espace de Fréchet des restrictions à Q des fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, L un compact de Q et $\mathcal{D}_L(Q)$ le sous espace fermé de $\mathcal{E}(Q)$ constitué par les fonctions nulles en dehors de L ; l'espace $\mathcal{D}(Q)$ est obtenu comme d'habitude en prenant une suite exhaustive $(L_r)_r$ de compacts de Q et en construisant la limite inductive des espaces $\mathcal{D}_{L_r}(Q)$, et l'espace $\mathcal{D}'(Q)$ des distributions sur Q est par définition le dual de $\mathcal{D}(Q)$. Ceci étant, on voit que $\overline{\theta}_*$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_L(Q)$ sur l'espace des fonctions K-invariantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans le compact $\theta^{-1}(L)$, et par conséquent il y a isomorphisme vectoriel topologique entre $\mathcal{D}(Q)$ et l'espace des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^q)$ qui sont K-invariantes. Comme c'est un fait général que l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^q$ qui sont K-invariantes "est" le dual de ce dernier espace, lorsque celui-ci est munie de la topologie induite par $\mathcal{D}(\mathbb{R}^q)$, il en résulte aussi un isomorphisme entre l'espace des distributions K-invariantes sur $\mathbb{R}^q$ et l'espace des distributions sur Q. On a donc :

<u>Proposition</u> II-1 : Soit $K \subset GL(\mathbb{R}^q)$ un groupe compact linéaire, $q_1, \ldots, q_n$ un système de générateurs algébriquement indépendants de l'anneau des fonctions polynomes K-invariantes sur $\mathbb{R}^q$, et $\theta : x \mapsto (q_1(x), \ldots, q_n(x))$: alors l'image Q de θ est un ensemble semi-algébrique fermé et $\theta_* : \varphi \to \varphi \circ \theta$ ($\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) induit un isomorphisme vectoriel topologique entre l'espace des fonctions sur Q qui sont des restrictions à Q de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ (resp. et à support compact dans Q) et l'espace des fonctions C^∞ K-invariantes (resp. et à support compact) sur $\mathbb{R}^q$. Par dualité, il en résulte que l'espace des distributions K-invariantes sur $\mathbb{R}^q$ est isomorphe à l'espace des distributions sur Q.

<u>Remarques</u> : 1) l'hypothèse que les générateurs $q_1, \ldots, q_n$ de l'anneau des invariants sont algébriquement indépendants n'est évidemment pas réalisée dans tous les cas ; une condition suffisante est que K soit engendré par des symétries : les démonstrations de C. Chevalley ("Invariants of finite groups generated by reflections" Amer. J. Math. 77, 1955, p. 778-782) restent valable si on

remplace l'hypothèse que le groupe d'automorphismes considéré est fini par celle que ce groupe est compact, mais bien sûr, si ce groupe n'est pas fini, le nombre n des générateurs algébriquement indépendants de l'anneau des invariants ne peut pas être égal à la dimension de l'espace vectoriel où opère le groupe. On a en effet :

Lemme II-3 : Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n, et $G \subset GL(V)$ un groupe d'automorphismes dont l'anneau des invariants admet un système de n générateurs $q_1, \dots, q_n$ algébriquement indépendants ; alors G est fini et engendré par des symétries.

Démonstration : On passe dans le corps des fractions de $R[x_1, \dots, x_n]$ et on remarque que ce corps des fractions est une extension algébrique de degré fini du corps des fractions de l'anneau des invariants ; il en résulte que G s'injecte dans le groupe de Galois de cette extension, et G est donc fini. Il est alors connu que G est engendré par des symétries (cf. R. Steinberg, Lectures on Chevalley Groups, Yale University, 1967).

Ceci étant, la condition que K est engendré par des symétries n'est évidemment pas nécessaire ; les fonctions polynomes sur $\mathbb{R}^n$ qui sont invariantes par l'action naturelle de $SO(n,\mathbb{R})$ (lequel ne contient aucune symétrie) sont des polynomes en la fonction $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$.

2) Q étant un ensemble fermé, on sait qu'on entend par fonction C^∞ sur Q toute fonction C^∞ dans l'intérieur de Q dont toutes les dérivées, à priori définies dans cet intérieur, se prolongent à Q en des fonctions continues. En général, il n'est pas vrai qu'une telle fonction soit un élément de l'espace $\mathcal{E}(Q)$ envisagé plus haut, i.e. qu'elle se prolonge à $\mathbb{R}^n$ en une fonction C^∞ ; cela dépend de propriétés de régularité pour Q (théorèmes de prolongement de Whitney) qui sont réalisées en particulier lorsque Q est un ensemble convexe, et lorsqu'il en est ainsi, l'espace $\mathcal{D}'(Q)$ des distributions sur Q s'identifie à l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$ à support dans Q ([10]).

1.4. On peut maintenant appliquer la proposition II-1 au cas envisagé plus haut : K est le groupe $\mathcal{W}$ engendré par $\mathfrak{S}_n$ et les symétries par rapport aux hyperplans d'équations $t_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, l'anneau des fonctions polynomes sur $\mathbb{R}^n$ qui sont $\mathcal{W}$-invariantes est engendré par les fonctions $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ définies par la formule (II,2) et Q est une fois pour toutes l'image de $\mathbb{R}^n$ par l'application $\bar{\theta} : (t_1, \dots, t_n) \to (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$, ou encore l'image de $M_n(\mathbb{R})$ par l'application $\theta : (x_1, \dots, x_n) \to (q_1(x), \dots, q_n(x))$, les fonctions q_i $(1 \leq i \leq n)$ étant définies par la formule (II,1).

<u>Corollaire</u> : L'application $\bar{\theta}_*$: $\varphi \mapsto \varphi \circ \bar{\theta}$ de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ induit un isomorphisme vectoriel topologique entre $\mathcal{E}(Q)$ (resp. $\mathcal{D}(Q)$) et l'espace des fonctions C^∞ (resp. et à support compact) sur $\mathbb{R}^n$ qui sont $\mathcal{W}$-invariantes. Par dualité, il en résulte que $\mathcal{D}'(Q)$ est isomorphe à l'espace des distributions $\mathcal{W}$-invariantes sur $\mathbb{R}^n$.

On remarquera qu'un énoncé analogue est vrai lorsque $\mathcal{W}$ est un groupe fini engendré par des symétries, en particulier lorsque $\mathcal{W}$ est un groupe de Weyl. On a maintenant :

<u>Proposition</u> II-2 : Soit $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ l'opération de restriction des fonctions φ définies sur $M_n(\mathbb{R})$, au sous-espace des matrices diagonales : alors $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ est un isomorphisme vectoriel topologique de l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ qui sont bi-invariantes par le groupe orthogonal sur l'espace des fonctions $\bar{\varphi} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) qui sont $\mathcal{W}$-invariantes. Il en résulte que l'espace des distributions bi-invariantes par le groupe orthogonal sur $M_n(\mathbb{R})$ est aussi bien isomorphe à $\mathcal{D}'(Q)$ qu'à l'espace des distributions $\mathcal{W}$-invariantes sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Démonstration</u> : D'abord, le raisonnement fait plus haut (lemme II-1) montre que $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ est une application linéaire continue injective de l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ qui sont bi-invariantes par le groupe orthogonal dans l'espace des fonctions $\bar{\varphi} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) qui sont $\mathcal{W}$-invariantes. Pour voir qu'en fait, $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ est un isomorphisme, on peut faire les remarques suivantes : si on désigne par j l'injection de $\mathbb{R}^n$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $j(t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{diag}\,(t_1, \ldots, t_n)$, on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\bar{\theta}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & M_n(\mathbb{R}) \arrow[dl, "\theta"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

De plus, une autre application de la proposition II-1 montre que θ_* induit un isomorphisme de $\mathcal{E}(Q)$ (resp. $\mathcal{D}(Q)$) sur l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ qui sont bi-invariantes par le groupe orthogonal. D'après cela et le corollaire précédent, on voit qu'il y a un isomorphisme vectoriel topologique entre l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ qui sont bi-invariantes par le groupe orthogonal et l'espace des fonctions $\bar{\varphi} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) qui sont $\mathcal{W}$-invariantes, et on vérifie immédiatement que cet isomorphisme est l'opération de restriction $\varphi \mapsto \bar{\varphi} = \varphi \circ j$.

2. Les distributions qui se transforment à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ suivant un caractère de $O(n,\mathbb{R})$.

2.1. Si on s'intéresse maintenant aux fonctions polynomes, fonctions C^∞ ou distributions f telles que pour tout couple (u,v) de matrices orthogonales :

(II,3) $\qquad f(uxv) = \text{dét}\,(uv)\, f(x)$,

on obtient d'abord le résultat suivant :

Lemme II-4 : Soit f une fonction polynome ayant la propriété exprimée par la formule (II-3) ; alors il existe une unique fonction polynome g, bi-invariante par le groupe orthogonal, telle que pour tout $x \in M_n(\mathbb{R})$: $f(x) = (\text{dét}\, x)\, g(x)$.

On peut démontrer ce lemme en considérant comme plus haut la restriction $\bar{f}$ de f au sous-espace des matrices diagonales, mais on va voir qu'il vaut mieux s'intéresser d'abord à l'action du groupe orthogonal à gauche et en déduire ensuite le lemme 4 et les autres renseignements concernant les distributions vérifiant (II,3). Soit donc $\mathcal{D}_+$ (resp. $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{D}'_+$) le sous-espace de $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$, $\mathcal{D}'(M_n(\mathbb{R}))$ constitué par les éléments invariants à gauche par $O(n,\mathbb{R})$, et $\mathcal{D}_-$ (resp. $\mathcal{E}_-$, $\mathcal{D}'_-$) le sous-espace de $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$, $\mathcal{D}'(M_n(\mathbb{R}))$) constitué par les éléments f qui se transforment à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ suivant le quasi-caractère $u \mapsto \text{dét}\, u$ de $O(n,\mathbb{R})$, c'est-à-dire tels que pour tout $u \in O(n,\mathbb{R})$ $f(ux) = (\text{dét}\, u)\, f(x)$.

2.2. L'anneau des fonctions polynomes invariantes à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ a été déterminé par H. Weyl ([4]) : Soit $x = (x_1 , x_2 ,\dots, x_n)$ une matrice générique de $M_n(\mathbb{R})$ dans laquelle on a mis en évidence les vecteurs colonnes $x_1 ,\dots, x_n$ et q_{ij} : $x \mapsto (x_i \mid x_j) = \sum_r x_{ri}\, x_{rj}$; alors les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions q_{ij} pour $i\leq j$ sont algébriquement indépendantes et engendrent l'anneau des fonctions polynomes invariantes à gauche par $O(n,\mathbb{R})$; autrement dit, étant donné une fonction polynome invariante f , il existe une unique fonction polynome g sur l'espace $MS_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles $n \times n$ telle que $f(x) = g({}^t xx)$ pour tout x ; on peut donc introduire $\theta : x \mapsto {}^t xx$, dont l'image est le cône C_n, des matrices symétriques semi-définies positives (on écrira $y \geqslant 0$ si $y \in C_n$) , et ce qui a été dit plus haut permet d'affirmer que θ^* est un isomorphisme de l'espace $\mathcal{D}'_+$ des distributions $O(n,\mathbb{R})$ - invariantes sur l'espace $\mathcal{D}'(C_n)$ des distributions sur $MS_n(\mathbb{R})$ qui sont à support dans le cône ; si $T \in \mathcal{D}'_+$; $\theta^* T$ est caractérisé par l'égalité :

(II,4) $\qquad \int \theta^* T(y)\ \varphi(y)\, dy = \int T(x)\ \varphi({}^t xx)\, dx$

qui est vraie pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(MS_n(\mathbb{R}))$ (dy est la mesure de Lebesque de $MS_n(\mathbb{R})$). Ce résultat était déjà connu de Gårding ([11]).

2.3. Maintenant l'endomorphisme E_- de $\mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$ défini par $(E_-\varphi)(x) = \int_{O(n,R)} \varphi(ux)$ dét $u\, du$ est un projecteur continu de $\mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ sur $\mathcal{E}_-$ (resp. $\mathcal{D}_-$) ; la première conséquence de l'existence d'un tel projecteur est que $\mathcal{D}'_-$ s'identifie au dual de l'espace $\mathcal{D}_-$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$: si $T \in \mathcal{D}'_-$ et $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$, alors $\langle T,\varphi\rangle = \langle T,E_-\varphi\rangle$. La deuxième conséquence est la suivante : si $f \in \mathcal{E}_-$ et si $(f_j)_j$ est une suite de fonctions polynomes sur $M_n(\mathbb{R})$ qui tend vers f dans $\mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$, alors la suite $(E_- f_j)_j$ est une suite de fonctions polynomes qui tend vers f dans $\mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$ et chaque $E_- f_j$ est dans $\mathcal{E}_-$; on est ainsi amené à s'intéresser aux fonctions polynomes f qui appartiennent à $\mathcal{E}_-$; soit f une telle fonction ; elle est évidemment invariante à gauche par $SO(n,\mathbb{R})$, et toujours d'après H. Weyl, elle s'exprime "polynomialement" par l'intermédiaire des fonctions $q_{ij}(i \leq j)$ et de la fonction $x \mapsto$ dét x ; l'ensemble de ces $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ fonctions est algébriquement lié par la relation $(\text{dét } x)^2 = \text{dét } ({}^t xx)$, (ce qui, à titre de remarque, empêche d'appliquer la proposition 1 aux distributions $SO(n)$-invariantes), mais en tout cas il est vrai et immédiat que f s'écrit de manière unique sous la forme : $f(x) = g'({}^t xx) + (\text{dét } x)\, g''({}^t xx)$; si on veut maintenant que $f(ux) = (\text{dét } u)\, f(x)$ pour tous $u \in O(n,\mathbb{R})$ et $x \in M_n(\mathbb{R})$, on doit faire $g' = 0$, de sorte que la multiplication par la fonction déterminant est un isomorphisme de l'espace des fonctions polynomes invariantes sur l'espace des fonctions polynomes appartenant à $\mathcal{E}_-$; il est clair que ce résultat implique en particulier le lemme 4, mais il a d'autres conséquences intéressantes : Remarquons d'abord que l'opération de multiplication dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ par une fonction polynome non nulle est un monomorphisme, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces de Fréchet de la source (qui est $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) sur l'image qui se trouve donc être un sous-espace fermé de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$; ce résultat n'est pas trivial : voir : L. Hormander ,"On the division of distributions by polynomials" Arkiv. für Math. 3 (1958) (555-568) ; en tout cas, il en résulte que l'opération de multiplication par la fonction déterminant est un isomorphisme de Fréchets de $\mathcal{E}_+$ sur $\mathcal{E}_-$, parce que d'après ce qu'on vient de voir, toute fonction appartenant à $\mathcal{E}_-$ peut être approchée dans $\mathcal{E}(M_n(\mathbb{R}))$ par une suite de fonctions qui sont produit de la fonction $x \mapsto$ dét x par une fonction invariante. Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}_-$; alors il existe $f \in \mathcal{E}_+$ telle que $\varphi(x) = (\text{dét } x)\, f(x)$ pour tout x, mais α étant une fonction de $\mathcal{D}_+$ qui vaut 1 sur un voisinage du support de φ, (une telle fonction existe), on a : $\varphi(x) = \alpha(x)\varphi(x) = (\text{dét } x)\, \alpha(x)\, f(x)$ pour tout x, de sorte qu'en fait f est à support compact et qui plus est, à support arbitrairement proche de celui de φ ; il est clair maintenant que la multiplication par la fonction déterminant est une bijection continue de $\mathcal{D}_+$ sur $\mathcal{D}_-$; c'est même un isomorphisme topologique : si $(\varphi_j)_j$ est une suite de fonctions de $\mathcal{D}_-$ à supports dans un compact fixe, il existe un compact fixe (arbitrairement proche du premier), des fonctions $f_j \in \mathcal{D}_+$ à supports dans ce compact telles que $\varphi_j(x) = (\text{dét } x)\, f_j(x)$ pour tous x et j, et il est immédiat que la suite $(f_j)_j$ tend vers zéro dans $\mathcal{D}_+$. On a donc :

Proposition II-3 : La multiplication par la fonction déterminant est un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{E}_+$ sur $\mathcal{E}_-$, de $\mathcal{D}_+$ sur $\mathcal{D}_-$, et de $\mathcal{D}'_-$ sur $\mathcal{D}'_+$.

Démonstration : Il reste seulement à démontrer que la multiplication par la fonction déterminant est un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}'_-$ sur $\mathcal{D}'_+$; pour cela on identifie $\mathcal{D}'_-$ (resp. $\mathcal{D}'_+$) au dual de $\mathcal{D}_-$ (resp. $\mathcal{D}_+$) et on vérifie que modulo ces identifications, la multiplication par la fonction déterminant est la transposée de la multiplication par cette fonction considérée comme isomorphisme de $\mathcal{D}_+$ sur $\mathcal{D}_-$.

Remarques : 1) Compte-tenu du résultat déjà cité de Hormander sur la possibilité de la division des distributions par une fonction polynome $\neq 0$, il est facile de démontrer que la multiplication par le déterminant est une application linéaire continue de $\mathcal{D}'_+$ sur $\mathcal{D}'_-$; mais il n'est pas vrai que cette application est injective ; il existe des distributions non nulles $T \in \mathcal{D}'_+$ telles que $\vartheta T = 0$ (on a noté ϑ l'opération de multiplication par la fonction déterminant) : la proposition III-3 en exhibe n qui sont linéairement indépendantes et bi-invariantes par le groupe des matrices dont le déterminant vaut ± 1. Mais mieux encore : soit $\varphi \in \mathcal{D}_+$, $m \in M_n(\mathbb{R})$ et φ_m la fonction $x \mapsto \varphi(xm)$; d'après le lemme I-2, $\Delta\varphi_m = (\text{dét } m)\,(\Delta\varphi)_m = 0$ si $\text{dét } m = 0$; φ_m est une fonction C^∞ bornée dans $M_n(\mathbb{R})$, elle définit donc une distribution tempérée dont la transformée de Fourier est, comme il est facile de le voir, $O(n,\mathbb{R})$ - invariante à gauche et annulée par ϑ.

2) En utilisant le lemme 4, on voit aussi que ϑ est un isomorphisme topologique de l'espace des fonctions C^∞ (resp. C^∞ et à support compact) bi-invariantes par le groupe orthogonal sur l'espace des fonctions C^∞ (resp. C^∞ et à support compact) vérifiant (II,3) et un isomorphisme topologique de l'espace des distributions vérifiant (II,3) sur l'espace des distributions bi-invariantes ; de plus $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ est un isomorphisme de l'espace des fonctions (de $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{D}$) vérifiant (II,3) sur l'espace des fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui sont $\mathcal{G}_n$-invariantes et impaires par rapport à chaque variable. D'ailleurs, l'application $\bar{\vartheta} : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ définie par $(\bar{\vartheta} f)(t_1, \dots, t_n) = (\prod_{1\leq i\leq n} t_i)\, f(t_1, \dots, t_n)\,(t \in \mathbb{R}^n)$ est un

isomorphisme de l'espace des fonctions $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) qui sont $\mathcal{W}$-invariantes sur l'espace des fonctions $\vartheta f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) qui sont $\mathfrak{S}_n$-invariantes et impaires par rapport à chaque variable.

3) Dans le même ordre d'idées, on voit que la multiplication par la fonction : $t \mapsto \prod_{i<j} (t_i - t_j)$ est un isomorphisme de l'espace des fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) qui sont $\mathfrak{S}_n$-invariantes sur l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) telles que pour toute permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$:

$$\varphi(t_{\pi_1}, \dots, t_{\pi_n}) = (-1)^{\varepsilon(\pi)} \varphi(t_1, \dots, t_n) \quad (t \in \mathbb{R}^n) ,$$

où $\varepsilon(\pi)$ est la signature de π . Ce résultat peut servir (et m'a effectivement servi avant que je découvre l'existence du théorème de Glaeser) à démontrer un théorème de Newton différentielle "faible" : à toute fonction φ $\mathfrak{S}_n$-invariante et C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ correspond une unique fonction f définie sur l'image Q de $\mathbb{R}^n$ par l'application $t \to (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ (où les fonctions q_i sont les fonctions symétriques élémentaires), telle que :

$$\varphi(t) = f(q_1(t), \dots, q_n(t)) \quad (t \in \mathbb{R}^n) ,$$

et cette fonction est C^∞ dans l'intérieur de Q , tandis que toutes ses dérivées se prolongent continûment à Q ; ce que dit le théorème de Glaeser en plus, et c'est la partie la moins élémentaire de sa démonstration, c'est que cette fonction f est la restriction à Q d'une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.

4) Signalons enfin que la proposition précédente peut être énoncée pour les distributions sur un ouvert Ω invariant à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ (par exemple sur un Ω_k, $0 \leq k \leq n$).

2.4. L'utilité de ces résultats pour les espaces $\mathcal{L}^\lambda_\pm$ apparait dans l'énoncé suivant :

<u>Proposition II-4</u> : Les singularités du prolongement à $\mathbb{C}$ de la fonction $\lambda \mapsto T^{\lambda+1}_{-,k}$ sont celles du prolongement à $\mathbb{C}$ de la fonction $\lambda \mapsto T^{\lambda+1}_{+,k}$, et la multiplication par la fonction déterminant est un monomorphisme de $\mathcal{L}^\lambda_-(\Omega_k)$ dans $\mathcal{L}^{+1}_+(\Omega_k)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_k)$; alors, pour $\mathcal{R}e(\lambda) > 0$

$$\langle T^\lambda_{-,k} , \varphi \rangle = \langle T^\lambda_{-,k} , E_- \varphi \rangle ,$$

de sorte qu'on peut supposer que $\varphi = \vartheta \psi$; il en résulte que :

$$\langle T^\lambda_{-,k} , \varphi \rangle = \int_{\Omega_k} \operatorname{sgn}(\text{dét } x) \, |\text{dét } x|^\lambda \, (\text{dét } x) \, \psi(x) \, dx$$

$$= \int_{\Omega_k} |\text{dét } x|^{\lambda+1} \Psi(x)\, dx = \langle T^{\lambda+1}_{+,k}, \Psi \rangle$$

3. Distributions invariantes à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ et homogènes à droite.

3.1. On va maintenant étudier une classe particulière de distributions homogènes sur $M_n(\mathbb{R})$ qui sont invariantes à gauche par $O(n,\mathbb{R})$; ces distributions peuvent être introduites aussi sur $M_{n,m}(\mathbb{R})$ $(1 \leq m \leq n)$ et la considération du cas $m = 1$ montre que ce sont les généralisations naturelles des distributions r^λ sur $\mathbb{R}^n$. Soit B_o le sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ constitué par les matrices triangulaires "supérieures" à coefficients diagonaux > 0, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$, et α_s le caractère de B_o défini par :

$$\alpha_s(b) = \prod_{1 \leq i \leq n} (b_{ii})^{s_i}$$

On dira qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{R}))$ est α_s-homogène si elle se transforme par B_o suivant α_s, autrement dit si $T(xb) = \alpha_s(b)\, T(x)$, pour tout $b \in B_o$.

Ceci étant, comme $GL(n,\mathbb{R})$ est "produit" de $O(n,\mathbb{R})$ par B_o, il n'y a pas de difficulté à étendre α_s en une fonction sur $GL(n,\mathbb{R})$, invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$, qu'on continuera à noter α_s ; si $x \in GL(n,\mathbb{R})$ s'écrit $x = u\,b$, avec $u \in O(n,\mathbb{R})$, $b \in B_o$, alors $\alpha_s(x) = \alpha_s(b)$; comme ${}^t xx = {}^t bb = {}^t \underline{n}\, \text{diag}(b_{11}^2, \ldots, b_{nn}^2)\, \underline{n}$, où $\underline{n}$ est une matrice triangulaire "supérieure" à coefficients diagonaux valant tous 1, il apparait ([12], lemme) que les b_{ii}^2 sont déterminés de façon unique par $\prod_{1 \leq i \leq m} b_{ii}^2 = \Delta_m({}^t xx)$ $(1 \leq m \leq n)$, où Δ_m est le mineur principal d'ordre m de la matrice ${}^t xx$, de sorte que $b_{mm}^2 = \dfrac{\Delta_m({}^t xx)}{\Delta_{m-1}({}^t xx)}$ est une fonction rationnelle sur $GL(n,\mathbb{R})$.

On en déduit :

$$\alpha_s(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\Delta_i({}^t xx)}{\Delta_{i-1}({}^t xx)} \right)^{\frac{s_i}{2}} = \prod_{1 \leq i \leq n} (\Delta_i({}^t xx))^{(s_i - s_{i+1})/2}$$

où on convient que $\Delta_o({}^t xx) = 1$ et $s_{n+1} = 0$.

3.2. Cette expression de α_s montre que $x \mapsto \alpha_s(x)$ se prolonge à $M_n(\mathbb{R})$ en une fonction continue à condition que l'on ait : $0 < \mathcal{R}e\,(s_n) < \mathcal{R}e\,(s_{n-1}) < \ldots < \mathcal{R}e\,(s_1)$; lorsqu'il en est ainsi, la fonction α_s définit dans $M_n(\mathbb{R})$ une distribution qu'on notera T_+^s ; il est clair que T_+^s est α_s-homogène et invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$, et on vérifie que $s \mapsto T_+^s$ est séparément analytique par rapport à chacune de ses variables dans le domaine $\omega_n = \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$;

$0 < \mathcal{R}e\,(s_n) < \mathcal{R}e\,(s_{n-1}) < .. < \mathcal{R}e(s_1)\}$. Pour faire le prolongement analytique de $s \mapsto T_+^s$, on utilise la décomposition $GL(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}).B_o$; il est connu que si $x = u\, b$ est la décomposition d'un élément générique x de $GL(n,\mathbb{R})$ en produit de $u \in O(n,\mathbb{R})$ par $b \in B_o$, on a :

$$d^* x = du \prod_{i<j} db_{ij} \prod_{1\leq i\leq n} (b_{ii})^{-i}\, db_{ii}$$

(à une constante multiplicative c près), où du est la mesure de Haar normalisée de $O(n,\mathbb{R})$. Il en résulte que si $s \in \omega_n$:

$$\int_{M_n(\mathbb{R})} T_+^s\,(x)\,\varphi(x)\,dx = \int \alpha_s\,(x)\,|\text{dét}\, x|^n\,\varphi(x)\,d^*x$$

$$= \int \prod_{1\leq i\leq n} (b_{ii})^{s_i+n-i}\,\varphi(ub)\,du \prod_{i\leq j} db_{ij}$$

$$= \int \prod_{1\leq i\leq n} (b_{ii})^{s_i+n-i}\,db_{ii} \int \varphi(ub)\,du \prod_{i<j} db_{ij}$$

$$= \int \Phi\,(b_{11},\dots, b_{nn}) \prod_{1\leq i\leq n} (b_{ii})^{s_i+n-i}\,db_{ii}$$

avec $\displaystyle \Phi\,(b_{11}\,,\dots,\, b_{nn}) = \int_{\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{i<j} db_{ij} \int_{O(n,\mathbb{R})} \varphi\,(ub)\,du$

Il est clair que cette fonction Φ est la restriction à $(R_+^*)^n$ d'une fonction $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, qui est définie par la même formule écrite ci-dessus, et qui est paire par rapport à chacune de ses variables, parce que la fonction $b \mapsto \int \varphi(ub)\,du$ est la restriction au sous-espace des matrices triangulaires "supérieures" d'une fonction invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$, donc est invariante à gauche par le groupe des matrices orthogonales diagonales (i.e. à coefficients diagonaux valant ± 1).

3.3. Rappelons maintenant ([4]) que pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $\lambda \to \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^\lambda\,\varphi(u)\,du$ est une fonction méromorphe telle que son quotient par la fonction $\lambda \mapsto \Gamma(\frac{\lambda+1}{2})$ soit une fonction entière. Comme :

$$\int T_+^s(x)\,\varphi(x)\,dx = 2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(u_1\,,\dots,\, u_n) \prod_{1\leq i\leq n} |u_i|^{s_i+n-i}\,du_i$$

on voit que $s \mapsto T_+^s \Big/ \displaystyle\prod_{1\leq i\leq n} \Gamma(\frac{s_i+n+1-i}{2})$ est analytique.

On a d'autre part :

Lemme II-5 :

$$\int T_+^s(x)\, e^{-\pi \operatorname{tr}({}^t xx)}\, dx = \pi^{-\frac{1}{2}\sum_i s_i} \prod_{1\leq i\leq n} \left(\Gamma\left(\frac{s_i+n+1-i}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)\right)$$

au moins lorsque $s \in \omega_n$.

Démonstration : Par le même calcul que ci-dessus, on aboutit à

$$\int T_+^s(x)\, e^{-\pi \operatorname{tr}({}^t xx)}\, dx = 2^{-n}\, c \int_{\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}} \prod_{1\leq i\leq n} |b_{ii}|^{s_i+n-i}\, e^{-\pi \operatorname{tr}({}^t bb)} \prod_{i\leq j} db_{ij}$$

où c est une constante de normalisation. Comme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} |x|^{\alpha}\, dx = \pi^{-\frac{\alpha+1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \qquad (\text{pour } \Re e(\alpha) > -1)\ ,$$

il vient :

$$\int T_+^s(x)\, e^{-\pi \operatorname{tr}({}^t xx)}\, dx = 2^{-n}\, c\, \pi^{-\frac{1}{2}\sum_i s_i - \frac{n(n+1)}{4}} \prod_{1\leq i\leq n} \Gamma\left(\frac{s_i+n+1-i}{2}\right)$$

et on obtient c en faisant $s = 0$ (ce qui est permis) dans les deux membres.

