

6529

A N N A L E S  
DE MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES.

## *CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.*

Depuis le mois de juillet 1810 , ce recueil paraît de mois en mois , par livraisons de 30 à 40 pages. La couverture de chaque livraison présente l'annonce des ouvrages nouveaux et des concours académiques.

On peut souscrire indifféremment ,

Au bureau des *Annales* , rue d'Avignon , n.<sup>o</sup> 130 , à Nîmes ,  
( Gard ) ,

Chez madame *veuve Courcier* , imprimeur-libraire , quai des Augustins , n.<sup>o</sup> 57 , à Paris ,

Et à tous les bureaux de poste.

Le prix de la souscription annuelle est 21 francs pour la France et 24 francs pour l'Étranger. Il en coûte moitié pour six mois ; et le prix de chacun des quatre premiers volumes est inférieur de 3 francs à celui de la souscription annuelle. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

---

### *AVIS au Relieur ,*

#### *Sur le placement des Planches.*

---

<i>Planche</i>	I.	Après la page	60.
	II.		92.
	III.		160.
	IV.		196.
	V.		264.
	VI		348.

ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURÉS ET APPLIQUÉES.  
RECUEIL PÉRIODIQUE ,  
RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE, ancien officier d'artillerie , ex-  
professeur de mathématiques à l'école centrale du Gard ,  
professeur de mathématiques transcendantes au lycée de  
Nismes , des académies du Gard , de Nancy et de Turin.

---

TOME QUATRIEME.

---

A NISMES ,  
DE L'IMPRIMERIE DE P. BLACHIER - BELLE.

Et se trouve à PARIS , chez la dame Veuve COURCIER , Imprimeur  
Libraire pour les Mathématiques , quai des Augustins , n.<sup>o</sup> 57.

---

1813 ET 1814.



---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURÉS ET APPLIQUÉES.

---

---

## PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

*Essai sur la théorie des quantités négatives ;*

Par M. CACH , licencié ès sciences , professeur de mathématiques au collége de Tours.



SOIT l'équation

$$x+a-b=c;$$

on en déduit

$$x=c-a+b. \quad (1)$$

Si , au lieu d'opérer de cette manière , on retranche de chaque membre le binôme  $(a-b)$  , on aura

$$x=c-(a-b). \quad (2)$$

La quantité  $c$  restant quelconque , je vais faire successivement , sur  $a$  et  $b$  , les deux hypothèses suivantes ,  $a>b$  et  $b>a$ . Soit  
Tom. IV , n.<sup>o</sup> I , 1.<sup>er</sup> juillet 1813. 1

## RÈGLES

d'abord  $a > b$  ou  $a = b + \delta$ ; on aura, après la substitution dans les équations (1) et (2),

$$x = c - \delta ; \quad x = c + \delta ;$$

résultats parfaitement identiques.

Soit, en second lieu,  $b > a$  ou  $b = a + \delta$ ; les mêmes substitutions donneront

$$x = c + \delta , \quad x = c - [a - (a + \delta)] = c - (-\delta).$$

La dernière expression se présente sous une forme inintelligible, puisqu'elle exige qu'on exécute une soustraction impossible, et que l'on retranche de  $c$  le résultat de cette soustraction. La valeur  $c + \delta$  peut servir à l'interpréter; car on l'a obtenue en faisant passer les quantités  $a$  et  $b$  du premier membre dans le second; ce que l'on est toujours libre de faire, quelles que soient les valeurs de ces quantités; de sorte que l'on pourrait en conclure que

$$c - (-\delta) = c + \delta.$$

Quoiqu'il ne manque rien à cette conclusion, du côté de la rigueur, la marche que l'on a suivie n'éclaire pas assez sur la difficulté en question, et ne fait point assez bien voir comment on passe de l'expression  $c - (-\delta)$  à l'expression  $c + \delta$ . Afin de le mieux apercevoir, il faut remonter à l'équation primitive, et y substituer à la place de  $b$  sa valeur  $a + \delta$ . On trouve alors

$$x - \delta = c.$$

Ainsi, c'est à tort que l'on avait considéré la suppression du binôme  $(a - b)$  comme une soustraction, puisqu'il est évident qu'il fallait, au contraire, ajouter à chaque membre la quantité  $\delta$  pour avoir  $x$ . Lorsqu'on opère sur des quantités numériques, il est clair qu'on

ne peut jamais éprouver le moindre embarras ; mais , en opérant sur l'équation littérale

$$x+a-b=c,$$

où  $a$  et  $b$  peuvent avoir telles valeurs que l'on veut , rien n'indique si , pour dégager l'inconnue  $x$  , on a réellement une addition ou une soustraction à effectuer. Si l'on suppose donc qu'on en ait tiré

$$x=c-(a-b),$$

c'est qu'on a tacitement regardé  $a$  comme étant plus grand que  $b$  , et par conséquent cette expression sera en défaut , lorsqu'on aura  $a < b$  ; mais alors il est évident que la proposée aurait pu être mise sous la forme

$$x-(b-a)=c;$$

d'où l'on aurait tiré

$$x=c+(b-a).$$

Réciproquement , cette dernière expression sera en défaut , lorsqu'on aura  $b < a$  ; et alors la première sera la véritable. On voit donc que , si l'une des valeurs se présente sous une forme inintelligible par elle-même , on est en droit d'en conclure qu'on a opéré dans un sens inverse de celui suivant lequel on aurait dû opérer , et que l'on doit modifier le résultat , en prenant la différence dans le sens où elle peut être naturellement prise , et l'affectant d'un signe contraire à celui que le calcul a donné. D'après cela , on aura évidemment

$$c-(a-b)=c-(-\delta)=c+(b-a)=c+\delta;$$

$$c+(a-b)=c+(-\delta)=c-(b-a)=c-\delta.$$

## RÈGLES

Telle est la manière dont doivent être envisagées l'addition et la soustraction des quantités négatives isolées.

De l'équation

$$x - A = ac - bc - ad + bd , \quad (3)$$

on tire

$$x = A + ac - bc - ad + bd ,$$

valeur qui peut, en général, se mettre sous cette forme

$$x = A + (a - b)(c - d). \quad (4)$$

1.<sup>e</sup> Je suppose  $a < b$  et  $c > d$  ou  $b = a + \delta$  et  $c = d + \omega$ . Il vient, après la substitution dans l'équation (4),

$$x = A + (-\delta)(\omega).$$

C'est-à-dire, qu'on aurait à ajouter à  $A$  le produit d'une quantité négative isolée par une quantité positive. Or, on peut remarquer que, dans ce cas, on n'était point autorisé à mettre la valeur de  $x$  sous la forme (4), puisque l'identité de cette forme avec la forme (3) n'a été démontrée (*Alg. Mul.*) que pour le cas où  $a - b$  et  $c - d$  étaient des différences naturelles; mais alors la valeur (3), ou  $a < b$ , et par conséquent  $ac < bc$  et  $ad < bd$ , pouvait s'écrire de la manière qui suit :

$$\begin{aligned} x &= A - (bc - ac) + (bd - ad) = A - (bc - ac - bd + ad) \\ &= A - [(b - a)c - (b - a)d] = A - (b - a)(c - d) = A - \delta\omega ; \end{aligned}$$

d'où l'on voit qu'on a été conduit à multiplier une quantité négative isolée par une quantité positive, parce qu'on a regardé comme possible la soustraction  $(a - b)$  qui, dans l'hypothèse actuelle est impossible; et, dans ce cas, on compense l'erreur qui a été commise, en formant

le produit , comme si la quantité ( $-s$ ) était positive , et en affectant ensuite le produit du signe ( $-$ ).

2.<sup>o</sup> Si l'on avait  $a > b$  et  $d > c$  ou  $a = b + s$  et  $d = c + w$ ; on trouverait, en substituant dans (4)

$$x = A + (-s)(-w).$$

Mais , par la même raison que précédemment , on n'est pas alors en droit de mettre la valeur (3) sous la forme (4); et puisque , dans le cas présent , on a  $a > b$  , d'où  $ac > bc$  et  $ad > bd$  , on peut écrire

$$\begin{aligned} x &= A - (ad - bd) + (ac - bc) = A - (ad - bd - ac + bc) \\ &= A - (a - b)(d - c) = A - sw. \end{aligned}$$

On voit ici , comme dans la précédente hypothèse , comment on a été conduit à multiplier une quantité positive par une quantité négative isolée , et comment on doit effectuer l'opération.

3.<sup>o</sup> Enfin , en supposant , en même temps ,  $b > a$  et  $d > c$  , c'est-à-dire ,  $b = a + s$  et  $d = c + w$  , on obtient

$$x = A + (-s)(-w) ;$$

mais alors , ayant  $bd > ad$  et  $bc > ac$  , on devait donner à la valeur (3) , au lieu de la forme (4) , la forme suivante

$$\begin{aligned} x &= A + (bd - ad) - (bc - ac) = A + (bd - ad - bc + ac) \\ &= A + (b - a)(d - c) = A + sw. \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que le produit de deux quantités négatives isolées est le même que celui de ces deux quantités prises positivement.

Quant à la division , je considère l'expression

$$x = A + \frac{a-b}{c-d}, \quad (5)$$

qui résulte, ou qui, du moins, peut être censée résulter de l'équation

$$(x-A)(c-d)=a-b. \quad (6)$$

Or, si  $(a-b)$  est négatif et  $(c-d)$  positif, il faudra que  $(x-A)$ , ou son égal  $\frac{a-b}{c-d}$ , soit négatif; il en sera absolument de même, si  $(a-b)$  est positif et  $(c-d)$  négatif; enfin, s'ils sont tous deux négatifs,  $(x-A)$  ou son égal  $\frac{a-b}{c-d}$  devra être positif.

---

*Réflexions sur le même sujet;*

Par M. G E R G O N N E.



ON ne saurait disconvenir que la théorie qui vient d'être développée ne soit très-exacte, très-simple et très-lumineuse, et peut-être de beaucoup préférable à tout ce qui a été dit jusqu'ici sur le même sujet; du moins tant qu'on voudra demeurer attaché aux idées qui sont aujourd'hui généralement en vogue sur la nature des quantités négatives. Mais ces idées qui, en toute rigueur, peuvent être admises, ont-elles réellement, sur celles auxquelles on les a substituées, toute la supériorité qu'on leur attribue? Ces dernières étaient-elles tellement défectueuses qu'il y ait eu une absolue nécessité à les écarter? Et, en les rejetant, n'a-t-on pas fait rétrograder l'algèbre jusqu'au point où elle était dans son enfance? N'a-t-on pas ajouté à la théorie du calcul une inutile complication? N'a-t-on pas ouvert une source féconde

d'embarras pour le calculateur ? Telles sont les questions que, depuis longtemps, j'ai le dessein de discuter, dans ce recueil, avec tout le soin et toute l'étendue que mérite leur importance. Le défaut de loisir m'en a constamment détourné jusqu'ici ; mais, puisqu'enfin l'occasion vient s'en offrir, je veux du moins, au défaut d'une discussion en forme, hasarder quelques réflexions sur ce sujet, espérant que le lecteur voudra bien suppléer à ce que les bornes étroites que je suis constraint de me prescrire, pourront me forcer d'omettre.

Les adversaires de l'ancienne théorie des quantités négatives, je veux dire de la théorie adoptée par Newton, Euler, d'Alembert, etc., conviennent eux-mêmes que cette théorie est extrêmement commode; et, s'ils la rejettent, c'est uniquement parce que, suivant eux, il en naît plusieurs difficultés assez graves ; mais il me paraît qu'avant de lui substituer une théorie nouvelle, il eût au moins fallu examiner, avec soin, si ces difficultés étaient réellement de nature à ne pouvoir être surmontées, et si on ne courrait pas le risque de ne faire que les remplacer par des inconvénients beaucoup plus graves encore. Il me paraît qu'en présentant la doctrine des quantités négatives de la manière que je vais expliquer, tous les nuages élevés contre elle peuvent être facilement dissipés.

Il n'est pas besoin d'un grand effort d'attention pour apercevoir qu'in-dépendamment de leur valeur absolue, on a sans cesse à considérer, dans les quantités leur mode d'existence, c'est-à-dire, l'opposition qui peut se trouver entre celles qui sont de même nature. Cette opposition est un fait évident, préexistant à tout système, à toute convention, et généralement aperçu par tout le monde. Ainsi, par exemple, chacun conçoit clairement que 12 francs de dettes ne sont point la même chose que 12 francs de biens ; qu'un effort de 12 livres, qu'il faut faire pour empêcher un ballon de s'élever, n'est point la même chose que l'effort de 12 livres qu'il faut faire pour empêcher une pierre de descendre ; que l'intervalle de 12 années, qui sépare l'époque actuelle d'un événement passé, n'est point la même chose que l'intervalle

de 12 années qui sépare la même époque d'un événement à venir, etc.

La science des grandeurs ne remplirait donc qu'une partie de son but ou, pour mieux dire, elle deviendrait une source continue d'erreurs et de méprises, si, se bornant à considérer les quantités sous le rapport unique de leur valeur absolue, elle négligeait d'avoir égard à l'opposition qui peut souvent exister entre elles. Il faut donc que cette science fournisse des symboles, non seulement pour représenter les valeurs absolues, mais encore pour différencier entre eux les divers modes d'existence qu'une même sorte de grandeur peut offrir.

Pour remplir ce but important, il suffit uniquement d'une convention et de deux signes : c'est-à-dire, que, lorsque plusieurs quantités de même nature entreront simultanément dans une même question, et présenteront, les unes à l'égard des autres, l'opposition dont il est question ici, on affectera de l'un quelconque de ces deux signes toutes celles d'entre elles qui offriront le même mode d'existence, tandis que l'autre signe affectera celles qui présenteront un mode d'existence inverse de celui-là.

Concevons que l'on applique à cet usage les deux signes + et — ; comme on les appelle respectivement *signe positif* et *signe négatif*, une quantité sera dite *positive* ou *négative*, suivant qu'elle se trouvera être affectée de l'un ou de l'autre de ces deux signes. Ces dénominations peuvent être mal choisies ; mais elles ont cela de commun avec beaucoup d'autres ; et l'inconvénient n'est point très-grave, lorsque le sens qu'on se propose d'attacher aux mots est nettement déterminé. L'essentiel est de bien se rappeler que, toutes les fois que, dans une même question, on a à considérer des quantités dont le mode d'existence est opposé, il est nécessaire d'affecter de signes contraires les symboles qui en représentent les valeurs absolues ; mais que ce n'est que par une convention tout à fait arbitraire, que les unes sont positives, de préférence aux autres ; et cela à tel point que, dans tout état d'une question, on peut changer la convention d'abord établie, soit pour tous les éléments dont cette question se compose,

compose , soit seulement pour ceux d'entre eux qui sont d'une même espèce quelconque.

On voit qu'ici je considère les signes + et — comme originai-  
rement institués , non pas pour indiquer l'addition et la soustraction ,  
mais uniquement pour différencier entre elles les quantités dites  
*positives* et *négatives*. Il n'est pas difficile de faire voir ensuite que  
cet autre usage de ces deux signes est une conséquence toute naturelle  
du premier. Je sais bien que je m'écarte ici de la marche des inventeurs ;  
mais c'est que je pense qu'on doit toujours le faire quand on y  
trouve quelque avantage.

On me demandera peut-être une définition , proprement dite , de  
ce que j'appelle ici *modes d'existence opposés* ? je répondrai à cette  
question , lorsqu'on m'aura donné de bonnes définitions de l'*espace* ,  
du *temps* , des *substances* , des *modes* , de l'*angle* , et notamment  
de ce qu'on appelle aujourd'hui *quantités directes et inverses*. Cette  
opposition est manifeste pour qui veut prendre la peine de l'observer ;  
elle se fait même remarquer dans les êtres purement intellectuels ;  
comme dans les êtres sensibles ; et qu'importe , après tout , qu'elle  
soit définie , pourvu qu'elle puisse être nettement saisie par les esprits  
même les moins attentifs.

Voici , au surplus , un caractère propre à la reconnaître ; c'est que  
deux quantités entre lesquelles elle existe , s'anéantissent par leur réunion  
lorsqu'elles ont d'ailleurs la même valeur absolue. Ainsi , par exemple ,  
parce que des poids égaux , placés dans les deux bassins d'une balance ,  
se font équilibre , il y a opposition d'existence entre les mouvements  
que ces poids tendent à faire naître dans le fléau (\*).

Plus généralement , si l'on fait un tout de deux quantités de même  
nature , mais de signes contraires , l'effet de celle qui aura la moindre  
valeur absolue sera de détruire dans l'autre une portion égale à elle-

(\*) C'est à cela que revient cette expression populaire , *il lui manque quatre liards pour avoir un sou* , employée dans quelques provinces , pour dire qu'un homme n'a absolument rien.

même ; en sorte qu'il s'en formera un résultat unique ; égal à la différence de leurs valeurs absolues , et affecté du signe de la plus grande.

D'après les idées que je viens de développer , lorsque l'expression  $-a$  se présente à moi , je n'y vois nullement une *soustraction impossible à effectuer* , et je n'y vois pas d'avantage une *forme algébrique* inintelligible par elle-même. Cette expression  $-a$  m'annonce simplement qu'il a été fait , sur les quantités de la nature de  $a$  , une convention formelle ou tacite , en vertu de laquelle on a différencié , par les signes , celles dont le mode d'existence était opposé , et que  $a$  appartient à la classe de celles qu'on est arbitrairement convenu d'affecter du signe  $-$ . C'est ainsi que les quantités négatives isolées reçoivent , dès l'origine , une interprétation simple et naturelle.

A cette manière d'envisager les choses , répondront des locutions qu'il faudra bien se garder d'employer dans le langage vulgaire , mais qui pourront être utilement introduites dans la langue de la science ; ainsi , par exemple , on dira d'un événement qu'il arrivera dans  $-4$  ans , pour dire qu'il est arrivé il y a  $+4$  ans ; ou , au contraire , qu'il est arrivé il y a  $-4$  ans , pour dire qu'il arrivera dans  $+4$  ans ; et ces locutions n'auront rien de plus étrange que celles , généralement admises , qui consistent à dire qu'on répète un nombre  $\frac{1}{4}$  de fois , pour dire qu'on le divise par 4 , et qu'on partage un nombre en  $\frac{1}{4}$  de parties égales , pour dire qu'on le multiplie par 4.

On me demandera maintenant si je considère les quantités négatives isolées comme plus grandes ou comme moindres que zéro ? Avant de répondre à cette question , je distinguerai d'abord deux sortes de zéros : savoir , le *zéro absolu* , symbole d'un pur néant , et au-dessous duquel conséquemment rien ne saurait se trouver , et un *zéro limite* ou point de départ , qui est de pure convention , et auquel se rapportent constamment les quantités considérées comme pouvant être positives et négatives. C'est , par exemple , le zéro du thermomètre ; c'est le plan de niveau duquel on part pour estimer les élévations et les abaissements ; c'est l'époque de laquelle partent les chronologistes

pour fixer la date des événemens, soit antérieurs soit postérieurs; et c'est encore l'origine des coordonnées dans la géométrie analytique. Présentement, lorsqu'on me demandera si une quantité peut être moindre que zéro, je répondrai simplement qu'une quantité, considérée absolument, ne pouvant être ni positive ni négative, ne saurait jamais être moindre que le zéro absolu; mais que, dès lors qu'on a égard au signe de cette quantité, on annonce par là même qu'il existe, pour les quantités de même nature qu'elle, un zéro limite; et qu'ainsi, si elle est négative, zéro doit se trouver entre elle et les quantités positives.

Si, pour fixer les idées, on imagine toutes les quantités possibles, d'une même nature quelconque, disposées par ordre de grandeur et de haut en bas, depuis l'infini positif jusqu'à l'infini négatif, sur une même ligne verticale, ainsi qu'il arrive pour la graduation du thermomètre; on pourra fort bien dire alors que, de même qu'une quantité positive plus petite est au-dessous d'une autre quantité positive plus grande, une quantité négative plus grande est, au contraire, au-dessous d'une quantité négative plus petite, et, à plus forte raison, au-dessous de zéro et des quantités positives. Mais il faut bien remarquer que ce n'est ici qu'une pure fiction de l'esprit, et qu'aux idées de *dessus* et de *dessous* on pourrait, tout aussi bien, substituer celles de *droite* et de *gauche*, ou encore celles de *devant* et de *derrière*.

La question des quantités *au-dessous de zéro* correspond exactement à celle des quantités *au-dessous de l'unité*; car, de même qu'il y a deux sortes de zéros, il y a aussi deux sortes d'unités; savoir, une *unité absolue*, au-dessous de laquelle rien d'existant ne saurait se trouver, puisque, pour exister, il faut au moins être *un*, et une *unité conventionnelle*, qui admet indistinctement des quantités au-dessus et au-dessous d'elle. De même donc que l'on dit que  $\frac{1}{2}$  est *au-dessous* de cette dernière unité, et que  $\frac{1}{4}$  est *au-dessous* de  $\frac{1}{2}$ ; pourquoi craindrait-on de dire, dans un sens analogue, que  $-4$  est *au-dessous* de zéro, et que  $-4$  est inférieur à  $-3$ ? En général,

## QUANTITÉS

si  $-a$  est une simple forme algébrique ou une soustraction impossible à effectuer , pourquoi  $\frac{1}{a}$  ne serait-il pas aussi une autre forme algébrique ou une division impossible à effectuer ? il est aisé de voir en particulier que tous les raisonnemens que M. Cach vient d'appliquer au calcul des quantités  $-s$  et  $-v$  , pourraient être également appliqués aux quantités  $\frac{1}{s}$  et  $\frac{1}{v}$  ; et , puisqu'on ne juge point ces raisonnemens nécessaires , pour établir les règles du calcul de celle-ci , pourquoi les jugerait-on tels à l'égard du calcul des autres ?

En résumé , je ne vois point pourquoi les géomètres , adoptant un système tout pareil à celui de la double doctrine des anciens philosophes , aujourd'hui tant et si justement décrié , professeraient extérieurement des principes différens de ceux qui les dirigent eux-mêmes dans leurs recherches ; principes qu'ils ne pourraient abandonner , dans la pratique , sans le plus grand embarras , et dont l'extrême lucidité est d'ailleurs de nature à frapper tous les esprits ? N'entendent-ils pas répéter tous les jours autour d'eux que *tel homme a moins que rien* , et cette locution triviale , si fréquemment employée , ne leur annonce-t-elle pas que le vulgaire lui-même semble appeler des notions que l'on se figure être inaccessibles pour lui ?

Tout ce qui précède ne concerne encore que les quantités concrètes ; mais que dirons-nous présentement des nombres abstraits ? Pourront-ils aussi offrir , les uns par rapport aux autres , quelque opposition dans leur manière d'exister ? en quoi cette opposition consistera-t-elle ? et à quels caractères pourra-t-on la reconnaître ? Je n'ignore pas que des géomètres dont je respecte les lumières ont établi , en principe , que *tout nombre abstrait est essentiellement positif* ; mais , à ce compte , je ne vois plus , dans les puissances des nombres négatifs , que des *êtres de raison* ; car enfin , dans toute multiplication , encore faut-il bien que l'un des facteurs au moins soit abstrait ; d'ailleurs ; ces mots *nombre abstrait* , ne sont au fond que des mots , et peuvent , comme tels , être employés à signifier tout ce qu'on voudra.

Écartons-nous , toutefois , le moins que nous le pourrons , des notions communes , et voyons quels sont les cas où ce qu'on appelle vulgairement nombres abstraits , se présente à nous. J'en remarque deux principaux : le premier a lieu lorsque nous cherchons à assigner le rapport entre deux quantités de même nature , et on peut dire , dans ce sens , que *le nombre abstrait exprime combien de fois une quantité donnée doit être répétée pour former , une autre quantité , aussi donnée , de même nature qu'elle.*

Le second cas a lieu lorsqu'il s'agit d'assigner les rangs entre une suite de grandeurs dérivées les unes des autres , suivant une loi quelconque : on peut donc dire , sous ce nouveau point de vue , que *le nombre abstrait exprime le rang qu'occupe un objet parmi plusieurs autres.*

Ces notions ainsi admises , et elles le sont universellement ; si l'on nous demande , par exemple , quel est le rapport entre 12 francs de biens et 4 francs de biens ? nous répondrons , sans hésiter , que c'est le nombre abstrait 3 , et nous ferons exactement la même réponse , si l'on nous demande quel est le rapport entre 12 francs de dettes et 4 francs de dettes ; puisqu'il faut répéter 3 fois , soit 4 francs de biens pour faire 12 francs de biens , soit 4 francs de dettes pour faire 12 francs de dettes.

Que si l'on nous demande ensuite quel est le rapport , soit entre 12 francs de biens et 4 francs de dettes , soit entre 12 francs de dettes et 4 francs de biens ? nous pourrons nous trouver d'abord embarrassés , et même la question pourra , d'une première vue , nous sembler absurde ; attendu que des biens répétés font toujours des biens , et que des dettes répétées font toujours des dettes : cependant , en y réfléchissant mieux , nous ne tarderons pas à apercevoir qu'il existe un moyen de faire , soit 12 francs de biens avec 4 francs de dettes , soit 12 francs de dettes avec 4 francs de biens ; et que ce moyen consiste à répéter d'abord 3 fois les 4 francs , soit de biens soit de dettes , et à changer ensuite le mode d'existence du résultat obtenu.

Or, très-certainement, rien n'empêche d'indiquer, tout d'un coup, cette double opération, en faisant précédé du signe — le nombre abstrait 3, pourvu qu'on écrive ou qu'on sous-entende le signe + devant le même nombre abstrait, lorsqu'il répondra au premier des deux cas que nous venons de considérer. On dira, en conséquence, que prendre une quantité +3 fois, c'est la répéter 3 fois, en lui conservant son mode d'existence ou son signe ; et que, prendre une quantité —3 fois, c'est la répéter 3 fois, en changeant son mode d'existence ou son signe : il y aura donc, dans ce sens, des *nombres abstraits négatifs* aussi bien que des *nombres abstraits positifs* ; et l'on pourra établir, en principe, que *le nombre abstrait qui exprime le rapport entre deux quantités de même nature, est positif ou négatif, suivant que ces deux quantités ont le même mode d'existence ou un mode d'existence opposé*, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que ces deux quantités ont le même signe ou des signes contraires. Ainsi se trouveront expliquées, par une convention toute simple et toute naturelle, les règles des signes pour la multiplication et pour la division.

Quant à la seconde sorte de nombre abstrait ; concevons qu'après avoir écrit une série dont on connaît la loi, on ait numéroté ses termes, de gauche à droite, 1, 2, 3,.... Rien n'empêchera, à l'aide de la loi connue de cette série, de la prolonger vers la gauche, tout aussi bien que vers la droite ; et, d'après les idées développées ci-dessus, on sera tout naturellement conduit à numérotter successivement les termes nouveaux, introduits sur la gauche, 0, —1, —2, —3,.... ; auquel cas il deviendra nécessaire d'écrire ou de sous-entendre le signe + devant les indices des termes déjà numérotés 1, 2, 3....

On aura donc encore ici des nombres abstraits positifs et des nombres abstraits négatifs ; et les différens signes dont ils se trouveront affectés, annonceront qu'ils indiquent les rangs de termes situés de part et d'autre de celui qu'on sera arbitrairement convenu de numérotter zéro. On voit par là que ces nombres abstraits doivent être soigneusement distingués de ceux de la première sorte. Ceux-ci sont positifs ou négatifs intrinsèquement, ou du moins en vertu d'une convention générale

qui , une fois établie , ne saurait plus être changée ; tandis que les autres ne sont tels que par la situation du zéro , qu'on peut déplacer à chaque question nouvelle que l'on traite , et par la convention libre que l'on a faite sur le sens positif et sur le sens négatif du numérotage. En un mot , les nombres abstraits de cette dernière sorte rentrent absolument dans ce que j'ai déjà fait remarquer des nombres concrets , considérés comme positifs et comme négatifs.

Ce que je dis ici n'est , au surplus , que ce que les géomètres pratiquent tous les jours. En est-il un seul , en effet , qui ignore ce qu'il doit trouver , lorsque , dans le terme général d'une série , il substitue , pour l'indice , un nombre négatif ? En est-il un seul qui hésite sur le rang que doit occuper un terme dont il trouve l'indice négatif ? Que devient donc alors la maxime : *tout nombre abstrait est essentiellement positif* ? Faut-il donc que la maxime contraire demeure une sorte de mystère , entre les seuls initiés ? Et n'ai-je pas eu raison de dire , tout à l'heure , que les théories modernes avaient entraîné les géomètres , involontairement sans doute , dans le système de la double doctrine. (\*)

Les principes que je viens d'exposer sont , à quelques modifications et à quelques développemens près , ceux qui ont été généralement professés jusqu'à ces derniers temps. Une expérience assez longue m'a prouvé que non seulement ils étaient toujours nettement saisis par les commençans , mais qu'en outre ils imprimaient à toutes leurs recherches une marche ferme , exempte de toute méprise et de toute hésitation ; avantages que ne me semblent pas réunir , au même degré , toutes les diverses autres théories.

Il me resterait présentement à répondre aux objections , tant et si

(\*) L'inconvénient n'est point encore très-grave à présent , parce que les deux doctrines sont généralement connues , et que l'une d'elles n'est que de pur appareil ; mais , si celle-ci venait enfin à être seule enseignée , nous pourrions fort bien en revenir , dans quelque temps , aux *racines vraies* et aux *racines fausses* des contemporains de Descartes.

souvent rebattues, qui ont été opposées à ces mêmes principes; mais, dans la nécessité d'abréger, je m'arrêterai seulement au petit nombre de celles d'entre elles qui m'ont paru les plus spécieuses.