On peut donc résumer :

Proposition II-5 : La fonction $s \mapsto \mathcal{T}_+^s = \pi^{-\frac{1}{2}\sum_i s_i}\, T_+^s \Big/ \prod_{1\leq i\leq n} \dfrac{\Gamma\left(\frac{s_i+n+1-i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)}$

est prolongeable en une fonction analytique entière, et pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{T}_+^s$ est une distribution non nulle qui est α_s-homogène et invariante à gauche par le groupe orthogonal ; En particulier $\lambda \mapsto \mathcal{T}_+(\lambda,\ldots,\lambda) = \pi^{\frac{n\lambda}{2}}\, T_+^{\lambda} / \prod_{1\leq i\leq n} \left(\frac{\lambda+1+i}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{i}{2}\right)$ est analytique entière partout $\neq 0$.

3.4. Les distributions α_s-homogènes dont il est question ci-dessus sont évidemment des distributions tempérées, et si on s'intéresse à leurs transformées de Fourier, on constate qu'elles sont homogènes relativement à l'action du groupe ${}^tB_o$ constitué par les matrices triangulaires inférieures à termes diagonaux > 0. Pour être plus précis, on introduit pour chaque $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$, le caractère ρ_s de ${}^tB_o$ défini par :

$$\rho_s(b) = \prod_{1\leq i\leq n} (b_{ii})^{s_i} \qquad (b \in {}^tB_o)$$

Comme on a aussi $GL(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}).{}^tB_o$, on étend ρ_s en une fonction invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$, qui est toujours notée ρ_s ; si $x = u\,{}^tb$, avec $u \in (O(n,\mathbb{R})$ et $b \in B_o$ (de sorte que ${}^tb \in {}^tB_o$) , alors ${}^txx = b\,{}^tb = \underline{n}\ \mathrm{diag}\ (b_{11}^2 , \ldots , b_{nn}^2)\,{}^t\underline{n}$ où $\underline{n}$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux valant 1. Ceci étant on a le lemme suivant :

Lemme II-6 : Soit $x \in M_n(k)$ (k corps commutatif) ; il existe des matrices u et v triangulaires supérieures à termes diagonaux valant 1 telles que : $u\,x\,{}^tv = \mathrm{diag}\ (\xi_1 , \ldots , \xi_n)$ si et seulement si les mineurs principaux inférieurs $\delta_i(x) = \mathrm{d\acute{e}t}\left((x_{rs})_{n-i+1\leq r,s\leq n}\right)$ sont tous non nuls. Lorsqu'il en est ainsi, les ξ_i sont déterminés par les égalités : $\prod_{m\leq i\leq n} \xi_i = \delta_{n-m+1}(x)$, et u et v sont uniques.

La démonstration de ce lemme est tout-à-fait identique à celle du lemme de [12] déjà invoqué plus haut. Il en résulte en tout cas que $b_{mm}^2 = \dfrac{\delta_{n+1-m}(x)}{\delta_{n-m}(x)}$, de sorte que :

$$\rho_s(x) = \prod_{0\leq j\leq n-1} (\delta_{n-j}\ ({}^txx))^{(s_{j+1}-s_j)/2}$$

où on convient que $s_o = 0$ et $\delta_o(x) = 1$. Les fonctions ρ_s sont donc des fonctions continues sur $M_n(\mathbb{R})$ chaque fois que $0 < \mathcal{R}e\ (s_1) < \mathcal{R}e\ (s_2)\ < \ldots < \mathcal{R}e\ (s_n)$, et définissent alors des distributions notées R_+^s qui sont invariantes à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ et telles que pour tout $b \in {}^tB_o$: $R_+^s(xb) = \rho_s(b)\ R_+^s(x)$ (plus généralement une distribution sur $M_n(\mathbb{R})$ qui se transforme par ${}^tB_o$ suivant ρ_s sera dite ρ_s-homogène). On a alors :

Lemme II-7 : Une distribution T sur $M_n(\mathbb{R})$ est α_s-homogène (resp. et invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$) si et seulement si sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ est ρ_{-s-n}-homogène (resp. et invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$). (Si $s \in \mathbb{C}^n$ et $\mu \in \mathbb{C}$, $\rho_{s+\mu}$ est le caractère de ${}^tB_o$ défini par $s + \mu = (s_1 + \mu, s_2 + \mu , \ldots , s_n + \mu)$).

3.5. De même qu'on a étudié le prolongement à $\mathbb{C}^n$ de la fonction $s \mapsto T_+^s$, on va voir qu'on a des résultats analogues pour les distributions R_+^s : soit $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ et $s \in \omega_n' = \{s \in \mathbb{C}^n\ ;\ 0 < \mathcal{R}e\ (s_1) < \mathcal{R}e\ (s_2) < \ldots < \mathcal{R}e\ (s_n)\}$; alors :

$$\int_{M_n(\mathbb{R})} R_+^s(x)\,\varphi(x)\ dx = \int_{GL(n,\mathbb{R})} R_+^s(x)\ \ |\mathrm{d\acute{e}t}\ x|^n\ \varphi(x)\ d^*x\ .$$

On écrit $x = ub$, avec $u \in O(n,\mathbb{R})$ et $b \in {}^tB_o$ et alors :

$$d^*x = c\ du \prod_{1\leq i\leq n} b_{ii}^{-n+i-1}\ db_{ii} \prod_{i>j} db_{ij}$$

où c est une constante positive (d'ailleurs $c = \dfrac{2^n \pi^{\frac{n(n+1)}{4}}}{\prod_{1\leq i\leq n} \Gamma(\frac{i}{2})}$) , parce que $d\mu(b) = \prod_{1\leq i\leq n} b_{ii}^{-n+1-i}\ db_{ii} \prod_{i>j} db_{ij}$ est une mesure de Haar invariante à droite de ${}^tB_o$. D'autre part :

$$\int R_+^s(x)\ e^{-\pi \operatorname{tr}({}^txx)}\ dx = \pi^{-1/2\sum s_i} \prod_{1\leq i\leq n} \frac{\Gamma(\frac{s_i+i}{2})}{\Gamma(\frac{i}{2})}$$

au moins lorsque $s \in \omega_n'$, et comme plus haut, on en déduit :

<u>Proposition II-6</u> : La fonction $s \mapsto \mathcal{R}_+^s = \pi^{1/2\sum s_i} R_+^s / \prod_{1\leq i\leq n} \dfrac{\Gamma(\frac{s_i+i}{2})}{\Gamma(\frac{i}{2})}$

se prolonge en une fonction analytique entière, et pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{R}_+^s$ est une distribution β_s-homogène, invariante à gauche par le groupe orthogonal et telle que :

$$\int \mathcal{R}_+^s(x)\ e^{-\pi \operatorname{tr}({}^txx)}\ dx = 1$$

4. <u>Transformation de Laplace radiale des distributions $\mathcal{T}_+^s$ et $\mathcal{R}_+^s$</u> .

4.1. Revenons maintenant aux distributions T_+^s ; leurs images $\theta^* T_+^s$ dans l'espace des distributions sur $MS_n(\mathbb{R})$ à support dans le cône C_n sont déterminées au moins lorsque $s \in \omega_n$ par le =

<u>Lemme II-8</u> : Soit $s \in \omega_n$; alors $\theta^* T_+^s$ est la distribution définie dans $MS_n(\mathbb{R})$ par la fonction $y \mapsto \omega\, Y(y)\ (\text{dét}\ y)^{(s_n-1)/2} \prod_{1\leq i\leq n-1} (\Delta_i(y))^{(s_i-s_{i+1})/2}$, où Y est la fonction caractéristique de C_n et ω est une constante > 0 .

<u>Démonstration</u> : On identifie l'espace homogène $O(n,\mathbb{R})\backslash GL(n,\mathbb{R})$ des classes à gauche modulo $O(n,\mathbb{R})$ avec le cône ouvert $\overset{\circ}{C}_n$ des matrices symétriques définies positives (on écrira $y > 0$ pour exprimer qu'une matrice y est définie positive), et on constate que la mesure $d\mu(y) = (\text{dét}\ y)^{-(n+1)/2}\ dy$ est une mesure invariante sur cet espace homogène. Il existe donc une constante $\omega > 0$ telle que si $s \in \omega_n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(MS_n(\mathbb{R}))$:

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} \alpha_s(x)\ |\text{dét } x|^n\ \varphi({}^txx)\ d^*x =$$

$$= \omega \int_{y>0} d\mu(y) \left(\int_{O(n,\mathbb{R})} \alpha_s(ux)\ |\text{dét } ux|^n\ \varphi({}^txx)\ du\right)_{y={}^txx}$$

$$= \omega \int_{y>0} (\text{dét } y)^{-\frac{n+1}{2}}\ (\text{dét } y)^{\frac{n}{2}} \prod_{1\leq i\leq n} (\Delta_i(y))^{(s_i-s_{i+1})/2}\ \varphi(y)\ dy$$

$$= \omega \int_{y>0} (\Delta_n(y))^{(s_n-1)/2} \prod_{1\leq i\leq n-1} (\Delta_i(y))^{(s_i-s_{i+1})/2}\ \varphi(y)\ dy\ ,$$

ce qui prouve le lemme $(\Delta_n(y) = \text{dét } y)$.

D'ailleurs, plus généralement :

Lemme II-9 : Soit $T \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ une distribution α_s-homogène et invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$; alors, pour tout $b \in B_o$: $\theta^*T({}^tbyb) = \alpha_{s-1}(b)$ $\theta^*T(y)$.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(MS_n(\mathbb{R}))$; $\psi = \varphi \circ \theta$, et $\varphi_b : y \mapsto \varphi({}^tbyb)(b \in B_o)$; alors $\varphi_b \circ \theta(x) = \varphi({}^tb\ {}^txxb) = \psi(xb)$ et par suite :

$$\int \theta^*\ T(y)\ \varphi_b(y)\ dy = \int T(x)\ \varphi\circ\theta\ (xb)\ dx$$

$$= \alpha_{-s}(b)(\text{dét } b)^{-n} \int T(x)\ \varphi\circ\theta(x)\ dx = \alpha_{-s-n}(b) \int \theta^*\ T(y)\ \varphi(y)\ dy$$

$$= \alpha_{-(s-1)}(b)\ (\text{dét } b)^{-(n+1)} \int \theta^*\ T(y)\ \varphi(y)\ dy\ ,$$

ce qui prouve :

$$\theta^*\ T({}^tbyb) = \alpha_{s-1}(b)\ \ \theta^*\ T(y)$$

On remarquera que le lemme admet une réciproque ; si T est $O(n)$-invariante à gauche et si $\theta^*\ T$ se transforme par B_o suivant α_{s-1} , alors T est α_s-homogène.

4.2. Ceci étant, on dispose dans l'espace-vectoriel $MS_n(\mathbb{R})$ d'un cône ouvert convexe $\mathring{C}_n$; on peut donc utiliser la transformation de Laplace relative à ce cône ([6] chap. VIII ou [10] chap. 10). Pour cela on définit l'espace $\mathcal{S}'(\mathring{C}_n)$ comme étant l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(MS_n(\mathbb{R}))$ telles que pour tout $\xi \in \mathring{C}_n$, (i.e. pour tout $\xi > 0$) , le produit de T par la fonction $e_\xi : x \mapsto e^{-\pi tr(\xi x)}$ soit une distribution tempérée ; l'application $\xi \mapsto \mathcal{F}(e_\xi.T)$ de $\widehat{\mathring{C}_n}$ dans $\mathcal{S}'(MS_n(\mathbb{R}))$ est la transformée de Laplace de la distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathring{C}_n)$, et parce que $\mathring{C}_n$ est ouvert, $\mathcal{F}(e_\xi.T)$ est pour chaque $\xi \in \mathring{C}_n$, une fonction $\eta \to E(\xi,\eta)$ appartenant à l'espace $\mathcal{O}_M$ des "multiplicateurs" de $\mathcal{S}'(MS_n(\mathbb{R}))$; de plus,

$E(\xi,\eta) = F(\xi + i\eta) = F(z)$ où F est une fonction holomorphe dans le tube $\mathring{C}_n + i\, MS_n(\mathbb{R})$, qu'on continue à appeler la transformée de Laplace de T , et qu'on désignera par la notation $\mathcal{L}T$. Enfin la transformation de Laplace est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathring{C}_n)$ sur l'espace des fonctions F holomorphes dans $\mathring{C}_n + i\, MS_n(\mathbb{R})$ et telles que pour tout compact K de $\mathring{C}_n$, l'ensemble des fonctions $\eta \to F(\xi + i\eta)$, ξ décrivant K , soit borné dans $\mathcal{O}_M$.

<u>Lemme II-10</u> : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathring{C}_n)$ et F la transformée de Laplace de T. Alors T se transforme par B_o suivant α_s si et seulement si F se transforme par ${}^tB_o$ suivant β_{-s-n-1} .

<u>Démonstration</u> : On a en effet si $b \in B_o$ et $\xi + i\eta \in \mathring{C}_n + i\, MS_n(\mathbb{R})$:

$$F(b(\xi + i\eta)^t b) = (\mathcal{F}(e_{b\xi^t b} . T))(b\,\eta\,{}^t b) = (\mathcal{F} S)(b\,\eta\,{}^t b) ,$$

avec $S = e_{b\xi^t b} . T$. On vérifie facilement que :

$$S({}^t b^{-1}\, y\, b^{-1}) = e_\xi(y).T({}^t b^{-1}\, y\, b^{-1}) ,$$

de sorte que :

$$S({}^t b^{-1}\, y\, b^{-1}) = \alpha_{-s}(b)\, e_\xi(y).T(y) ,$$

si et seulement si T se transforme par B_o suivant α_s . Ceci étant (calcul apparemment formel) :

$$\mathcal{F} S(b\,\eta\,{}^t b) = \int e^{-i\pi \mathrm{tr}(b\,\eta\,{}^t b\, y)}\, S(y)\, dy$$

$$= (\det b)^{-n-1} \int e^{-i\pi\, \mathrm{tr}(\eta y)}\, S({}^t b^{-1}\, y\, b^{-1})\, dy$$

$$= (\det b)^{-n-1}\, \alpha_{-s}(b) \int e^{-i\pi \mathrm{tr}(\eta y)}\, e^{-\pi \mathrm{tr}(\xi y)}\, T(y)\, dy$$

$$= \alpha_{-s-n-1}(b)\, F(\xi + i\eta) ,$$

si T se transforme par B_o suivant α_s , et réciproquement. Ceci montre que $F(b\, z\, {}^t b) = \beta_{-s-n-1}({}^t b)\, F(z)$ pour tout $b \in B_o$ et tout $z \in \mathring{C}_n + i\, MS_n(\mathbb{R})$ si et seulement si T se transforme par B_o suivant α_s .

4.3. Soit maintenant F une fonction holomorphe dans le tube de base $\mathring{C}_n$ et telle que $F(b\, z\, {}^t b) = \beta_{-s-n-1}({}^t b)\, F(z)$ pour tous $z \in \mathring{C}_n + i\, MS_n(\mathbb{R})$ et $b \in B_o$; si $\xi \in \mathring{C}_n$, il existe un unique élément b de B_o tel que $\xi = b\,{}^t b$, de sorte que $F(\xi) = \beta_{-s-n-1}({}^t b)\, F(\mathbb{1}_n) = F(\mathbb{1}_n) \prod_i (b_{ii})^{-s_i+n+1}$, et en utilisant le lemme II-6 on voit que :

$$F(\xi) = F(\mathbb{1})\, (\sigma_n(\xi))^{-\frac{s_1+n+1}{2}} \prod_{1 \le j \le n-1} (\sigma_{n-j}(\xi))^{\frac{s_{j+1}-s_j}{2}}$$

Remarquons maintenant que chacune des fonctions $z \mapsto \delta_m(z)$ $(1 \leq m \leq n)$ ne s'annule pas dans le tube de base $\overset{\circ}{C}_n$ tout simplement parce que lorsque $\xi \in \overset{\circ}{C}_p$ et $\eta \in MS_p(\mathbb{R})$ (p entier ≥ 2) $\text{dét}(\xi + i\ \eta) \neq 0$. Il en résulte que pour tout $z \in \overset{\circ}{C}_n + i\ MS_n(\mathbb{R})$:

$$F(z) = F(\mathbb{1})(\delta_n(z))^{-\frac{s_1+n+1}{2}} \prod_{1 \leq j \leq n-1} (\delta_{n-j}(z))^{\frac{s_{j+1}-s_j}{2}} ,$$

parce que les 2 membres de cette égalité sont des fonctions holomorphes dans le tube de base $\overset{\circ}{C}_n$ qui coincident sur $\overset{\circ}{C}_n$.

<u>Proposition II-7</u> : Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, l'espace des distributions T sur $M_n(\mathbb{R})$ qui sont $O(n,\mathbb{R})$ invariantes à gauche et α_s-homogènes (resp. β_s-homogènes) est de dimension 1.

<u>Démonstration</u> : Soit T une distribution $O(n)$-invariante et α_s-homogène ; d'après le lemme II-11 , $\theta^* T$ est une distribution sur $MS_n(\mathbb{R})$, à support dans le cône C_n et qui se transforme par B_o suivant α_{s-1} ; de plus $\theta^* T$ est certainement tempérée puisqu'elle est homogène au sens ordinaire. En fait $\theta^* T \in \mathcal{S}'(\overset{\circ}{C}_n)$; plus généralement, soit S une distribution tempérée à support dans le cône C_n et $\xi \in C_n$; alors pour tout $y \in C_n$, $tr(\xi y) \geq 0$ (écrire par exemple $\xi = b\ {}^t b$ avec $b \in B_o$) , de sorte que la fonction e_ξ est bornée sur C_n , et chacune de ses dérivées a la même propriété ; il en résulte que $e_\xi\ T$ est tempérée au moins parce que le support de T est contenu dans le demi-espace des x où $tr(\xi x)$ est ≥ 0 . On peut donc appliquer le lemme II-12 qui montre que la transformée de Laplace de $\theta^* T$ est déterminée à une constante multiplicative près, et en remontant les isomorphismes θ^* et $\mathcal{L}$, on a ce qui est annoncé pour les distributions α_s-homogènes. Le résultat concernant les distributions β_s-homogènes s'en déduit par transformation de Fourier.

4.4. Une autre conséquence est le calcul explicite de la transformée de Laplace des distributions $\theta^* T_+^s$.

<u>Proposition II-8</u> : Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$:

$$(\mathcal{L}\ \theta^* \mathcal{T}_+^s)(z) = \delta_n(z)^{-\frac{s_1+n}{2}} \prod_{1 \leq j \leq n-1} (\delta_{n-j}(z))^{\frac{s_{j+1}-s_j}{2}} \qquad (z \in \overset{\circ}{C}_n + i\ MS_n(\mathbb{R}))$$

<u>Démonstration</u> : D'après les lemmes 9 et 10 , on voit que :

$$\mathcal{L}\,\theta^* \, T_+^s = F(z) = F(\mathbb{1})\, \delta_n(z)^{-\frac{s_1+n}{2}} \prod_{1\leq j\leq n-1} (\delta_{n-j}(z))^{\frac{s_{j+1}-s_j}{2}}$$

Si $s \in \omega_n$, on peut calculer $F(1)$ ainsi :

$$F(\mathbb{1}) = \int_{y>0} \theta^* \, T_+^s(y)\, e^{-\pi \mathrm{tr}(y)}\, dy \ ,$$

et d'après (II,4), cela donne :

$$F(\mathbb{1}) = \int T_+^s(x)\, e^{-\pi \mathrm{tr}({}^t xx)}\, dx$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}\sum s_i} \prod_{1\leq i\leq n} \frac{\Gamma(\frac{s_i+n+1-i}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-i}{2})}$$

de sorte qu'en fait on a bien la formule indiquée dans la proposition.

<u>Remarques</u> : 1) Cette formule peut être démontrée comme il vient d'être indiqué lorsque $s \in \omega_n$ et servir ensuite pour faire le prolongement analytique de la fonction $s \mapsto \mathcal{T}_+^s$; il suffit de démontrer que lorsque s n'est plus dans ω_n , la fonction du second membre de la formule écrite reste dans l'espace des transformées de Laplace relatives au cône $\overset{\circ}{C}_n$.

2) Lorsque $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = \lambda \in \mathbb{C}$, la formule se lit :

$$(\mathcal{L}\ \theta^* \ \mathcal{T}_+^{\lambda})(z) = (\mathrm{dét}\ z)^{-\frac{\lambda+n}{2}}$$

ou mieux encore lorsque $\mathcal{R}e\,(\lambda) > 0$:

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} e^{-\pi \mathrm{tr}(xz{}^t x)}\, |\mathrm{dét}\ x|^{\lambda}\, dx = \Big(\prod_{1\leq p\leq n} \Gamma(\tfrac{\lambda+p}{2})\Big)\, (\mathrm{dét}\ z)^{-\frac{\lambda+n}{2}}$$

Sous cette forme, on reconnait une formule de Siegel (Ann. of Math. 36, 1935, p. 527-606) qui a eu de nombreux successeurs ; par exemple Bellman (Duke Math. J. 23, 1956, 571-577) a démontré des formules analogues pour les transformées de Laplace des fonctions $\theta^*\ R_+^s$ mais sans utiliser les propriétés d'homogénéité qui simplifient beaucoup les démonstrations.

4.5. Ceci étant, le lemme II-7 et le fait que pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$ on a : $\int \mathcal{T}_+^s(x)\, e^{-\pi \mathrm{tr}({}^t xx)}\, dx = \int \mathcal{R}_+^s(x)\, e^{-\pi \mathrm{tr}({}^t xx)}\, dx = 1$ donnent :

Proposition II-9 : $\mathcal{F}(\mathcal{T}_+^s) = \mathcal{R}_+^{-s-n} \quad (s \in \mathbb{C}^n)$

5. Les distributions homogènes à droite qui se transforment à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ suivant $u \mapsto$ dét u .

5.1. On va maintenant étudièr la classe des distributions qui se transforme à droite par B_o (resp. ${}^tB_o$) suivant un caractère de B_o (resp. ${}^tB_o$) (elles seront donc α_s (resp. β_s-homogènes) avec un s convenable), et à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ suivant $u \mapsto$ dét u (elles seront donc dans $\mathcal{D}'_-$).

Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, on va construire une distribution $\in \mathcal{D}'_-$ qui est α_s-homogène ; pour cela on remarque que pour $s \in \omega_n$, la fonction α_s se prolonge continûment à $M_n(\mathbb{R})$, tandis que pour $\mathcal{R}e(s_n) = \mathcal{R}e(s_{n-1}) = \ldots = \mathcal{R}e(s_1) = 0$ elle définit un élement de $L^\infty(dx)$ dans $M_n(\mathbb{R})$, et c'est ce qui a permis de définir la distribution T_+^s ; mais il est aussi vrai que la fonction $x \mapsto \mathrm{sgn}(\text{dét } x)\,\alpha_s(x)$, qui est définie sans ambiguité dans $GL(n,\mathbb{R})$, a les mêmes propriétés de sorte que pour $s \in \bar{\omega}_n$, c'est-à-dire pour $0 \leq \mathcal{R}e(s_n) \leq \mathcal{R}e(s_{n-1}) \leq \ldots \leq \mathcal{R}e(s_1)$, elle définit dans $M_n(\mathbb{R})$ une distribution T_-^s ; de façon précise, si

$\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$, $\langle T_-^s , \varphi\rangle = \int_{\text{dét}x\neq 0} \mathrm{sgn}(\text{dét } x)\, \alpha_s(x)\, \varphi(x)\, dx$ et il est clair que $s \mapsto T_-^s$ est analytique dans $\bar{\omega}_n$, et que $T_-^s\,(uxb) = (\text{dét } u)\, \alpha_s(b)\, T_-^s(x)$ dès que $u \in O(n,\mathbb{R})$, $b \in B_o$ et $s \in \bar{\omega}_n$. D'après la proposition II-3 , $\langle T_-^s, \varphi\rangle = \langle T_-^s, E_-\varphi\rangle = \langle T_-^s , \vartheta\psi\rangle$ avec $\psi \in \mathcal{D}_+$, et ainsi :

$$\langle T_-^s, \varphi\rangle = \int_{\text{dét } x\neq 0} |\text{dét } x|\, \alpha_s(x)\ \psi(x)\, dx = \langle T_+^{s+1}, \psi\rangle$$

5.2. On est ainsi amené à poser :

$$\mathcal{T}_-^s = \pi^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum\limits_i s_i}\ T_-^s \Big/ \prod_{1\leq i\leq n} \left(\Gamma\left(\frac{s_i+n+2-i}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)\right)$$

et à énoncer :

Proposition II-10 : (i); La fonction $s \mapsto \mathcal{T}_-^s$ se prolonge à $\mathbb{C}^n$ en une fonction analytique.

(ii) Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, l'espace des distributions α_s-homogènes appartenant à $\mathcal{D}'_-$ est de dimension 1, (donc engendré par $\mathcal{T}_-^s$).

(iii) $\vartheta\, \mathcal{T}_-^s = \mathcal{T}_+^{s+1}$

et $\int \mathcal{T}_-^s(x)\ (\text{dét } x)\ e^{-\pi \mathrm{tr}({}^txx)}\ dx = 1$ pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$.

Démonstration : D'après ce qui précède, pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}$ il existe $\psi \in \mathfrak{D}_+$ telle que, au moins lorsque $s \in \tilde{\omega}_n$:

$$<\mathcal{C}_-^s , \varphi> = <\mathcal{C}_+^{s+1} , \psi>$$

et le second membre a un polongement analytique dans $\mathbb{C}^n$; ceci prouve la partie (i) de l'énoncé. Maintenant, (ii) est immédiat puisque la multiplication $\mathfrak{V}$ par la fonction déterminant est un monomorphisme de l'espace des distributions α_s-homogènes appartenant à $\mathfrak{D}'_-$ dans l'espace des distributions α_{s+1}-homogènes appartenant à $\mathfrak{D}'_+$, qui est de dimension 1. Pour montrer que $\mathfrak{V}\mathcal{C}_-^s = \mathcal{C}_+^{s+1}$, on remarque que cette égalité est trivialement vraie lorsque $s \in \omega_n$, ce qui entraîne qu'elle est vraie partout. Enfin la dernière égalité vaut parce que $\int \mathcal{C}_+^s(x)\ e^{-\pi tr({}^txx)}\ dx = 1$ pour tout s.

5.3. De la même manière la relation :

$$\int \mathcal{R}_-^s(x)\ (\text{dét } x)\ \varphi(x)\ dx = \int \mathcal{R}_+^{s+1}(x)\ \varphi(x)\ dx \qquad (\text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{D}_+)$$

définit une distribution $\mathcal{R}_-^s \in \mathfrak{D}'_-$ qui est β_s-homogène ; autrement dit : $\mathcal{R}_-^s(uxb) = (\text{dét } u)\ \beta_s(b)\ \mathcal{R}_-^s(x)$ pour tous $u \in O(n,\mathbb{R})$ et $b \in {}^tB_o$. De plus, $\mathfrak{V}\mathcal{R}_-^s = \mathcal{R}_+^{s+1}$ et l'espace des distributions β_s-homogènes appartenant à $\mathfrak{D}'_-$ est de dimension 1. En résumé : ·

Proposition II-11 : Soit $s \in \mathbb{C}^n$ tel que $0 \leq \mathcal{R}e(s_1) \leq \mathcal{R}e(s_2) \leq \ldots \leq \mathcal{R}e(s_n)$; alors la fonction $x \mapsto \text{sgn}\ (\text{dét } x)\ \beta_s(x)$ définit une distribution R_-^s dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$s \mapsto \mathcal{R}_-^s = \pi^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum s_i}\ R_-^s \Big/ \prod_{1\leq i\leq n} \left(\Gamma\left(\frac{s_i+1+i}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\right)$$

soit analytique dans $\mathbb{C}^n$. Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, l'espace des distributions β_s-homogènes appartenant à $\mathfrak{D}'_-$ est engendré par $\mathcal{R}_-^s$ et

$$\int \mathcal{R}_-^s(x)\ (\text{dét } x)\ e^{-\pi tr({}^txx)} dx = 1\ .$$

5.4. Maintenant on vérifie immédiatement qu'une distribution appartient à $\mathfrak{D}'_-$ si et seulement si sa transformée de Fourier a la même propriété, et on a :

Proposition II-12 : Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$

$$\mathcal{F}\,\mathcal{C}_-^s = (-i)^n\ \mathcal{R}_-^{-s-n}$$

Démonstration : On sait qu'il existe $c_-(s) \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{F}\,\mathcal{C}_-^s = c_-(s)\ \mathcal{R}_-^{-s-n}$ et on détermine $c_-(s)$ ainsi :

$$c_-(s) = \int (\mathcal{F}\mathcal{T}^s_-)(x)(\text{dét } x)\, e^{-\pi tr({}^t xx)}\, dx$$

$$= \int \mathcal{T}^s_-(x) \, (\mathcal{F}(x \mapsto (\text{dét } x)\, e^{-\pi tr({}^t xx)}))(x)\, dx$$

Or $\mathcal{F}(x \mapsto (\text{dét } x)\, e^{-\pi tr({}^t xx)})(x) = (-\frac{1}{2\pi i})^n \, \Delta e^{-\pi tr({}^t xx)}$

et un calcul direct immédiat prouve que :

$$\Delta e^{-\pi tr({}^t xx)} = (-2\pi)^n (\text{dét } x)\, e^{-\pi tr({}^t xx)} \quad ,$$

de sorte que :

$$c_-(\lambda) = (-i)^n \int \mathcal{T}^s_-(x)\, (\text{dét } x)\, e^{-\pi tr({}^t xx)}\, dx = (-i)^n \, .$$

5.5. On peut maintenant décrire explicitement l'effet des opérateurs différentiels ∇, Δ, D_1, D_2 sur les distributions $\mathcal{T}^s_\pm$ et $\mathfrak{R}^s_\pm$; d'abord les formules déjà signalées $\nabla \mathcal{T}^s_- = \mathcal{T}^{s+1}_+$ et $\nabla \mathfrak{R}^s_- = \mathfrak{R}^{s+1}_+$ donnent par transformation de Fourier :

(II,5) $$\Delta \mathcal{T}^s_- = (2\pi)^n \, \mathcal{T}^{s-1}_+$$

(II,6) $$\Delta \mathfrak{R}^s_- = (2\pi)^n \, \mathfrak{R}^{s-1}_+$$

D'autre part, en comparant les facteurs de normalisation de T^s_+ et T^{s+1}_- (resp. R^s_+ et R^{s+1}_-) on trouve :

(II,7) $$\nabla \mathcal{T}^s_+ = (2\pi)^{-n} \prod_{1\le i\le n} (s_i + n + 1 + i) \, \mathcal{T}^{s+1}_-$$

(II,8) $$\nabla \mathfrak{R}^s_+ = (2\pi)^{-n} \cdot \prod_{1\le i\le n} (s_i + i) \quad \mathfrak{R}^{s+1}_+$$

Par transformation de Fourier, il vient :

(II,9) $$\Delta \mathfrak{R}^s_+ = \prod_{1\le i\le n} (s_i + i - 1) \, \mathfrak{R}^{s-1}_-$$

(II,10) $$\Delta \mathcal{T}^s_+ = \prod_{1\le i\le n} (s_i + n - i) \, \mathcal{T}^{s-1}_-$$

Enfin par composition des opérateurs ∇ et Δ , on trouve :

(II,11) $$D_1\ \mathcal{C}^s_{\pm} = \prod_{1\leq i\leq n} (s_i + n - i)\ \mathcal{C}^s_{\pm}$$

(II,12) $$D_1\ \mathcal{R}^s_{\pm} = \prod_{1\leq i\leq n} (s_i + i - 1)\ \mathcal{R}^s_{\pm}$$

(les signes + ou - étant les mêmes dans les deux membres), et des formules de même type pour l'opérateur D_2 (remplacer s_i par $s_i + 1$, $(1\leq i\leq n)$).