1.<sup>o</sup> On demande pourquoi le produit de deux quantités de signes contraires a le privilége d'être négatif plutôt que positif, et s'il ne devrait pas être l'un et l'autre; puisqu'en changeant d'hypothèse, sur les quantités multipliées,  $+ \times -$  devient  $- \times +$ , et devrait alors donner un produit de signe contraire? On demande, en se fondant sur les mêmes motifs, pourquoi, si  $+ \times + = +$ , on n'a pas, en changeant d'hypothèse  $- \times - = -$ ?

La réponse à toutes les difficultés de ce genre est simple et facile. Dans toute multiplication, l'un des facteurs est essentiellement un nombre abstrait de la première sorte, et le produit est de la nature de l'autre facteur. Si donc on change d'hypothèse sur les quantités négatives, cela entraînera uniquement le changement des signes du multiplicande et du produit; or, c'est là une condition à laquelle satisfont en effet les règles connues. (\*)

Cette difficulté est, au surplus, du genre de celle que se propose Lacaille, dans les premières éditions de ses élémens, lorsqu'il se demande pourquoi 12 deniers, multipliés par 12 deniers, ne donnent pas la même chose que 1 sou multiplié par 1 sou? Et la réponse à cette dernière est tout à fait analogue à celle que je viens de faire à la première. On peut bien changer d'hypothèse, relativement à la grandeur de l'unité de mesure du multiplicande, et cela entraînera nécessairement un pareil changement dans l'unité de mesure du produit; mais le nombre des unités du multiplicateur étant un nombre abstrait, est indépendant de toute hypothèse, et ne saurait conséquemment être modifié dans aucun cas.

2.<sup>o</sup> On demande aussi pourquoi, si les quantités ne sont positives

(\*) On pourrait m'objecter que le multiplicande, comme le multiplicateur, peut souvent aussi être abstrait et cela est vrai; mais ces deux nombres abstraits n'en seront pas moins de nature différente. Le multiplicande, comme le produit, est un *nombre de choses*; le multiplicateur seul est un *nombre de fois*,

et

et négatives que par convention,  $\sqrt{-a^2}$  est imaginaire, tandis que  $\sqrt{+a^2}$  est réelle ? Cette difficulté rentre dans la précédente.  $\sqrt{-a^2}$  est imaginaire, parce que  $-a^2$ , ne pouvant provenir que de la multiplication de  $+a$  par  $-a$ , ou de  $-a$  par  $+a$ , n'est point un carré. Au contraire,  $\sqrt{+a^2}$  est réelle, parce que, soit qu'on suppose  $+a^2 = +a \times +a$  ou  $+a^2 = -a \times -a$ , cette quantité est toujours un carré.

3.<sup>o</sup> Tout le monde admet, comme vraie, la proportion  $+1 : -1 :: -1 : +1$ ; or, dit-on, si les quantités négatives sont moindres que les quantités positives, il s'ensuivra cette conséquence absurde que, dans une telle proportion, tandis que le premier conséquent sera surpassé par son antécédent, le second conséquent, au contraire, surpassera son antécédent.

Je répondrai à cette difficulté en observant qu'en principe on ne doit jamais chercher dans un objet que des propriétés qui résultent inévitablement de son essence, c'est-à-dire, de sa définition. Or, l'essence d'une proportion géométrique est uniquement que le quotient des deux premiers termes soit égal au quotient des deux derniers; et c'est parce qu'ils satisfont à cette condition primordiale que les quatre termes que l'on vient de citer sont reconnus pour être ceux d'une telle proportion. Il arrive bien quelquefois, en effet, que, le second terme étant moindre que le premier, le quatrième est aussi moindre que le troisième; mais cette propriété, essentielle aux proportions arithmétiques, n'est qu'accidentelle à l'égard des autres, et ne s'y fait remarquer que lorsque tous leurs termes ont le même signe.

Nous venons de rencontrer une proportion géométrique dans laquelle, le premier terme surpassant le second de deux unités, le troisième terme est au contraire surpassé de deux unités par le quatrième. Voici, à l'inverse, une proportion arithmétique dans laquelle le premier terme contenant deux fois le second, le troisième est au contraire contenu deux fois dans le quatrième: c'est la proportion  $2.1 : +1. -2$ ; et cette proportion est exacte, parce qu'elle satisfait à la condition de définition, et que toute autre propriété, si elle n'est pas essentielle-

ment renfermée dans celle-là , ne saurait lui être qu'accidentelle.

4° On cite enfin , dans les problèmes de géométrie , des valeurs d'inconnues qui , bien qu'affectées de signes contraires , doivent néanmoins être portées du même côté. C'est , dit-on , ce qui arrive , en particulier , dans le problème où il est question de mener à un cercle , par un point extérieur , une sécante telle que la corde interceptée soit d'une longeur donnée. Mais , on a négligé d'observer qu'en résolvant le problème par rapport au cercle donné , on le résout aussi pour un autre cercle , symétriquement situé avec lui par rapport au point donné , et que c'est à ce dernier qu'appartient la solution négative.

Je crois devoir ; à cette occasion , relever une fausse interprétation que l'on rencontre dans l'algèbre de Bezout. L'auteur suppose que 175 francs , devant être distribués , par égales portions , entre un certain nombre de personnes , l'absence de deux d'entre elles augmente de 10 francs la part de chacune des autres. En prenant pour inconnue le nombre des personnes qui devaient d'abord entrer en part , il trouve —5 pour l'une des solutions du problème , et il dit que cette solution répond au cas où , au contraire , deux nouveaux venans auraient diminué de 10 francs la part de chacun.

Mais cette interprétation ne me paraît point exacte. Ce ne sont point , en effet , ni les 10 francs ni le nombre des personnes absentes qui sont devenus négatifs ; et jamais les données ne sauraient éprouver une semblable métamorphose ; c'est uniquement le nombre total des personnes qui a subi ce changement. Puis donc que , dans le premier cas , il était question de personnes *recevant* , il devra être question ici de personnes *donnant* ; c'est-à-dire , que le nombre —5 , pris en + , répondra à la question où , des personnes devant se cotiser pour faire un fonds de 175 francs , l'absence de deux d'entre elles aurait augmenté de 10 francs la portion à fournir par chacune d'elles.

Il est possible , au surplus , que cette inexactitude , ainsi que plusieurs autres , ait déjà été relevée , par quelqu'un des nombreux éditeurs et commentateurs du *Cours de Bezout* ; ouvrage excellent

sans doute, pour l'époque où il a paru, mais qu'il serait peut-être temps enfin de laisser reposer en paix, à côté de la Caille et de tous ceux du même temps.

Avant de terminer, je dois dire quelque chose des difficultés que présente fréquemment aux commençans l'ambiguïté des signes des radicaux pairs. Quelques auteurs, au lieu de mettre ces difficultés bien en évidence, et d'enseigner à les surmonter, semblent au contraire avoir apporté tous leurs soins à les éviter; c'est-à-dire, qu'ils se sont appliqués à disposer leurs calculs de telle sorte qu'en extrayant les racines sans aucun égard au double signe, on tombe précisément sur le résultat qui convient au problème.

Mais on ne doit jamais perdre de vue que toute racine paire porte inévitablement le double signe  $\pm$ , sans qu'on puisse dire, dans aucun cas, ni sous aucun rapport, que l'un de ces signes lui soit plus naturel que l'autre. A la vérité, il arrive fréquemment que, par la nature individuelle de la question dont on s'occupe, l'un de ces signes doit être rejeté; mais, c'est tout aussi souvent le signe  $+$  que le signe  $-$ ; et c'est précisément de là que naît l'embarras. Le moyen le plus simple et le plus uniforme de le dissiper me paraît être de traiter le double signe  $\pm$  comme l'on traite les constantes arbitraires, dans le calcul intégral; c'est-à-dire, d'en lever l'ambiguïté par quelques suppositions particulières qui ne fassent pas évanouir les termes radicaux, et pour lesquelles on sait bien, à l'avance, quel résultat on doit obtenir.

J'ai essayé, dans cette dissertation, de ramener la théorie des quantités négatives à des notions qui me semblent plus claires, et sur-tout incomparablement plus commodes pour le calculateur, que celles qu'on leur a substituées depuis quelques années, et j'ai montré, par divers exemples, que les difficultés opposées à ces mêmes notions ne sont pas aussi sérieuses qu'on pourrait l'imaginer. Si j'ai pu paraître avoir quelquefois en vue l'introduction de la *Géométrie de position*, c'est uniquement parce que je ne connais aucun autre écrit où

l'ancienne théorie soit attaquée et la nouvelle défendue d'une manière aussi complète et aussi supérieure. Je prie donc mes lecteurs de croire que je n'en suis pas moins pour cela pénétré de la plus haute estime pour la personne et pour les productions de l'illustre auteur de cet ouvrage; mais je pense que la *Géométrie de position* ne perdrait absolument rien de ses avantages réels, et qu'elle gagnerait peut-être même, du côté de la clarté et de la brièveté, si elle était ramenée aux notions que je viens de chercher à établir, ou plutôt à rappeler de l'oubli.

---

## ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

*Démonstrations élémentaires du théorème de d'ALEMBERT  
sur la forme des imaginaires ;*

Par M. DU BOURGUET, professeur de mathématiques spéciales  
au lycée impérial.



D'ALEMBERT a démontré le premier, mais par les calculs différentiel et intégral, que toute quantité imaginaire

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}},$$

peut toujours être ramenée à la forme

$$p \pm q\sqrt{-1};$$

( Voyez le *Calcul intégral* de Bougainville, page 42 ). (\*)

---

(\*) Voyez aussi la *Résolution des équations numériques* de Lagrange, note IX.  
J. D. G.

Il y a environ onze ans qu'ayant vainement cherché, dans les auteurs les plus estimés à cette époque, une démonstration élémentaire du même théorème, je m'occupai à en trouver une, soit algébrique soit géométrique; j'en obtins, en effet, une fort simple de cette dernière sorte; c'est celle que j'annonçai en 1802, dans un ouvrage d'algèbre que je publiai à cette époque. Mais, depuis ce temps, M. Garnier ayant donné une démonstration semblable, dans un ouvrage qu'il a publié en 1804, sous le nom d'*Analise algébrique*, j'ai cru devoir reprendre mes recherches pour obtenir du même théorème une démonstration purement algébrique. Voici celle que j'ai obtenue, et qui me paraît préférable à l'autre; car, outre qu'elle est fort simple, il me paraît très-convenable de ne faire dépendre la démonstration du principe général que *toute fonction de quantités imaginaires est réductible à la forme  $p \pm q\sqrt{-1}$* , de la seule branche des sciences exactes dont ce principe fait partie.

On sait que, quels que soient  $a$  et  $b$ , on a

$$(a \pm b)^{m \pm n\sqrt{-1}} = \\ a^{m \pm n\sqrt{-1}} \left\{ 1 \pm \frac{m \pm n\sqrt{-1}}{1} \frac{b}{a} + \frac{m \pm n\sqrt{-1}}{1} \cdot \frac{m - 1 \pm n\sqrt{-1}}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \pm \dots \right\};$$

on aura donc, en changeant  $b$  en  $b\sqrt{-1}$ ,

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} =$$

$$(1) \quad a^{m \pm n\sqrt{-1}} \left\{ 1 \pm \frac{m \pm n\sqrt{-1}}{1} \left( \frac{b\sqrt{-1}}{a} \right) - \frac{m \pm n\sqrt{-1}}{1} \cdot \frac{m - 1 \pm n\sqrt{-1}}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \pm \dots \right\}.$$

Or, toutes les puissances paires de  $\sqrt{-1}$  étant égales à  $\mp 1$ , et toutes ses puissances impaires étant égales à  $\pm \sqrt{-1}$ , il s'ensuit qu'en exécutant toutes les multiplications, entre les accolades du second membre de l'équation (1), on obtiendra une suite de termes réels, dont l'ensemble pourra être représenté par  $g$ , et une suite de termes

## F O R M E

affectés de  $\pm\sqrt{-1}$ , dont l'ensemble pourra être représenté par  $\pm h\sqrt{-1}$ ; en sorte que l'équation (1) deviendra simplement

$$(2) \quad (a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = a^{m \pm n\sqrt{-1}} (g \pm h\sqrt{-1}).$$

Mais, par la théorie des quantités exponentielles, théorie indépendante de l'exposant de la base, on a, en désignant par  $\ln a$  le logarithme naturel de  $a$ ,

$$(3) \quad a^{m \pm n\sqrt{-1}} = 1 + \frac{(m \pm n\sqrt{-1})}{1} \ln a + \frac{(m \pm n\sqrt{-1})^2}{1 \cdot 2} (\ln a)^2 + \frac{(m \pm n\sqrt{-1})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\ln a)^3 + \dots$$

qui, pour les mêmes raisons que ci-dessus, pourra être réduit à la forme

$$a^{m \pm n\sqrt{-1}} = c \pm d\sqrt{-1};$$

substituant donc cette valeur dans l'équation (2), il viendra, en développant, et posant pour abréger

$$cg - dh = p, \quad ch + dg = q,$$

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} =$$

$$(c \pm d\sqrt{-1})(g \pm h\sqrt{-1}) = (cg - dh) \pm (ch + dg)\sqrt{-1} = p \pm q\sqrt{-1};$$

comme nous l'avions annoncé.

Voici présentement la démonstration géométrique du même théorème, que j'avais annoncée, dans l'ouvrage d'algèbre publié en 1802.

Soit posé

$$\frac{a}{b} = \text{Cot.}\omega,$$

il viendra

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{Cos.}\omega, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{Sin.}\omega,$$

donc

$$a \pm b\sqrt{-1} = (\text{Cos.}\omega \pm \sqrt{-1} \text{Sin.}\omega) \sqrt{a^2 + b^2},$$

et

$$\ln(a \pm b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) + \ln(\text{Cos.}\omega \pm \sqrt{-1} \text{Sin.}\omega) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) \pm \omega\sqrt{-1}.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière équation par  $m \pm n\sqrt{-1}$ , il viendra

$I.(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = \{ \frac{1}{2}ml(a^2 + b^2) - na \} \pm \{ \frac{1}{2}nl(a^2 + b^2) + ma \} \sqrt{-1}$ ,  
posant alors, pour abréger

$$\frac{1}{2}ml(a^2 + b^2) - na = g, \quad \frac{1}{2}nl(a^2 + b^2) + ma = h,$$

et repassant des logarithmes aux nombres, il viendra

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = e^g \cdot e^{\pm h\sqrt{-1}} = e^g \cos.h \pm \sqrt{-1}e^g \sin.h;$$

posant donc enfin

$$e^g \cos.h = p, \quad e^g \sin.h = q,$$

on aura, de nouveau

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = p \pm q\sqrt{-1}. (*)$$

*Réflexions sur le même sujet;*

Par M. GERGONNE.