Remarque : On vient de voir ci-dessus que :

$$\mathcal{F}(x \mapsto (\text{dét } x)\ e^{-\pi \operatorname{tr}({}^t xx)}) = (-i)^n\ (x \mapsto (\text{dét } x)\ e^{-\pi \operatorname{tr}({}^t xx)}).$$

En fait, ceci peut se justifier autrement : $x \mapsto$ dét x est une fonction polynome harmonique sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ (identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$), et il est connu que sur $\mathbb{R}^p$, on a :

$$\mathcal{F}(x \mapsto P_n(x)\ e^{-\pi\sum x_i^2}) = (-i)^n\ (x \mapsto P_n(x)\ e^{-\pi\sum x_i^2})$$

pour tout polynome harmonique P_n (homogène) de degré n .

6. Distributions définies par les fonctions sphériques de $GL(n,\mathbb{R})$.

6.1. On va étudier maintenant les distributions définies par des fonctions sphériques de $GL(n,\mathbb{R})$. Soit $s \in \mathbb{C}^n$ et ϕ_s la fonction définie sur $GL(n,\mathbb{R})$ par :

$$\phi_s(x) = \int_{O(n,\mathbb{R})} \alpha_s\ (xu)\ du\ .$$

C'est une fonction sphérique de $GL(n,\mathbb{R})$ et n'importe quelle fonction **sphérique de** $GL(n,\mathbb{R})$ est de cette forme avec un s convenable.

Supposons maintenant $s \in \omega_n$, c'est-à-dire tel que $0 < \mathcal{R}e(s_n) < \mathcal{R}e(s_{n-1}) < \ldots < \mathcal{R}e(s_1)$; on sait que α_s se prolonge alors par continuité à $M_n(\mathbb{R})$, de sorte qu'il en est de même de ϕ_s ; de façon précise, la fonction qui coïncide sur $GL(n,\mathbb{R})$ avec la fonction ϕ_s définie ci-dessus et qui vaut zéro en dehors de $GL(n,\mathbb{R})$ est continue. D'autre part, si $\mathcal{R}e(s_1) = \mathcal{R}e(s_2) = \ldots = \mathcal{R}e(s_n) = 0$, la fonction coïncidant avec ϕ_s sur $GL(n,\mathbb{R})$ et nulle ailleurs est une fonction mesurable et bornée sur $M_n(\mathbb{R})$ (pour chaque $x \in GL(n,\mathbb{R})$, on a : $|\phi_s(x)| \leq \int |\alpha_s(xu)|\ du = 1$). Il en résulte que pour chaque $s \in \bar{\omega}_n$ (i.e. tel que $0 \leq \mathcal{R}e(s_n) \leq \mathcal{R}e(s_{n-1}) \leq \ldots \leq \mathcal{R}e(s_1)$) la fonction ϕ_s définit dans $M_n(\mathbb{R})$ une distribution Σ_+^s de la manière suivante : si $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$, on a :

$$<\Sigma_+^s , \varphi> = \int_{\text{dét } x\neq 0} \phi_s(x)\, \varphi(x)\, dx$$

6.2. Il en résulte que :

$$<\Sigma_+^s , \varphi> = \int \phi_s(x)\, \varphi(x)\, dx = \iint \alpha_s(xu)\, \phi_s(x)\, \varphi(x)\, dx\, du$$

$$= \int \alpha_s(x)\, dx \int_{O(n,\mathbb{R})} \varphi(xu)\, du = < T_+^s , \int_{O(n,\mathbb{R})} \varphi(xu)\, du > .$$

Cette formule signifie que Σ_+^s est l'unique distribution invariante à droite par $O(n,\mathbb{R})$ qui coïncide avec T_+^s sur l'espace des $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ $O(n,\mathbb{R})$-invariantes à droite. On voit ainsi que Σ_+^s est déterminée de façon unique par T_+^s , et on pose naturellement :

$$G_+^s = \pi^{\frac{1}{2}\sum_i s_i} \Sigma_+^s \Big/ \prod_{1\leq i\leq n} \left(\Gamma\left(\frac{s_i + n + 1 - i}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)\right)$$

de sorte que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$:

$$< G_+^s , \varphi > = < \mathcal{T}_+^s , \int_{O(n,\mathbb{R})} \varphi(xu)\, du >$$

<u>Proposition II-13</u> : a) La fonction $s \mapsto G_+^s$ se prolonge à $\mathbb{C}^n$ en une fonction analytique telle que pour tout $s \in \mathbb{C}^n$:

$$\int_{M_n(\mathbb{R})} G_+^s(x)\, e^{-\pi \operatorname{tr}({}^t xx)}\, dx = 1$$

b) Chaque distribution G_+^s est tempérée et pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$

$$< \mathcal{F} G_+^s , \varphi > = < \mathcal{R}_+^{-s-n} , \int \varphi(xu)\, du >$$

<u>Démonstration</u> : La première partie est évidente ; la deuxième l'est à peine moins : si $\varphi_j \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ est une suite de fonctions tendant vers zéro dans $\mathcal{S}(M_n(\mathbb{R}))$, il en est de même de la suite $\psi_j : x \mapsto \int \varphi_j(xu)\, du$, et comme $\mathcal{T}_+^s$ est tempérée, la suite des nombres $< G_+^s , \varphi_j > = < \mathcal{T}_+^s , \psi_j >$ tend vers zéro, ce qui montre que G_+^s est une distribution tempérée. Ceci étant :

$$< \mathcal{F} G_+^s , \varphi > = < G_+^s , \mathcal{F}\varphi > = < \mathcal{T}_+^s , \int_{O(n,\mathbb{R})} \mathcal{F}\varphi(xu)\, du > ;$$

mais il est immédiat que pour tout x :

$$\int_{O(n,\mathbb{R})} (\mathcal{F}\varphi)(xu)\,du = (\mathcal{F}\,\mathcal{M}_d\varphi)(x)$$

(avec $\mathcal{M}_d\,\varphi(x) = \int \varphi(xu)\,du)$, et ainsi :

$$<\mathcal{F}\mathfrak{S}_+^s\,,\varphi> = <\mathcal{F}\mathfrak{T}_+^s\,,\ \mathcal{M}_d\varphi> = <\mathcal{R}_+^{-s-n}\ ,\mathcal{M}_d\varphi>$$

6.3. On est ainsi amené à identifier les distributions (bi-invariantes par le groupe orthogonal) $\varphi \mapsto <\mathcal{R}_+^{-s-n}\ ,\ \mathcal{M}_d\varphi>$. Le résultat est simple :

Proposition II-14 : Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, on pose $\check{s} = (s_n, s_{n-1},\dots,s_n)$; alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$:

$$<\mathfrak{S}_+^{\check{s}}\,,\varphi> = <\mathcal{R}_+^s\,,\ \mathcal{M}_d\varphi> \quad ,$$

de sorte que pour tout $s \in \mathbb{C}^n$:

$$\text{(II,13)} \qquad \mathcal{F}\mathfrak{S}_+^s = \mathfrak{S}_+^{-s-n}$$

Démonstration : Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, on définit une fonction sphérique de $GL(n,\mathbb{R})$ $\phi'_s : x \mapsto \int \beta_s(xu)\,du$ (où β_s est comme plus haut l'unique fonction sur $GL(n,\mathbb{R})$ qui est invariante à gauche par $O(n,\mathbb{R})$ et qui coincide sur ${}^tB_o$ avec le caractère de ce groupe défini par s) , qui définit sur $M_n(\mathbb{R})$ une distribution Σ'_s (lorsque $0 \leq \mathcal{R}e(s_1) \leq \mathcal{R}e(s_2) \leq\dots\leq \mathcal{R}e(s_n)$) telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$:

$$<\Sigma'_s\,,\varphi> = \int \beta_s(x)\,(\mathcal{M}_d\,\varphi)(x)\,dx$$

On en déduit alors que $s \mapsto \mathfrak{S}'_s = \pi^{\frac{1}{2}\sum s_i}\ \Sigma'_s \Big/ \prod_{1\leq i\leq n} \left(\Gamma(\frac{s_i+i}{2})\Big/\Gamma(\frac{i}{2})\right)$

est prolongeable en une fonction analytique dans $\mathbb{C}^n$ telle que :

$$<\mathfrak{S}'_s\,,\varphi> = <\mathcal{R}_+^s\,,\ \mathcal{M}_d\varphi> \quad ,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$. On démontre ensuite que $\phi_{\check{s}}(x) = \phi'_s(x)$ pour tout $x \in GL(n,\mathbb{R})$: il suffit de démontrer cette égalité lorsque x est diagonale puisque ϕ et ϕ' sont bi-invariantes par le groupe orthogonal ; mais en écrivant explicitement les nombres $\phi_s(x)$ et $\phi'_s(x)$ comme des intégrales de fonctions où apparaissent les Δ_i et les δ_i , on constate que si :

$$\phi_{\check{s}}(x) = \int_{O(n,\mathbb{R})} F(xu)\,du\ , \quad \text{alors} \quad \phi'_s(x) = \int_{O(n,\mathbb{R})} F(x,uu_o)\,du$$

où u_o est la matrice de permutation définie (dans la base canonique $(e_i)_i$ de $\mathbb{R}_n$) par $u_o\,e_i = e_{n-i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$, de sorte que uu_o est la matrice obtenue à partir de u en permutant les colonnes de u suivant $1 \mapsto n$, $2 \mapsto n-1$, ..., $n \mapsto 1$; on a donc bien $\phi_{\check{s}}(x) = \phi'_s(x)$ pour tout $x \in GL(n,\mathbb{R})$. Si on suppose maintenant $\mathcal{R}e(s_1) = \mathcal{R}e(s_2) = \ldots = \mathcal{R}e(s_n) = 0$, Σ_+^s et Σ'_s sont définies toutes deux par les fonctions localement intégrables ϕ_s et ϕ'_s respectivement, de sorte que $\Sigma_+^s = \Sigma'_s$; comme d'autre part les facteurs de "normalisation" de Σ_+^s et Σ'_s sont égaux, on voit que $\mathcal{G}_+^s = \mathcal{G}'_s$ lorsque $\mathcal{R}e(s_1) = \mathcal{R}e(s_2) = \ldots = \mathcal{R}e(s_n) = 0$, donc pour tout $s \in \mathbb{C}^n$.

6.4. De la même façon, si $s \in \varpi_n$, la fonction $x \mapsto \operatorname{sgn}(\det x)\,\phi_s(x)$ définit dans $M_n(\mathbb{R})$ une distribution Σ_-^s telle que pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$:

$$\langle \Sigma_-^s , \varphi \rangle = \int T_-^s(x)\,dx \int_{O(n,\mathbb{R})} \varphi(xu)\,(\det u)\,du$$

$$\text{Si on pose } \mathcal{G}_-^s = \pi^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\Sigma s_i}\ \Sigma_-^s \Big/ \prod_{1 \leq i \leq n} \left(\Gamma\left(\frac{s_i+n+2-i}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)\right)$$

alors $s \mapsto \mathcal{G}_-^s$ a un prolongement analytique dans $\mathbb{C}^n$ tel que pour tout $s \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle \mathcal{G}_-^s , \varphi \rangle = \int \mathcal{T}_-^s(x)\,dx \int_{O(n,\mathbb{R})} \varphi(xu)\,(\det u)\,du$$

En prenant en particulier $\varphi : x \mapsto (\det x)\,e^{-\pi\,\mathrm{tr}({}^t xx)}$, il vient :

$$\int \mathcal{G}_-^s(x)\,(\det x)\,e^{-\pi\,\mathrm{tr}({}^t xx)}\,dx = 1\ , \quad (\text{pour tout } s \in \mathbb{C}^n)\ .$$

6.5. Chaque distribution $\mathcal{G}_-^s$ est tempérée et pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$:

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{G}_-^s , \varphi \rangle = (-i)^n \int \mathcal{R}_-^{-s-n}(x)\,dx \int \varphi(xu)(\det u)\,du$$

On identifie comme plus haut les distributions $\mathcal{G}_-^{\check{s}}$ et $\varphi \mapsto \int \mathcal{X}_-^s(x)\,dx \int \varphi(xu)\,(\det u)\,du$ et on aboutit à la conclusion :

$$(\mathrm{II},14) \qquad \mathcal{F}\mathcal{G}_-^s = (i-)^n\ \mathcal{G}_-^{-\check{s}-n}$$

<u>Remarque</u> : Soit $\gamma(\lambda) = \pi^{\frac{1}{2}-\lambda}\ \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)$ et $\gamma^*(s) = \prod_{1 \leq i \leq n} \gamma(s_i + i - i)$;

supposons maintenant $0 \geq \mathcal{R}e(s_1) \geq \mathcal{R}e(s_2) \geq \dots \geq \mathcal{R}e(s_n)$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(GL(n,\mathbb{R}))$; alors l'intégrale $\int_{GL(n,\mathbb{R})} \phi_s(x)\ \varphi(x)\ d^*x$ converge évidemment et la formule (II,13) montre aisément que l'on a :

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} \phi_s(x)\ \varphi(x)\ d^*x = \gamma^*(s) \int_{M_n(\mathbb{R})} \phi_{-\check{s}}(x)\ (\mathcal{F}\varphi)(x)\ dx$$

où l'intégrale du second membre converge parce que vu les conditions sur s, $\phi_{-\check{s}}$ est une fonction localement intégrable à croissance lente tandis que $\mathcal{F}\varphi$ est à décroissance rapide. On peut encore écrire :

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} \phi_s(x)\ \varphi(x)\ d^*x = \gamma^*(s) \int_{GL(n,\mathbb{R})} \phi_{n-\check{s}}(x)(\mathcal{F}\varphi)(x)\ d^*x$$

sous les mêmes conditions : $\varphi \in \mathcal{D}(GL(n,\mathbb{R}))$ et $0 \geq \mathcal{R}e(s_1) \geq \dots \geq \mathcal{R}e(s_n)$.

6.6. Soit maintenant s un élément fixe de $\tilde{\omega}_n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(\lambda) \geq -\mathcal{R}e(s_n)$; la fonction $x \mapsto |\det x|^\lambda\ \phi_s(x)$ (resp. $\operatorname{sgn}(\det x)\ |\det x|^\lambda\ \phi_s(x)$) définit dans $M_n(\mathbb{R})$ une distribution $Z_+^{\lambda,s}$ (resp. $Z_-^{\lambda,s}$). On pose :

$$\mathfrak{Z}_+^{\lambda,s} = \pi^{\frac{n\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sum_i s_i}\ Z_+^{\lambda,s} \Big/ \prod_{1\leq i\leq n}\left(\Gamma\left(\frac{\lambda+s_i+n+1-i}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)\right)$$

et

$$\mathfrak{Z}_-^{\lambda,s} = \pi^{\frac{n(\lambda+1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_i s_i}\ Z_-^{\lambda,s} \Big/ \prod_{1\leq i\leq n}\left(\Gamma\left(\frac{\lambda+s_i+n+2-i}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)\right)$$

<u>Proposition II-15</u> : Les fonctions $\lambda \mapsto \mathfrak{Z}_+^{\lambda,s}$ et $\lambda \mapsto \mathfrak{Z}_-^{\lambda,s}$ ont des prolongements analytiques dans $\mathbb{C}$; en fait, chacune des fonctions $(\lambda,s) \mapsto \mathfrak{Z}_+^{\lambda,s}$ et $(\lambda,s) \mapsto \mathfrak{Z}_-^{\lambda,s}$ est prolongeable en une fonction analytique dans $\mathbb{C}^{n+1}$. De plus, on a :

(II,15) $\qquad \mathcal{F}\,\mathfrak{Z}_+^{\lambda,s} = \mathfrak{Z}_+^{-\lambda-n,-\check{s}}$

(II,16) $\qquad \mathcal{F}\,\mathfrak{Z}_-^{\lambda,s} = (-i)^n\ \mathfrak{Z}_-^{-\lambda-n,-\check{s}}$

La démonstration est évidente dès que l'on écrit $\mathfrak{Z}_+^{\lambda,s} = \mathfrak{G}_+^{s+\lambda}$ et $\mathfrak{Z}_-^{\lambda,s} = \mathfrak{G}_-^{\lambda+s}$.

6.7. On détermine maintenant l'effet des différents opérateurs $\mathcal{V}$, Δ, D_1, D_2 sur les distributions $\mathfrak{G}_+^s$, $\mathfrak{G}_-^s$, $\mathfrak{Z}_+^{\lambda,s}$ et $\mathfrak{Z}_-^{\lambda,s}$. Cela donne lieu à des formules intéressantes.

Proposition II-16 : Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, on a :

(II,17) $\quad \mathcal{V}\,\mathcal{G}_-^{s} = \mathcal{G}_+^{s+1}$

(II,18) $\quad \Delta\,\mathcal{G}_-^{s} = (2\pi)^n\,\mathcal{G}_+^{s-1}$

(II,19) $\quad \mathcal{V}\,\mathcal{G}_+^{s} = (2\pi)^n \prod\limits_{1\leq i\leq n} (s_i + n + 1-i)\,\mathcal{G}_-^{s+1}$

(II,20) $\quad \Delta\,\mathcal{G}_+^{s} = \prod\limits_{1\leq i\leq n} (s_i + n - i)\,\mathcal{G}_-^{s-1}$

(II,21) $\quad D_1\mathcal{G}_-^{s} = \prod\limits_{1\leq i\leq n} (s_i + n - i)\,\mathcal{G}_-^{s}$

(II,22) $\quad D_2\mathcal{G}_-^{s} = \prod\limits_{1\leq i\leq n} (s_i + n + 1 - i)\,\mathcal{G}_-^{s}$

(II,23) $\quad D_1\mathcal{G}_+^{s} = \prod\limits_{1\leq i\leq n} (s_i + n - i)\,\mathcal{G}_+^{s}$

(II,24) $\quad D_2\,\mathcal{G}_+^{s} = \prod\limits_{1\leq i\leq n} (s_i + n + 1 - i)\,\mathcal{G}_+^{s}$

Démonstration : La formule (II,17) résulte immédiatement de ce que $\mathcal{V}\sum_-^{s} = \sum_+^{s+1}$ et de ce que les facteurs de normalisation de $\sum_-^{s}$ et de $\sum_+^{s+1}$ sont identiques ; la deuxième formule résulte de la première après transformation de Fourier. La troisième formule s'obtient en écrivant que $\mathcal{V}\sum_+^{s} = \sum_-^{s+1}$ et en comparant les facteurs de normalisation de $\sum_+^{s}$ et de $\sum_-^{s+1}$, et la quatrième se déduit de la troisième après transformation de Fourier. Les dernières formules sont des conséquences immédiates des précédentes (se rappeler que les opérateurs de Capelli D_1 et D_2 sont définis par $D_1 = \mathcal{V}\Delta$ et $D_2 = \Delta\,\mathcal{V}$) .

Remarques : 1) Il n'est pas étonnant de constater que les "distributions sphériques" $\mathcal{G}_+^{s}$ et $\mathcal{G}_-^{s}$ sont des fonctions propres des opérateurs de Capelli (qui proviennent du centre de l'algèbre enveloppante de $GL(n,\mathbb{R})$) ; les formules (II,21) à (II,24) fournissent les valeurs propres associées. Signalons enfin qu'en écrivant la formule (II,20) dans $GL(n,\mathbb{R})$ on trouve la formule :

(II,25) $\quad \Delta\,\Phi_s(x) = \prod\limits_{1\leq i\leq n} (s_i + n - i)\ \mathrm{sgn}\,(\det x)\ \ \Phi_{s-1}(x)$

$(x \in GL(n,\mathbb{R}))$, qui ne semble pas avoir de démonstration directe simple. En tout cas, elle résulte simplement de la formule :

$$(II,26) \qquad \Delta \alpha_s(x) = \prod_{1\le i\le n} (s_i + n - i) \text{ sgn } (\text{dét } x) \ \alpha_{s-1}(x)$$

$(x \in GL(n,\mathbb{R}))$, qui résulte de (II,9). Remarquons qu'on a aussi pour tout $x \in GL(n,\mathbb{R})$:

$$(II,27) \qquad \Delta \beta_s(x) = \prod_{1\le i\le n} (s_i + i - 1) \text{ sgn } (\text{dét } x) \ \beta_{s-1}(x)$$

2) On peut évidemment ré-écrire les formules (II,17) à (II,24) pour les distributions $\mathfrak{Z}_+^{\lambda,s}$ et $\mathfrak{Z}_-^{\lambda,s}$; par exemple :

$$(II,28) \qquad \Delta \mathfrak{Z}_-^{\lambda,s} = (2\pi)^n \mathfrak{Z}_+^{\lambda-1,s}$$

$$(II,29) \qquad \Delta \mathfrak{Z}_+^{\lambda,s} = \prod_{1\le i\le n} (\lambda + s_i + n - i) \ \mathfrak{Z}_-^{\lambda-1,s}$$

$$(II,30) \qquad D_1 \mathfrak{Z}_\pm^{\lambda,s} = \prod_{1\le i\le n} (\lambda + s_i + n - i) \ \mathfrak{Z}_\pm^{\lambda,s}$$

6.8. Ces dernières formules généralisent les formules du lemme I-4, que l'on obtient en faisant $s = 0$. Ceci nous amène à résumer les propriétés des distributions $\mathfrak{Z}_\pm^{\lambda,0}$.

<u>Proposition II-17</u> : Pour $\mathcal{R}e(\lambda) \geq 0$, soit $T_+^\lambda = T_+^{(\lambda,\dots,\lambda)} = Z_+^{\lambda,0}$ (resp. $T_-^\lambda = T_-^{(\lambda,\dots,\lambda)} = Z_-^{\lambda,0}$) la distribution définie dans $M_n(\mathbb{R})$ par la fonction $x \mapsto |\text{dét } x|^\lambda$ (resp. $x \mapsto \text{sgn } (\text{dét } x) \, |\text{dét } x|^\lambda$) ; alors chacune des deux fonctions $\lambda \mapsto \mathcal{C}_+^\lambda =$

$$\mathcal{C}_+^{(\lambda,\dots,\lambda)} = \mathfrak{Z}_+^{\lambda,0} = \pi^{\frac{n\lambda}{2}} T_+^\lambda \Big/ \prod_{1\le p\le n}\left(\Gamma\left(\frac{\lambda+p}{2}\right)\Big/\left(\frac{p}{2}\right)\right) \text{ et } \lambda \longmapsto \mathcal{C}_-^\lambda =$$

$$\mathcal{C}_-^{(\lambda,\dots,\lambda)} = \mathfrak{Z}_-^{\lambda,0} = \pi^{\frac{n(\lambda+1)}{2}} T_-^\lambda \Big/ \prod_{1\le p\le n}\left(\Gamma\left(\frac{\lambda+p+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right)$$ a un prolongement

analytique dans $\mathbb{C}$, et pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{C}_+^\lambda$ (resp. $\mathcal{C}_-^\lambda$) est un élément non nul de $\mathcal{H}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{H}_-^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$. D'autre part, chaque espace $\mathcal{R}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R})) \cap \mathcal{D}_+'$ (resp. $\mathcal{R}_-^\lambda(M_n(\mathbb{R})) \cap \mathcal{D}_-'$) est de dimension 1 . On a enfin :

$$(II,31) \qquad \mathcal{F}\, \mathcal{C}_+^\lambda = \mathcal{C}_+^{-\lambda-n}$$

$$(II,32) \qquad \mathcal{F}\, \mathcal{C}_-^\lambda = (-i)^n \, \mathcal{C}_-^{-\lambda-n}$$

7. Appendice :

7.1. Lemme : Soit $q_1, \ldots, q_n$ des fonctions polynomes sur $\mathbb{R}^m$ qui sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{R}$; alors $\theta : x \to (q_1(x), \ldots, q_n(x))$ est de rang n dans un ouvert dense.

Démonstration : Soit $k = \mathbb{R}$ et $K = k(x_1, \ldots, x_m)$ le corps des fractions rationnelles à m variables ; il existe $m-n$ variables parmi les x_i, qu'on peut supposer (au besoin après changement de numérotation) être $x_{n+1}, \ldots, x_m$, telles que $(q_1, \ldots, q_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ soit une base de transcendance de K. Soit maintenant $u_1, \ldots, u_m$ des polynomes sur k (en $x_1, \ldots, x_m$) tels que $(u_1, \ldots, u_m)$ soit une base de transcendance de K ; alors la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ est de rang m : on sait en effet (algebra, S. Lang, prop. 10, chap. X) que le K-espace vectoriel $\mathrm{Der}_k K$ des dérivations de K sur k est de dimension m et que $D \mapsto (Dx_1, \ldots, Dx_m)$ aussi bien que $D \mapsto (Du_1, \ldots, Du_m)$ sont des isomorphismes de $\mathrm{Der}_k K$ sur K^m ; or :

$$Du_i = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} Dx_j \qquad (1 \leq i \leq m) ,$$

de sorte que la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ considérée comme endomorphisme de K^n est un automorphisme.

Maintenant, lorsque $u_i = q_i \quad (1 \leq i \leq n)$, $u_j = x_j \quad (n < j)$,

$\mathrm{dét}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \mathrm{dét}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$, de sorte que $\mathrm{dét}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une fonction polynome non nulle. En revenant à $\mathbb{R}$, on voit qu'il y a un ouvert de Zariski (non vide) de $\mathbb{R}^m$ où θ est de rang n.

7.2. A titre de remarque, voici une autre application du théorème de Glaeser ; rappelons d'abord l'énoncé complet de ce résultat :

Théorème (Glaeser) : Soit $\theta : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ayant les propriétés suivantes :

(i) θ est une application analytique réelle.

(ii) θ est de rang maximal n dans un ouvert dense de $\mathbb{R}^q$.

(iii) L'image de θ est fermée.

(iv) Pour tout compact K de R^n, contenu dans l'image de θ , il existe un compact K' de $\mathbb{R}^q$ tel que $\theta(K') = K$.

Alors $\theta_* : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathcal{E}(\mathbb{R}^q)$ est à image fermée.

Comme le signale Glaeser, si θ est une application propre, les conditions (iii) et (iv) sont réalisées (Bourbaki, Top. Gen. Chap. I, § 10, propositions 1 et 7) et c'est le cas examiné plus haut. Mais ce théorème s'applique comme on va le voir, dans un cas où θ n'est pas propre : on s'intéresse au groupe adjoint de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, c'est-à-dire au groupe des automorphismes de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ qui sont de la forme $x \longmapsto m\,x\,m^{-1}$, $m \in GL(n,\mathbb{R})$; les fonctions polynomes p_o, p_1, ..., p_n définies par la formule :

$$\text{dét}\,(\xi \mathbb{1}_n - x) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i\, p_i(x)\, \xi^{n-i}$$

sont invariantes par le groupe adjoint, et il y a un ouvert de Zariski Ω , à savoir celui des matrices dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes, où ces fonctions paramétrisent les orbites du groupe adjoint : soient x et y deux matrices dans Ω telles que $p_i(x) = p_i(y)$ pour chaque i, $1 \leq i \leq n$; comme x et y sont semi-simples, il existe $m \in GL(n,\mathbb{C})$ telle que $x = m\,y\,m^{-1}$; mais alors il existe $m' \in GL(n,\mathbb{R})$ telle que $x = m'\,y\,(m')^{-1}$ (S. Lang, Algebra, Chap. XV, § 3, cor. 2 du théorème 6) . Ceci étant, l'application $\theta : x \longmapsto (p_1(x),\ldots, p_n(x))$ a une section $s : \mathbb{R}^n \longmapsto M_n(\mathbb{R})$, définie ainsi :

$$s(u_1,\ldots,u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots\ldots 0 & (-1)^{n-1}u_n \\ 1 & 0 \ldots\ldots 0 & \\ 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & (-1)^{i-1}u_i \\ & 0 & -u_2 \\ 0 & 0 \quad 1 & u_1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve (iv) et (iii) $(\theta(M_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^n)$ et aussi (ii) parce qu'il résulte de ce que l'image de θ est $\mathbb{R}^n$ que les fonctions $p_1,\ldots,p_n$ sont algébriquement indépendantes. Les conditions d'application du théorème sont donc réunies. Soit maintenant f une fonction polynome (respectivement C^m , analytique) invariante par le groupe adjoint sur $M_n(\mathbb{R})$, $\overline{f} = f \circ s$, et comp. $(x) = s\,(\theta(x))$ la matrice compagnon de x $(x \in M_n(\mathbb{R}))$; alors $\overline{f}(\theta(x)) = f\,(\text{comp.}(x))$, de sorte que les 2 fonctions polynomes (resp. C^m, analytiques) $\overline{f} \circ \underline{\theta}$ et f sont égales dans

Ω, donc partout ; cela prouve d'une part que l'anneau des fonctions polynomes invariantes par le groupe adjoint est engendré par les fonctions p_i $(0 \leq i \leq n)$ et d'autre part que θ_* est un isomorphisme d'espace de Fréchet de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ sur le sous-espace de $\mathcal{E}(M_n(R))$ constitué par les fonctions invariantes par le groupe adjoint.

Remarques : 1) L'étude des fonctions invariantes n'apporte rien ici concernant les distributions invariantes par le groupe adjoint.

2) L'opération de restriction des fonctions invariantes en sous-espace des matrices diagonales n'est pas un isomorphisme : elle a un noyau qui est l'espace des fonctions nulles sur l'ensemble fermé constitué par les matrices à spectre réel.

CHAPITRE III

On démontre qu'une distribution homogène à gauche, nulle dans $GL(n,\mathbb{R})$ mais non nulle, est nécessairement de degré entier négatif. Il résulte de celà d'une part que chaque espace $\mathcal{L}_{\pm}^{\lambda}$ ou $\mathcal{R}_{\pm}^{\lambda}$ est de dimension 1 sauf peut-être lorsque λ est un entier $-p$ avec $0 < p < n$, et d'autre part des renseignements sur les supports des distributions homogènes de degré entier négatif ; on montre par ailleurs que les espaces $\mathcal{L}_{+}^{-p}$ (où p est un entier tel que $0 < p < n$) sont de dimension infinie. Enfin, on détermine explicitement les distributions bi-invariantes par le groupe $SL(n,\mathbb{R})$ qui sont portées par la variété des matrices singulières (ce sont les solutions bi-invariantes des équations de division : $(\text{dét}.x)^m\, T = 0$, m entier $\geqslant 1$) ; à ce point, les distributions bi-invariantes par $SL(n,\mathbb{R})$ sont presqu'entièrement déterminées.

1. Les relations de Turnbull.

1.1. Soit k un corps commutatif, $x = (x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ un ensemble d'éléments (d'une extension de k) qui sont algébriquement indépendants sur k, $k[x]$ l'algèbre sur k engendrée par les x_{ij} ; on définit la "matrice adjointe" x^* de x par :

$$x^* = \frac{\partial}{\partial\, {}^t x}\, \text{dét}\ x, \tag{III,1}$$

de sorte que $x^* \in M_n(k[x])$ et $x^* x = x x^* = (\text{dét}\ x)\, \mathbb{1}_n$. La réciproque est d'ailleurs exacte : si $y \in M_n(k[x])$ et $yx = (\text{dét}\ x)\, \mathbb{1}_n$, alors $y = x^*$.

Soit maintenant ξ un élément transcendant sur $k(x)$ et $\text{dét}.\,(\xi.\mathbb{1}_n - x) = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} (-1)^i\, p_i(x)\, \xi^{n-i}$ le polynome caractéristique de x. Il est clair qu'il existe des éléments $B_o(x), \dots, B_{n-1}(x)$ de $M_n(k[x])$ tels que :

$$(\xi.\mathbb{1}_n - x)^* = \sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} B_i(x)\, \xi^{n-i-1}, \tag{III,2}$$

et en multipliant les deux membres de cette égalité par $\xi.\mathbb{1}_n - x$, on trouve les relations :

$$B_o(x) = \mathbb{1} \tag{III,3}$$

$$B_r(x) = x\, B_{r-1}(x) + (-1)^r\, p_r(x)\, \mathbb{1}_n \quad (1 \leqslant r \leqslant n-1) \tag{III,4}$$

$$x\, B_{n-1}(x) = (-1)^{n-1}\, p_n(x)\, \mathbb{1}_n \tag{III,5}$$

de sorte qu'une récurrence sur r montre qu'en fait :

(III,6) $$B_r(x) = \sum_{0\leq i\leq r} (-1)^i\, p_i(x)\, x^{r-i} \qquad (0 \leq r \leq n) ,$$

avec $B_n(x) = 0$ (équation de Hamilton-Cayley).

1.2. On aura besoin de quelques propriétés des matrices $B_r(x)$ $(0 \leq r \leq n)$; on vérifie facilement que :

(III,7) $$(\xi.\mathbb{1}_n - x)^* = - \frac{\partial}{\partial^t x} \text{dét}\, (\xi.\mathbb{1}_n - x) ,$$

en remarquant que l'élément d'indice (i,j) de $(\xi.\mathbb{1}_n - x)^*$ est tout simplement au signe près le co-facteur d'indice (j,i) dans le développement du déterminant dét $(\xi.\mathbb{1}_n - x)$. Ceci dit, on a le :

Lemme III-1 : Pour tous les entiers r tels que $0 \leq r \leq n$ (avec la convention $B_{-1} = 0$) on a :

(i) $$\frac{\partial}{\partial^t x} p_r(x) = (-1)^{r-1} B_{r-1}(x)$$

(ii) $$\mathrm{tr}(B_r(x)) = (-1)^r (n-r)\, p_r(x)$$

(iii) $$\frac{\partial}{\partial^t x} B_r(x) = (n-r)\, B_{r-1}(x) .$$

(Si $A \in M_n(k[x])$, $\frac{\partial}{\partial^t x} A$ est la matrice d'élément (i,j) : $\sum_h \frac{\partial}{\partial x_{hi}} A_{hj}$) .

Démonstration : (i) D'après la formule (III,7) , on a :

$$(\xi\, \mathbb{1}_n - x)^* = \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial^t x} p_i(x)\, \xi^{n-i} = \sum_{0\leq i\leq n-1} (-1)^i \frac{\partial}{\partial^t x} p_{i+1}(x)\, \xi^{n-i-1}$$

et en comparant avec (III,2) , on tire :

$$\frac{\partial}{\partial^t x} p_{i+1}(x) = (-1)^i\, B_i(x)$$

(ii) On fait une récurrence sur r ($\mathrm{tr}\, B_o = n$) :

$$\mathrm{tr}(B_{r+1}(x)) = \mathrm{tr}(x\, B_r(x) + (-1)^{r+1} p_{r+1}(x)\, \mathbb{1}_n)$$
$$= \mathrm{tr}(x\, B_r(x)) + (-1)^{r+1}\, n\, p_{r+1}(x) ,$$

et d'après (i) : $x\, B_r(x) = (-1)^r\, x \frac{\partial}{\partial {}^t x} p_{r+1}(x)$, de sorte que

$$\mathrm{tr}(x\,(B_r(x)) = (-1)^r \sum_{i,j} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} p_{r+1}(x) = (-1)^r\,(1+r)\,p_{r+1}(x) ,$$

et on a bien : $\mathrm{tr}(B_{r+1}(x)) = (-1)^{r+1}\,(n-r-1)\,p_{r+1}(x)$

(iii) On a : $\frac{\partial}{\partial {}^t x} B_o(x) = \frac{\partial}{\partial {}^t x} \mathbb{1} = 0$; on suppose la formule vraie jusqu'à l'ordre $r-1$, et on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial {}^t x} B_r(x) = \frac{\partial}{\partial {}^t x}(x\,B_{r-1}(x)) + (-1)^r \frac{\partial}{\partial {}^t x} p_r(x)$$

Or $\frac{\partial}{\partial {}^t x}(x\,B_{r-1}(x)) = \frac{\partial}{\partial {}^t x}(B_{r-1}(x).x)$ et on vérifie que si $A \in M_n(k[x])$:

$$\frac{\partial}{\partial {}^t x}(A.x) = \mathrm{tr}(A)\ \mathbb{1}_n + \left(\frac{\partial A}{\partial {}^t x}\right).x$$

ce qui donne avec l'aide de (ii) et l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{\partial}{\partial {}^t x}(B_{r-1}(x).x) = (-1)^{r-1}\,(n-r+1)\,p_{r-1}(x)\ \mathbb{1}_n + \frac{\partial B_{r-1}}{\partial {}^t x}.x$$

$$= (-1)^{r-1}\,(n-r+1)\,p_{r-1}(x)\,\mathbb{1}_n + (n-r+1)\,B_{r-2}(x).x = (n-r+1)\,B_{r-1}(x)$$

On a enfin :

$$\frac{\partial}{\partial {}^t x} B_r(x) = (n-r+1)\,B_{r-1}(x) - B_{r-1}(x) = (n-r)\,B_{r-1}(x)$$

Remarques 1) Les formules (i) du lemme III-1 ont été démontrées par Turnbull ([13]) par d'autres procédés que ceux utilisés ici.

2) L'introduction des matrices $B_r(x)$ a été inspirée par la lecture de [14] où les formules (ii) sont démontrées en utilisant les formules de Newton et les formules (III,6).

1.3. Maintenant, on considère les fonctions polynomiales $x \mapsto B_r(x)$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$, obtenues par spécialisation à partir des matrices $B_r(x))$, à valeurs dans $M_n(k)$, et les fonctions polynomiales $x \mapsto p_r(x)$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$ à valeurs dans k ; les formules (i) du lemme (III,1) disent alors que chaque fonction $(-1)^r B_r$ est la différentielle de la fonction polynomiale p_{r+1} , $M_n(k)$ étant mise en dualité avec elle-même au moyen de la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto \mathrm{tr}(x\,{}^t y)$; ceci dit, x étant fixé, chaque $B_r(x)$ est dans le centralisateur de x (i.e. dans l'espace des matrices qui commutent à x) pour une raison triviale (c'est un polynome en x) mais on peut signaler, comme l'ont montré M. Vergne et M. Duflo (C.R.A.S. 268, 1969, 583-585), que c'est un fait général valable dans les algèbres de Lie sur un corps de caractéristique zéro : la différentielle en x d'une fonction invariante est dans le centralisateur de x ; disons maintenant que $x \in M_n(k)$ est régulier si les différentielles en x des fonctions $p_r, (0 < r < n)$, **sont linéairement indépe**ndantes ; ; il est clair que x est régulier si et seulement si son polynome minimal coïncide avec son polynome caractéristique, ou encore si et seulement si l'algèbre engendrée par x est de dimension n ; dès lors une matrice est semi-simple et régulière si et seulement si ses valeurs propres (dans une clôture algébrique de k) sont deux à deux distinctes, et une matrice x est nilpotente principale (on entend par là qu'elle est à la fois nilpotente et régulière) si et seulement si $x^{n-1} \neq 0$ et $x^n = 0$. Comme d'autre part le polynome minimal de x et son polynome caractéristique coïncident si et seulement si le centralisateur de x est l'algèbre engendrée par x ([14]) , on voit que x est régulier si et seulement si son centralisateur est de dimension n . Des résultats de ce type dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple complexe ont été démontrés par B. Kostant ("Lie group representations on polynomial rings", Amer. J. of Maths. 85 (1963), 327-404). Ces remarques qui ne serviront pas plus bas étant faites, on a le

<u>Lemme III-2</u> : Si x est une matrice de rang r , alors $B_{r+1}(x) = 0$ $(0 \leq r \leq n-2)$.

<u>Démonstration</u> : Soit d'abord x une matrice de rang r ; alors $B_{r+1}(x) = x\, B_r(x)$ $= B_r(x).x$, parce que $p_{r+1}(x) = 0$; on identifie x à un endomorphisme de k^n , on appelle E l'image de cet endomorphisme et x_E la restriction de x à E ; comme l'ensemble des valeurs propres $\neq 0$ (dans une clôture algébrique de k) de x_E est exactement l'ensemble des valeurs propres non nulles de x , il vient : $p_j(x) = p_j(x_E)$ $(1 \leq j \leq r)$, de sorte que $B_{r+1}(x) = (\sum_{0 \leq i \leq r} (-1)^i\, p_i(x_E)\, x^{r-i})\, x =$ $B_r(x_E).x = 0$ $(B_r(x_E) = 0$ d'après le théorème de Hamilton-Cayley). On en déduit que si x est de rang r , alors $B_{r+i}(x) = 0$ dès que $i \geq 1$, et par conséquent la fonction B_{r+1} s'annule sur l'ensemble des matrices de rang $\leq r$.

La réciproque du lemme III-2 est, fausse en général : il est clair que si $B_{n-1}(x) = 0$, x est de rang $\leq n-2$, et au moins lorsque k est de caractéristique zéro, ce que nous supposerons désormais, que si $B_1(x) = x - tr(x)\, \mathbf{1}_n = 0$, alors $tr(x) = 0$ (lemme III-1 (ii)), puis $x = 0$; cela prouve que la réciproque du lemme III-2 est vraie pour $n \leq 3$; mais elle ne l'est pas pour $n = 4$, car la matrice x dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux d'indices (1,2) et (3,4) qui valent 1 est de rang 2 , alors que $B_2(x) = 0$. En fait on a :

<u>Lemme III-3</u> : Une matrice semi-simple x telle que $B_r(x) = 0$ est de rang $\leq r-1$ $(1 \leq r \leq n-1)$.

Démonstration : D'après ce qui précède l'énoncé est vrai pour tous les r lorsque $n = 3$, et aussi pour tous les n lorsque $r = 1$; on peut donc faire une réccurrence par rapport à r et n ; soit donc $x \in M_n(k)$ une matrice semi-simple telle que $B_r(x) = 0$; comme k est de caractéristique zéro, le lemme III-1 (formule (ii)) prouve que $p_r(x) = 0$, de sorte que $B_r(x) = x\, B_{r-1}(x) = 0$; alors ou bien x est un automorphisme, ce qui donne $rg(x) \leq r-2$, ou bien on peut décomposer k^n en une somme directe $\ker(x) \oplus E$, avec $\dim(E) < n$; alors $B_{r-1}(x)$ est nul sur $E = \mathrm{Im}\, x$ et on vérifie immédiatement que la restriction de $B_{r-1}(x)$ à $\mathrm{Im}\, x$ n'est autre que $B_{r-1}(x_E)$; d'où résulte que x_E est de rang $\leq r-2$ si $r-1 \leq \dim E-1$; mais si $r-1 > \dim E-1$, alors $rg(x) = \dim E \leq r-1$, et on a le lemme.

Remarque : Si on écrit $x = \underline{s} + \underline{n}$, avec $\underline{s}$ semi-simple, $\underline{n}$ nilpotent, $\underline{s}\underline{n} = \underline{n}\underline{s}$, alors on vérifie facilement que l'on a :

$$B_r(x) = B_r(\underline{s}) \quad (\mathrm{mod.}\ \underline{n}[x]) \qquad (0 \leq r \leq n)$$

où $[x]$ désigne l'algèbre engendrée par x et ceci montre que si $B_r(x) = 0$, alors $B_r(\underline{s}) = 0$ $(0 \leq r \leq n)$, de sorte que si $B_r(x) = 0$ (pour un r tel que $1 \leq r \leq n-1$) alors la composante semi-simple $\underline{s}$ de x est de rang $\leq r-1$.

Corollaire : Soit $x \in M_n(\mathbb{R})$; x est de rang $\leq r-1$ si et seulement si $B_r({}^t xx) = 0$ $(1 \leq r \leq n-1)$.

2. Le résultat d'unicité des distributions homogènes.

2.1. Dans ce qui suit, on sera amené à "calculer" avec des matrices à coefficients distributions ; pour clarifier un peu la situation, disons qu'on se place dans $M_n(\mathcal{D}')$ muni de sa structure de bi-module sur $M_n(\mathcal{E})$ et de sa structure de module à gauche sur l'anneau $M_n(k\left[\frac{\partial}{\partial x}\right])$ des matrices à coefficients opérateurs différentiels à coefficients constants.

Lemme III-4 : Soit Ω un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et T une distribution Euler-homogène à droite de degré λ dans (on entend par là une distribution qui vérifie l'équation d'Euler : $({}^t x \frac{\partial}{\partial x} - \lambda \mathbb{1})\, T = 0$ dans Ω) ; on a alors :

a) $\frac{\partial}{\partial {}^t x}\, ((\det x)T) = (-1)^{n-1}\, (\lambda+1)\, B_{n-1}(x)\, T$

b) Si $p_r(x)\, T = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial {}^t x}\, (B_r(x)T) = (\lambda+1+n-r)\, B_{r-1}(x)\, T \qquad (0 \leq r \leq n) \tag{III,7}$$

Démonstration :

a) On a immédiatement :

$$\frac{\partial}{\partial^t X}((\text{dét } X)T) = x^* T + \text{ dét } X \frac{\partial T}{\partial^t X}$$

où on entend par T la matrice $(T\,\delta^i_j)_{ij}$, et par dét x la matrice $((\text{dét } x)\delta^i_j)_{ij}$.

Or l'équation d'Euler donne par transposition : $\frac{\partial T}{\partial^t X}.x = \lambda\, 1\!\!1_n\, T = \lambda T$,
de sorte que :

$$\frac{\partial T}{\partial^t x}\; xx^* = \frac{\partial T}{\partial^t x}(\text{dét } x) = (\text{dét } x)\frac{\partial T}{\partial^t x} = \lambda x^* T ,$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial^t x}(\text{dét } x)T) = (\lambda+1)\; x^* T = (-1)^{n-1}\;(\lambda+1)\; B_{n-1}(x)\; T$$

b) $\frac{\partial}{\partial^t x}(p_r(x)T) = (-1)^{r-1}\; B_{r-1}(x)\; T + p_r(x)\frac{\partial T}{\partial^t x}$,

d'après les formules (i) du lemme III-1, de sorte que si $p_r(x)\; T = 0$, on a :

(III,8) $$(-1)^r\; p_r(x)\frac{\partial T}{\partial^t x} = B_{r-1}(x)\; T .$$

Maintenant, toujours d'après le lemme III-1,

(III,9) $$\frac{\partial}{\partial^t x}(B_r(x)T) = (n-r)\; B_{r-1}(x)\; T + \frac{\partial T}{\partial^t x} B_r(x) ,$$

parce que si $A \in M_n(\mathcal{E})$, alors :

$$\frac{\partial}{\partial^t x}(A.T) = \frac{\partial A}{\partial^t x}.T + \frac{\partial T}{\partial^t x} A .$$

Ceci étant, (III,4) donne :

$$\frac{\partial T}{\partial^t x} B_r(x) = \left(\frac{\partial T}{\partial^t x}.x\right) B_{r-1}(x) + (-1)^r\; p_r(x)\frac{\partial T}{\partial^t x}$$

$$= \lambda\; B_{r-1}(x)\; T + B_{r-1}(x)\; T ,$$

d'après (III,8). En collectant le tout dans le second membre de (III,9) il vient comme annoncé :

$$\frac{\partial}{\partial^t x}(B_r(x)T) = (\lambda+1+n-r)\; B_{r-1}(x)\; T \quad (0 \leq r \leq n)$$

2.2. On va utiliser maintenant le théorème suivant de Schwartz ([6], chap. V, § 2, théorème II) : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, F le support de T , $\mathcal{I}_F$ l'idéal de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ constitué par les fonctions nulles sur F , et $\mathcal{I}^p_F$ la puissance p-ième de $\mathcal{I}_F$ (p entier $\geqslant 1$) ; si F est compact et T d'ordre $\leq p-1$, le produit fT de T

par une quelconque fonction $f \in \mathfrak{J}^p_F$ est nul.

Ceci étant, soit $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{R}))$ une distribution nulle dans $\Omega_o = GL(n,\mathbb{R})$, mais non nulle au voisinage d'un point x_o de $M_n(\mathbb{R})$, U une boule ouvert de centre x_o, et F une boule fermée de même centre contenant strictement $\overline{U}$; il existe alors une fonction $\alpha \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{R}))$ valant 1 sur U et nulle en dehors de F, de sorte que αT est à support compact, nulle dans Ω_o, et coïncide avec T dans l'ouvert U ; il y a donc un entier $p \geqslant 1$ tel que $(\text{dét } x)^{p-1}\, T$ soit non nulle dans U tandis que $(\text{dét } x)^p\, T$ y est nulle.

<u>Proposition III-1</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{R}))$ une distribution non nulle, homogène à droite (ou à gauche) de degré λ et nulle dans Ω_o ; alors λ est nécessairement l'un des entiers $\leqslant -1$.

<u>Démonstration</u> : Soit comme plus haut $x_o \in M_n(\mathbb{R})$ un point au voisinage duquel T n'est pas nulle ; il y a un voisinage ouvert U de x_o, et un entier $p \geqslant 1$ tel que $S = (\text{dét } x)^{p-1}\, T$ ne soit pas nulle dans U tandis que $(\text{dét } x)\, S = 0$ dans U ; si T est homogène à droite de degré λ, S est homogène à droite de degré $\lambda+p-1$, et la formule a) du lemme III-4 montre que $(\lambda+p)\, B_{n-1}(x)\, S$ est nulle dans U, de sorte que si $\lambda \neq -p$, $B_{n-1}(x)\, S = 0$ dans U. On a donc en fait $(\lambda+p)\, B_{n-1}(x)\, S = 0$ (dans ce qui suit, on ne précisera pas chaque fois qu'une telle égalité n'est vraie que dans U : S désigne donc la restriction de S à U). On va voir maintenant qu'une récurrence sur r $(r \geqslant 0)$ prouve que $\prod_{0\leqslant q\leqslant r}(\lambda+p+q)\, B_{n-r-1}(x)\, S = 0$; supposons cette formule vraie ; si λ est l'un des entiers $-p-q$ $(0 \leqslant q \leqslant r)$, la formule correspondante à l'ordre r+1 est évidemment vraie, de sorte qu'on peut supposer $B_{n-r-1}(x)\, S = 0$, ce qui implique $p_{n-r-1}(x)\, S = 0$; alors les formules (III,7) prouve que $(\lambda+p+r+1)\, B_{n-r-2}(x)\, S = 0$, et on a bien la formule à l'ordre (r+1) :

$$\prod_{0\leqslant q\leqslant r+1} (\lambda+p+q)\; B_{n-r-2}(x)\; S = 0$$

L'application de cette formule avec $r = n-1$ (auquel cas $B_{n-r-1}(x) = 1$) montre que $\prod_{0\leqslant q\leqslant n-1} (\lambda+p+q) = 0$, de sorte que λ est un entier tel que $-n-(p-1) \leqslant \lambda \leqslant -p$, ce qui prouve la proposition pour les distributions homogènes à droite ; comme $x \longmapsto {}^t x$ échange l'homogénéité à droite et l'homogénéité à gauche en laissant Ω_o invariant, la proposition reste vraie pour les distributions homogènes à gauche.

<u>Corollaire</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{R}))$ une distribution non nulle, homogène à droite (ou à gauche) de degré λ, nulle dans Ω_{r-1} (avec $1 \leqslant r \leqslant n$) et d'ordre zéro ; alors λ est un entier tel que $-n \leqslant \lambda \leqslant -r$.

<u>Démonstration</u> : On raisonne comme plus haut et on utilise le lemme 2 pour aboutir au résultat suivant : il y a un ouvert non vide U où T n'est pas nulle, tandis

que la distribution vectorielle $B_{n-r+1}(x)\ T$ y est nulle ; on a alors :

$$\prod_{0\leq q\leq n-r} (\lambda+r+q)\ B_o(x)\ T = 0$$

dans U , ce qui montre bien que λ est un entier tel que $-n \leq \lambda \leq -r$.

2.3. On a alors le résultat d'unicité suivant :

Proposition III-2 : Si λ n'est pas l'un des entiers $-1, -2, \ldots, -n+1$, $\mathcal{L}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R})) = \mathcal{R}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ (resp. $\mathcal{L}_-^\lambda(M_n(\mathbb{R})) = \mathcal{R}_-^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ est de dimension 1.

Démonstration : Si T_1 et T_2 sont deux éléments de $\mathcal{L}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$, il existe une combinaison linéaire non triviale $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ de T_1 et T_2 qui est nulle dans Ω_o , (parce que $\mathcal{L}_+^\lambda(\Omega_o)$ est de dimension 1) ; la proposition 1 montre alors que si λ n'est pas l'un des entiers ≤ -1 , $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 = 0$, de sorte que $\mathcal{L}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ est de dimension 1 sauf éventuellement lorsque λ est un entier ≤ -1. Mais comme la transformation de Fourier établit un isomorphisme entre $\mathcal{L}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{L}_+^{-\lambda-n}(M_n(\mathbb{R}))$, on voit que même si λ est un entier $\leq -n$, $\mathcal{L}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ est de dimension 1. On fait le même raisonnement pour les espaces $\mathcal{R}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$, $\mathcal{L}_-^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$, $\mathcal{R}_-^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$; comme $\mathcal{L}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R})) \cap \mathcal{R}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R})) = \mathcal{H}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R})) \neq \{0\}$ (on a construit des distributions $\mathcal{C}_+^\lambda$ dans ces espaces), on voit que $\mathcal{L}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{R}_+^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ et aussi $\mathcal{L}_-^\lambda(M_n)(\mathbb{R})) = \mathcal{R}_-^\lambda(M_n(\mathbb{R}))$ si λ n'est pas l'un des entiers $-r(1 \leq r \leq n-1)$.

2.4. On va voir maintenant qu'en fait, chaque espace $\mathcal{L}_+^{-p}$ est de dimension infinie $(0 < p < n)$; pour celà, soit $\mathfrak{a}_p$ l'idéal à gauche de $M_n(\mathbb{R})$ constitué par les matrices $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont les p premières colonnes $x_1, \ldots, x_p$ sont nulles, et H^p la distribution (en fait, la mesure de support $\mathfrak{a}_p$) extension à $M_n(\mathbb{R})$ de la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{a}_p$: pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose :

$$\langle H^p , \varphi \rangle = \int \varphi(0, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots, x_n)\, dx_{p+1} \ldots dx_n$$

Il est clair que $H^p \in \mathcal{L}_+^{-p}$, et comme son support $\mathfrak{a}_p$ n'est pas un idéal à droite de $M_n(\mathbb{R})$, H^p n'est pas homogène à droite ; il en résulte déjà que la dimension de $\mathcal{L}_+^{-p}$ est au moins égale à 2.

En fait, pour chaque $y \in GL(n,\mathbb{R})$, la distribution $H^p.y$ transformée de H^p par la multiplication à droite par y dans $M_n(\mathbb{R})$ est aussi un élément de l'espace $\mathcal{L}_+^{-p}$, et son support est l'idéal à gauche $\mathfrak{a}_p y$, translaté à droite de $\mathfrak{a}_p$ par y ; il suffit maintenant de démontrer que l'orbite de $\mathfrak{a}_p$ sous l'action de $GL(n,\mathbb{R})$ opérant par "translation" à droite n'est pas finie, ou ce qui revient au même que l'ensemble des classes à gauche de $GL(n,\mathbb{R})$ modulo le stabilisateur de l'idéal $\mathfrak{a}_p$ est infini, pour en conclure que l'espace $\mathcal{L}_+^{-p}$ n'est pas de dimension finie. Ceci étant, il est facile d'identifier le stabilisateur de $\mathfrak{a}_p$;

pour celà, on remarque que l'idéal $\mathfrak{a}_p$ est l'ensemble des matrices $x \in M_n(\mathbb{R})$ qui annullent les p premiers vecteurs $e_1, \dots, e_p$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et qu'en sens inverse, le sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ intersection de tous les noyaux des $x \in \mathfrak{a}_p$ est le sous-espace engendré par $e_1, \dots, e_p$; si $y \in GL(n,\mathbb{R})$, il est clair que $\mathfrak{a}_p y = \mathfrak{a}_p$ équivaut à $\mathfrak{a}_p y \subset \mathfrak{a}_p$, ou encore à $(xy).V = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}_p$ soit enfin à $yV \subset V$; ainsi, le stabilisateur de $\mathfrak{a}_p$ est aussi le stabilisateur de V pour l'action naturelle de $GL(n,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$; c'est donc le sous-groupe (parabolique) de $GL(n,\mathbb{R})$ constitué par les matrices dont les p premières colonnes ont leurs n-p dernières composantes nulles, et il devient évident, au moins par un argument de dimension, qu'il n'est pas d'indice fini dans $GL(n,\mathbb{R})$.

Remarques : 1) Il résulte de celà que les espaces $\mathcal{R}_+^{-p}$ sont eux-mêmes de dimension non finie, $(0 < p < n)$.

2) L'auteur ignore si on a des résultats analogues pour les espaces $\mathcal{L}_-^{-p}$ et $\mathcal{R}_-^{-p}$, mais il semble, après ce qui vient d'être dit, que cette question ne présente plus beaucoup d'intérêt.

3. Solutions bi-invariantes des opérateurs de Cayley et Capelli.

3.1. Dans ce qui suit, on s'intéresse aux distributions invariantes ou bi-invariantes par le groupe $SL(n,\mathbb{R})$: on va démontrer d'abord l'équivalent de la proposition I-1 pour les distributions bi-invariantes. Soit M_1 (resp. M_2) l'espace des distributions bi-invariantes dans $M_n(\mathbb{R})$ qui sont annulées par l'opérateur de Capelli D_1 (resp. D_2).