La forme

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}},$$

est loin, ce me semble, d'être la plus générale que puissent affecter les fonctions d'imaginaires. D'abord un radical imaginaire peut excéder le second degré. A la vérité, dans ce cas, il peut toujours être ramené au second degré, puisque  $\sqrt[n]{-A^2} = \sqrt[n]{A}\sqrt{-1}$ ; mais c'est là une observation qui vaudrait bien la peine d'être faite aux commençans, à qui on ne parle jamais, dans les élémens, que de la *racine QUARRÉE de moins un*.

---

(\*) Dans le vrai, cette dernière démonstration est tout aussi analitique que la première; puisque les fonctions circulaires ne sont, au fond, que des transcendentales d'une espèce particulière, dont la théorie peut être présentée d'une manière tout à fait indépendante des considérations géométriques. C'est ainsi, en particulier, qu'elles ont été envisagées par M. Suremain-de-Missery, dans sa *Théorie des quantités imaginaires* (Paris, F. Didot, 1801, in-8°). On trouve, au surplus, dans cet ouvrage (pag. 72), une démonstration du théorème de d'Alembert qui diffère très-peu de celles de MM. Du Bourguet et Garnier.

J. D. G.

24 FORME DES IMAGINAIRES.

En se bornant même aux seuls imaginaires de la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$ , ne peut-on pas considérer des fonctions telles, par exemple, que

$$\text{Sin. Sin.} \dots \dots (a \pm b\sqrt{-1}),$$

$$\text{Cos. Cos.} \dots \dots (a \pm b\sqrt{-1}),$$

$$\text{Log. Log. Log.} \dots \dots (a \pm b\sqrt{-1});$$

le nombre des sinus, cosinus ou logarithmes étant quelconque, fini ou infini, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, et pouvant même être imaginaire de la forme  $m \pm n\sqrt{-1}$ ? Ne peut-on pas également considérer des fonctions de la forme

$$(a \pm a'\sqrt{-1})^{m \pm m'\sqrt{-1}} | r \pm r'\sqrt{-1}?$$

Ne peut-on pas aussi considérer des fonctions de la forme

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{(a' \pm b'\sqrt{-1})^{(a'' \pm b''\sqrt{-1})}} \dots$$

ou de la forme

$$\frac{a \pm b\sqrt{-1}}{c \pm d\sqrt{-1}} + \frac{a' \pm b'\sqrt{-1}}{c' \pm d'\sqrt{-1}} + \frac{a'' \pm b''\sqrt{-1}}{c'' \pm d''\sqrt{-1}} + \dots$$

les  $a, a', a'', \dots, b, b', b'', \dots, c, c', c'', \dots, d, d', d'', \dots$  étant liés par une loi connue quelconque, et leur nombre pouvant être indifféremment fini ou infini, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, ou même encore imaginaire de la forme  $m \pm n\sqrt{-1}$ ? Ne peut-on pas enfin considérer des fonctions d'imaginaires, composées de toutes celles-là et de beaucoup d'autres encore, telles que seraient, par exemple, des différentielles ou intégrales dont l'ordre serait imaginaire de la forme  $m \pm n\sqrt{-1}$ ?

Il me semble que, dans tous les cas, la voie la plus simple pour parvenir, s'il est possible, à la démonstration du théorème, est celle que voici.

Soit posée l'équation

$$x = \phi\{A\sqrt{-1}, B\sqrt{-1}, C\sqrt{-1}, \dots\}$$

et supposons, en premier lieu, que la fonction  $\phi$  soit algébrique.

On

## SOMMES DE PUISSANCES ET BINOME DE NEWTON. 25

On pourra toujours, en chassant les dénominateurs et les radicaux, ramener cette équation à la forme

$$ax^m + bx^{m-1} + \dots + gx + h = 0;$$

or, il est démontré, par les éléments, que toutes les racines d'une telle équation sont de la forme  $p \pm q\sqrt{-1}$ , sans en excepter même les racines réelles, puisqu'elles répondent à  $q=0$ ; puis donc que la fonction  $\phi$  est du nombre de ces racines, elle doit être aussi de cette forme.

Supposons, en second lieu, que la fonction  $\phi$  soit transcendante, mais développable en une suite de termes qui soient algébriques ou du moins développables eux-mêmes en séries, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'ait plus qu'une suite de termes algébriques; ces termes, d'après ce qui précède, seront tous de la forme  $p \pm q\sqrt{-1}$ ; donc leur somme, c'est-à-dire, la fonction  $\phi$  sera aussi de la même forme.

Toute la difficulté est donc maintenant réduite à savoir si vraiment toute fonction non algébrique est développable en série. Je regarde la chose comme extrêmement probable; mais je ne crois pas qu'elle ait encore été jusqu'ici généralement et rigoureusement démontrée.

---

## ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

*Démonstrations du principe qui sert de fondement au calcul des fonctions symétriques, et de la formule du Binôme de Newton ;*

Par M. BRET, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.



I. SOIT représenté le produit des  $m$  facteurs simples  $x+a$ ,  $x+b$ ,  $x+c$ , ..., par

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m; \quad (1)$$

*Tom. IV.*

et celui des mêmes facteurs, excepté le premier  $x+\alpha$ , par

$$x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \dots + B_{m-1}. \quad (2)$$

Il est évident qu'en divisant le polynôme (1) par  $x+\alpha$ , on produira le polynôme (2), et que, réciproquement, en multipliant le polynôme (2) par  $x+\alpha$ , on aura le polynôme (1). De là résultent les équations

$$B_{n-1} = A_{n-1} - \alpha A_{n-2} + \alpha^2 A_{n-3} - \dots, \quad (3)$$

$$A_n = B_n + \alpha B_{n-1}. \quad (4)$$

L'équation (4) démontre que tout ce qui multiplie  $\alpha$  dans  $A_n$  est  $B_{n-1}$ ; or, d'après la composition des coefficients  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , en  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , si dans  $A_n$  on prend tous les termes multipliés par  $\alpha$ , puis successivement ceux multipliés par  $\beta, \gamma, \delta, \dots$ , et qu'on les ajoute, on aura  $nA_n$ ; donc

$$nA_n = S(\alpha B_{n-1}), \quad (5)$$

le signe **S** indiquant la somme des produits  $\alpha B_{n-1}$  que l'on obtient en permutant successivement  $\alpha$  avec chacune des autres lettres.

Cela posé, dans l'équation (5) substituons à  $B_{n-1}$  sa valeur (3); il viendra

$$nA_n = S(\alpha A_{n-1} - \alpha^2 A_{n-2} + \dots \pm \alpha^n),$$

ou

$$nA_n + A_{n-1}S(-\alpha) + A_{n-2}S(-\alpha)^2 + \dots + S(-\alpha)^n = 0; \quad (6)$$

et, comme  $-\alpha, -\beta, -\gamma, \dots$  sont les racines de l'équation (1), il s'ensuit que la formule (6) détermine les sommes des puissances semblables de ces racines, savoir :  $S(-\alpha)$ ,  $S(-\alpha)^2$ ,  $S(-\alpha)^3$ , ..., jusqu'à  $S(-\alpha)^n$ . On peut même pousser plus loin le calcul de ces sommes, en multipliant l'équation (1) par  $x^n$ , et en appliquant ensuite la formule (6) à l'équation résultante. (\*)

(\*) On trouve un article sur le même sujet à la page 238 du III.<sup>e</sup> volume de ce recueil.

J. D. G.

## II. L'équation

$$nA_n - A_{n-1}S_\alpha + A_{n-2}S_{\alpha^2} - \dots = 0,$$

devient, en supposant  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \dots$

$$nA_n - mA_{n-1}\alpha + mA_{n-2}\alpha^2 - mA_{n-3}\alpha^3 + \dots = 0.$$

Changeant  $n$ , en  $n-1$ , on aura

$$(n-1)A_{n-1} - mA_{n-2}\alpha + mA_{n-3}\alpha^2 - \dots = 0.$$

Multipliant cette dernière équation par  $\alpha$ , et l'ajoutant à la précédente ; il viendra

$$nA_n - (m-n+1)A_{n-1}\alpha = 0;$$

ce qui établit une relation entre deux coefficients consécutifs du polynôme

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m = (x+\alpha)^m;$$

d'où l'on déduit la formule du binôme.

On peut encore démontrer cette formule d'une manière plus directe ; il suffit pour cela d'observer que, dans l'équation

$$nA_n = S(\alpha B_{n-1});$$

le nombre des produits de  $n$  lettres du premier membre est égal au nombre des produits de  $n$  lettres du second membre ; désignant donc par  $N_n^m$  le nombre des produits différens de  $n$  lettres qui sont comptés dans  $m$  lettres, nous aurons  $nN_n^m = mN_{n-1}^{m-1}$ , et par conséquent la suite d'équations

$$nN_n^m = m N_{n-1}^{m-1};$$

$$(n-1)N_{n-1}^{m-1} = (m-1)N_{n-2}^{m-2};$$

$$(n-2)N_{n-2}^{m-2} = (m-2)N_{n-3}^{m-3};$$

.....

$$1.N_1^{m-n+1} = m-n+1.$$

Effectuant le produit de ces équations, et omettant les facteurs communs, nous obtiendrons

$$N_n^m = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdots \frac{m-n+1}{n}.$$

Si l'on fait maintenant  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \dots$  on aura

$$A_n = N_n^m \alpha^n;$$

donc

$$(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1} \alpha x^{m-1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \alpha^2 x^{m-2} + \dots$$


---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Problèmes de Géométrie.*

I. UNE droite mobile parcourt le plan d'un triangle de manière que le produit des segmens qu'elle détermine sur deux de ses côtés, vers leur point de concours, est constamment égal au produit des deux autres segmens des mêmes côtés. On propose d'assigner la courbe à laquelle, dans son mouvement, cette droite sera perpétuellement tangente ?

II. Un plan mobile coupe un tétraèdre de telle manière que le produit des segmens qu'il détermine, du côté du sommet du tétraèdre, sur les trois arêtes qui y concourent, est constamment égal au produit des segmens des trois mêmes arêtes qui se terminent à la base, et qu'en outre, le produit des aires des triangles qu'il intercepte du côté du sommet, sur les trois faces qui y concourent, est constamment égal au produit des aires des quadrilatères qui, avec ces triangles, complètent ces trois mêmes faces. On propose d'assigner la surface courbe à laquelle, dans son mouvement, ce plan sera perpétuellement tangent ?

## MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

*Solution des deux problèmes proposés à la page 243 du III<sup>e</sup> volume des Annales (\*), avec quelques applications à la construction des thermomètres métalliques en forme de montre;*

Par M. ARGAND.



1. SOIENT AT (fig. 1) la tangente commune, BAD la perpendiculaire à AT sur laquelle se trouvent les centres des arcs tangens, C un point pris, à volonté, sur BD. Que de ce point, comme centre, et du rayon CA =  $z$  on décrive l'arc AM =  $\alpha$ , la longueur donnée étant =  $2\alpha$ . Qu'on abaisse sur AC la perpendiculaire MP, et soient AP =  $x$ , PM =  $y$ ,

$$\text{On aura (1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = z \sin. \frac{\alpha}{z}, \\ x = z \left( 1 - \cos. \frac{\alpha}{z} \right). \end{array} \right.$$

on tire de ces deux équations, par l'élimination de  $\sin. \frac{\alpha}{z}$  et  $\cos. \frac{\alpha}{z}$ ,

au moyen de celle-ci :  $\sin^2 \frac{\alpha}{z} + \cos^2 \frac{\alpha}{z} = 1$ ,

---

(\*) Voyez aussi la page 377 du même volume.

$$z = \frac{y^2 + x^2}{2x}.$$

En substituant cette valeur de  $z$  dans chacune des deux premières équations, on obtient celle de la courbe cherchée, sous ces deux formes

$$\frac{2xy}{y^2+x^2} = \sin. \frac{2ax}{y^2+x^2}, \quad \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2} = \cos. \frac{2ax}{y^2+x^2}.$$

Ces deux équations diffèrent non seulement par la forme, mais encore par l'étendue de leur signification. La première n'appartient qu'à la courbe qui naît des arcs AM tracés dans le sens des ordonnées positives. La seconde comprend, en outre, la courbe semblable formée du côté des ordonnées négatives : car on voit qu'elle ne change pas en mettant  $-a$  au lieu de  $+a$ . C'est donc cette dernière équation seule qui résout le problème tel qu'il est énoncé, en y supprimant toutefois la condition que les arcs touchent la droite donnée *du même côté*; car, par cette restriction, on n'aurait qu'une moitié de la courbe; savoir: celle qui est tracée du côté des abscisses positives, et la courbe se terminerait brusquement à la ligne AT.

2. Quant à la surface courbe qui fait le sujet du second problème; c'est une sphère dont le centre est le point de contact commun A, et dont le rayon  $= \sqrt{\frac{b}{\pi}}$ ,  $b$  étant la surface constante des calottes, et  $\pi$  la demi-circonférence appartenant au rayon 1. En effet, la figure 1 peut représenter une section perpendiculaire au plan tangent, et passant par le point A. Qu'on décrive le cercle MN d'un rayon  $AM = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$ . Ce cercle sera la section de la sphère dont il s'agit. Qu'on prenne ensuite, comme ci-dessus, AC à volonté, et qu'on décrive l'arc AM, qui sera la section d'une demi-calotte. Par les éléments, la surface de la calotte  $= 2\pi AP \cdot AC$  et  $AP = \frac{\overline{AM}^2}{2AC}$ ;

donc en substituant et réduisant, cette surface =  $b$ . On doit ici, comme dans le problème précédent, et par une raison semblable, retrancher de l'énoncé du problème la condition que les calottes touchent le plan *du même côté*.

3. Les applications pratiques étant propres à jeter de l'intérêt sur les questions de théorie, auxquelles on reproche quelquefois de n'être que des objets de curiosité, il ne sera peut-être pas hors de propos de recueillir ici, à l'occasion de la courbe du premier problème, quelques considérations utiles dans la construction des thermomètres métalliques en forme de montre, instrumens dont plusieurs artistes se sont occupés dans ces derniers temps.

Le mécanisme de cet instrument est porté sur une platine et emboîté comme un mouvement de montre. La figure 3 en représente les parties principales. Q est un *pied* ou talon, fixé sur la platine, auquel est attachée une lame d'acier QTUA, dont la forme et la position sont assez semblables à celle de ces ressorts qui, depuis quelques années, ont remplacé les timbres des montres à répétition. ABCD est la pièce destinée à donner le mouvement thermométrique. Elle est composée de deux lames fort minces de métaux différens, comme acier et cuivre, soudées l'une à l'autre par leurs faces, de manière à ne former qu'un seul et même corps. Les deux lames QTUA et ABCD sont réunies en A : à l'extrémité D de cette dernière est adaptée une troisième lame fort mince *abcd*, qui en forme, en quelque sorte, le prolongement. Le système QTUABCD $abcd$  ne tient à la platine que par le pied Q ; tout le reste est porté en l'air et se trouve éloigné de la platine de la distance requise pour le passage des roues RS et FG. p est le pignon du centre dans lequel engrène la roue RS. L'axe de cette roue porte le *bras* ou levier L qui appuye contre l'extrémité *d* de la lame *abcd*. FG est une roue auxiliaire, engrenant de même dans le pignon P : à la tige de cette roue est adapté un ressort spiral *s*, dont l'effort tend à faire tourner de droite à gauche les rouages FG et RS. Cet effort maintient le bras L contre

le bout *d* de la lame. L'axe du pignon porte une aiguille , du côté du cadran , c'est-à-dire , du côté de la platine opposé à celui que représente la figure.