Lemme III-5 : $M_1 = \sum_{0 \leq p \leq n-1} \mathcal{H}_+^{-p}(M_n(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{H}_-^{-p}(M_n(\mathbb{R}))$

$$M_2 = \sum_{1 \leq p \leq n} \mathcal{H}_+^{-p}(M_n(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{H}_-^{-p}(M_n(\mathbb{R})) .$$

Démonstration : Elle est du même type que celle de la proposition I-1 ; si $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{R}))$ est bi-invariante et telle que $D_1 T = (d_{nn}+n-1) \prod_{1 \leq i \leq n-2} (d_{ii}+i-1)T = 0$, alors $S = \prod_{1 \leq i \leq n-2} (d_{ii} + i-1)\, T$ est une distribution bi-invariante telle que $(d_{nn} + n-1)\, S = 0$; alors S s'écrit sous la forme $S = {}_+S + {}_-S$ où ${}_+S \in \mathcal{L}_+^{-n+1}$, ${}_-S \in \mathcal{L}_-^{-n+1}$ et ${}_+S$ et ${}_-S$ sont toutes deux invariantes à droite par $SL(n,\mathbb{R})$; de même ${}_+S = {}_+S_+ + {}_+S_-$, où ${}_+S_+$ et ${}_+S_-$ sont toutes deux dans $\mathcal{L}_+^{-n+1}$ et ${}_+S_+ \in \mathcal{R}_+^{-n+1}$, tandis que ${}_+S_- \in \mathcal{R}_-^{-n+1}$; on a donc ${}_+S_- \in \mathcal{R}_-^{-n+1} \cap \mathcal{L}_+^{-n+1}$, et comme cet espace est nul (c'est une conséquence de la proposition II-17), on a ${}_+S = {}_+S_+$; par un raisonnement identique on aboutit à ${}_-S = {}_-S_-$, de sorte que $S = {}_+S_+ + {}_-S_- \in \mathcal{H}_+^{-n+1} \oplus \mathcal{H}_-^{-n+1}$; on termine alors la démonstration par récurrence comme dans la proposition I.1:

3.2. Il en résulte que M_1 et M_2 sont des espaces de dimension $2n$ et qu'on peut en exhiber une base constituée par des $\mathscr{C}_+^{-p}$, $\mathscr{C}_-^{-p}$. Concernant ces distributions, on rappelle qu'on a les formules :

(III,10) $$\Delta\, \mathscr{C}_+^{\lambda} = \prod_{0\leqslant p\leqslant n-1} (\lambda+p)\, \mathscr{C}_-^{\lambda-1}$$

(III,11) $$\mathscr{V}\, \mathscr{C}_+^{\lambda} = (2\pi)^{-n} \prod_{1\leqslant p\leqslant n} (\lambda+p)\, \mathscr{C}_-^{\lambda+1}$$

(III,10 bis) $$\Delta\, \mathscr{C}_-^{\lambda} = (2\pi)^{n} \prod_{1\leqslant p\leqslant n} (\lambda+p)\, \mathscr{C}_+^{\lambda-1}$$

(III,11 bis) $$\mathscr{V}\, \mathscr{C}_-^{\lambda} = \mathscr{C}_+^{\lambda+1}$$

(cf. les formules (II,17) à (II,24)).

Proposition III-3 : Soit T une distribution bi-invariante telle que $\Delta T = 0$ (resp. $\mathscr{V}\, T = 0$) ; alors elle s'écrit de manière unique sous la forme :

$$T = \sum_{0\leqslant p\leqslant n-1} a_p\, \mathscr{C}_+^{-p}$$

(resp. $$T = \sum_{1\leqslant p\leqslant n} a_p\, \mathscr{C}_+^{-p}) \qquad (a_p \in \mathbb{C})$$.

Démonstration : Si T est bi-invariante et telle que $\Delta T = 0$, alors $D_1\, T = 0$ et le lemme III-5 prouve qu'elle est combinaison linéaire des distributions $\mathscr{C}_+^{-p}$, $\mathscr{C}_-^{-p}$ $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$; les formules 10 et 10 bis montrent alors qu'en fait n'interviennent dans T que les $\mathscr{C}_+^{-p}$. Si $\mathscr{V}\, T = 0$, alors $D_2\, T = 0$ et on raisonne que la même manière que ci-dessus.

Remarquons que les distributions tempérées telles que $\mathscr{V}\, T = 0$ sont les transformées de Fourier des distributions solution de l'équation de Cayley, mais qu'à priori on ne savait pas avant le lemme III-5, qu'une distribution T telle que $\mathscr{V}\, T = 0$ est forcément tempérée.

3.3. Concernant les distributions bi-invariantes nulles dans $GL(n,\mathbb{R})$, on a :

Lemme III-7 : Soit T une distribution bi-invariante nulle dans Ω_0 ; alors il existe un entier p ($p \geqslant 1$ si $T \neq 0$) tel que $\mathscr{V}^p\, T = (\det x)^p\, T = 0$.

Démonstration : a) Soit $T \neq 0$ une distribution bi-invariante nulle dans Ω_0 ; on va voir qu'elle n'est pas nulle au voisinage de zéro ; si elle est nulle dans un voisinage U de zéro, elle est nulle $\bigcup_{m,n \in SL(n,\mathbb{R})} m.U.n$ qui est un voisinage ouvert de l'ensemble des matrices de déterminant nul (car U contient des matrices de tous les rangs), et elle est donc nulle partout.

b) Soit U un voisinage relativement compact de zéro et $p-1$ l'ordre de T dans U ; alors $(\text{dét } x)^p\, T$ est une distribution bi-invariante nulle dans U , donc nulle partout.

3.4. On va maintenant déterminer les supports des différentes distributions $\mathscr{C}_+^{-p}$, $\mathscr{C}_-^{-p}$ (la proposition III-1 montre que si λ n'est pas un entier ≤ -1 , le support de $\mathscr{C}_+^{\lambda}$ ou de $\mathscr{C}_-^{\lambda}$ est tout l'espace $M_n(\mathbb{R})$) ; pour celà on remarque que $(\text{dét } x)\, \mathscr{C}_+^{-p} = 0$ $(1 \leq p \leq n)$ (formule III,11) de sorte que grâce au lemme III-4, on trouve : $\prod_{1 \leq q \leq p-1} (-p+q)\ B_{n-p+1}(x)\ \mathscr{C}_+^{-p} = 0$; on a donc en réalité $B_{n-p+1}(x)\ \mathscr{C}_+^{-p} = 0$.
Démontrons maintenant le

<u>Lemme III-8</u> : Soit T une distribution bi-invariante telle que $B_{n-1}(x)T = 0$ (où r est un entier tel que $1 \leq r \leq n-1$). Alors T est nulle dans Ω_r

<u>Démonstration</u> : a) Une telle distribution T est nulle dans Ω_o ; de façon plus précise, il est immédiat que $B_{n-r+1}(x)\ T = 0$ parce que $x\ B_{n-r}(x)\ T = 0$ et après iteration on aboutit à $B_{n-1}(x)\ T = 0$, ce qui donne après multiplication par x : $(\text{dét } x)\ T = 0$.

b) On constate maintenant que $x = \begin{pmatrix} 1_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $p_{n-r}(x) \neq 0$, ce qui prouve que T est nulle au voisinage de x ; il en résulte (comme plus haut) que la restriction de T à Ω_r est nulle dans un voisinage ouvert de $\Omega_r - \Omega_o$ (qui est l'ensemble des matrices de rang s tel que $n-r \leq s < n$), donc nulle partout.

De ce lemme résulte que $\mathscr{C}_+^{-p}$ est nulle dans Ω_{p-1} . De la même façon, les formules (11) et (11 bis) prouvent que $(\text{dét } x)\ \mathscr{C}_-^{-p} \neq 0$, mais $(\text{dét } x)^2\ \mathscr{C}_-^{-p} = 0$ pour chaque entier p tel que $2 \leq p \leq n+1$, et il en résulte que $B_{n-p+2}(x)\ \mathscr{C}_-^{-p} = 0$; la distribution $\mathscr{C}_-^{-p}$ est donc nulle dans Ω_{p-2} .

3.5. En particulier, $\mathscr{C}_+^{-n}$ est à support $\{0\}$ et en fait elle est proportionnelle à la mesure δ ; comme :

$$\int \mathscr{C}_+^{-n}(x)\ e^{-\pi \operatorname{tr}({}^t x x)}\ dx = 1$$

on voit que $\mathscr{C}_+^{-n} = \delta$, et la formule (10 bis) écrite avec $\lambda = -n+1$ montre que $(2\pi)^{-n}\ \mathscr{C}_-^{-n+1}$ est une solution élémentaire bi-invariante de l'opérateur de Cayley. Compte-tenu de la proposition III-3, on voit que toute solution élémentaire bi-invariante de Δ s'obtient en additionnant à $(2\pi)^{-n}\ \mathscr{C}_-^{-n+1}$ une combinaison linéaire des distributions $\mathcal{C}_+^{-p}$ $(0 \leq p \leq n-1)$.

4. Distributions bi-invariantes nulles dans $GL(n,\mathbb{R})$.

4.1. On va maintenant déterminer les espaces E_q (q entier ≥ 1) constitués par les distributions bi-invariantes T telles que $(\text{dét } x)^q\, T = 0$. On rappelle que le lemme III-7 affirme que toute distribution bi-invariante à support dans l'ensemble des matrices de déterminant nul est dans un E_q, pour un entier q convenable, et que l'espace E_1 a déjà été déterminé par la proposition III-3. Comme $T \in E_q$ si et seulement si $(\text{dét } x)^{q-1}\, T \in E_1$, on voit qu'il est convenable d'étudier les équations de division : $(\text{dét } x)^r\, T = \mathcal{C}_+^{-p}$ (r entier ≥ 1, $1 \leq p \leq n$) . Pour cela on pose

$$c(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+n)} = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)} ,$$

et on remarque que les équations (III,11) s'écrivent :

(III,11 ter) $$\mathcal{C}_-^{\lambda} = (2\pi)^n\, c(\lambda) \quad (\text{dét } x)\, \mathcal{C}_+^{\lambda-1} ,$$

de sorte que $\mathcal{C}_+ = (\text{dét } x)\, \mathcal{C}_-^{\lambda-1} = (2\pi)^n\, c(\lambda-1)(\text{dét } x)^2\, \mathcal{C}_+^{\lambda-2}$.

En utilisant à nouveau la formule (11 bis) pour $\mathcal{C}_+^{\lambda-2}$, on voit qu'on a les formules :

(III,12) $$\mathcal{C}_+^{\lambda} = (2\pi)^n\, c(\lambda-1)\, (\text{dét } x)^2\, \mathcal{C}_+^{\lambda-2}$$

(III,13) $$\mathcal{C}_+^{\lambda} = (2\pi)^n\, c(\lambda-1)\, (\text{dét } x)^3\, \mathcal{C}_-^{\lambda-3}$$

<u>Lemme III-9</u> : Pour chaque entier $r \geq 1$, on a :

(III,14) $$\mathcal{C}_+^{\lambda} = (2\pi)^{nr} \prod_{1\leq i\leq r} c(\lambda-2i+1)(\text{dét } x)^{2r}\, \mathcal{C}_+^{\lambda-2r}$$

(III,15) $$\mathcal{C}_+^{\lambda} = (2\pi)^{nr} \prod_{1\leq i\leq r} c(\lambda-2i+1)(\text{dét } x)^{2r+1}\, \mathcal{C}_-^{\lambda-2r-1}$$

<u>Démonstration</u> : On raisonne par récurrence sur r , les formules (12) et (13) étant les formules (14) et (15) respectivement avec $r = 1$. La formule (III,11 ter) : $\mathcal{C}_-^{\lambda-2r-1} = (2\pi)^n\, c(\lambda-2r-1)(\text{dét } x)\, \mathcal{C}_+^{\lambda-2r-2}$ et la formule (III,15) donnent de suite :

$$\mathcal{C}_+^{\lambda} = (2\pi)^{n(r+1)} \prod_{1\leq i\leq r+1} c(\lambda-2i+1)(\text{dét } x)^{2(r+1)}\, \mathcal{C}_+^{\lambda-2r-2}$$

ce qui est la formule (III,14) à l'ordre $r+1$; pour avoir la formule (III,15) à l'ordre $r+1$, on remplace $\mathcal{C}_+^{\lambda-2r-2}$ dans la dernière relation écrite par (dét x) $\mathscr{C}_-^{\lambda-2(r+1)-1}$.

4.2. On va utiliser ces formules pour trouver des solutions (bi-invariantes) des équations de division : $(\text{dét } x)^{2r}\, S = \mathscr{C}_+^{-p}$ et $(\text{dét } x)^{2r+1}\, S = \mathscr{C}_+^{-p}$ $(1 \leq p \leq n)$. Pour cela on écrit qu'il y a égalité entre les premiers termes des développements de Taylor au voisinage du point $\lambda = -p$ des 2 membres de (III,14) ; soit $\omega_r(p)$ l'ordre du pôle de $\lambda \longmapsto \prod_{1\leq i\leq r} c(\lambda-2i+1)$ au point $-p$; alors, on a :

$$(\text{III},16) \qquad \mathscr{C}_+^{-p} = (2\pi)^{nr}\, a_{r,p}\, \frac{(\text{dét } x)^{2r}}{\omega_r(p)\,!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=-2r-p}^{\omega_r(p)} \mathscr{C}_+^{\lambda} ,$$

où $a_{r,p}$ est le coefficient de $(\lambda+p)^{-\omega_r(p)}$ dans le développement de Laurent de $\lambda \longmapsto \prod_{1\leq i\leq r} c(\lambda-2i+1)$ au voisinage de $-p$.

De la même façon, on a :

$$(\text{III},17) \qquad \mathscr{C}_+^{-p} = b_{r,p}\, (\text{dét } x)^{2r+1} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=-2r-1-p}^{\omega_r(p)} \mathscr{C}_-^{\lambda}$$

où $b_{r,p}$ est une constante convenable. Ceci dit, on voit que $-p$ est un pôle (simple) de $c(\lambda-2i+1) = \dfrac{1}{(\lambda+1-2i)\,(\lambda+2-2i)\dots(\lambda+n-2i)}$ si et seulement si $2i \leq n-p$, et par conséquent $\omega_r(p)$ est le minimum des 2 entiers r et $\left[\frac{n-p}{2}\right]$ $\left(\left[\frac{n-p}{2}\right]\right.$ est la partie entière de $\left.\frac{n-p}{2}\right)$. On a donc :

$$\omega_r(p) = \min\left(r,\ \left[\frac{n-p}{2}\right]\right)$$

<u>Proposition III-4</u> : Toute distribution $T \in E_{2r}$ (resp. E_{2r+1}) s'écrit de manière unique sous la forme :

$$T = \sum_{1\leq p\leq n} a_p \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=-2r-p+1}^{\omega_{r-1}(p)} \mathscr{C}_-^{\lambda} \pmod{E_{2r-1}}$$

$$(\text{resp.} \quad T = \sum_{1\leq p\leq n} a_p \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_{\lambda=-2r-p}^{\omega_r(p)} \mathscr{C}_+^{\lambda} \pmod{E_{2r}} \ )$$

les a_p étant des nombres complexes.

<u>Démonstration</u> : Soit $T \in E_q$, $S = (\text{dét } x)^{q-1}\, T$; alors il existe des constantes $\alpha_p \in \mathbb{C}$ telles que :

$$S = \sum_{1\leq p\leq n} \alpha_p\, \mathscr{C}_+^{-p}$$

a) Si $q = 2r$, on doit résoudre l'équation de division :

$$(\text{dét } x)^{2r-1}\, T = \sum_{1 \leq p \leq n} \alpha_p\, \mathscr{C}_+^{-p}$$

et d'après ce qui a été démontré plus haut, on a :

$$T = \sum_{1 \leq p \leq n} a_p \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\omega_{r-1}(p)}_{\lambda = -2r+1-p} \cdot \mathscr{C}_-^{\lambda} \pmod{E_{2r-1}}$$

b) Si $q = 2r+1$, c'est la formule (III,17) qui donne ce que l'on désire.

c) Pour ce qui est de l'unicité des nombres complexes a_p , on l'obtient ainsi : si $\sum_{1 \leq p \leq n} a_p \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\omega_{r-1}(p)}_{\lambda = -2r+1-p} \mathscr{C}_-^{\lambda} \in E_{2r-1}$, on trouve après multiplication par $(\text{dét } x)^{2r-1}$ et utilisation de la formule (III,17) :

$$\sum_{1 \leq p \leq n} \frac{a_p}{b_{r-1,p}}\, \mathscr{C}_+^{-p} = 0 ,$$

et comme les distributions $\mathscr{C}_+^{-p}$ $(1 \leq p \leq n)$ sont linéairement indépendantes (ce sont des distributions homogènes de degrés 2 à 2 distincts) on en déduit bien que $a_p = 0$ $(1 \leq p \leq n)$.

On voit ainsi que chaque E_q est un espace vectoriel de dimension nq qui est contenu dans l'espace $\mathscr{S}'(M_n(\mathbb{R}))$ des distributions tempérées sur $M_n(\mathbb{R})$.

CHAPITRE IV

L'objet de ce chapitre est de démontrer dans le cas complexe des résultats analogues à ceux obtenus dans le chapitre III. Les sous-groupes intéressants de $GL(n,\mathbb{C})$ sont le groupe B_o des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux >0 et le groupe $U(n)$ des matrices unitaires $n\times n$; à l'exception du résultat concernant l'anneau des fonctions polynomes sur $M_n(\mathbb{C})$, ($M_n(\mathbb{C})$ sera toujours sauf indication contraire, considéré comme espace vectoriel réel), invariantes à gauche par $U(n)$, qui nécessite une démonstration détaillée, tous les autres ont des démonstrations tout à fait analogues à celles données dans le chapitre II, ce qui explique qu'autant que possible, on ne les a pas réecrites. Un corollaire de ces résultats a été démontré par E. Stein, qui utilise la formule de Plancherel du groupe $GL(n,\mathbb{C})$ ([15]). D'autre part, de même que dans le cas réel, on étudie les distributions définies par des fonctions sphériques de $GL(n,\mathbb{C})$. On donne en dernier les énoncés correspondants au cas quaternionien.

1. Distributions invariantes à gauche par $U(n)$ et homogènes à droite.

1.1. Soit B_o le sous-groupe de $Gl(n,\mathbb{C})$ constitué par les matrices triangulaires supérieures à termes diagonaux >0, et pour chaque $s=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{C}^n$, α_s le caractère de B_o défini par :

$$\alpha_s(b)=\prod_{1\le i\le n}(b_{ii})^{s_i},$$

pour chaque $b\in B_o$. On étend ce caractère en une fonction sur $GL(n,\mathbb{C})$, invariante à gauche par le groupe unitaire, qu'on continuera à noter α_s ; en fait, pour chaque $x\in GL(n,\mathbb{C})$ on a :

$$\alpha_s(x)=\prod_{1\le i\le n}(\Delta_i(\check{x}x))^{(s_i-s_{i+1})/2}$$

où $\check{x}={}^t\bar{x}$ est la transposée conjuguée de x, $s_{n+1}=0$, et $\Delta_i(\check{x}x)$ est le mineur principal d'ordre i de la matrice hermitienne positive $\check{x}x$; lorsque $s\in\omega_n$, α_s est une fonction continue sur $M_n(\mathbb{C})$ et définit dans $M_n(\mathbb{C})$ une distribution T^s qui est invariante à gauche par $U(n)$ et α_s - homogène (ce qui veut dire qu'elle se transforme par B_o à droite suivant α_s) ; soit maintenant dx la mesure de Lebesque de $M_n(\mathbb{C})\sim\mathbb{R}^{2n}$, $d^*x=\dfrac{dx}{|\text{dét } x|^{2n}}$ (c'est une mesure de Haar de $Gl(n,\mathbb{C})$), et du la mesure de Haar normalisée de $U(n)$; si $x=ub$ est la décomposition d'un élément générique $x\in Gl(n,\mathbb{C})$ en produit d'un élément u de $U(n)$ par un élément b de B_o , on a :

$$d^*x = c \ du \prod_{i<j} d\xi_{ij} \wedge d\eta_{ij} \prod_{1\leq i\leq n} b_{ii}^{-2i+1} \ db_{ii}$$

où c est une constante > 0 et ξ_{ij} (resp. η_{ij}) est la partie réelle (resp. imaginaire) de b_{ij} pour $i<j$.

Un calcul analogue à celui effectué au chapitre II donne :

Proposition IV-1' : La fonction $s \longmapsto \mathcal{T}^s = \pi^{\sum s_i/2} \ T^s \Big/ \prod_{1\leq i\leq n} (\Gamma(\frac{s_i}{2} + n + 1 - i) / \Gamma(n + 1 - i))$ est prolongeable en une fonction analytique entière, et pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{T}^s$ est une distribution invariante à gauche par le groupe unitaire, α_s - homogène et telle que :

$$\int_{M_n(\mathbb{C})} \mathcal{T}^s(x) \quad e^{-\pi tr(\check{x}x)} \quad dx = 1 \quad .$$

1.2. Si maintenant ${}^tB_o$ est le sous-groupe de $Gl(n,\mathbb{C})$ constitué par les matrices triangulaires inférieures à termes diagonaux > 0 , chaque caractère $\beta_s : b \longmapsto \prod_{1\leq i\leq n} (b_{ii})^{s_i}$ s'étend en une fonction sur $Gl(n,\mathbb{C})$, encore notée β_s, qui est invariante à gauche par le groupe unitaire, et qui se prolonge à $M_n(\mathbb{C})$ en une fonction continue, lorsque s décrit un domaine convenable ω_n' de $\mathbb{C}^n$; lorsqu'il en est ainsi, β_s définit dans $M_n(\mathbb{C})$ une distribution R^s qui est invariante à gauche par $U(n)$ et qui se transforme à droite par ${}^tB_o$ suivant le caractère β_s . On a alors :

Proposition IV-2 : La fonction $s \longmapsto \mathcal{R}^s = \pi^{\sum s_i/2} \ R^s \Big/ \prod_{1\leq i\leq n} (\Gamma(\frac{s_i}{2} + i)/ \Gamma(i))$ est prolongeable en une fonction analytique entière, et pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{R}^s$ est une distribution invariante à gauche par le groupe unitaire, β_s - homogène et telle que :

$$\int_{M_n(\mathbb{C})} \mathcal{R}^s(x) \quad e^{-\pi tr(\check{x}x)} \ dx = 1$$

Signalons enfin que le lemme II-9 se lit ici sous la forme suivante : une distribution T sur $M_n(\mathbb{C})$ est α_s - homogène (resp. et invariante à gauche par $U(n)$) si et seulement si sa transformée de Fourier (on utilise le noyau de Fourier $(x,y) \longmapsto e^{-2\pi i \ Re \ Tr.(x \check{y})}$) est β_{-s-2n} homogène (resp. et invariante à gauche par $U(n)$).

2. Distributions invariantes à gauche par $U(n)$.

2.1. Suivant la méthode générale utilisée au chapitre II, on commence par déterminer l'anneau des fonctions polynomes sur $M_n(\mathbb{C})$ (considéré comme espace vectoriel réel) qui sont invariantes (sous-entendu : à gauche) par $U(n)$; il ne semble pas que le résultat dont on va écrire la démonstration se trouve quelque part dans la littérature mathématique; il est pourtant très naturel, et sûrement connu.

Proposition IV-3 : Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction polynome invariante à gauche par le groupe unitaire, c'est-à-dire telle que $f(ux) = f(x)$ pour tous $u \in U(n)$, et $x \in M_n(\mathbb{C})$. Alors il existe une unique fonction polynome g sur l'espace vectoriel réel $MH_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes $n \times n$ telle que $f(x) = g(\check{x}x)$ pour tout $x \in M_n(\mathbb{C})$.

Démonstration : - L'unicité d'une telle fonction g est évidente : une fonction polynome sur $MH_n(\mathbb{C})$ qui est nulle sur les matrices positives est nulle partout.

- La démonstration de l'existence de g se fait par récurrence sur l'entier $n \geq 1$; le cas $n = 1$ est celui où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est invariante par l'action naturelle de $SO(2)$ dans $\mathbb{R}^2$, et il est connu qu'il existe une fonction polynome à une variable g telle que $f(x) = g(x\bar{x})$ pour tout $x \in \mathbb{C}$. On suppose donc l'énoncé vrai pour tous les entiers $\leq n-1$, et on le démontre pour n .

- a) Si on écrit un élément $x \in GL(n,\mathbb{C})$ sous la forme $x = ub$, avec $u \in U(n)$, $b \in B_o$, on a $f(x) = f(b)$. On s'intéresse donc à la restriction $\bar{f}$ de f au sous-espace de $M_n(\mathbb{C})$ constitué par les matrices x de la forme $x = \begin{pmatrix} x_{11} & * \\ 0 & x' \end{pmatrix}$, où $x_{11} \in \mathbb{C}$, $x' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ et $* = (x_{12}, x_{13},\dots,x_{1n})$.

Comme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & * \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & * \\ 0 & u'x' \end{pmatrix} ,$$

on voit qu'en écrivant $x_{ij} = \xi_{ij} + \sqrt{-1}\,\eta_{ij}$ (ξ_{ij}, η_{ij} réels) et :

$$\bar{f}(x_{11},\dots,x_{1n};\ x') = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(x')\,\xi_{11}^{\alpha_1}\,\eta_{11}^{\alpha_2}\dots\xi_{1n}^{\alpha_{2n-1}}\,\eta_{1n}^{\alpha_{2n}}$$

chaque ϱ_α est une fonction polynome invariante à gauche par $U(n-1)$, de sorte que pour chaque α , il existe une fonction polynome g_α , définie sur $MH_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que : $\varrho_\alpha(x') = g_\alpha(\check{x}'x')$ pour tout $x' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$

b) Maintenant, en ordonnant $\bar{f}$ par rapport aux monômes par rapport à $\check{x}'x'$, on obtient :

$\bar{f}(x_{11},\dots,x_{1n};x') = \sum_\alpha f_\alpha(x_{11},\dots,x_{1n})\, m_\alpha(\check{x}'x')$,
et comme :

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & * \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta x_{11} & \zeta * \\ 0 & x' \end{pmatrix}$$, on voit que

pour chaque α , et pour chaque nombre complexe ζ de module 1, $f_\alpha(\zeta x_{11}, \zeta x_{12},\dots, \zeta x_{1n}) = f_\alpha(x_{11},\dots,x_{1n})$ (on a utilisé le fait que les fonctions polynomes $x' \longmapsto \mathrm{Re}(x'_i \mid x'_j)$) $x' \longmapsto \mathrm{Im}(x'_i \mid x'_j)$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$, où $x'_1,\dots,x'_{n-1}$ sont les vecteurs colonnes de x' , et $(x'_i \mid x'_j) = \sum_r x'_{ri}\, \bar{x}'_{rj}$, sont algébriquement indépendantes). La propriété ainsi mise en évidence pour les f_α est encore une fois une propriété d'invariance par rapport à l'action "cogrédiente" de $SO(2)$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ (n facteurs); on sait alors ([2]) que chaque f_α ne dépend en fait (polynomialement) que des parties réelles et imaginaires des nombres complexes $x_{1i}\, \bar{x}_{1j}$ $(1 \leq i,j \leq n)$. il en résulte que $\bar{f}$ ne dépend en fait (polynomialement) que de $\check{x}'x'$ et des $x_{1i}\, \bar{x}_{1j}$ $(1 \leq i,j \leq n)$.

c) Ceci étant, on revient à la décomposition $x = ub$; on a : $f(x) = f(b) = \bar{f}(b_{11}, b_{12},\dots b_{1n};b')$, et d'après ce qu'on vient de voir $\bar{f}(b_{11},\dots, b_{1n};b')$ est un polynome en $\check{b}'b'$ et les $b_{1i}\, \bar{b}_{1j}$; comme $u \in U(n)$, $(b'_i \mid b'_j) = (x_i \mid x_j) - b_{1i}\, \bar{b}_{1j}$; $\bar{f}(b_{11},\dots,b_{1n};b')$ est donc un polynome en les $(x_i \mid x_j)$ et les $b_{1i}\, \bar{b}_{1j}$; d'autre part $b_{11} = (x_1 \mid x_1)^{1/2}$ et

$$b_{1i} = \frac{(x_i \mid x_1)}{(x_1 \mid x_1)^{1/2}} \quad , \text{ et ainsi } \quad b_{1i}\, \bar{b}_{1j} = \frac{(x_i \mid x_1)(x_1 \mid x_j)}{(x_1 \mid x_1)}$$

En conclusion, étant donné f , il existe une fonction polynome F_1 sur $MH_n(\mathbb{C})$, et un entier $r_1 \geq 0$ tels que pour tout $x \in GL(n,\mathbb{C})$:

$$f(x) = \frac{F_1(\check{x}x)}{(x_1 \mid x_1)^{r_1}} \ .$$

d) De la même manière, en utilisant la déocmposition $x = ub$, $u \in U(n)$, $b \in {}^tB_o$, on voit qu'il existe une fonction polynome F_2 sur $MH_n(\mathbb{C})$ et un entier $r_2 \geq 0$ tels que pour tout $x \in GL(n,\mathbb{C})$

$$f(x) = \frac{F_2(\check{x}x)}{(x_n \mid x_n)^{r_2}} .$$

Il en résulte que pour tout $x \in M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$F_1(\check{x}x)\ (x_n \mid x_n)^{r_2} = F_2(\check{x}x)\ (x_1 / x_1)^{r_1} .$$

Comme les fonctions polynomes $x \mapsto Re(x_i \mid x_j)$, $x \mapsto Im(x_i \mid x_j)$, $(1 \leq i \leq j \leq n)$, sont algébriquement indépendantes, on voit que F_1 est "divisible" par $(x_1 \mid x_1)^{r_1}$, et par suite, il existe bien une fonction polynome g sur $MH_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $x \in M_n(\mathbb{C})$ $f(x) = g(\check{x}x)$.

2.2. La proposition qui vient d'être démontrée dit que les fonctions polynomes $x \mapsto (x_i \mid x_i)$, $(1 \leq i \leq n)$, $x \mapsto Re(x_i \mid x_j)$, $x \mapsto Im(x_i \mid x_j)$, $(1 \leq i \leq j \leq n)$,(en nombre n^2) engendrent l'anneau des fonctions polynomes invariantes par $U(n)$ et sont algébriquement indépendantes. On peut donc **énoncer** :

<u>Proposition IV-4</u> : Soit $\theta : x \mapsto \check{x}x$, et C_n l'image de θ dans $MH_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le cône des matrices hermitiennes semi-définies postives; alors θ_* est un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{E}(C_n)$ (resp. $\mathcal{D}(C_n)$) sur l'espace des fonctions C^∞(resp. C^∞ à support compact) sur $M_n(\mathbb{C})$ qui sont $U(n)$ - invariantes à gauche. Il en résulte que l'espace des distributions $U(n)$ - invariantes à gauche sur $M_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'espace des distributions sur C_n , ce dernier espace s'identifiant d'ailleurs à l'espace des distributions sur $MH_n(\mathbb{C})$ qui sont à support dans le cône C_n .

2.3. On en déduit aussitôt qu'une distribution T sur $M_n(\mathbb{C})$, qui est invariante à gauche par $U(n)$, est α_s-homogène si et seulement si θ^*T est elle-même α_s-homogène, ce qui veut dire que pour tout $b \in B_o$,$\theta^*T(\check{b}\ y\ b) = \alpha_s(b)\ \theta^*T(y)$. En utilisant la transformation de Laplace relative à $\mathring{C}_n$, on trouve :

<u>Proposition IV-5</u> : Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, l'espace des distributions sur $M_n(\mathbb{C})$, qui sont $U(n)$-invariantes à gauche et α_s - homogènes (resp. β_s - homogènes) est de dimension 1, donc engendré par la distribution $\mathcal{E}^s$ (resp. $\mathcal{R}^s$). De plus, on a :

$$\mathcal{F}\,\mathcal{E}^s = \mathcal{R}^{-s-2n} \qquad (s \in \mathbb{C}^n) .$$

2.4. En considérant le cas où $s = (\lambda,\lambda,\dots,\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$, on obtient l'énoncé suivant :

<u>Corollaire</u> : (i) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ à partie réelle >0 , on appelle T^λ la distribution définie sur $M_n(\mathbb{C})$ par la fonction $x \mapsto |\text{dét } x|^\lambda$ et $\mathcal{T}^\lambda$ la distribution $\pi^{\frac{n\lambda}{2}} T^\lambda \Big/ \prod_{1\leq p\leq n}\left(\Gamma(\frac{\lambda}{2} + p)\big/\Gamma(p)\right)$. Alors $\lambda \mapsto \mathcal{T}^\lambda$ se prolonge en une fonction analytique dans tout $\mathbb{C}$ telle que :

$$\int \mathcal{T}^\lambda(x)\, e^{-\pi \operatorname{tr}(\check{x}x)}\, dx = 1 \ ,$$

$$\text{et} \quad \mathcal{F}(\mathcal{T}^\lambda) = \mathcal{T}^{-\lambda-2n}$$

pour tout λ .

(ii) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{C}))$ telles que pour tout couple (m,n) d'éléments de $GL(n,\mathbb{C})$:

$$T(m\, x\, n) = |\text{dét}(m\, n)|^\lambda \quad T(x)$$

est de dimension 1 (il est donc engendré par la distribution $\mathcal{T}^\lambda$) .

La partie (i) de ce corollaire est connue : E. Stein en a donné une démonstration qui utilise l'analyse de Fourier sur le groupe $GL(n,\mathbb{C})$ ([15] , §6, proposition 3) . Il ne semble pas que sa méthode donne (ii) .

3. <u>Distributions homogènes sur $\mathbb{C}$ (cas où $n = 1$).</u>

3.1. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{Z}$, l'espace $\mathfrak{H}_r^\lambda$ est par définition l'espace des distributions T sur $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ telles que pour tout $m \in \mathbb{C}^*$(i.e. $m \neq 0$) on ait : $T(mz) = |m|^\lambda [m]^r \ T(z)$, (avec $[m] = \frac{m}{|m|}$) ; on voit alors que chaque $T \in \mathfrak{H}_r^\lambda$ appartient à l'espace $\mathcal{D}'_r$ des distributions sur $\mathbb{R}^2$ qui se transforment par $SO(2)$ suivant le caractère d'indice r : $T(x\cos\theta - y\sin\theta \ , x\sin\theta + y\cos\theta) = e^{ir\theta}\, T(x,y)$ $(0\leq\theta<2\pi)$, ce qu'on écrira plus succintement sous la forme :

$$T(uz) = u^r\, T(z) \qquad\qquad (u \in U(1)) \ .$$

On est alors amené naturellement à introduire l'espace $\mathcal{D}_r = \mathcal{D}'_r \cap \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ des fonctions φ telles que :

$$\varphi(uz) = u^r \varphi(z) \qquad (u \in U(1) \ , \ z \in \mathbb{C}) \ ,$$

et le projecteur continu $E_r : \psi \longmapsto (z \longmapsto \int_{U(1)} \psi(uz)\, u^{-r}\, du)$ (du étant la mesure de Haar normalisée de $U(1)$) de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathcal{D}_r$.

3.2. On va étudier les différents sous-espaces (fermés) de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ que sont les $\mathcal{D}_r$ $(r \in \mathbb{Z})$; on sait déjà tout sur $\mathcal{D}_o$, qui est le sous-espace de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ constitué par les fonctions invariantes par rotation, et on va voir qu'en fait chaque $\mathcal{D}_r$ (avec $r \neq 0$) se déduit d'une manière simple de $\mathcal{D}_o$.

Soit f une fonction polynome sur $\mathbb{R}^2$ telle que pour tous $u \in U(1)$, $z \in \mathbb{C}$, $f(uz) = u^r f(z)$; alors chacune de ses composantes homogènes a la même propriété, de sorte qu'on peut supposer f homogène; comme pour chaque entier $p \geq 1$, les fonctions $(x,y) \longmapsto (x + iy)^p$ et $(x,y) \longmapsto (x - iy)^p$ constituent une base de l'espace des polynomes harmoniques de degré p , un résultat classique dit que f s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de fonctions de type $(x,y) \mapsto (x^2 + y^2)^p (x + iy)^q$ ou de type $(x,y) \mapsto (x^2 + y^2)^p (x - iy)$ $(p,q$ entiers $\geq 0)$, et si on exprime que $f \in \mathcal{D}'_r$ on trouve que f s'écrit sous la forme :

$$f(x,y) = (x + iy)^r g(x^2 + y^2)$$

$$(\text{resp. } f(x,y) = (x - iy)^{-r} g(x^2 + y^2))$$

si $r > 0$ (resp. $r \leq 0$) , g étant une fonction polynome d'une variable. Autrement dit, la multiplication par la fonction polynome $(x,y) \mapsto (x + iy)^r$ (resp. $(x,y) \longmapsto (x - iy)^r$) est pour chaque entier $r \geq 0$ un isomorphisme de l'espace des fonctions polynomes invariantes par rotation sur l'espace des fonctions polynomes appartenant à $\mathcal{D}'_r$ (resp. $\mathcal{D}'_{-r}$) .

Soit maintenant $f \in \mathcal{E}_r = \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{D}'_r$; alors elle peut être approchée dans $\mathcal{E}(R^2)$ par une suite de fonctions polynomes, donc par une suite de fonctions polynomes appartenant à $\mathcal{D}'_r$ (ceci est du à la présence du projecteur E_r); maintenant, on sait que la multiplication par une fonction polynome sur $\mathbb{R}^n$, considérée comme endomorphisme de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ est un homomorphisme, ou ce qui revient au même, est un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ sur l'image (qui est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}(R^n)$). Dès lors, en utilisant ce qui précède, on voit que la multiplication par la fonction $(x,y) \mapsto (x + iy)^r$ (resp $(x,y) \mapsto$ $\mapsto (x - iy)^r$) est pour chaque entier $r \geq 0$ (resp. $r \leq o$) un isomorphisme d'espaces de Fréchet de $\mathcal{E}_o$ sur $\mathcal{E}_r$.

Soit enfin $f \in \mathcal{D}_r$ où r est disons, ≥ 0 ; alors il existe $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ telle que $f(x,y) = (x + iy)^r g(x^2 + y^2)$, et on ne sait pas encore que g est à support compact; soit alors $\bar{\alpha} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\alpha : (x,y) \mapsto \bar{\alpha}(x^2 + y^2)$

vaille 1 sur le support de f ; il vient $\alpha(x,y)\ f(x,y) = f(x,y) = (x + iy)^r$ $\alpha(x,y)\ g(x^2 + y^2)$, de sorte que $\mathcal{D}_r$ est exactement l'image de $\mathcal{D}_o$ par la multiplication par $(x,y) \mapsto (x+iy)^r$. En résumé, la multiplication par la fonction $(x,y) \mapsto (x + iy)^r$ (resp. $(x - iy)^{-r}$) est pour chaque entier $r \geqslant 0$ (resp. $r \leqslant 0$) un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{D}_o$ sur $\mathcal{D}_r$.

3.3. Comme $\mathcal{D}'_r$ s'identifie au dual de l'espace $\mathcal{D}_{-r}$, il y a un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{D}'_r$ sur $\mathcal{D}'_o$ qui est facilement identifiable :

<u>Proposition IV-6</u> : Pour chaque entier $r \geqslant 0$ la multiplication par la fonction $z \mapsto \bar{z}^r$ (resp. $z \mapsto z^r$) est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_r$ (resp. $\mathcal{D}'_{-r}$) sur $\mathcal{D}_o$.

3.4. On en déduit le :

<u>Corollaire</u> : Pour chaque entier $r \geqslant 0$, la multiplication par la fonction $z \mapsto \bar{z}^r$ (resp. $z \mapsto z^r$) est un monomorphisme de $\mathfrak{h}^\lambda_r$ (resp. $\mathfrak{h}^\lambda_{-r}$) dans $\mathfrak{h}^{\lambda+r}_o$

Ceci étant, pour $Re(\lambda) > 0$ et $r \in \mathbb{Z}$, le quasi-caractère $m \mapsto |m|^\lambda [m]^r$ de $\mathbb{C}^*$ a un prolongement comme fonction continue sur $\mathbb{C}$ et définit une distribution $t^\lambda_r \in \mathfrak{h}^\lambda_r$ telle que $\lambda \mapsto t^\lambda_r$ soit holomorphe dans le demi-plan $Re(\lambda) > 0$; Le corollaire précédent ramène la question du prolongement à $\mathbb{C}$ de la fonction $\lambda \mapsto t^\lambda_r$ à celle du prolongement de $\lambda \to t^{\lambda+r}_o$, à laquelle on sait répondre (chapitre I, paragraphe 3.4.), et permet daussi d'affirmer que chaque espace $\mathfrak{h}^\lambda_r$ est de dimension 1.

4. <u>Les distributions homogènes bilatères sur $M_n(\mathbb{C})$ (cas $n > 1$)</u> .

4.1. On va généraliser ces résultats au cas $n > 1$. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{Z}$ on appelle $\mathcal{H}^\lambda_r$ l'èspace des distributions $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{C}))$ telles que pour tous m et $n \in GL(n,\mathbb{C})$, $T(m\ x\ n) = |\text{dét}\ (mn)|^\lambda\ [\text{dét}(mn)]^r\ T(x)$, $\mathcal{D}'_r$ l'espace des T telles que pour tout couple d'éléments u,v de $U(n)$ $T(u\ x\ v) = (\text{dét}\ u\ v)^r\ T(x)$, $\mathcal{D}_r = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'_r$ et $\mathcal{E}_r = \mathcal{E} \cap \mathcal{D}'_r$; $\mathcal{D}'_r$ s'identifie au dual de l'espace $\mathcal{D}_{-r}$ (muni de la topologie induite par $\mathcal{D}$) et E_r : $\varphi \mapsto (x \mapsto \int_{U(n) \times U(n)} \varphi(u\ x\ v)\ (\text{dét}\ (uv)^{-r}\ du\ dv)$ où du est la mesure de Haar normalisée de $\mathbf{U}(n)$, est un projecteur continu de $\mathcal{D}$ (ou de $\mathcal{E}$) sur $\mathcal{D}_r$ (ou sur $\mathcal{E}_r$)

(u x v est à la même distance euclidienne de zéro que x , de sorte que si φ est nulle en dehors d'une boule fermée de centre zéro, $E_r\varphi$ a la même propriété).

4.2. On détermine d'abord l'anneau des fonctions polynomes sur $M_n(\mathbb{C})$ qui sont bi-invariantes par le groupe unitaire. Comme dans le chapitre II, la formule :

$$\text{dét}(\xi \mathbb{1}_n - \check{x}\, x) = \sum_{0 \leq r \leq n} (-1)^r \, q_r(x)\, \xi^{n-r}$$

définit sur $M_n(\mathbb{C})$ des fonctions polynomes bi-invariantes $q_0 = 1, q_1, \ldots$ q_n qui sont algébriquement indépendantes et engendrent l'anneau des fonctions polynomes bi-invariantes, et l'opération de restriction au sous-espace des matrices diagonales réelles est un isomorphisme sur l'anneau des fonctions polynomes sur $\mathbb{R}^n$ qui sont $\mathcal{W}$-invariantes. Ici, il y a lieu de considérer aussi l'opération de restriction $f \to \tilde{f}$ au sous-espace des matrices diagonales (complexes) : si f est bi-invariante par $U(n)$, $\tilde{f}$ est une fonction polynome symétrique sur $\mathbb{C}^n$ et telle que pour tous $u_i \in U(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ et $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $\tilde{f}(u_1 z_1, \ldots, u_n z_n) = \tilde{f}(z_1, \ldots, z_n)$ (on dira pour exprimer cette dernière propriété que $\tilde{f}$ est complètement invariante par $U(1)$; en fait il est presque immédiat que $f \longmapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme de l'anneau des fonctions polynomes $U(n)$ - bi-invariantes sur l'anneau des fonctions polynomes sur $\mathbb{C}^n$ qui sont symétriques et complètement invariantes par $U(1)$.

4.3. Soit maintenant f une fonction polynome sur $M_n(\mathbb{C})$ qui est dans $\mathcal{E}_r$ c'est-à-dire telle que pour tout couple d'éléments u, v de $U(n)$, $f(u \times v) = (\text{dét}\,(u\, v))^r f(x)$, (pour tout x); alors $\tilde{f}$ est toujours une fonction polynome symétrique sur $\mathbb{C}^n$ mais $\tilde{f}(u_1 z_1, \ldots, u_n z_n) = \left(\prod_{1 \leq i \leq n} u_i^r\right) \tilde{f}(z_1, \ldots, z_n)$ pour tout $u_i \in U(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ et tout $z \in \mathbb{C}^n$.

<u>Lemme</u> : Etant donné une telle $\tilde{f}$, il existe une (et une seule) fonction polynome $\tilde{g}$, symétrique et complètement $U(1)$ - invariante sur $\mathbb{C}^n$ telle que si $r \geq 0$ (resp. $r \leq 0$)

$$\tilde{f}(z_1, \ldots, z_n) = \left(\prod_{1 \leq i \leq n} z_i\right)^r \tilde{g}(z_1, \ldots, z_n)$$

(resp. $\tilde{f}(z_1, \ldots, z_n) = \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \bar{z}_i\right)^{-r} \tilde{g}(z_1, \ldots, z_n)$)

pour tout $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

<u>Démonstration</u> : On fait une récurrence par rapport à n (le cas $n = 1$ a été traité plus haut) : si on ordonne $\tilde{f}$ par rapport aux "variables" provenant de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, on constate que les coefficients de ce polynome sont des éléments de $\mathcal{E}_r(\mathbb{C})$; une première application de l'hypothèse de récurrence montre alors que $\tilde{f}$ est de la forme :

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_n) = (x_n + iy_n)^r \sum_p (x_n^2 + y_n^2)^p \tilde{f}_p(z_1, \dots, z_{n-1}),$$

(on a écrit $z_m = x_m + i\, y_m$ et on a supposé $r \geq 0$). On applique une deuxième fois l'hypothèse de récurrence aux différentes fonctions $\tilde{f}_p$, et on voit que $\tilde{f}$ s'écrit :

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_n) = (\prod_{1\leq i\leq n} (x_i + \sqrt{-1}\, y_i))^r \sum_p (x_n^2 + y_n^2)^p \tilde{g}_p(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_{n-1}\bar{z}_{n-1})$$

Ceci prouve l'existence de $\tilde{g}$, et il est alors immédiat que $\tilde{g}$ est unique et qu'elle est symétrique et complètement U(1)-invariante.

Ceci étant, on sait qu'il existe une fonction polynome U(n) - invariante g sur $M_n(\mathbb{C})$ dont la restriction au sous-espace des matrices diagonales complexes est la fonction g : alors la fonction $x \mapsto (\det x)^r\, g(x)$ (resp. $x \longmapsto (\det \bar{x})^{-r}\, g(x)$) est une fonction polynome appartenant à $\mathcal{E}_r$ si $r \geq 0$ (resp. $r \leq 0$) qui a même restriction que f au sous-espace des matrices diagonales, de sorte qu'elle est identique à f. On a donc :

Lemme : Pour chaque entier $r \geq 0$ la multiplication par la fonction $x \mapsto (\det x)^r$ (resp. $x \mapsto (\det \bar{x})^r$ est un isomorphisme de l'espace des fonctions polynomes bi-invariantes par U(n) sur le sous-espace de $\mathcal{E}_r$ (resp. $\mathcal{E}_{-r}$) constitué par les fonctions polynomes.

4.4. Ce lemme permet de déterminer comme dans le cas $n = 1$ les espaces $\mathcal{E}_r$ en fonction de l'espace $\mathcal{E}_o$ des fonctions C^∞ bi-invariantes par U(n). Après un raisonnement tout à fait identique à celui détaillé plus haut, on obtient :

Proposition IV-7 : (i) Pour chaque entier $r \geq 0$, la multiplication par la fonction $x \longmapsto (\det x)^r$ (resp. $x \longmapsto (\det \bar{x})^r$) est un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{E}_o$ sur $\mathcal{E}_r$ (resp. $\mathcal{E}_{-r}$) et de $\mathcal{D}_o$ sur $\mathcal{D}_r$ (resp. $\mathcal{D}_{-r}$).

(ii) Pour chaque $r \geq 0$, la multiplication par la fonction $x \mapsto (\det \bar{x})^r$ (resp. $x \longmapsto (\det x)^r$) est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_r$ (resp. $\mathcal{D}'_{-r}$) sur $\mathcal{D}'_o$.

4.5. Pour chaque λ à partie réelle > 0 et pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, on désigne par T_r^λ la distribution définie dans $M_n(\mathbb{C})$ par le **quasi-caractère**

$x \mapsto |\text{dét } x|^{\lambda} [\text{dét } x]^{r}$ de $GL(n,\mathbb{C})$ (T_o^{λ} est la distribution T^{λ} du corollaire de la proposition 5); soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{C}))$ et par exemple $r \geq 0$; on a :

$$< T_r^{\lambda} \, , \varphi > \; = \int_{\text{dét } x \neq 0} |\text{dét } x|^{\lambda - r} \, (\text{dét } x)^r \, (E_{-r}\varphi)(x) \, dx \quad ,$$

de sorte qu'on peut supposer que $\varphi \in \mathcal{D}_{-r}$, ou encore que φ est le produit d'une fonction $\psi \in \mathcal{D}_o$ par la fonction $x \mapsto (\text{dét } \bar{x})^r$, et ainsi :

$$< T_r^{\lambda} \, , \varphi > \; = \int |\text{dét } x|^{\lambda + r} \, \psi(x) \, dx = \, < T_o^{\lambda + r} \, , \psi > \quad .$$

De la même manière, si $r = -r'$ est ≤ 0 , de sorte que $r' \geq 0$, et si $\varphi \in \mathcal{D}_{r'}$, il existe $\psi \in \mathcal{D}_o$ telle que :

$$< T_r^{\lambda} \, , \varphi > \, = \, < T_o^{\lambda + r'} \, , \psi > \, = \, < T_o^{\lambda + |r|} \, , \quad \psi > \quad .$$

On est donc amené à poser :

$$\text{(IV,1)} \qquad \mathcal{E}_r^{\lambda} = \pi^{n(\lambda + |r|)/2} \; T_r^{\lambda} \Big/ \prod_{1 \leq p \leq n} \left(\Gamma\left(\frac{(\lambda + |r|)}{2} + p \right) / \Gamma(p) \right)$$

4.6. On peut énoncer :

Proposition IV-8 : (i) Pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, la fonction $\lambda \mapsto \mathcal{E}_r^{\lambda}$ se prolonge au plan complexe en une fonction analytique telle que pour chaque $r \geq 0$ et pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\text{(IV,2)} \qquad \int \mathcal{E}_r^{\lambda}(x) \quad (\text{dét } \bar{x})^r \quad e^{-\pi \, tr(\check{x}x)} \, dx = 1$$

$$\text{(IV,3)} \qquad \int \mathcal{E}_{-r}^{\lambda}(x) \quad (\text{dét } x)^r \quad e^{-\pi \, tr(\check{x}x)} \, dx = 1 \quad .$$

(ii) Pour chaque $(\lambda, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}$, l'espace $\mathcal{H}_r^{\lambda}$ est de dimension 1, (et est donc engendré par la distribution $\mathcal{E}_r^{\lambda}$) .

(iii) Soit ϑ (resp. $\bar{\vartheta}$) l'opération de multiplication dans l'espace des distributions par la fonction $x \longmapsto \text{dét } x$ (resp. $x \longmapsto \text{dét } \bar{x}$) . Alors pour chaque $r \geq 0$ et pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\text{(IV,4)} \qquad \bar{\vartheta}^r \; \mathcal{E}_r^{\lambda} = \mathcal{E}_o^{\lambda + r}$$

$$\text{(IV,5)} \qquad \vartheta^r \; \mathcal{E}_{-r}^{\lambda} = \mathcal{E}_o^{\lambda + r} .$$

Démonstration : (i) Il est clair que $\lambda \longmapsto \mathcal{C}_r^\lambda$ est analytique entière; la formule (IV,2) peut être démontrée ainsi : le premier membre s'écrit, au moins lorsque $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\int \mathcal{C}_r^\lambda(x)\ (\text{dét } \bar{x})^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)}\ dx = \int \mathcal{C}_o^{\lambda+r}(x)\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)} dx = 1$, d'après le corollaire de la proposition 5 ; la formule (IV,2) est donc vraie lorsque $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, donc toujours par prolongement analytique ; même démonstration pour (IV,3).

(ii) Chaque $\mathcal{H}_r^\lambda$ est de dimension 1 parce que $\bar{\vartheta}^r$ (resp. ϑ^r) est un mononorphisme de $\mathcal{H}_r^\lambda$ (resp. $\mathcal{H}_{-r}^\lambda$) dans $\mathcal{H}_o^\lambda$ qui est de dimension 1 $(r \geqslant 0)$.

(iii) Les formules (IV,4) et (IV,5) se démontrent comme (IV,2) et (IV,3) : d'abord pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, ce qui est immédiat, puis par prolongement analytique.

4.7. On va maintenant écrire les images de Fourier des distributions $\mathcal{C}_r^\lambda$; comme $\mathcal{F} : \mathcal{H}_r^\lambda \longmapsto \mathcal{H}_r^{\lambda-2n}$, on est amené à poser :

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}_r^\lambda) = c_r(\lambda)\ \mathcal{C}_r^{\lambda-2n}$$

et à calculer $c_r(\lambda)$. Dans cette situation, il y a deux opérateurs de Cayley : si $x_{ij} = \xi_{ij} + \sqrt{-1}\ \eta_{ij}$, on pose $\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}} = \dfrac{\partial}{\partial \xi_{ij}} - \sqrt{-1}\ \dfrac{\partial}{\partial \eta_{ij}}$.
et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_{ij}} = \dfrac{\partial}{\partial \xi_{ij}} + \sqrt{-1}\ \dfrac{\partial}{\partial \eta_{ij}}$; alors le premier (resp. deuxième) opérateur de Cayley est $\Delta = \text{dét}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{i,j}\right)$ (resp. $\bar{\Delta} = \text{dét}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_{ij}}\right)_{ij}\right)$.

<u>Lemme</u> : a) $\mathcal{F}\left[(\text{dét } x)^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)}\right] = (-i)^{nr}\ (\text{dét } x)^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)}$
b) $\mathcal{F}\left[(\text{dét } \bar{x})^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)}\right] = (-i)^{nr}\ (\text{dét } \bar{x})^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)}$
(r est un entier $\geqslant 0$) .

Démonstration : Démontrons par exemple la formule a) :

$$\mathcal{F}\left[(\text{dét } x)^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)}\right] = \left(\frac{i}{2}\right)^{nr} \bar{\Delta}^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)}$$

et on a immédiatement :

$$\bar{\Delta}^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)} = (-2\pi)^{nr}\ (\text{dét } x)^r\ e^{-\pi \mathrm{tr}(\check{x}x)} ,$$

d'où le résultat. Mais on peut aussi remarquer que chacune des fonctions $x \longmapsto (\text{dét } x)^r$ et $x \longmapsto (\text{dét } \bar{x})^r$ est une fonction polynome harmonique (la première est holomorphe et la deuxième antiholomorphe) et en déduire le résultat de manière directe.

Proposition IV-9 : Pour chaque $(\lambda,r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}_r^\lambda) = (-i)^{n|r|}\, \mathcal{C}_r^{-\lambda-2n}$$

Démonstration : On a, lorsque $r \geqslant 0$:

$$c_r(\lambda) = \int \mathcal{C}_r^\lambda(x) \quad \mathcal{F}\left[(\text{dét } \bar{x})^r \quad e^{-\pi \operatorname{tr}(\check{x}x)}\right] dx$$

$$= (-i)^{nr} \int \mathcal{C}_r^\lambda(x) \quad (\text{dét } \bar{x})^r \quad e^{-\pi \operatorname{tr}(\check{x}x)} dx \quad = (-i)^{nr}$$

On trouve de même que $c_r(\lambda) = (-i)^{n|r|}$ si $r \leq 0$.

5. Les distributions homogènes à droite qui se transforment à gauche par $U(n)$ suivant un caractère.

5.1. Comme dans le cas réel, on a besoin au préalable d'étudier les distributions $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{C}))$ telles que pour tout couple $(u,b) \in U(n) \times B_o$ on ait : $T(u \times b) = (\text{dét } u)^r \ \alpha_s(b)\ T(x)$, $s \in \mathbb{C}^n$ et $r \in \mathbb{Z}$ étant donnés, et on est amené à étudier l'espace $\mathcal{D}'_r$ des distributions $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{C}))$ qui se transforment à gauche par $U(n)$ suivant $u \longmapsto (\text{dét } u)^r$; (on a utilisé la même notation plus haut pour désigner un espace différent, mais on espère que cela ne causera pas d'ennui). On a :

Lemme IV-4 : Soit f une fonction polynome sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $f(ux) = (\text{dét } u)^r\ f(x)$ pour tous $u \in U(n)$ et $x \in M_n(\mathbb{C})$; alors si $r \geqslant 0$ (resp. $r \leq 0$) il existe une unique fonction polynome g sur $M_n(\mathbb{C})$ invariante à gauche par $U(n)$ telle que pour tout $x \in M_n(\mathbb{C})$ on ait $f(x) = (\text{dét } x)^r\ g(x)$ (resp. $f(x) = (\text{dét } \bar{x})^{-r}\ g(x)$).

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur n , suivant la méthode utilisée dans celle de la proposition 3, (le cas $n = 1$ ayant été traité plus haut).

a) Si $x = ub$, avec $u \in U(n)$, $b \in B_o$, on a $f(x) = (\text{dét } u)^r\ f(b) = [\text{dét } x]^r\ f(b) = [\text{dét } \bar{x}]^{-r}\ f(b)$. Soit $\bar{f}$ la restriction de f au sous-espace des matrices $x = \begin{pmatrix} x_{11} & * \\ 0 & x' \end{pmatrix}$ avec $x_{11} \in \mathbb{C}$, $x' \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ et $* = (x_{12},\ldots,x_{1n})$; alors :

$$f(x_{11},\dots,x_{1n};\,x') = \sum_{\alpha} Q_\alpha(x')\,\xi_{11}^{\alpha_1}\,\eta_{11}^{\alpha_2}\dots\xi_{1n}^{\alpha_{2n-1}}\;\eta_{1n}^{\alpha_{2n}}$$

et chaque Q_α se transforme à gauche par $U(n-1)$ suivant $u' \mapsto (\text{dét } u')^r$; l'hypothèse de récurrence dit alors qu'il existe une unique fonction polynome g_α définie sur $MH_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $Q_\alpha(x') = (\text{dét } x')^r\; g_\alpha(\check{x}x')$ ou bien $Q_\alpha(x') = (\text{dét } \bar{x}')^{-r}\; g_\alpha(\check{x}x')$ suivant que r est positif ou négatif.

b) On a donc (en supposant pour simplifier que $r \geqslant 0$) :

$$\bar{f}(x_{11},\dots,x_{1n};\,x') = (\text{dét } x')^r \sum_{\alpha} f_\alpha(x_{11},\dots,x_{1n})\; m_\alpha(\check{x}x')$$

et chaque f_α vérifie la condition d'homogénéité suivante :

$$f_\alpha(u\,x_{11},\dots,u\,x_{1n}) = u^r\, f_\alpha(x_{11},\dots,x_{1n})$$

pour tout $u \in U(1)$ et tout $x_{1i} \in \mathbb{C}$. On a alors :

<u>Lemme IV-5</u> : Soit $f : (z_1,\dots,z_n) \mapsto \mathbb{C}$ une fonction polynome définie sur $\mathbb{C}^n$, homogène par rapport à chacune de ses variables $z_1,\dots,z_n$ et telle que pour tout $u \in U(1)$ on ait :

$$f(u\,z_1,\dots,u\,z_n) = u^r\, f(z_1,\dots,z_n)\ ,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^n$. Alors f s'écrit :

$$f(z_1,\dots,z_n) = \sum_{\sum_i p_i - \sum_i q_i = r} z_1^{p_1}\,\bar{z}_1^{q_1}\dots z_n^{p_n}\,\bar{z}_n^{q_n}\, f_{p,q}(z_1,\dots,z_n)$$

où chaque $f_{p,q}$ est invariant par $U(1)$ c'est-à-dire telle que :

$$f_{p,q}(u\,z_1,\dots,u\,z_n) = f_{p,q}(z_1,\dots,z_n)\quad (u \in U(1))\ .$$

La décomposition de f n'est évidemment pas unique.