En vertu de la différence de dilatabilité entre le cuivre et l'acier , la lame ABCD se resserre ou s'ouvre , par les variations de température , de manière qu'étant fixée par une de ses extrémités , l'extrémité libre acquiert , par ces variations , un mouvement thermométrique très-sensible. On peut l'évaluer à environ 5 millimètres , dans les limites de la température atmosphérique , pour une lame d'un demi-millimètre d'épaisseur et de 10 à 12 centimètres de longueur , et dont la courbure est celle d'un cercle de 25 millimètres de rayon.

La lame ABCD étant supposée avoir le cuivre en dehors et l'acier en dedans , l'ascension de la température produira une contraction , le ressort *d* agira alors contre le bras L , et la roue RS tournera de gauche à droite , ainsi que le pignon P , vu du côté du cadran.

On voit que l'arc AM (fig. 1) de longueur constante , mais de courbure variable , peut représenter la lame thermométrique ; le point A est l'extrémité fixe , et le point M l'extrémité mobile. Cette dernière décrira donc une portion de la courbe n.<sup>o</sup> 1.

4. Voici maintenant les questions auxquelles on est acheminé en cherchant à amener ce mécanisme à toute la régularité dont il est susceptible. Il faut d'abord donner à la lame ABCD le plus grand mouvement thermométrique possible. On y parvient en l'aminçissant , mais il faut lui laisser la force suffisante pour résister aux secousses auxquelles l'instrument peut être exposé. La forme de la lame étant , comme on le voit , celle d'une portion de cercle , il ne reste qu'à en déterminer la longueur.

S'il s'agissait d'une lame droite , il est évident qu'une plus grande longueur donnerait un plus grand mouvement thermométrique ; mais , pour un arc de cercle , la question ne saurait être décidée au simple coup d'œil. Comme le mouvement thermométrique est fort petit , relativement à la longueur de la lame , la portion de courbe décrite

par l'extrémité mobile peut être sensiblement regardée comme l'élément  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  de cette courbe.

Or, par les équations (1), on trouve

$$ds^2 = dz^2 \left\{ 2 + \frac{a^2}{z^2} - 2 \cos. \frac{a}{z} - 2 \frac{a}{z} \sin. \frac{a}{z} \right\}.$$

Il s'agit donc de déterminer la valeur de  $a$  qui rend  $ds$  un *maximum*, en regardant  $z$  et  $dz$  comme constants.

On trouve le résultat simple

$$1 = \cos. \frac{a}{z} \quad \text{ou} \quad a = 2k\pi,$$

en prenant le rayon  $z$  de la lame pour unité, et en dénotant par  $k$  un nombre entier quelconque. Dans la pratique, on ne peut prendre que  $k=1$ , ce qui donne  $a=2\pi$ . On peut même et on doit, pour faciliter la distribution des pièces du mécanisme, réduire  $a$  à  $\frac{3\pi}{2}$ , comme on le voit dans la figure. Ce qu'on perd sur le mouvement  $ds$ , par cette réduction, est peu de chose ; en effet, les valeurs de  $ds$ , dans les deux suppositions de  $a=2\pi$  et  $a=\frac{3\pi}{2}$ , sont entre elles

$$\therefore 4\pi : \sqrt{9\pi^2 + 12\pi + 8}, \text{ ou à peu près } \therefore 13:12.$$

5. Après avoir ainsi fixé la longueur de la lame, il faut déterminer la direction de  $ds$  à laquelle le bras L (fig. 3) doit être perpendiculaire. On trouve, pour la sous-tangente au point D, la valeur  $-\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) = -5,7$ ; ainsi, la direction cherchée fait un angle d'environ  $10^\circ$  avec le diamètre AQ, qui répond à la ligne AD de la figure 1.<sup>re</sup>. On voit par là pourquoi il a fallu donner au ressort abcd une forme rentrante et à inflexion.

On vient de dire que le bras L doit être perpendiculaire à la direction  $ds$ ; mais, ce bras étant mobile, il faut entendre que

cette perpendicularité doit avoir lieu au degré de température moyen, entre les limites des variations atmosphériques.

La détermination ci-dessus fournit d'abord un à-peu-près, pour obtenir la situation requise; mais il convient d'avoir un moyen d'y mettre plus de précision. On peut y parvenir, par l'observation, de la manière suivante.

6. Soient  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ , trois hauteurs observées sur un thermomètre de comparaison, et  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ , les degrés correspondans, observés, en même temps, sur le cadran du thermomètre métallique. On réduira d'abord  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ , en degrés angulaires, en les multipliant par  $\frac{360^\circ}{T}$ ,  $T$  étant le nombre de degrés thermométriques dans lesquels est divisée la circonference du cadran.

Soient ensuite (fig. 2) C le centre autour duquel tourne le bras,  $AD''$  la direction de laquelle se meut l'extremité de la lame,  $D$ ,  $D'$ ,  $D''$  la position de cette extrémité au moment des observations, et par conséquent  $CdD$ ,  $Cd'D'$ ,  $Cd''D''$ , les situations correspondantes du bras.

Prenons la perpendiculaire CA pour unité, et faisons l'angle  $ACD=x$ .

Le mouvement de la lame étant sensiblement proportionnel aux variations de la température, on aura d'abord

$$D'D : D''D :: c' - c : c'' - c.$$

La marche de l'aiguille fera connaître les angles  $d'Cd$ ,  $d''Cd$ . En effet, le mouvement angulaire de l'aiguille est au mouvement angulaire du bras, comme le nombre des dents de la roue est à celui des dents du pignon. Dénotant dans ces nombres par  $r$  et  $p$ , on aura

$$d'Cd = \frac{360}{T} (m' - m) \frac{p}{r}; \quad d''Cd = \frac{360}{T} (m'' - m) \frac{p}{r};$$

angles que, pour abréger, nous appellerons  $n'$  et  $n''$ .

Or,

$$D'D = AD' - AD = \text{Tang.}(x+n') - \text{Tang.}x ;$$

$$D''D = AD'' - AD = \text{Tang.}(x+n'') - \text{Tang.}x .$$

En substituant ces valeurs, la proportion ci-dessus donnera, pour déterminer  $\text{Tang.}x$ , l'équation

$$(c''-c)\{\text{Tang.}(x+n') - \text{Tang.}x\} = (c'-c)\{\text{Tang.}(x+n'') - \text{Tang.}x\}.$$

En développant  $\text{Tang.}(x+n')$  et  $\text{Tang.}(x+n'')$ , les deux membres deviennent divisibles par  $1 + \text{Tang.}^2 x$ , et l'on trouve

$$\text{Tang.}x = \frac{(c''-c)\text{Tang.}n' - (c'-c)\text{Tang.}n''}{(c''-c')\text{Tang.}n'\text{Tang.}n''} .$$

Pour employer plus commodément les logarithmes au calcul de  $\text{Tang.}x$ , on peut prendre un angle auxiliaire  $\varphi$ , donné par l'équation

$$\text{Tang.}\varphi = \frac{(c'-c)\text{Tang.}n''}{c''-c} ;$$

on aura ensuite

$$\text{Tang.}x = \frac{(c''-c)\text{Sin.}(n'-\varphi)}{(c''-c')\text{Sin.}n'\text{Tang.}n''\text{Cos.}\varphi} .$$

Soient maintenant  $M$  et  $CmM$  la position de la lame et du bras, à la température adoptée comme moyenne,  $\gamma$  cette température exprimée en degrés du thermomètre de comparaison, et soit fait l'angle  $ACM=\mu$ ; on aura, comme ci-dessus

$$D'D : MD :: c' - c : \gamma - c$$

$$:: \text{Tang.}(x+n') - \text{Tang.}x : \text{Tang.}\mu - \text{Tang.}x ;$$

d'où l'on tire

$$\text{Tang.}\mu = \frac{(\gamma-c)\text{Tang.}(x+n') - (\gamma-c')\text{Tang.}x}{c'-c} ;$$

ou, en employant, comme ci-dessus, un angle auxiliaire  $\psi$ ,

$$\text{Tang.} \psi = \frac{(y-c')\text{Tang.} x}{y-c},$$

puis

$$\text{Tang.} \mu = \frac{(y-c)\text{Sin.}(x+n'-\psi)}{(c'-c)\text{Cos.}(x+n')\text{Cos.}\psi};$$

L'angle  $\mu$ , ainsi déterminé, fera connaître la quantité dont la position de l'extrémité  $d$  (fig. 3) doit être avancée ou reculée. Cette quantité sera  $B\text{Sin.}\mu$ , en dénotant par  $B$  la longueur de la partie utile du bras, c'est-à-dire, la distance entre le centre de la roue et l'extrémité du ressort, mesurée à la température moyenne.

Si, comme on le verra plus loin, cette opération peut se faire, l'instrument étant monté, on observera la marche de l'aiguille qui devra parcourir  $\frac{T_{r\mu}}{360}$  degrés de l'échelle du cadran.

En prenant pour  $c''$  le degré le plus élevé et par  $c$  le plus bas, de manière que  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  suivent l'ordre de la température ascendante, il faudra, si  $\text{Tang.}\mu$  est positive, accourcir le ressort  $abcd$ , ou faire reculer l'aiguille. Ce sera le contraire, si  $\text{Tang.}\mu$  est négative.

7. La manière dont le mouvement de la lame se transmet au rouage, a l'avantage d'occasioner le moins de frottement possible et de donner beaucoup de facilité pour régler le thermomètre, ainsi qu'on va le voir; mais elle a cependant un défaut qui frappe au premier coup d'œil. En effet, les angles décrits par l'aiguille, à partir de la température moyenne, sont proportionnels, non aux lignes  $AD$ ,  $AD'$ ,  $AD''$  (fig. 2) parcourus par l'extrémité mobile, comme il le faudrait, mais aux arcs dont ces lignes sont les tangentes. Il en résulte donc une erreur qu'il faut évaluer; mais, avant d'examiner cette question, il convient de faire ici deux observations.

1.<sup>o</sup> La marche de l'aiguille (supposée d'ailleurs régulière) est en proportion inverse de la longueur dénotée par  $B$  au n.<sup>o</sup> précédent. Or, cette marche n'est pas arbitraire; elle doit correspondre à la division du cadran, qui est supposé donnée. Il faut donc, pour obtenir

obtenir cette correspondance, pouvoir faire varier, à volonté, la distance *B*. C'est dans ce but qu'a été imaginé le ressort subsidiaire *abcd* (fig. 3), maintenu par la vis de pression *v*. Par le jeu de cette vis, on peut ouvrir ou refermer le ressort *abcd*: mouvement qui approche ou éloigne l'extrémité *d* du centre de *L*, et produit ainsi la variation demandée.

2.<sup>o</sup> Cette correspondance obtenue, l'indication de l'aiguille peut n'être pas d'accord avec celle du thermomètre de comparaison, de même qu'une montre bien réglée peut être en avance ou en retard. Pour établir l'accord, on ne peut point, comme dans une montre qu'on met à l'heure, faire tourner l'aiguille sur la tige du centre; car ici le rouage n'offre point de résistance; il faut donc enlever l'aiguille de dessus son axe, et l'y replacer dans la situation convenable. Cette opération, toute simple qu'elle paraît, ne saurait néanmoins s'effectuer avec une précision suffisante. Il est donc nécessaire de pouvoir obtenir une plus grande approximation. Le moyen suivant remplit cet objet.

La platine est emboîtée de manière que le pousoir *P* se trouve vis-à-vis d'un point *M* de la lame extérieure *QTUA*, tel qu'en exerçant sur ce point une pression dirigée vers le centre *p*, il en résulte à l'extrémité *d* un mouvement dans la direction *ds*; ce point se détermine facilement par l'expérience. Le pousoir étant traversé par une vis *V*, dont le bout vient appuyer contre le point *M*, on peut, par le jeu de cette vis, faire avancer ou reculer l'extrémité *d*, sans rien déranger au reste du mécanisme, et achever ainsi de rendre l'indication de l'aiguille concordante avec celle du thermomètre de comparaison. On doit observer ici que l'emploi de cette vis *V* doit être mis à profit pour obtenir une dernière approximation, dans l'opération du n.<sup>o</sup> 6, laquelle doit précéder celle dont on vient de parler. A la vérité, cette dernière dérangera la position prescrite par le n.<sup>o</sup> 6; mais tout ce qui en résultera, c'est que le bras *L* qui devrait être perpendiculaire à la direction *ds*, à la température moyenne *v*, ne le sera véritablement qu'à la température *v*  $\pm$  un

ou deux degrés , ce qui ne présente aucun inconvenient sensible.

8. L'effet des vis  $\rho$  et  $V$  étant ainsi expliqué , on voit qu'il peut être assimilé à deux constantes arbitraires au moyen desquelles on peut faire en sorte que l'indication de l'instrument soit exacte à la température moyenne  $\gamma$  et à une autre température  $\gamma+n$ . On voit aussi que l'accord étant obtenu dans ces deux cas , il aura également lieu à la température  $\gamma-n$ . En général , on peut ne s'occuper que de ce qui se passe en supposant  $n$  positif , car les mêmes effets seront produits , mais en sens contraire ,  $n$  étant négatif.

Soient maintenant (fig. 4) MN la direction ds , CM , perpendiculaire à MN , la direction du bras à la température moyenne  $\gamma$  , CN cette direction à la température  $\gamma+n$ . Faisons  $CM=1$  et  $\text{Ang.MCN}=\alpha$  , et prenons un autre angle indéterminé  $MCX=x$ . Pour que l'accord demandé eût lieu lorsque le bras est en CX ; il faudrait que l'on eût

$$MN : MX :: \text{Ang.MCN} : \text{Ang.MCX} ,$$

c'est-à-dire ,

$$\text{Ang.MCX} = \frac{\alpha \text{Tang.}x}{\text{Tang.}\alpha} ;$$

puis donc qu'on a réellement

$$\text{Ang.MCX}=x ,$$

il s'ensuit que l'erreur est

$$x - \frac{\alpha \text{Tang.}x}{\text{Tang.}\alpha} .$$

Le maximum de cette erreur a lieu , lorsque  $\text{Cos.}^2x = \frac{\alpha}{\text{Tang.}\alpha}$  ce qui donne

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \alpha + \frac{4}{45\sqrt{3}} \alpha^3 + \frac{26}{1575\sqrt{3}} \alpha^5 + \dots$$

L'erreur elle-même est alors

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}} a^3 + \frac{2}{45\sqrt{3}} a^5 + \dots;$$

série dont il suffit de conserver le premier terme.

Maintenant on doit prendre pour  $n$  la moitié de la distance entre les températures extrêmes de l'atmosphère. On peut donc faire  $n=25^\circ$  centigrades ; l'angle  $a$  sera  $= \frac{2\pi \cdot 25 p}{Tr}$ , en conservant à  $T, r, p$  les valeurs du n.<sup>o</sup> 6.

L'erreur au *maximum*, rapportée à l'aiguille et exprimée en degrés thermométriques, sera ainsi

$$\frac{8 \cdot 25^3 \cdot \pi^2 p^2}{9\sqrt{3} \cdot T^2 r^2} = \frac{79146 p^2}{T^2 r^2}.$$

Soit donc  $\epsilon$  la plus grande erreur qu'on veuille se permettre ; il faudra avoir  $\frac{79146 p^2}{T^2 r^2} < \epsilon$  ou  $\frac{Tr}{p} > \frac{281}{\sqrt{\epsilon}}$ .

Soit, par exemple  $\epsilon = \frac{1}{4}^\circ$  ( $= \frac{1}{5}^\circ$  Réaumur), on devra avoir  $\frac{Tr}{p} > 562$ . Les valeurs de  $r$  et de  $p$  sont limitées par la nature de l'instrument. On ne pourrait guère faire  $r$  plus grand que 100. Quant à  $p$ , il faut bien se garder de le prendre trop petit. On ne peut nullement employer ici, comme dans les montres, des pignons de 6 ou 7 ailes. En faisant  $p=10$ , on aurait  $T=56$ ; mais, comme il y a une certaine élégance à avoir pour  $T$  une partie aliquote de l'unité thermométrique, on pourrait encore prendre  $p=9$ , ce qui permettrait de faire  $T=50$ .

9. Il ne faut point omettre de faire mention ici d'un défaut qui paraît inhérent à tous les instrumens où le corps thermométrique est solide : défaut qui tient à un fait physique sur lequel M. Laplace a appelé l'attention des observateurs (*Exposit. du syst. du monde*, liv. I, chap. XII). Il s'agit de la résistance que les corps, en changeant de température, opposent à leur changement de volume et de figure : résistance qui paraît être due au frottement interne

entre les molécules et à l'élasticité de ces mêmes molécules. Cet effet est très-apparent sur l'instrument dont nous nous occupons. Si on le met en action de manière que l'aiguille ait un mouvement sensible et qu'on lui fasse subir un léger choc , pour lequel il convient d'employer un corps dur , on verra l'aiguille faire un saut , dans le sens de sa marche , puis rester stationnaire pendant tout le temps qu'il lui aurait fallu pour parcourir l'espace qu'elle a franchi. Et ce qui prouve que cet effet ne provient pas , au moins en totalité , du frottement externe , comme on pourrait d'abord le penser , c'est la régularité qu'on y observe. L'espace dont il s'agit paraît être de  $\frac{1}{2}$  à  $\frac{1}{4}$  centigrade , pour la lame dont les dimensions sont données au n.<sup>o</sup> 3. Ces limites seraient beaucoup plus écartées , si une cause aussi variable que le frottement externe exerçait la principale influence dans l'effet en question.

On peut ajouter que la même résistance a lieu relativement au changement de figure qui provient d'une autre cause que la variation de la température , par exemple , de la propre pesanteur du corps. En effet , si , en maintenant le thermomètre dans un plan vertical , on le fait tourner autour de l'axe de l'aiguille , la température demeurant constante , la pesanteur des parties mobiles de l'instrument , particulièrement celle de la lame , produira un changement de figure d'où naîtra un mouvement dans l'aiguille. Pendant ce mouvement , on pourra faire l'expérience dont nous venons de parler , et on obtiendra le même effet. Cette variation dans l'indication de l'aiguille , suivant la situation du thermomètre est , au reste , un défaut qu'on doit corriger , afin que l'instrument soit comparable à lui-même dans toutes les positions. On y parvient facilement , en adaptant sur l'axe de la roue RS (fig. 3) un petit contre-poids , semblable au bras L. On observera la position dans laquelle l'action dont il s'agit de corriger l'effet est à son *maximum*. La direction du contre-poids devra alors être horizontale , et dans le sens où l'action de la pesanteur contrarie celle de la lame. Le poids de cette petite correctrice se détermine facilement par l'expérience.

10. Il y aurait encore plusieurs préceptes de pratique à indiquer ici, mais on se bornera au point le plus essentiel. Comme la force qui agit sur le mécanisme est proportionnelle à la variation de la température, et qu'un frottement, quelque petit qu'il soit, demande une force finie pour être surmonté, on voit qu'il y aura toujours, dans la machine, une inexactitude d'autant plus grande que la résistance à vaincre le sera elle-même. On doit donc s'attacher, avec un soin extrême à diminuer toutes les causes de frottement. Donner au rouage la plus grande liberté, alléger les roues et l'aiguille, réduire la grosseur des pivots, employer un ressort spiral très-faible; éviter tout contact entre l'aiguille et le cadran ou la glace qui le recouvre, tels sont les principaux moyens de parvenir à ce but.

On voit que la construction des thermomètres métalliques exige des considérations dont les résultats ne pourraient pas toujours être connus par l'expérience et le tâtonnement; ce qui explique pourquoi des artistes, habiles d'ailleurs, n'ont obtenu, dans ce genre, que des produits imparfaits quant à l'exactitude. Quelques essais dirigés sur les principes qu'on vient de présenter ont été plus satisfaisans; et on croit pouvoir assurer qu'avec un peu de soin, les artistes obtiendraient une précision, sinon assez parfaite pour des expériences très-délicates, du moins suffisante dans bien de cas, et pourraient ainsi offrir aux observateurs une nouvelle espèce de thermomètre que sa forme portative leur rendrait très-commode en voyage, et dans les excursions où le transport des instrumens est souvent un sujet d'embarras.

Paris, le 27 février 1813.

---

## GÉOMÉTRIE DES COURBES.

*Essai sur l'expression analytique des courbes, indépendamment de leur situation sur un plan ;*

Par M. GERGONNE.



Il a été souvent remarqué que, si l'usage des coordonnées parallèles à deux droites fixes, dans la théorie des courbes, réunit généralement en sa faveur un très-grand nombre d'avantages ; il est néanmoins certaines courbes, ou certaines recherches relatives à toutes les courbes, pour lesquelles d'autres systèmes de coordonnées semblent mériter la préférence. On en voit un exemple remarquable à l'égard des spirales qui, rapportées à des coordonnées polaires, ont, pour la plupart, des équations très-simples et souvent même algébriques. Les lignes du second ordre en offrent un autre exemple ; puisque, rapportées aux mêmes coordonnées, elles ont leur rayon vecteur exprimé sous une forme rationnelle, et qu'en particulier l'équation du cercle prend alors la forme très-simple  $r = \text{Const.}$  qui met en évidence sa propriété fondamentale.

J'inclinerais assez à penser, d'après ces réflexions, que, dans les livres destinés à l'enseignement, il conviendrait, peut-être, d'insister un peu plus sur ce sujet qu'on ne le fait communément. Je sens fort bien qu'on ne saurait exiger des auteurs de tels ouvrages qu'ils traitassent, en détail, de toutes les transformations de coordonnées, dont le nombre est illimité, et dont la plupart n'offrirait d'ailleurs qu'une complication qui ne serait rachetée par aucun avantage. Mais il faudrait du moins que l'on mit bien ceux qui

étudient sur la voie des recherches de cette nature , qu'on leur montrerait bien que , toutes les fois qu'on élimine  $x$  et  $y$ , entre trois équations telles que

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ \varphi(x, y, t, u) &= 0, \\ \psi(x, y, t, u) &= 0, \end{aligned}$$

on fait une véritable transformation de coordonnées , quelle que soit d'ailleurs la forme des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  , et qu'on les exerçât assez sur cette matière pour les mettre en état de découvrir la transformation analytique qui répond à une transformation géométrique donnée , et *vice versa* , du moins lorsque ces transformations ne sont pas très - compliquées (\*). En particulier , on pourrait , relativement aux lignes du second ordre , demander de rapporter ces courbes , soit à deux points fixes , soit à un point et à une droite fixes , tels que ,  $t$  et  $u$  représentant les deux coordonnées , l'équation prit la forme  $t \pm u = Const.$  , ou cette autre  $t = u$ . Cette manière de chercher les foyers me semblerait , à la fois , plus naturelle et plus analytique qu'aucun des procédés employés jusqu'ici à leur détermination ; et elle pourrait , en outre , conduire à la découverte de quelques points remarquables , dans les courbes des degrés supérieurs.

Mais , soit qu'on rapporte une courbe à deux droites , ou à une

(\*) Ce serait une question assez intéressante , mais qui ne paraît pas facile à traiter généralement , que celle de savoir quelle devrait être la forme de deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  , pour qu'en éliminant  $x$  et  $y$  entre l'équation donnée

$$F(x, y) = 0,$$

et les deux équations

$$\varphi(x, y, t, u) = 0, \quad \psi(x, y, t, u) = 0,$$

l'équation résultante fut une équation donnée

$$\Phi(t, u) = 0.$$

droite et à un point, ou à deux points, ou enfin à tout autre système de données invariables; toujours la forme de son équation dépendra de sa situation par rapport à ces données; toujours cette équation renfermera des arbitraires, exprimées ou sous-entendues; en un mot, elle n'exprimera point, si je puis m'exprimer ainsi, la nature *intrinsèque* de la courbe, indépendamment de sa situation, et de toutes données extérieures et immobiles.

Cette observation, faite depuis long-temps, a conduit divers géomètres à rechercher quel serait le système de coordonnées le plus propre à rendre l'expression analytique d'une courbe indépendante de tout terme de comparaison, de toute convention étrangère à la nature de cette courbe. M. Lacroix a proposé l'équation entre le rayon de courbure et l'arc correspondant, compté depuis un certain point de la courbe (\*): et ce moyen serait, en effet, très-propre à rendre l'équation d'une courbe indépendante de sa situation dans l'espace; mais M. Lacroix remarque lui-même que, dans ce système, le point de départ des arcs serait nécessairement arbitraire. A la vérité, on pourrait choisir celui pour lequel le rayon de courbure est le plus petit; mais, outre qu'il est un grand nombre de courbes dont la courbure est la même en divers points, l'usage d'un tel système de coordonnées, supposant la courbe déjà tracée, en son entier, ne pourrait conséquemment servir à sa description. On peut remarquer encore que, dans ce système, les courbes rectifiables exceptées, les équations de toutes les autres courbes seraient inévitablement différentielles.

M. Carnot qui, dans un ouvrage très-remarquable, a présenté sur la transformation des coordonnées, des réflexions du plus grand intérêt (\*), a proposé, pour exprimer analytiquement la nature d'une courbe, le moyen que voici Si, par l'un quelconque des points

(\*) Voyez son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, tome I, page 418 de la première édition, et page 484 de la seconde.

(\*) *Géométrie de position*, page 473.

d'une courbe , on lui mène une tangente , et qu'après avoir mené à la courbe une corde quelconque , parallèle à cette tangente , on joigne le point de contact au milieu de cette corde par une droite , cette droite fera avec la tangente un angle dont la grandeur variera , généralement parlant , avec la situation de la corde . Si l'on conçoit que cette corde , toujours parallèle à la tangente , s'en rapproche sans cesse , l'angle dont il s'agit tendra continuellement vers une certaine limite qu'il atteindra enfin , lorsque la corde et la tangente coïncideront ; c'est la relation entre cet angle limite et le rayon de courbure que M. Carnot propose d'employer pour caractériser les courbes ; et l'on doit convenir , en effet , que cette relation est bien indépendante de toutes données fixes , de toute supposition arbitraire et conséquemment très - propre , à beaucoup d'égards , à faire bien connaître la nature des courbes . On voit en particulier que , toutes choses égales d'ailleurs , plus l'angle sera aigu et plus aussi la courbure de la courbe devra varier rapidement d'un point à l'autre ; tandis qu'au contraire plus il approchera d'être droit et plus la courbe tendra à prendre une courbure uniforme , comme celle du cercle .

Il paraît que M. Carnot a eu principalement en vue , dans le choix de ces deux coordonnées , la simplicité de l'équation transformée ; et , en effet , l'application qu'il fait de sa méthode à la parabole le conduit à une équation à peu près aussi simple que l'équation ordinaire de cette courbe ; mais , outre qu'il peut paraître peu naturel de faire entrer en considération , dans l'expression d'une courbe , une droite qui passe par deux points qui se confondent , et dont l'un appartient à une corde évanouissante , et conséquemment insaisissable pour les sens ; on ne voit pas trop comment on pourrait déduire de cette expression une construction graphique approchée de la courbe à laquelle elle est relative : objet qui , comme je l'ai déjà dit , me paraît ne devoir pas être négligé dans cette recherche .

Dans un mémoire présenté à l'institut en 1803 (\*) , M. Ampère ,

(\*) Voyez le *Journal de l'école polytechnique* , XIV cahier , page 159 ,  
Tom. I.

qui s'est aussi occupé de la même question , a proposé , pour la résoudre , l'usage des *Paraboles osculatrices* ; c'est - à - dire , que , pour un point pris arbitrairement sur une courbe donnée , il cherche quelle devrait être la parabole qui aurait avec cette courbe , en ce point , un contact du troisième ordre , et qu'il prend , pour équation de la courbe proposée , l'équation entre les coordonnées ordinaires de cette parabole. On ne peut disconvenir que , déterminé à exprimer toutes les courbes par leur relation avec une même courbe , choisie arbitrairement , M. Ampère ne pouvait faire un choix préférable à celui de la parabole ; mais , enfin , ce choix a toujours quelque chose d'arbitraire ; il exige , en outre , la considération de deux courbes au lieu d'une seule ; et la méthode qui en résulte , moins simple que celle de M. Carnot , ne paraît pas , plus qu'elle , propre à fournir une construction.

Il y a fort long-temps que j'ai conçu l'idée d'un mode d'expression absolue des courbes qui , d'une première vue , m'a semblé devoir offrir quelques avantages sur tous ceux que je viens de rappeler ; mais diverses distractions m'avaient toujours détourné jusqu'ici de le soumettre à l'épreuve du calcul , et à présent même je ne puis qu'en donner une simple esquisse. C'est , au surplus , tout ce qu'on peut raisonnablement désirer de rencontrer dans un recueil du genre de celui-ci , destiné plutôt à mettre sur la voie des méthodes qu'à en offrir de longs développemens.