<u>Démonstration</u> : Par récurrence sur n; on écrit $z_i = x_i + \sqrt{-1}\,y_i$ et $f(z_1,\dots,z_n) = \sum_\alpha f_\alpha(x_1, y_1)\, m_\alpha(x_2, y_2,\dots,x_n,y_n)$ et comme chaque f_α est homogène, il vient :

$$f(z_1,\dots,z_n) = \sum_{p,p'} (x_1 + iy_1)^p\,(x_1^2 + y_1^2)^{p'}\, f_{p,p'}(z_2,\dots,z_n) +$$
$$\sum_{q,q'} (x_1 - i\,y_1)^q\,(x_1^2 + y_1^2)^{q'}\quad f_{q,q'}(z_2,\dots,z_n)$$

et cette écriture est unique. Alors on vérifie que pour tous $u \in U(1)$ et $z_2,\dots,z_n$, on a :

$$f_{p,p'}(u\,z_2,\dots,u\,z_n) = u^{r-p}\, f_{p,p'}(z_2,\dots,z_n)$$

et

$$f_{q,q'}(u\,z_2,\dots,u\,z_n) = u^{r+p}\, f_{q,q'}(z_2,\dots,z_n)$$

de sorte qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux $f_{p,p'}$ et $f_{q,q'}$.

c) En revenant à la décomposition $x = ub$, on a

$f(x) = [\text{dét } x]^r \ f(b) = [\text{dét } \bar{x}]^{-r} \ f(b)$ et $f(b) = \bar{f}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}; b')$.

D'après ce qu'on vient de voir :

$$\bar{f}(b_{11}, \dots, b_{1n}; b') = \sum f_\alpha(b_{11}, \dots, b_{1n}) \, (\text{dét } b')^r \, m_\alpha(\check{b}'b')$$

Comme $b_{11} = (x_1|x_1)^{1/2}$ et $b_{1i} = \dfrac{(x_i|x_1)}{(x_1|x_1)^{1/2}}$ si $p_1+\dots+p_n-q_1-q_2-q_n = r$, on a :

$$b_{11}^{p_1} \bar{b}_{11}^{q_1} \dots b_{1n}^{p_n} \bar{b}_{1n}^{q_n} = (x_1|x_1)^{r/2} (x_1|x_1)^{1-(p_1+\dots+p_n)} \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i|x_1)^{p_i} (x_1|x_i)^{q_i} =$$

$$= b_{11}^r \frac{\prod_i (x_i|x_1)^{p_1} (x_1|x_i)^{q_1}}{(x_1|x_1)^{p_1+\dots+p_n}}$$

Sachant que $b_{11}^r (\text{dét } b')^r = |\text{dét } x|^r$, on en déduit qu'il existe une fonction polynome F_1 sur $MH_n(\mathbb{C})$ et un entier $r_1 \geqslant 0$ tels que pour tout $x \in GL(n,\mathbb{C})$:

$$f(x) = (\text{dét } x)^r \frac{F_1(\check{x}x)}{(x_1|x_1)^{r_1}} \quad \text{si} \quad r \geqslant 0$$

$$\text{ou bien} \quad f(x) = \text{dét } \bar{x})^{-r} \frac{F_1(\check{x}x)}{(x_1|x_1)^{r_1}} \quad \text{si} \quad r \leqslant 0$$

On termine la démonstration du lemme 4 comme celle de la proposition 3.

5.2. Ce lemme permet de démontrer :

<u>Proposition IV-10</u> : (i) Pour chaque entier $r \geqslant 0$, la multiplication par la fonction $x \longmapsto (\text{dét } x)^r$, notée $\mathcal{V}^r$) (resp. $x \longmapsto (\text{dét } \bar{x})^r$, notée $\bar{\mathcal{V}}^r$), est un isomorphisme de $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \cap \mathcal{D}'_0$ sur $\mathcal{E}_r = \mathcal{E} \cap \mathcal{D}'_r$ (resp. $\mathcal{E}_{-r}$) et de $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'_0$ sur $\mathcal{D}_r = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'_r$ (resp. $\mathcal{D}_{-r}$).

(ii) Pour chaque $r \geqslant 0$, $\bar{\mathcal{V}}^r$ (resp. $\mathcal{V}^r$) est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_r$ (resp. $\mathcal{D}'_{-r}$) sur $\mathcal{D}'_0$.

5.3. Soit maintenant $r \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{C}^n$; la fonction $x \longmapsto [\text{dét } x]^r \alpha_s(x)$ (resp. $x \longmapsto [\text{dét } x]^r \beta_s(x)$) à priori définie sur $GL(n,\mathbb{C})$ détermine dans les mêmes conditions que α_s (res. β_s) une distribution T_r^s (resp. R_r^s) dans $M_n(\mathbb{C})$ et cette distribution est telle que :

$$T_r^s(u\,x\,b) = (\text{dét } u)^r \alpha_s(b) \ T_r^s(x)$$

$$(\text{resp. } R_r^s(u\,x\,{}^tb) = (\text{dét } u)^r \beta_s({}^tb) \, R_r^s(x))$$

pour tous $u \in U(n)$ et $b \in B_o$.

On est alors amené à poser :

$$\mathcal{T}_r^s = \pi^{(n|r|+\sum_i s_i)/2} \, T_r^s \Big/ \prod_{1\le i\le n} (\Gamma(\frac{s_i + |r|}{2} + i)/\Gamma(i)$$

$$\mathcal{R}_r^s = \pi^{(n|r|+\sum_i s_i)/2} \, R_r^s \Big/ \prod_{1\le i\le n} (\Gamma(\frac{s_i + |r|+1}{2}) \Big/ \Gamma(i)$$

5.4. On a alors la

Proposition IV-11 : (i) Les fonctions $s \longmapsto \mathcal{T}_r^s$ et $s \longmapsto \mathcal{R}_r^s$ ont chacune un prolongement analytique dans $\mathbb{C}^n$, et pour chaque $(s,r) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}_r^s$ (resp. $\mathcal{R}_r^s$) est une distribution dans $\mathcal{D}'_r$ qui est α_s (resp. β_s) - homogène et :

$$\bar{v}^r \, \mathcal{T}_r^s = \mathcal{T}_o^{s+r} \qquad (\text{si } r \geq 0)$$

$$v^{|r|} \, \mathcal{T}_r^s = \mathcal{T}_o^{s+|r|} \qquad (\text{si } r \leq 0)$$

(On a des formules identiques en remplaçant $\mathcal{T}$ par $\mathcal{R}$) .

(ii) Pour chaque $(s,r) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}$, le sous-espace de $\mathcal{D}'_r$ constitué par les distributions α_s (resp. β_s) - homogènes est de dimension 1 (et est par conséquent engendré par $\mathcal{T}_r^s$ (resp. $\mathcal{R}_r^s$)) .

(iii) Les transformées de Fourier de ces distributions se calculent ainsi :

$$\mathcal{F}\mathcal{T}_r^s = (-i)^{n|r|} \, \mathcal{R}_r^{-s-2n}$$

$$\mathcal{F}\mathcal{R}_r^s = (-i)^{n|r|} \mathcal{T}_s^{-s-2n}$$

6. Distributions définies par les fonctions sphériques de $GL(n,\mathbb{C})$

6.1. Soit maintenant Φ_s la fonction sphérique $x \longmapsto \int_{U(n)} \alpha_s(xu)du = \int_{U(n)} \beta_s^\vee (xu)\, du$; dans les mêmes conditions que α_s ou $\beta_s^\vee$, elle définit une distribution Σ_o^s et pour chaque $r \in \mathbb{Z}$ la fonction $z \longmapsto [\text{dét } x]^r \, \Phi_s(x)$ à priori définie dans $Gl(n,\mathbb{C})$ définit aussi une distribution Σ_r^s dans $M_n(\mathbb{C})$; en fait, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(M_n(C))$ on a :

$$< \Sigma_r^s \ , \varphi > \ = \int T_r^s(x)\, dx \quad \int_{U(n)} \varphi(xu)\ (\text{dét } u)^{-r}\ du$$

et on est amené à poser

$$\mathcal{C}_r^s = \pi^{(n|r| + \sum_i s_i)/2}\, \Sigma_r^s \Big/ \prod_{1 \le i \le n} \Gamma\left(\frac{s_i + |r|}{2} + n+1-i\right) \Big/ \Gamma(n+1-i))$$

6.2. Les propriétés des $\mathcal{C}_r^s$ sont résumées dans la

Proposition IV-12 : La fonction $s \longmapsto \mathcal{C}_r^s$ a un prolongement analytique dans $\mathbb{C}^n$ qui est d'ailleurs défini par :

$$< \mathcal{C}_r^s \ , \varphi > \ = \int \mathcal{C}_r^s\ (x)\ dx \qquad \int_{U(n)} \varphi(xu)\ (\text{dét } u)^{-r} \ du \ .$$

Pour chaque $(s,r) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{Z}$, $\mathcal{C}_r^s$ est une distribution tempérée et

$$\mathcal{F}\mathcal{C}_r^s = (-i)^{n|r|} \qquad \mathcal{C}_r^{-\check{s}-2n}$$

7. Le cas quaternionnien.

7.1. On s'intéresse maintenant au cas quaternionien. Soit donc H l'algèbre à division des quaternions avec sa base $1_{\mathbb{H}}$, u, v, w (cf. chapitre I) , et $M_n(\mathbb{H})$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans H , qui s'identifie à l'algèbre des endomorphismes de H^n , considéré comme espace vectoriel à droite sur H ; dans le groupe linéaire $Gl(n,H)$, on distingue le groupe unitaire quaternionien $U(n)$ et le groupe B_o des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux réels > 0 . Ici aussi (cf. pour tout cela Chevalley : "Théory of Lie Groups I" , chap. I, § VII) tout $x \in GL(n,\mathbb{H})$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = ub$, avec $u \in U(n)$ et $b \in B_o$, et on a le même résultat pour le groupe ${}^tB_o$ des matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux > 0 . La donnée d'un $s \in \mathbb{C}^n$ définit un caractère α_s (resp. β_s) de B_o (resp. ${}^tB_o$) qui s'étend de manière unique en une fonction α_s (resp. β_s) sur $Gl(n,\mathbb{H})$ invariante à gauche par $U(n)$ et α_s - homogène (resp. β_s - homogène); si on veut écrire explicitement $\alpha_s(x)$ et $\beta_s(x)$ comme dans le cas réel ou complexe, on ne peut plus parler ici de déterminant, mais la notion de module d'un élément $x \in GL(n,\mathbb{H})$ remplace très bien celle du déterminant (cf. par exemple : A. Weil : "Basic Number Theory" chap. I § 2) . En tout cas, lorsque $s \in \omega_n$ (resp. ω'_n) α_s (resp. β_s) définit dans $M_n(\mathbb{H})$ une distribution T^s (resp. R^s) et on a :

Proposition IV-13 : Les fonctions $s \mapsto \mathcal{T}^s =$

$$\pi^{(\Sigma s_i)/2}\, T^s \Big/ \prod_{1 \leq i \leq n} \left(\Gamma(\tfrac{s_i}{2} + 2(n+1-i))/\Gamma(2(n+1-i))\right) \quad \text{et} \quad s \mapsto \mathcal{R}^s =$$

$$\pi^{(\Sigma s_i)/2}\, R^s \Big/ \prod_{1 \leq i \leq n} \left(\Gamma(\tfrac{s_i}{2} + 2i)/\Gamma(2i)\right) \quad \text{sont prolongeables à } \mathbb{C}^n$$

en des fonctions analytiques, et pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{T}^s$ (resp. $\mathcal{R}^s$) est une distribution invariante à gauche par $U(n)$ et α_s (resp. β_s)-homogène telle que :

$$\int \mathcal{T}^s(x)\, e^{-\pi \operatorname{tr}(\check{x}x)}\, dx = 1$$

$$\left(\text{resp.} \int \mathcal{R}^s(x)\, e^{-\pi \operatorname{tr}(\check{x}x)}\, dx = 1\right)$$

où $\check{x}$ est la matrice transposée "conjuguée (pour la conjuguaison des quaternions) de x .

7.2. On étudie les distributions invariantes à gauche par le groupe compact $U(n)$. On a :

Proposition IV-14 : Soit $f : M_n(\mathbb{H}) \mapsto \mathbb{C}$ une fonction polynome invariante à gauche par le groupe unitaire quaternionien. Alors il existe une unique fonction polynome g sur l'espace vectoriel réel $MH_n(\mathbb{H})$ des matrices hermitiennes $n \times n$ telle que pour tout $x \in M_n(\mathbb{H})$: $f(x) = g(\check{x}x)$.

La démonstration se fait suivant le même principe que dans le cas complexe : il faut remplacer le groupe $SO(2)$ par le groupe $SU(2)$ des matrices 2×2 unitaires à coefficients complexes et de déterminant 1 ("c'est" le groupe des quaternions de norme 1).

Il en résulte que l'espace des distributions sur $M_n(\mathbb{H})$ qui sont invariantes à gauche par $U(n)$ est isomorphe à l'espace des distributions dans $MH_n(\mathbb{H})$ qui sont à support dans le cône des matrices semi-définies positives. On utilise la transformation de Laplace par rapport à ce cône pour prouver le résultat suivant :

<u>Proposition IV-15</u> : Pour chaque $s \in \mathbb{C}^n$, l'espace des distributions sur $M_n(\mathbb{H})$ qui sont $U(n)$-invariantes à gauche et α_s - homogènes (resp. β_s - homogènes) est de dimension 1, donc engendré par $\mathcal{E}^s$ (resp. $\mathcal{R}^s$) . De plus, on a :

$$\mathcal{F}\mathcal{E}^s = \mathcal{R}^{-s-4n} \qquad (s \in \mathbb{C}^n)$$

<u>Corollaire</u> : Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(M_n(\mathbb{H}))$ telles que pour tout couple (m,n) d'éléments de $Gl(n,\mathbb{H})$:

$$T(m\, x\, n) = (\mathrm{mod}(m\, n))^{\lambda} \quad T(x)$$

est de dimension 1.

CHAPITRE V

On s'est intéressé au groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ qui laissent invariante la fonction $x \longmapsto \text{dét}\, x$; avant de découvrir que la détermination de ce groupe est une conséquence immédiate d'un théorème de Dieudonné, on a écrit quelques lemmes très généraux et faciles qui ont comme conséquences des théorèmes de T. Ono, N. Jacobson, et celui de Dieudonné; essentiellement, ces résultats identifient les groupes d'automorphismes de certaines algèbres de Jordan simples à des groupes linéaires admettant certaines fonctions polynomes comme invariants.

1. Invariants caractéristiques du groupe des automorphismes d'une algèbre.

1.1. Soit k un corps commutatif, E, (resp. F) , un espace vectoriel de dimension finie n (resp. m), et $p : E \longrightarrow \mathrm{End}_k(F)$ une application linéaire; on définit sur E des fonctions polynomes $p_o = 1$, $p_1, \ldots, p_m$ par la formule

$$\text{dét}\, (\xi\, \mathrm{id}_F - p(x)) = \sum_{0 \leq i \leq m} (-1)^i\, p_i(x)\, \xi^{m-i}$$

où id_F est l'application "identique" de F dans lui-même. Soit $G \subset GL(E)$ le sous-groupe constitué par les automorphismes f qui admettent comme invariant chacune des fonctions p_i , c'est-à-dire tels que pour tout $x \in E$, on ait : $p_i(x) = p_i(f(x))$ $(1 \leq i \leq m)$; il en résulte que chacune des fonctions $x \longmapsto \mathrm{tr}.\, (p(x))^r$ $(1 \leq r \leq m)$ est G-invariante; soit alors $B : (x,y) \longmapsto \mathrm{tr}\, (p(x)p(y))$ la forme-trace associée à p et C la forme trilinéaire symétrique définie par :

$$C(x,y,z) = \mathrm{tr}.\, (\{p(x),p(y)\}\ p(z)) ,$$

pour tout triplet d'éléments x,y,z de E , avec $\{p(x), p(y)\} = (p(x)\, p(y) + p(y)\, p(x))/2$, (on suppose la division par 2 permise dans k). On a alors :

<u>Lemme V-1</u> : On suppose désormais que la caractéristique de k n'est ni 2 ni 3. B et C sont G-invariantes.

<u>Démonstration</u> : Si f est un endomorphisme de E tel que : $\mathrm{tr}(p(x))^2 = \mathrm{tr}.\, (p \circ f(x))^2$ pour tout $x \in E$, il vient en écrivant $x = y+z$: $2\mathrm{tr}.\, (p(y)\, p(z)) = 2\mathrm{tr}.\, (p \circ f(y).\, p \circ f(z))$ de sorte que B est G-invariante. De même, si $\mathrm{tr}.(p(x))^3 = \mathrm{tr}.(p \circ f(x))^3$ pour tout $x \in E$, on obtient en remplaçant x par $y+z$:
$3\, \mathrm{tr}(p(y)^2\, p(z) + p(y)\, p(z)^2) = 3\, \mathrm{tr}(p \circ f(y)^2\, p \circ f(z) + p \circ f(y)\, p \circ f(z)^2)$.
Après "simplification" par 3, on remplace y par $x+y$, et tous calculs effectués, on trouve :

$$2\ \mathrm{tr.}\,(\{p(x),\ p(y)\}\ \ p(z)) = 2\ \mathrm{tr.}(\{p\circ f(x),\ p\circ f(y)\}\ p\circ f(z)),$$

ce qui montre que C est invariante.

1.2. Ceci étant, on suppose qu'on dispose dans E d'une multiplication : $(x,y) \longmapsto x * y$, k-bilinéaire mais éventuellement non associative; assez souvent, on se trouvera dans la situation suivante : $\mathfrak{U}$ est une algèbre sur k , $\mathfrak{U}^+$ est l'algèbre obtenue en munissant l'espace vectoriel de $\mathfrak{U}$ de la multiplication $(x,y) \longmapsto \{x,y\} = \frac{1}{2}(xy + yx)$, (où xy est le produit de x par y dans l'algèbre $\mathfrak{U}$), et E une sous-algèbre de $\mathfrak{U}^+$.

Lemme V-2 : Si la forme trace B est non dégénérée, et si $p(x*y) = \{p(x)\ ,\ p(y)\}$ (pour tout couple d'éléments x, y de E) , G est un sous-groupe du groupe Aut (E) des automorphismes de l'algèbre E .

Démonstration : Puisque $p(x*y) = \{p(x)\ ,\ p(y)\}$, on voit que l'invariance de $\mathfrak{C}$ s'écrit :

$$B(x*y,z) = B(f(x)*f(y)\ ,\ f(z))\ ,$$

pour tous x, y, z dans E . Comme B est invariante, il en résulte que $B(f(x*y) - f(x)*f(y)\ ,\ f(z)) = 0$ pour tous $x, y, z \in E$, ce qui implique : $f(x*y) = f(x)*f(y)$, parce que B est non dégénérée.

2. Invariants caractéristiques du groupe des automorphismes d'une algèbre alternative simple.

2.1. L'intérêt de ce résultat réside dans le fait qu'on a dans un assez grand nombre de cas des renseignements précis sur Aut(E) ; par exemple un résultat de G. Ancochéa ([4]) affirme que si $\mathfrak{U}$ est une algèbre associative simple sur k , (sauf précision contraire, on supposera qu'une telle algèbre est de centre k) , et $E = \mathfrak{U}^+$, alors un automorphisme de E est soit un automorphisme de $\mathfrak{U}$, soit un anti-automorphisme de $\mathfrak{U}$. Il en résulte aussitôt :

Lemme V-3 : Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre associative simple sur k et $p : \mathfrak{U} \longmapsto \mathrm{End}_k(F)$ une représentation (ou même une anti-représentation) linéaire de $\mathfrak{U}$ dans F telle que la forme trace associée soit non dégénérée; alors le groupe G est le groupe des applications de la forme $x \longmapsto y\ {}^t x\ y^{-1}$ où y est une unité de $\mathfrak{U}$ et $x \longmapsto {}^t x$ est soit l'identité, soit un antiautomorphisme fixe de $\mathfrak{U}$ appartenant à G .

Proposition V-1 : Soit A un anneau commutatif réduit, et G le groupe des automorphismes du A-module $M_n(A)$ qui laisse invariant le polynome caractéristique des éléments de $M_n(A)$; alors $G = \mathrm{Aut}\,(M_n(A)^+)$; si $A = k$, G est constitué par les applications linéaires qui sont de la forme $x \longmapsto y\,{}^t x\, y^{-1}$, où $y \in GL(n,k)$ et $x \longmapsto {}^t x$ est soit l'identité, soit la transposition.

Démonstration : a) Pour avoir la deuxième partie de la proposition, lorsque $A = k$, il suffit d'appliquer le lemme 3 avec $\mathfrak{U} = M_n(k)$, $p : M_n(k) \longmapsto \mathrm{End}_k(k^n)$ étant l'identification des matrices avec des endomorphismes de k^n .

b) Soit maintenant A un anneau commutatif, et G le sous-groupe du groupe des automorphismes du A-module $M_n(A)$ constitué par les $f : M_n(A) \longrightarrow M_n(A)$ laissant chacune des fonctions $x \longmapsto tr(x^2)$ et $x \longmapsto tr(x^3)$ invariante. Alors toujours sous l'hypothèse que l'on peut diviser par 2 et par 3 dans l'anneau A, il en résulte que f est un automorphisme de l'anneau $(M_n(A))^+$; soit maintenant m un idéal maximal de A, $k = A/m$, et $\pi : A \longrightarrow k$ le passage au quotient; alors pour chaque i tel que $1 \leq i \leq n$, $\pi(p_i(f(x))) = p_i(\bar{f}(\pi(x)))$, où $\bar{f}$ est l'endomorphisme de $M_n(k)$ associé à f , et $\pi(x)$ est l'élément de $M_n(k)$ défini ainsi : si $x = (x_{ij})_{i,j}$, $\pi(x) = (\pi(x_{ij}))_{i,j}$, de sorte que $\pi(f(x)) = \bar{f}(\pi(x))$; lorsque f est un automorphisme de $M_n(A)^+$, $\bar{f}$ est un automorphisme de $M_n(k)^+$, et d'après ce qui précède, $p_i(\bar{f}(\pi(x))) = p_i(\pi(x)) = \pi(p_i(x))$; ainsi $p_i(f(x)) = p_i(x) \mod (m)$, ou encore $p_i(f(x)) = p_i(x)$ pour tout i et par suite $\mathrm{Aut}\,(M_n(A)^+) \subset G$.

Remarque : On peut aussi appliquer le lemme 3 lorsque p : $\mathfrak{U} \longmapsto \mathrm{End}_k(\mathfrak{U})$ est la représentation régulière gauche $x \longmapsto L_x^{\mathfrak{U}}$ (où $L_x^{\mathfrak{U}}$ est la multiplication à gauche par x) mais dans ce cas l'hypothèse concernant la forme trace introduit une condition supplémentaire de séparabilité; toutefois, si $\mathfrak{U}$ est une algèbre de quaternions sur k , cette condition est automatiquement réalisée, et le groupe G admettant la fonction norme et la fonction trace est celui des applications de la forme $x \longmapsto y\,{}^t x\, y^{-1}$, où y est un quaternion inversible et $x \longmapsto {}^t x$ est soit l'identité, soit la conjugaison usuelle des quaternions.

2.2. Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre de Cayley sur k ([17]) on a ici aussi des fonctions trace σ et norme N , à valeurs dans k , et une conjugaison $x \longmapsto \bar{x}$ telle que :

$$x + \bar{x} = \sigma(x).1$$
$$x\bar{x} = N(x).1 \ .$$

Le polynome caractéristique de la multiplication à gauche $L_x^{\mathfrak{U}}$ par x s'écrit ([18])

$$\text{dét}(\xi\, \mathrm{id}_{\mathfrak{U}} - L_x^{\mathfrak{U}}) = (\xi^2 - \sigma(x)\xi + N(x))^4 ,$$

de sorte que $B(x,y) = \mathrm{tr.}\,(L_x^{\mathfrak{U}} L_y^{\mathfrak{U}}) = 4\,\sigma(xy)$; comme $(x,y) \longmapsto \sigma(xy)$ est non dégénérée, B l'est aussi; d'autre part, $L_{\{x,y\}}^{\mathfrak{U}} = \{L_x^{\mathfrak{U}}, L_y^{\mathfrak{U}}\}$ pour tout couple d'éléments x, y de $\mathfrak{U}$, parce que $\mathfrak{U}$ est une algèbre alternative; on voit ainsi que le lemme 2 s'applique et par conséquent tout automorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{U}$ laissant σ et N invariantes est un automorphisme de l'algèbre de Jordan $\mathfrak{U}^+$; réciproquement, en utilisant la détermination explicite de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}^+)$ qui a été faite par Jacobson, on constate que chaque automorphisme de $\mathfrak{U}^+$ laisse σ et N invariantes; le groupe G admettant σ et N comme invariants est donc $\mathrm{Aut}(\mathfrak{U}^+)$.

3. Invariants caractéristiques des groupes d'automorphismes d'algèbres de Jordan spéciales déployées.

3.1. On a d'autres applications du lemme 2 dans la situation suivante : on se donne une algèbre simple associative $\mathfrak{U}$ sur k , une représentation linéaire $p : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathrm{End}_k(F)$ et on restreint p à diverses sous-algèbres E de $\mathfrak{U}^+$, dont la définition est liée à la donnée d'une involution de $\mathfrak{U}$; on distingue deux cas :

1/ Celui où $\mathfrak{U}$ a un centre $K \supset k$ qui est une extension quadratique séparable de k, et où on se donne une involution J de 2ème espèce de $\mathfrak{U}$, c'est-à-dire une involution qui induit dans K l'automorphisme non trivial; on définit alors E comme étant la sous-algèbre de $\mathfrak{U}^+$ constituée par les éléments de $\mathfrak{U}$ laissés fixes par J ; E est une algèbre de Jordan simple de type A_{II} .

2/ Celui où $\mathfrak{U}$ est centrale sur k , et où J est une involution de première espèce; on distingue alors deux types (B et C) d'algèbres de Jordan $E = \{x;\ Jx = x\}$ suivant la nature de J ; lorsque $\mathfrak{U} = M_n(k)$, l'involution $J : x \longmapsto {}^t x$ définit une algèbre de Jordan de type B (algèbre de Jordan des matrices symétriques), et l'involution $J : x \longmapsto y\,{}^t x\, y^{-1}$ (avec y antisymétrique, ce qui implique n pair) définit une algèbre de Jordan de type C (algèbre des matrices symplectiques).

Le résultat essentiel concernant les automorphismes de ces algèbres $E \subset \mathfrak{U}^+$ est que tout automorphisme de E s'étend en un automorphisme de $\mathfrak{U}^+$ ([19]) .

3.2. On s'intéresse à l'algèbre de Jordan des matrices symétriques.

<u>Proposition V-2</u> : Soit $E \subset M_n(k)$ l'algèbre de Jordan des matrices symé-

métriques; le sous-groupe $G \subset GL(E)$ constitué par les automorphismes de l'espace vectoriel E qui admettent comme invariant chacune des fonctions polynomes p_i $(1 \leq i \leq n)$ définies par $\det(\zeta 1_n - x) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i p_i(x) \zeta^{n-i}$ est le groupe des applications de la forme $x \longmapsto yxy^{-1}$ où y est pseudo-orthogonale (i.e.) telle que ${}^t y\, y = \alpha 1_n$; $\alpha \in k)$. C'est le groupe des automorphismes de E .

Démonstration : le lemme 2 s'applique car $B(x,y) = tr(xy)$ est non dégénérée; il en résulte que tout $f \in G$ est un automorphisme de E; réciproquement tout automorphisme de E étant la restriction à E d'un automorphisme de $M_n(k)^+$ laisse invariant chaque fonction p_i $(1 \leq i \leq n)$; donc $G = Aut(E)$; quant à la détermination explicite de G , elle s'obtient en écrivant que l'automorphisme $x \longmapsto y\,x\,y^{-1}$ de $M_n(k)$ opère dans E , c'est-à-dire commute à la transposition, ce qui est réalisé si et seulement si y est pseudo-orthogonal.

Un résultat plus général lorsque $k = \mathbb{R}$ concernant des questions proches de celle-ci a été démontré par A. Albert ("On the orthogonal equivalence of real symmetric matrices", J. Math. Mech. 7 (1958) 219-225) .

3.3. On s'intéresse à l'algèbre des matrices symplectiques.

Proposition V-3 : Soit $n = 2m$, $y = \begin{pmatrix} 0_m & 1_m \\ -1_m & 0_m \end{pmatrix}$ la matrice alternée standard d'ordre 2m, $E \subset M_{2m}(k)$ l'algèbre de Jordan des matrices symplectiques $x = y\,{}^t x\,y^{-1}$, et G le sous-groupe de $GL(E)$ constitué par les automorphismes de l'espace vectoriel E admettant comme invariant chacune des fonctions $p_i (1 \leq i \leq n)$; G est le groupe des automorphismes de E , c'est-à-dire le groupe des applications de la forme $x \longmapsto zx\,z^{-1}$, où z vérifie l'égalité $y^{-1}\,{}^t z\,yz = \alpha\, 1_{2m} (\alpha \in k)$.

Démonstration : Elle est identique à celle de la proposition 2; il suffit de vérifier que $(x,y) \longmapsto tr(xy)$ est non dégénérée.

3.4. Enfin, par le même procédé on démontre :

Proposition V-4 : Soit $K = k+ik$ une extension quadratique séparable de k , $E \subset M_n(K)$ l'algèbre de Jordan des matrices hermitiennes $x = {}^t\bar{x}$; le groupe G des automorphismes de l'espace vectoriel E admettant comme invariant chacune des fonctions p_i $(1 \leq i \leq n)$ est le groupe des applications de la forme $x \longmapsto y\,{}^t x\,y^{-1}$ où y est pseudo-unitaire (i.e. telle que ${}^t\bar{y}\,y = \alpha 1_n$, $\alpha \in k)$ et $x \longmapsto {}^t x$ est soit l'identité, soit la transposition. C'est le groupe des automorphismes de E .

4. Le groupe des automorphismes linéaires qui admettent une fonction norme comme invariant.

4.1. On a besoin maintenant d'une autre caractérisation du groupe G qui a été défini plus haut au moyen des fonctions polynomiales p_i $(1 \leq i \leq n)$.

Lemme V-4 : Si $\mathrm{Card}(k) \geqslant m$, ce que l'on supposera désormais, G est le groupe des automorphismes f de l'espace vectoriel E tels que :

$$\text{dét}(\alpha\, id_F - p(x)) = \text{dét}\,(\alpha\, id_F - p \circ f(x)) \;,$$

pour tout $\alpha \in k$ et tout $x \in E$.

Démonstration : Si f est un automorphisme de l'espace vectoriel E tel que pour tout $\alpha \in k$ et tout $x \in E$:

$$\text{dét}(\alpha\, id_F - p(x)) = \text{dét}(\alpha\, id_F - p \circ f(x)) \;,$$

on a pour chaque x :

$$(p_1(x) - p_1(f(x)))\,\alpha^{m-1} - (p_2(x) - p_2(f(x)))\,\alpha^{m-2} + \dots$$

$$+ (-1)^{m-1}\,(p_m(x) - p_m(f(x))) = 0 \;,$$

et ce pour tout $\alpha \in k$. Il en résulte que si k a au moins m éléments, $p_i(x) = p_i(f(x))$, $(1 \leq i \leq m)$, de sorte que $f \in G$.

4.2. Soit maintenant G' le groupe des automorphismes f de l'espace vectoriel E tels que pour tout $x \in E$.

$$\text{dét}\, p(x) = \text{dét}\, p \circ f(x)$$

Il est clair que $G \subset G'$. Supposons maintenant que E possède une unité 1_E $(1_E * x = x * 1_E = x$ pour tout x) et que $p(1_E) = id_F$.

Lemme V-5 : Si $f \in G'$ et $f(1_E) = 1_E$, alors $f \in G$.

Démonstration : Soit $\alpha \in k$ et $x \in E$; alors :

$$\begin{aligned}\text{dét}(\alpha\, id_F - p \circ f(x)) &= \text{dét}(\alpha\, p \circ f(1_E) - p \circ f(x)) \\ &= \text{dét}\, p \circ f(\alpha\, 1_E - x) = \text{dét}\, p(\alpha\, 1_E - x)\;,\end{aligned}$$

parce que $f \in G'$ et $f(1_E) = 1_E$. On a donc :

$$\begin{aligned}\text{dét}(\alpha\, id_F - p \circ f(x)) &= \text{dét}(\alpha\, p(1_E) - p(x)) \\ &= \text{dét}(\alpha\, id_F - p(x))\;,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $f \in G$.

4.3. Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre alternative sur k, ayant une unité $1_{\mathfrak{U}}$, $E = \mathfrak{U}^+$ l'algèbre de Jordan associée à $\mathfrak{U}$, et $1_E = 1_{\mathfrak{U}}$. On se donne toujours une application linéaire $p : E \longmapsto \mathrm{End}_k(F)$ telle que $p(1_E) = id_F$ et on fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

a/ La fonction norme : $x \longmapsto$ dét $p(x)$ est multiplicative dans $\mathfrak{U}$, c'est-à-dire : dét $p(xy) =$ dét $p(x)$ dét $p(y)$, pour tout couple d'éléments x,y de E.

b/ Si dét $p(x) \neq 0$, alors x a un inverse y $(xy = yx = 1_{\mathfrak{U}})$ dans $\mathfrak{U}$.

On a alors :

Lemme V-6 : Soit $f \in GL_k(\mathfrak{U})$; $f \in G'$ si et seulement si dét $p \circ f(1_E) = 1$ et $g : x \longmapsto y\, f(x)$ (où $y \in \mathfrak{U}$ est tel que $y\, f(1_E) = f(1_E)y = 1_E$) est un élément de G. Tout élément f de G' s'écrit sous la forme $f(x) = f(1_E)\ g(x)$, avec $g \in G$, et si $f(x) = z\, g'(x)$ avec $z \in \mathfrak{U}$ et $g' \in G$, alors $z = f(1_E)$ et $g' = g$, au moins lorsque $G \subset \mathrm{Aut}(E)$, c'est-à-dire au moins lorsque le lemme 2 s'applique.

Démonstration : Soit $f \in G'$; alors dét $p(f(1_E))$ = dét $p(1_E)$ = dét $id_F = 1$, et il existe $y \in \mathfrak{U}$ tel que $y.f(1_E) = f(1_E)y = 1_E = 1_{\mathfrak{U}}$; soit g l'application linéaire : $x \longmapsto y\, f(x)$; comme y est un élément inversible de l'algèbre alternative $\mathfrak{U}$, la multiplication $L_y^{\mathfrak{U}}$ par y (à gauche) dans $\mathfrak{U}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{U}$, de sorte que $g \in GL_k(\mathfrak{U})$; comme dét $p(f(1_E)y)$ = dét $p(f(1_E))$ dét $p(y)$ = dét $p(y) = 1$, on a dét $p(g(x))$ = dét $p(y)$ dét $p(f(x))$ = dét $p(f(x))$ = dét $p(x)$, ce qui prouve que $g \in G'$; de plus $g(1_E) = 1_E$, et le lemme 5 assure que $g \in G$. Réciproquement, il est immédiat que si $f \in GL_k(\mathfrak{U})$ est tel que dét $p(f(1_E)) = 1$ et $g : x \mapsto y\, f(x)$ où $y \in \mathfrak{U}$ est tel que $yf(1_E) = f(1_E)\, y = 1$ est un élément de G, alors dét $p(y) = 1$, de sorte que $f \in G'$. Soit donc $f \in G$, y l'inverse de $f(1_E)$ et $g : x \longmapsto yf(x)$; comme $f(1_E) \in k[y]$ (c'est un polynome en y), on a : $f(1_E)\ (yz) = (f(1_E)y)z = z$ pour tout $z \in \mathfrak{U}$ parce que dans une algèbre alternative $\mathfrak{U}$, la sous-algèbre engendrée par 2 éléments y et z est toujours associative; il en résulte que pour tout $x \in \mathfrak{U}$, $f(x) = f(1_E)\ g(x)$ avec $g \in G$. Supposons maintenant que $f(x) = zg'(x)$ avec $z \in \mathfrak{U}$ et $g' \in G$; si $G \subset \mathrm{Aut}(E)$, $g'(1_E) = 1_E = 1_{\mathfrak{U}}$, de sorte que z est nécessairement $f(1_E)$ et alors $g(x) = g'(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{U}$. (cf. l'appendice en fin de chapitre).

4.4. Signalons maintenant que la condition b énoncée ci-dessus est réalisée dès que p est un homomorphisme injectif d'algèbres de Jordan de $\mathfrak{U}^+$ dans $(\mathrm{End}_k(F))^+$: si dét $p(x) \neq 0$, $p(x)$ a un inverse (à droite et à gauche) dans $\mathrm{End}_k(F)$, et cet inverse est un polynome en $p(x)$; comme $p(x^m) = (p(x))^m$

(m entier $\geqslant 0$) , on voit qu'il existe $y \in k[x]$ tel que $p(yx) = p(xy) = p(1_{\mathfrak{U}})\, id_E$, et si p est injective, on aura bien $yx = xy = 1_{\mathfrak{U}}$. Quant à la condition a) elle est réalisée chaque fois que $\mathfrak{U}$ est une algèbre de Cayley généralisée sur k (cf. plus haut), p étant la "représentation" $p : x \longmapsto L_x^{\mathfrak{U}}$. On peut énoncer le lemme 6 dans le cas d'une algèbre de Cayley $\mathfrak{U}$, mais à part cette application, on va voir que les lemmes 3 et 6 ont comme conséquences faciles des résultats dûs à T . Ono ([20]) et N. Jacobson ([21]) .

Proposition V-5 (Ono) : Soit $\mathfrak{U}$ un corps commutatif extension séparable de degré fini de k . Le groupe $G' \subset Gl(\mathfrak{U})$ qui admet la fonction norme comme invariant est le produit semi-direct du groupe des multiplications L_y (y de norme comme 1) par le groupe de Galois de $\mathfrak{U}$ relativement à k .

Démonstration : On considère $p : \mathfrak{U} \longrightarrow End_k(\mathfrak{U})$ définie par $p(x) = L_x$; la fonction norme est la fonction $x \longmapsto dét(L_x)$ et la fonction trace est la fonction $x \longmapsto tr(L_x)$; $B : (x,y) \longmapsto tr(L_{xy})$ est non dégénérée, et le lemme 3 assure que le groupe G correspondant à cette situation est contenu dans le groupe $Aut(\mathfrak{U}^+) = Aut(\mathfrak{U})$ qui est le groupe de Galois de $\mathfrak{U}$ relativement à k ; en fait $G = Aut(\mathfrak{U})$. On applique alors le lemme 6 : tout l'élément f de G' s'écrit de manière unique sous la forme $f = L_y\, g$, avec $g \in Aut(\mathfrak{U})$ et y de norme 1 , le groupe des L_y étant normalisé par $Aut(\mathfrak{U})$.

Proposition V-6 (Jacobson) : Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre associative simple sur k , et N la norme générique de $\mathfrak{U}$. Le sous-groupe de $Gl_k(\mathfrak{U})$ admettant la fonction N comme invariant est le groupe des applications de la forme : $x \longmapsto y\, \check{x}\, z$, où $N(yz) = 1$ et $x \longmapsto \check{x}$ est soit l'identité, soit un anti-automorphisme de $\mathfrak{U}$.

Démonstration : On fait opérer $\mathfrak{U}$ par multiplication à gauche dans un idéal minimal (à gauche)$\mathfrak{a}$: $p(x) = L_x^{\mathfrak{U}}|_{\mathfrak{a}}$; le groupe G correspondant à cette situation est le groupe des applications de la forme $x \longmapsto y\, \check{x}\, y^{-1}$ (y inversible dans $\mathfrak{U}$) où $x \longmapsto \check{x}$ est soit l'identité, soit un anti-automorphisme fixe de $\mathfrak{U}$ appartenant à G . On applique ensuite le lemme 6 : tout élément f de G' s'écrit sous la forme $L_z g$, ($N(z) = 1$ et $g \in G$) i.e. $f(x) = z\, y\, \check{x}\, y^{-1}$; alors $N(z\, y\, y^{-1}) = 1$ et on a le résultat annoncé.

Corollaire : Soit $\mathfrak{U} = M_n(k)$ et G' le sous-groupe de $GL_k(M_n(k))$ admettant la fonction déterminant comme invariant; G' est le groupe des applications de la forme : $x \longmapsto y\, \check{x}\, z$, où $dét(yz) = 1$ et $x \longmapsto \check{x}$ est soit l'identité, soit la transposition.

5. Le groupe des automorphismes linéaires qui admettent une fonction norme comme semi-invariant.

5.1. Soit maintenant $G'' \subset GL_k(\mathfrak{U})$ le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathfrak{U}$ qui admettent la fonction $x \longmapsto$ dét $p(x)$ comme semi-invariant : un élément f de $GL_k(\mathfrak{U})$ est dans G'' si et seulement s'il existe un scalaire $\alpha \in k^*$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{U}$: dét $p \circ f(x) = \alpha$ dét $p(x)$. En faisant toujours les hypothèses a et b de 4.3. , on voit que $f(1_E)$ qui est tel que dét $p \circ f(1_E) = \alpha \neq 0$ est inversible dans $\mathfrak{U}$; si y est un inverse (à droite et à gauche) de $f(1_E)$, on constate que $g : x \longmapsto yf(x)$ est tel que $g(1_E) = 1_E$ et $g \in G'$; de sorte qu'en fait $g \in G$; réciproquement, si $f \in GL_k(\mathfrak{U})$ est tel que dét $p \circ .f(1_E) = \alpha \neq 0$ et $g : x \longmapsto y\, f(x)$ où y est un inverse de $f(1_E)$ dans $\mathfrak{U}$ est un élément de G , alors $f \in G''$; ainsi tout $f \in G''$ s'écrit sous la forme $f = L_{f(1_E)}g$ avec $g \in G$; en résumé, on a un énoncé analogue à celui du lemme 6 .

5.2. On peut appliquer ce qui vient d'être dit au cas d'une extension commutative séparable $\mathfrak{U}$ et on obtient : le groupe G'' des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathfrak{U}$ qui admet la fonction norme comme semi-invariant est le produit semi-direct du groupe des multiplications $L_y (y \in \mathfrak{U}^*)$ par le groupe de Galois de $\mathfrak{U}$ relativement à k . C'est un autre résultat de Ono([20]) . Une autre application donne un résultat de Dieudonné ([24]) .

Proposition V-7 : Soit $\mathfrak{U} = M_n(k)$ (k algébriquement clos); tout $f \in GL(M_n(k))$ qui laisse invariant le cône des matrices de déterminant nul est la forme $x \longmapsto y\,\check{x}\,z$ dét$(yz) \neq 0$ et $x \longmapsto \check{x}$ est soit l'identité, soit la transposition.

Démonstration : Soit f un automorphisme de l'espace vectoriel $M_n(k)$ qui laisse invariant le cône des matrices de déterminant nul, ce qui signifie que la fonction polynome $x \longmapsto$ dét$(f(x))$ est nulle sur le cône en question. Le théorème des zéros de Hilbert assure alors que dét$(f(x)) = \alpha$ dét x , où α est un élément non nul de k , parce que le déterminant est une fonction polynome irréductible. Ceci permet d'identifier le groupe des f avec le groupe G'' associé à $p : x \longmapsto x \in End_k(k^n)$. On applique alors la proposition 1 et on voit que G'' est le groupe des applications de la forme $x \longmapsto y\,\check{x}\,z$, où dét$(yz) \neq 0$ et $x \longmapsto \check{x}$ est soit l'identité, soit la transposition.

6. L'aspect algèbres de Lie.

6.1. On s'intéresse dorénavant aux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$, des groupes G, G', G" : lorsque Card (k) > m , ces groupes sont en effet des groupes algébriques (on est amené à faire cette restriction sur k parce que les groupes en question ont été définis en disant qu'ils laissent invariant des fonctions polynomes et non pas des polynomes).

Lemme V-7 : $\mathfrak{g}$ est l'espace des $f \in \mathrm{End}_k(E)$ telles que pour tout $x \in E$:

(V,1) $\quad \mathrm{tr.}\,((p(x)^r\, p \circ f(x)) = 0 \qquad (0 \leq r \leq m-1)$.

Démonstration : Soit $f \in \mathfrak{gl}(E)$; on sait que $f \in \mathfrak{g}$ si et seulement si pour tout $\alpha \in k$ et $x \in E$:

$\mathrm{dét}(\alpha\, \mathrm{id}_F - p(x)) = \mathrm{dét}(\alpha\, \mathrm{id}_F - p(x) - \varepsilon\, p \circ f(x)) \qquad (\mathrm{mod}\ \varepsilon^2)$

Or, si a et b sont deux matrices $m \times m$:

$\mathrm{dét}(a + \varepsilon b) = \mathrm{dét}\, a + \varepsilon\, \mathrm{tr}(a^* b) \qquad (\mathrm{mod}\ \varepsilon^2)$

parce que $a \longmapsto a^*$ (où a^* est la matrice adjointe de a , cf. la formule (III,1)) est la différentielle de la fonction $a \longmapsto \mathrm{dét}\, a$. il en résulte que $f \in \mathfrak{g}$ si et seulement si pour tout $x \in k$ et tout $x \in E$:

$$\mathrm{tr}((\alpha\, \mathrm{id}_F - p(x))^*\; p \circ f(x)) = 0 ,$$

ou encore d'après la formule (III,2) si et seulement si :

$\mathrm{tr}(p \circ f(x))\, \alpha^{m-1} + \mathrm{tr}(B_1(p(x))\, p \circ f(x))\, \alpha^{m-2} + \mathrm{tr}(B_{m-1}(p(x)) p \circ f(x))) = 0$

pour tous $\alpha \in k$ et $x \in k$. Comme k a plus de m éléments, cela équivaut à $\mathrm{tr.}(B_r(p(x))\, p \circ f(x)) = 0 \quad (0 \leq r \leq m-1)$, et ces formules ne sont autres que les formules (1) d'après (III,6) .

6.2. Les résultats correspondants à ceux du paragraphe 2 s'énoncent dans la :

Proposition V-8 : Soit $\mathcal{U}$ une algèbre alternative semi-simple sur k de caractéristique zéro et $p : \longmapsto L_x^{\mathcal{U}}$; alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G correspondant à cette situation est l'algèbre des dérivations de $\mathcal{U}^+$ (notée $\mathrm{Der}(\mathcal{U}^+)$) .

Démonstration : Tout comme plus haut, on vérifie que chaque $f \in \mathfrak{gl}(E)$ tel que $\mathrm{tr}(p(x)\; p \circ f(x)) = \mathrm{tr}((p(x))^2\; p \circ f(x)) = 0$ pour tout $x \in E$ laisse les formes B et C invariantes (infinitésimalement), et il en résulte (d'ailleurs sans restriction sur la caractéristique de k) que tout $f \in \mathfrak{g}$ est une dérivation de E :

$$f(x * y) = f(x) * y + x * f(y) \qquad (x,y \in E) .$$

- Soit maintenant $\mathcal{U}$ une algèbre alternative semi-simple sur k , et $\rho : x \longrightarrow L_x^{\mathcal{U}}$; ce qui précède dit que $\mathcal{G} \subset \mathrm{Der}(\mathcal{U}^+)$ et comme k est de caractéristique zéro (il suffit en fait de supposer que la caractéristique de k ne divise la dimension d'aucune composante simple de l'algèbre de Jordan semi-simple $\mathcal{U}^+$) , toute dérivation de $\mathcal{U}^+$ est intérieure, et d'après [17] (p.92) , l'espace des dérivations intérieures de $\mathcal{U}^+$ est engendré sur k par ses éléments qui sont de la forme $\left[L_y^{\mathcal{U}^+} , L_z^{\mathcal{U}^+}\right]$, y et z aprcourant $\mathcal{U}$; pour avoir la proposition, il suffit donc de démontrer que pour tout couple (y,z) d'éléments de $\mathcal{U}$, $\left[L_y^{\mathcal{U}^+} , L_z^{\mathcal{U}^+}\right] \in \mathcal{G}$; or pour tout $x \in \mathcal{U}$, on a :

$$p(L_y^{\mathcal{U}^+} \; L_z^{\mathcal{U}^+} \; x) = \{p(y) \; , \; \{p(z) \; , \; p(x)\}\} \; ,$$

parce que p est un homomorphisme de Jordan de sorte que :

$$p(\left[L_y^{\mathcal{U}^+} \; , \; L_z^{\mathcal{U}^+}\right] \; x) = \left[L_{p(y)}^{(\mathrm{End}_k(E))^+} \; , \; L_{p(z)}^{(\mathrm{End}_k(E))^+}\right] p(x)$$

Ceci dit, on a le lemme :

<u>Lemme V-8</u> : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative, a, b, c des éléments de $\mathcal{A}$; alors :

$$\left[L_a^{\mathcal{A}^+} \; , \; L_b^{\mathcal{A}^+}\right] c = \left[[a,b] \; , \; c\right] .$$

On a donc en fait : $p(\left[L_y^{\mathcal{U}^+} , L_z^{\mathcal{U}^+}\right] x) = \left[[p(y),p(z)] \; , \; p(x)\right]$.

On a alors : $\mathrm{tr}((p(x))^r \; p(\left[L_y^{\mathcal{U}^+} , L_z^{\mathcal{U}^+}\right] x)) = \mathrm{tr}(p(x))^r \; Mp(x))$ -

$- \mathrm{tr}(p(x)^r \; p(x) \; M) = 0$ (où $M = [p(y) \; , \; p(z)]$) pour chaque entier $r \geq 0$, ce qui prouve la proposition 8, moyennant le lemme 7 .

6.3. Toujours dans la situation où $\mathcal{U}$ est une algèbre alternative semi-simple et $p(x) = L_x^{\mathcal{U}}$, on détermine l'algèbre de Lie $\mathcal{G}'$:

<u>Proposition V-9</u> : $\mathcal{G}' = \mathrm{Der}(\mathcal{U}^+) \oplus \{L_z^{\mathcal{U}^+} \; ; \; z \in \mathcal{U}, \; \mathrm{tr}\, p(z) = 0\}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $f \in \mathfrak{gl}(\mathcal{U})$; on montre d'abord que $f \in \mathcal{G}'$ si et seulement si $\mathrm{tr}\; p \circ f(1_{\mathcal{U}}) = 0$ et $g : x \mapsto f(x) - x * f(1_{\mathcal{U}})$ est un élément de $\mathcal{G}$; la seule chose non évidente est la suivante : $L_y^{\mathcal{U}^+} \in \mathcal{G}'$ si et seulement si $\mathrm{tr}\; p(y) = 0$ et se démontre comme suit : module ε^2, $\det(p(x) + \varepsilon p(L_y^{\mathcal{U}^+} x)) =$
$= \det p(x) + \varepsilon \; \mathrm{tr}((p(x))^* \{p(y) \; , \; p(x)\}) = \det p(x) + \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{tr}((p(x))^* \; p(x) \; p(y)) +$
$+ \frac{\varepsilon}{2} \; \mathrm{tr}(p(x) \; (p(x))^* \; p(y)) = \det p(x) + \varepsilon \det p(x) \; \mathrm{tr}\; p(y)$, de sorte que $L_y^{\mathcal{U}^+} \in \mathcal{G}'$ si et seulement si $\det p(x) \; \mathrm{tr}\; p(y) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{U}$ ou encore si et seulement si $\mathrm{tr}.\; p(y) = 0$.

Ce qui précède montre que tout $f \in \mathfrak{g}'$ s'écrit sous la forme $f = g + L_z^{\mathfrak{U}^+}$ avec $g \in \mathfrak{g}$ et $\operatorname{tr} p(z) = 0$; en fait la décomposition est unique : si $L_z^{\mathfrak{U}^+} \in \mathfrak{g}$, alors pour tout $x \in \mathfrak{U}$, on a : $\operatorname{tr}(L_z^{\mathfrak{U}^+} x) = \operatorname{tr} p(\{z,x\}) = \operatorname{tr}\{p(z),p(x)\} = \operatorname{tr}(p(z)\, p(x)) = B(z,x) = 0$, de sorte que si B est non dégénérée, $z = 0$.

<u>Remarques</u> : 1) Si $\mathfrak{U}$ est associative, les dérivations intérieures de $\mathfrak{U}^+$ sont les dérivations intérieures de $\mathfrak{U}$ (cf. par exemple le lemme 8), et on peut reprendre la démonstration de la proposition 9 pour avoir :

$\mathfrak{g}' = \operatorname{Der}(\mathfrak{U}) \oplus \{L_z^{\mathfrak{U}} \; ; \; z \in \mathfrak{U} \, , \operatorname{tr}. L_z^{\mathfrak{U}} = 0\}$ (on peut remplacer $L_z^{\mathfrak{U}^+}$ par $L_z^{\mathfrak{U}}$ parce que dans ce cas : $\text{dét}\, p(xy) = \text{dét}\, p(x)\, \text{dét}\, p(y)$ pour tout couple d'éléments x,y de $\mathfrak{U}$). En fait $\mathfrak{g}'$ est l'algèbre de Lie des applications de la forme : $x \mapsto mx + xn$ avec $\operatorname{tr} p(m) = - \operatorname{tr} p(n)$, et on peut même remplacer cette dernière condition par la suivante : $\operatorname{tr} p(m) = \operatorname{tr} p(n) = 0$. En particulier l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(M_n(k))$ des endomorphismes laissant la fonction $x \mapsto \text{dét}\, x$ infinitésimalement invariante est celle des applications de la forme $x \mapsto xm + xn$, avec $\operatorname{tr}(m) = \operatorname{tr}(n) = 0$; lorsque $k = \mathbb{R}$, cela prouve que la composante neutre de G' est le groupe des applications de la forme $x \mapsto mxn$, avec m et n dans $SL(n,\mathbb{R})$.

2) On a aussi des résultats analogues pour $\mathfrak{g}''$.

7. <u>Un lemme sur les algèbres alternatives.</u>

Soit $\mathfrak{U}$ une algèbre alternative, et $x \in \mathfrak{U}$; on a toujours un morphisme $\theta_x : k[\xi] \longrightarrow \mathfrak{U}$ défini par $\theta_x(P) = P(x)$ (c'est vrai même si $\mathfrak{U}$ est seulement à puissances associatives); on a donc un polynome minimal P pour x .

<u>Lemme</u> : Soit $x \in \mathfrak{U}$ et $P(\xi) = \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \ldots + a_m$ le polynome minimal de x ; alors x est inversible à droite si et seulement si $a_m \neq 0$; si $a_m \neq 0$, x est inversible à droite et à gauche, $L_x^{\mathfrak{U}}$ et $\mathcal{R}_x^{\mathfrak{U}}$ sont injectives, l'inverse de x est unique et c'est un polynome en x .

<u>Démonstration</u> : Soit x inversible à droite : il existe donc y tel que $xy = 1_{\mathfrak{U}}$; supposons que $a_m = 0$; alors

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x = 0 \quad ,$$

et en multipliant à droite par y , et en tenant compte du fait que x et y engendrent une algèbre associative, on obtient :

$$x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} = 0 \quad ,$$

ce qui est absurde puisque le polynome minimal de x est de degré m .

Si $a_m \neq 0$, on a : $x(x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}) = -a_m$, de sorte que

$y = -a_m^{-1} x^{m-1} - a_m^{-1} a_1 x^{m-2} + \ldots - a_m^{-1} a_{m-1}$ est un inverse (à droite et à gauche) de x . Supposons maintenant que $z \in \mathcal{U}$ est tel que $xz = 0$; alors $y(xz) = 0 = (yx) z = z$, de sorte que $L_x^{\mathcal{U}}$ est injective; on montre de même que $\mathcal{R}_x^{\mathcal{U}}$ est injective; soit alors y' un autre inverse à droite de x ; on a : $xy = xy' = 1_{\mathcal{U}}$, de sorte que $y' = y$ est un polynome en x .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Weil, Fonctions zêta et distributions (Séminaire Bourbaki n° 312, 1966).

[2] H. Weyl, The classical groups, their invariants and representations. (Princeton University Press, 1946).

[3] H.W. Turnbull, The theory of determinants, matrices and invariants. (Dover 1960).

[4] I.M. Gelfand - G.E. Chilov, Les distributions. (Dunod 1962).

[5] S. Helgason, Radon-Fourier Transforms on symmetric spaces and related group representations. (Bull. Amer. Math. Soc. 71, 1965, (757-763)).

[6] L. Schwartz, Théorie des distributions. (Hermann 1966) .

[7] A. Tengstrand, Distributions invariant under an orthogonal group (Math. Scand. 8, 1960, (201-218)).

[8] M. Raïs, Sur certaines distributions homogènes (C.R.A.S. 266, 1968, (460-462)).

[9] G. Glaeser, Fonctions composées différentiables, (Annals of Math. (2) 77, 1963, (193-209)).

[10] L. Gårding - J.L. Lions, Functional analysis (Nuovo Cimento Suppl. Vol. XIV, ser. X, 1959) .

[11] L. Gårding, Distributions invariantes, (Séminaire Leray 1961-1962).

[12] R. Godement, Fonctions automorphes, Exposé n°5 du séminaire Cartan 1957-1958).

[13] H.W. Turnbull, On differentiating a matrix (Proc. Edinb. Math. Soc. (2) Vol. 1 Part 2, 1928, (111-128)) .

[14] F.R. Gantmacher, Théoriedes matrices I. (Dunod 1966) .

[15] E.M. Stein, Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(n,\mathbb{C})$ (Ann. of Math. (2) 86, 1967, (461-490)) .

[16] G. Ancochéa, On semi-automorphisms of division algebras (Ann. of Math. (2) 48, 1947, (147-153)) .

[17] R.D. Schafer, Introduction to nonassociative algebras. (Acad. Press, 1966).

[18] N. Jacobson, Some groups of transformations defined by Jordan algebras II (J. Reine Angew. Math. 204, 1960 (74-98)) .

[19] G.K. Kalisch, On special Jordan algebras (Trans. Amer. Math. Soc. 61, 1947 (482-494)) .

[20] T. Ono, On algebraic groups defined by norm forms on separable extensions (Nagoya Math. Journal 11, 1957, (125-130)) .

[21] N. Jacobson, Some groups of transformations defined by Jordan algebra (J. Reine Angew. Math. 201, 1959, (178-195)) .

[22] J. Dieudonné, Sur une généralisation du groupe orthogonal à 4 variables (Arch. Math. 1, 1949, (282-287)) .

[23] G.S. Gindikin, Analysis in homogeneous domains (Russ. Math. Surv. 19, 1964).

(Texte définitif reçu le 25 janvier 1972)

Mustapha RAÏS
Résidence Les Tilleuls, D
5 bis rue Denis Papin
94 - L'HAŸ-les-Roses