Une courbe étant donnée , et un point étant pris arbitrairement sur son périmètre ; elle a nécessairement , en ce point , un certain rayon de courbure  $R$  , dont la grandeur et la direction sont déterminées , tant par la nature de la courbe que par la situation , sur son périmètre , du point particulier que l'on considère. L'extrémité de ce rayon  $R$  est un point de la développée , lié essentiellement au point pris sur la courbe , et variant avec lui. Or , comme , lorsqu'une courbe est donnée , sa développée est aussi donnée , non seulement d'espèce , mais encore de situation par rapport à elle ;

il s'ensuit que le rayon de courbure de cette développée, en chacun de ses points, doit aussi être donné de grandeur et de situation. Donc, en particulier, le rayon de courbure  $R'$  de la développée, qui répond à l'extrémité du rayon de courbure  $R$  de la courbe primitive, et qui est perpendiculaire à ce dernier, doit être lié avec lui par une relation qui, étant indépendante de tout objet fixe, étranger à la courbe que l'on considère, et par conséquent à la situation de cette courbe dans l'espace, ne doit renfermer, outre les deux rayons  $R$ ,  $R'$ , que les élémens nécessaires à la détermination absolue de cette même courbe.

C'est l'équation de relation entre ces deux rayons  $R$ ,  $R'$  que j'ai d'abord eu en vue de substituer à l'équation ordinaire des courbes; et l'on voit, en effet, qu'en même temps qu'elle est très-propre à les caractériser, elle ne renferme rien d'arbitraire, rien qui ne soit absolument inhérent à la nature intime de ces courbes. Il est même aisé de prévoir que telle courbe dont l'équation ordinaire sera compliquée et même transcendante, pourra souvent, dans ce système, être exprimée par une équation algébrique très-simple. On en voit des exemples remarquables pour la *Cycloïde* et la *Développante du cercle*, dont les équations deviennent alors respectivement  $R^2 + R'^2 = 16a^2$  et  $R' = a$ ,  $a$  étant, pour l'une et l'autre, le rayon du cercle génératrice.

Le seul embarras que j'éprouvais, dans l'adoption de ce système, était de savoir comment je déduirais de l'équation d'une courbe une construction approchée, telle que celles qu'on déduit des équations différentielles entre des coordonnées parallèles à deux droites fixes. Je songeai donc à substituer aux rayons  $R$ ,  $R'$  d'autres variables plus propres à remplir ce but, que je ne perdais jamais de vue, et j'en trouvai, en effet, de telles; mais, je ne tardai pas d'apercevoir que ce que je considérais comme deux modes distincts d'exprimer les courbes, n'en faisaient au fond qu'un seul, et pouvaient facilement être déduits l'un de l'autre. La considération du dernier m'a même permis de simplifier considérablement les procédés relatifs à

Soit MN (fig. 5) une droite prise arbitrairement pour l'un des rayons de courbure d'une courbe connue , M étant un point de la courbe. On sait qu'un très-petit arc de la courbe se confond sensiblement avec l'arc de cercle MM' , décrit du point N comme centre , et avec NM pour rayon ; en prenant donc cet arc MM' pour l'arc de courbe , si l'on connaissait , en général , pour un rayon de courbure donné MN , quel est l'accroissement de ce rayon qui répond au petit angle MNM' , dont varie sa direction ; en portant cet accroissement sur le prolongement de M'N , de N en N' , la droite M'N' pourrait sensiblement être considérée comme un nouveau rayon de courbure , répondant au point M' de la courbe , et le point N' comme le point correspondant de sa développée ; opérant donc sur M'N' de la même manière qu'on l'aurait fait sur MN , on déterminerait un troisième rayon de courbure M''N'' et conséquemment un troisième point N'' de la développée ; on parviendrait donc , en poursuivant continuellement de la même manière , à tracer la courbe proposée , à peu près comme on trace les *anses de paniers* , et l'on obtiendrait , en même temps , sa développée , qui serait donnée par les intersections consécutives de ses rayons de courbure. Tout se réduit donc à avoir une équation de relation entre le rayon de courbure , son accroissement et l'angle qu'il décrit pour acquérir cet accroissement. Or , cette équation , lorsque du moins on considère le rapport de l'angle à l'accroissement du rayon de courbure dans sa limite , est très-facile à obtenir , comme nous l'allons voir dans un instant; et elle est en même temps très-propre à caractériser la courbe à laquelle elle est relative.

Présentement , tout étant supposé d'ailleurs dans la figure 6 comme dans la figure 5 , soient menées NP , N'P' , respectivement perpendiculaires à MN , M'N' ; NP sera sensiblement le rayon de courbure de la développée , pour le point N , et P son centre de courbure pour le même point. Soient faits , comme ci-dessus ,  $MN=R$  ,

$NP=R'$ ; on aura  $NN'=\Delta R$ . Soit en outre désigné par  $\theta$  l'angle que forme  $MN$  avec une droite fixe quelconque, l'axe des  $x$ , par exemple; on aura  $\text{Ang.}NPN'=\text{Ang.}MNM'=\Delta\theta$ ; et, en vertu du triangle  $NPN'$ , rectangle en  $N'$ , on trouvera  $NN'=NP\cos.PNN' = NPSin.NPN'$ ; c'est-à-dire,  $\Delta R=R'\sin.\Delta\theta$ , ou encore

$$R' = \frac{\Delta R}{\sin.\Delta\theta}.$$

Cette équation n'est qu'approchée; mais, à la limite, elle devient rigoureuse, et l'on obtient alors exactement

$$R' = \frac{dR}{d\theta}. \quad (\text{A})$$

Si donc on a une équation entre  $R$  et  $R'$ ; au moyen de la précédente, on en déduira facilement une équation entre  $R$  et  $\frac{dR}{d\theta}$ ; et réciproquement, d'une équation entre  $R$  et  $\frac{dR}{d\theta}$ , on déduira, par le même intermédiaire, une équation entre  $R$  et  $R'$ ; c'est même ce dernier parti que nous prendrons, comme étant le plus facile.

Nous avons donc ici deux questions à résoudre; car d'abord on peut avoir l'équation d'une courbe, rapportée à des coordonnées soit rectangulaires, soit obliques, soit polaires, et on peut demander d'en déduire son équation, soit en  $R$  et  $\frac{dR}{d\theta}$ , soit en  $R$  et  $R'$ ; ou bien on peut avoir, au contraire, son équation, soit en  $R$  et  $\frac{dR}{d\theta}$ , soit en  $R$  et  $R'$ , et demander d'en déduire son équation en coordonnées soit rectangulaires, soit obliques, soit polaires; la solution de cette dernière équation, qui dépend évidemment de la première dont elle est l'inverse, ne conduit, généralement parlant, qu'à une équation différentielle qu'on ne saurait toujours intégrer sous forme finie et algébrique; et les constantes de son intégrale, lorsque cette intégrale

est possible, servent à fixer la situation des axes. La première question ne présente pas les mêmes difficultés.

De quelque système de coordonnées que l'on parte, il est clair que, pour une même courbe, l'équation, soit en  $R$  et  $\frac{dR}{d\theta}$ , soit en  $R$  et  $R'$  doit demeurer constamment la même. Mais, si la nature des coordonnées primitives n'exerce aucune influence sur le résultat définitif, elle peut rendre le calcul plus ou moins pénible. Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que les coordonnées sont rectangulaires, d'autant que la question peut toujours être amenée à ce cas;  $x$  sera la variable indépendante, et nous poserons, suivant l'usage

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r.$$

En conséquence, nous mettrons l'équation (A) sous la forme

$$R' \frac{d\theta}{dx} = \frac{dR}{dx}. \quad (\text{B})$$

Cela posé, l'expression du rayon de courbure est

$$R = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}, \quad (\text{C})$$

d'où

$$\frac{dR}{dx} = \frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} \sqrt{1+p^2};$$

d'un autre côté, en appelant  $\theta$ , comme nous en sommes convenus, l'angle que fait la normale ou le rayon de courbure avec l'axe des  $x$ , on a

$$\theta = -\text{Arc.} \left( \text{Tang.} = \frac{1}{p} \right), \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{q}{1+p^2};$$

substituant donc dans l'équation (B), elle deviendra

$$R' \cdot \frac{q}{1+p^2} = \frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} \sqrt{\frac{1}{1+p^2}} ,$$

ou

$$R' = \frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} \cdot \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{q} ,$$

ou enfin

$$R' = \frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} R . \quad (\text{D})$$

Soit donc

$$\phi'(x, y) = 0 , \quad (\text{I})$$

L'équation en coordonnées rectangulaires d'une courbe quelconque. Par trois différentiations consécutives, on en tirera les trois nouvelles équations

$$\phi'(x, y, p) = 0 , \quad (\text{II})$$

$$\phi''(x, y, p, q) = 0 , \quad (\text{III})$$

$$\phi'''(x, y, p, q, r) = 0 , \quad (\text{IV})$$

auxquelles on joindra encore les deux équations (C) et (D) qu'on pourra écrire ainsi

$$q^2 R^2 = (1+p^2)^3 , \quad (\text{V})$$

$$q^2 R' = [3pq^2 - r(1+p^2)]R ; \quad (\text{VI})$$

et, en éliminant entre elles les cinq quantités  $x, y, p, q, r$ , on obtiendra, pour résultat final, l'équation cherchée, en  $R$  et  $R'$ , dans laquelle on pourra ensuite substituer  $\frac{dR}{d\theta}$  à  $R'$ , si on le juge convenable.

Si, au contraire, l'équation proposée était

$$\psi \left\{ R, \frac{dR}{d\theta} \right\} = \psi(R, R) = 0 ;$$

en y joignant les équations (V) et (VI), pour en éliminer  $R$  et  $R'$ , l'équation résultante, en  $x, y, p, q, r$ , serait l'équation différentielle du troisième ordre de la courbe en coordonnées rectangulaires ; équation qu'il faudrait ensuite intégrer, soit exactement soit par approximation.

Pour premier exemple, proposons-nous de trouver l'équation de l'ellipse en  $R$  et  $R'$ ,  $2a$  et  $2b$  étant les deux axes ; les équations du problème seront

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 , \quad (1)$$

$$b^2x + a^2py = 0 , \quad (2)$$

$$b^2 + a^2(p^2 + qy) = 0 , \quad (3)$$

$$3pq + ry = 0 , \quad (4)$$

$$q^2R^2 = (1 + p^2)^3 , \quad (5)$$

$$q^2R' = [3pq^2 - r(1 + p^2)]R . \quad (6)$$

L'élimination de  $r$ , entre les équations (4) et (6) donnera d'abord

$$qyR' = 3p[1 + (p^2 + qy)]R ; \quad (7)$$

L'élimination de  $q$ , entre les équations (3), (5) et (7) donnera ensuite

$$(a^2p^2 + b^2)R' + 3p(a^2 - b^2)R = 0 , \quad (8)$$

$$(a^2p^2 + b^2)^2R^2 - a^4y^2(1 + p^2)^3 = 0 ; \quad (9)$$

éliminant encore  $p$  entre ces dernières et l'équation (2), on aura, en ayant égard à l'équation (1), et en transposant et quarrant dans l'équation (8)

$$a^2 b^6 R'^2 = 9(a^2 - b^2)^2 (b^2 - y^2) y^2 R^2 , \quad (10)$$

$$a^2 b^8 R^2 = \{(a^2 - b^2)y^2 + b^4\}^3 ; \quad (11)$$

la dernière donne

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2 - b^2}(b^2 - \sqrt[3]{a^2 b^2 R^2}) , \quad b^2 - y^2 = +\frac{b^2}{a^2 - b^2}(a^2 - \sqrt[3]{a^2 b^2 R^2}) ,$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (10), on obtiendra enfin l'équation demandée, laquelle pourra être mise sous la forme suivante.

$$\left(\frac{R'}{3R}\right)^2 + \left\{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{aR}{b^2}\right)^2}\right\} \left\{1 + \sqrt[3]{\left(\frac{bR}{a^2}\right)^2}\right\} = 0. \quad (\text{E})$$

Cette équation met parfaitement en évidence la propriété dont joignent les rayons de courbure de l'ellipse, d'être constamment compris entre les deux limites  $\frac{a^2}{b}$  et  $\frac{b^2}{a}$ , et montre en outre que, lorsqu'ils atteignent l'une ou l'autre de ces limites, le rayon de courbure de la développée devient nul. Cette équation peut sembler un peu compliquée; mais j'observerai que celle à laquelle parvient M. Ampère, ne l'est pas moins (\*). Si l'on y change  $b$  en  $b\sqrt{-1}$ , on la rendra propre à l'hyperbole dont le premier et le second axes sont respectivement  $2a$  et  $2b$ ; elle deviendra ainsi

$$\left(\frac{R'}{3R}\right)^2 + \left\{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{aR}{b^2}\right)^2}\right\} \left\{1 + \sqrt[3]{\left(\frac{bR}{a^2}\right)^2}\right\} = 0 , \quad (\text{H})$$

et l'on voit ici que le rayon de courbure, qui n'a point de limite en grandeur, ne saurait être moindre que  $\frac{b^2}{a}$ , et que, lorsqu'il atteint cette limite, le rayon de courbure de la développée devient nul.

Si, pour l'une et l'autre courbes, on désigne le paramètre par  $p$ , leurs équations pourront être comprises dans la formule unique,

$$\left(\frac{R'}{3R}\right)^2 + \left\{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{2R}{p}\right)^2}\right\} \left\{1 + \frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{pR^2}{2}}\right\} = 0 ;$$

(\*) Voyez au bas de la page 170 du volume déjà cité.

le signe supérieur répondant à l'ellipse et l'inférieur à l'hyperbole. Si l'on veut passer de là à la parabole, il suffira de supposer que  $\alpha$  est infini, ce qui donnera, pour l'équation de cette courbe,

$$\left(\frac{R'}{3R}\right)^2 + \left\{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{2R}{p}\right)^2}\right\}^2 = 0. \quad (\text{P})$$

Si, dans les équations (E) et (H), on fait  $b=\alpha$ , elles deviendront respectivement propres au cercle et à l'hyperbole équilatérale ; il viendra ainsi

$$\left(\frac{R'}{3R}\right)^2 + \left\{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{R}{a}\right)^2}\right\}^2 = 0,$$

$$\left(\frac{R'}{3R}\right)^2 + \left\{1 - \frac{R}{a} \sqrt[3]{\frac{R}{a}}\right\}^2 = 0;$$

et l'on voit que la première revient à ces deux-ci

$$R=\alpha, \quad R'=0;$$

ainsi que cela doit être

En mettant, dans toutes ces équations, pour  $R'$  sa valeur  $\frac{dR}{d\theta}$ , et tirant ensuite de l'équation résultante la valeur de  $dR$ , en fonction de  $R$  et  $d\theta$ , on aura des formules qui pourront servir commodément à tracer les lignes du second ordre, à la manière des *anses de paniers*; le tracé approchera d'autant plus d'être exact qu'on fera croître l'angle  $\theta$  par des degrés plus petits.

Pour second exemple, proposons-nous de déterminer l'équation, en coordonnées rectangulaires, de la courbe qui a constamment son rayon de courbure égal à celui de sa développée; les équations du problème seront

$$R'=R,$$

$$qR^2 = (1+p^2)^3,$$

$$q^2R' = [3pq^2 - r(1+p^2)]R;$$

d'où, par l'élimination de  $R$  et  $R'$ , on conclura sur-le-champ

$$\frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} = 1 ;$$

en mettant successivement cette dernière équation sous les deux formes

$$\frac{q \cdot 2pq - r(1+p^2)}{q^2} = 1 - p, \quad \frac{q[q(1+p^2) + p \cdot 2pq] - p(1+p^2)r}{q^2} = 1 + p,$$

on verra aisément que deux de ses intégrales premières sont

$$\frac{1+p^2}{q} = x - y + A, \quad \frac{p(1+p^2)}{q} = x + y + B ;$$

d'où, par l'élimination de  $q$ , on conclura l'intégrale seconde

$$p = \frac{x+y+B}{x-y+A}, \quad \text{ou simplement} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} ;$$

attendu que, par un changement d'origine, on peut toujours faire disparaître les deux constantes  $A$  et  $B$ . L'intégrale de cette dernière équation est

$$C + \text{Arc.} \left( \text{Tang.} = \frac{y}{x} \right) = \text{Log.} \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

ou, en passant aux coordonnées polaires, et faisant commencer les arcs avec les rayons vecteurs,

$$t = \text{Log.} \rho ;$$

équation de la *spirale logarithmique*, comme on pouvait bien s'y attendre.

Je terminerai par observer qu'avec des modifications convenables, il serait possible d'étendre aux surfaces courbes et aux courbes à double courbure la théorie qui vient d'être développée.

---

## CORRESPONDANCE.

Lettre de M. DU BOURGUET , professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial ,

*Au Rédacteur des Annales ;*

*En réponse à la lettre de M. BRET , insérée à la page 369 du 3.<sup>e</sup> volume de ce recueil.*



MONSIEUR ET TRÈS-CHER CONFRÈRE ,

LA nouvelle difficulté qu'élève M. Bret , contre la démonstration que j'ai donnée à la page 338 du 2.<sup>e</sup> volume des *Annales* , et qui n'est plus celle qu'il avait élevée à la page 33 du 3.<sup>e</sup> volume , et à laquelle j'ai complètement répondu , à la page 94 du même volume , s'applique généralement à tous les *renversemens* d'équations indéterminées entre deux variables , et a par conséquent déjà dû être expliquée (\*). Mais , comme il m'est beaucoup plus aisé , dans ce moment , pour répondre à M. Bret , de donner moi - même une explication de la difficulté en question , que de feuilleter , peut être inutilement , un grand nombre d'auteurs , je ferai remarquer à ce

---

(\*) En effet , si cette légère difficulté n'avait déjà été expliquée , il s'ensuivrait , par exemple , qu'on serait encore dans le doute sur l'identité des courbes respectives des équations  $y=\varphi x$  et  $x=\varphi'y$  , lorsque cette dernière équation est le renversement de la première.

géomètre que, si, en s'exprimant comme il le fait à la page 369 du 3.<sup>e</sup> volume, on représente par  $ab$  une des couples de  $x, y$ , non comprises dans celles  $\alpha\beta, \alpha'\beta', \alpha''\beta'', \dots$  de l'équation

$$x=\varphi(A, B, C, \dots, y), \quad (2)$$

ce couple ne satisfait pas à l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots = y, \quad (1)$$

dont celle (2) est le renversement; il s'ensuivra que, pour  $y=b$ , dans l'équation (1), on devra avoir

$$A(a+\delta)^m + B(a+\delta)^{m-1} + C(a+\delta)^{m-2} + \dots = b;$$

renversant cette dernière équation, il est clair, d'après les équations (1) et (2), qu'il viendra

$$a+\delta=\varphi(A, B, C, \dots, b);$$

mais, par hypothèse,

$$a=\varphi(A, B, C, \dots, b);$$

donc  $\delta=0$ , et, par conséquent,  $ab$  est aussi une couple de  $x, y$ , dans l'équation (1); donc toutes les couples qui satisfont à l'équation (2) satisfont aussi à l'équation (1). Cela démontré, je pense que M. Bret admettra cette conséquence, et peut-être alors cessera-t-il de croire qu'il soit très-difficile de ramener la démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des équations, à des notions purement élémentaires.

Agréez, etc.

Paris, le 2 juin 1813.

Lettre de M. BÉRARD , principal du collége de Briançon.

Au Rédacteur des *Annales* ;

*En réponse à la lettre de M. BRET , insérée à la page 369  
du 3.<sup>e</sup> volume de ce recueil.*



MONSIEUR ,

PERMETTEZ-MOI , je vous prie , quelques observations très-courtes sur la lettre de M. Bret que vous avez insérée à la page 369 du 3.<sup>e</sup> volume de votre intéressant recueil.

Le procédé de M. Bret et le mien , pour construire la parabole ; renferment deux points distincts.

1.<sup>o</sup> Il s'agit d'abord de déterminer deux tangentes MO , M'O ; parallèles aux axes des coordonnées , ainsi que les points M , M' où elles touchent la courbe. Pour cela M. Bret et moi employons les mêmes équations. Mais , tandis qu'il construit leurs intersections , moi je les combine par élimination. Jusque-là le but est le même , et la différence des moyens peu importante.

2.<sup>o</sup> Les deux tangentes étant trouvées , ainsi que leurs points de contact M , M' avec la courbe , il s'agit de construire cette courbe. M. Bret remplit ce second objet en déterminant d'abord le sommet ; tandis qu'au contraire je commence par chercher le foyer F , en menant les deux rayons vecteurs MF , M'F.

M. Bret remarque , avec raison , que , lorsque les coordonnées sont rectangulaires , les droites MF , M'F , se confondant avec la corde MM' , ne sont plus propres à déterminer le foyer , par leur

## QUESTIONS PROPOSÉES. 59

intersection ; mais , dans ce cas particulier , la construction devient beaucoup plus simple ; le foyer étant alors le pied de la perpendiculaire abaissée sur la corde  $MM'$ , du point  $O$  de concours des deux tangentes.

Ainsi ma construction ne souffre pas plus d'exception que celle de M. Bret ; et elle se simplifie même , dans le cas particulier où elle semblait être en défaut. Je laisse , au surplus , au lecteur à juger de ce que ces deux constructions peuvent avoir de commun ; et je crois devoir me borner à observer qu'ayant communiqué le manuscrit de mon ouvrage à M. Bret , en août 1808 , il n'est pas surprenant que depuis lors il ait oublié les détails de ma construction.

Agréez , etc.

Briançon , le 18 de juin 1813.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Problèmes de Géométrie.*

I. AU système de trois cercles donnés , tels que chacun d'eux touche les deux autres , circonscrire un triangle de manière que chacun de ses côtés touche en son milieu l'un des cercles donnés ?

II. A un triangle donné , inscrire le système de trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et touche , en outre , en son milieu , l'un des côtés du triangle ?

### *Problème d'Hydro-dynamique appliquée.*

Une roue est composée de deux plateaux égaux , en forme de couronnes circulaires , ayant leurs plans parallèles et leur axe commun.

Ces plateaux sont unis l'un à l'autre par des ailes brisées, uniformément réparties sur leur contour, formant des angles dièdres dont les faces sont rectangulaires et perpendiculaires aux plans des deux plateaux. Ces plateaux sont d'ailleurs solidement unis à l'axe de la roue, par un nombre suffisant de pièces d'assemblage.

La figure 7 représente l'un des plateaux, vu en dedans, sur lequel sont marquées ses intersections avec les ailes ; on a aussi indiqué dans cette figure, les pièces qui unissent le plateau à l'axe de la roue, et dont la forme et les dimensions peuvent d'ailleurs être variées d'un grand nombre de manières diverses.

On s'est assuré qu'une telle roue, entièrement plongée soit dans l'eau soit dans un courant d'air, de manière que son axe soit fixe et vertical, y prend un mouvement de rotation.

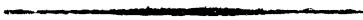
Cela posé ; on suppose donnés 1.<sup>o</sup> le rayon extérieur des plateaux ; 2.<sup>o</sup> l'intervalle qui les sépare ; 3.<sup>o</sup> la vitesse du fluide ; et l'on demande quels doivent être le nombre, les dimensions et la situation des ailes, pour que la roue produise, en tournant, le plus grand effet possible ?

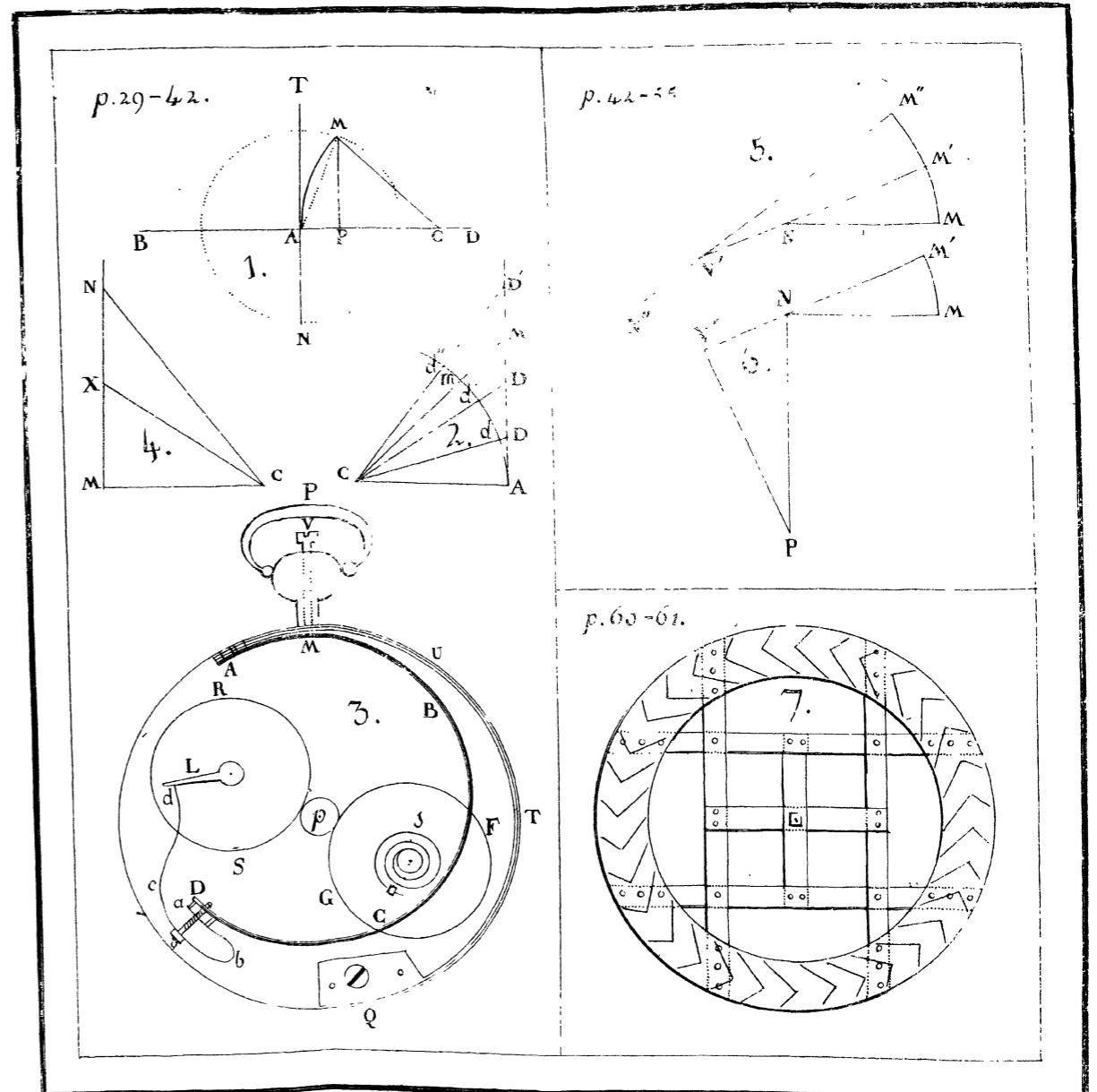
### *Théorème de Géométrie.*

**M, M'** étant deux points quelconques d'une parabole, **O** le point de concours des tangentes en ces points, et **F** le foyer, on propose de démontrer que

$$\frac{\overline{MO}^2}{\overline{MF}} = \frac{\overline{M'O}^2}{\overline{MF}};$$

d'où il suit que, si **F** tombe sur **MM'**, le sommet de l'angle **O**, qui devient droit, est placé sur la directrice, et la ligne **OF** est perpendiculaire sur la corde **MM'**.





J.D.G.fecit.



## PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

*Nouveaux principes de géométrie de position , et interprétation géométrique des symboles imaginaires ,*

Par M. J. F. FRANÇAIS , professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.



Il est si naturel de considérer , à la fois , en géométrie , la grandeur et la position des lignes , que , dès qu'on a commencé à cultiver cette science , on a dû avoir besoin d'exprimer des rapports de grandeur et des rapports de position , entre les différentes lignes composant une figure quelconque . J'ose dire qu'il est surprenant , d'après cela , que les premiers principes de la *Géométrie de position* ne soient pas encore complètement établis . Cette assertion , elle-même , pourra , au premier abord , sembler exagérée et paradoxale ; mais j'espère que sa vérité sera mise hors de doute , par les détails qui vont suivre .

*Notation 1.<sup>re</sup>.* Nous représenterons ici la grandeur absolue d'une droite par une simple lettre , comme  $a$  ,  $b$  ,  $c$  , ....  $x$  ,  $y$  ,  $z$  , ... ; et , pour indiquer , à la fois , la grandeur et la position d'une droite , nous affecterons la lettre destinée à désigner sa valeur absolue d'un indice exprimant l'angle que fait cette droite avec une droite fixe et indéfinie , prise arbitrairement , et qui pourra être considérée comme l'axe des abscisses positives . Ainsi , par exemple ,  $a_\alpha$  ,  $b_\beta$  , ... ,  $x_\xi$  ,  $y_\nu$  , ... représenteront des droites dont les grandeurs absolues sont  $a$  ,  $b$  , ... ,  $x$  ,  $y$  , ... , et qui font , respectivement avec l'axe des  $x$  positives ,

*Tom. IV , n.<sup>o</sup> II , 1.<sup>er</sup> septembre 1813.*

des angles  $\alpha$ ,  $\beta$ , ...,  $\xi$ ,  $\nu$ , .... Cette distinction est nécessaire, afin de ne pas confondre une idée composée avec une idée simple, une grandeur donnée de position avec une grandeur absolue.

*Définition 1.<sup>re</sup>.* Nous appellerons *Rapport de grandeur* le rapport numérique entre les grandeurs de deux droites, et *Rapport de position* l'inclinaison des deux droites l'une vers l'autre, ou l'angle qu'elles font entre elles. Pour comparer entre elles deux droites données à la fois de grandeur et de position, il faut considérer non seulement le rapport que leurs grandeurs ont entre elles, mais encore comment ces droites sont placées l'une relativement à l'autre; c'est ce qu'exprime notre rapport de position.

*Définition 2.* Nous dirons que quatre droites sont *en proportion de grandeur et de position*, lorsqu'entre les deux dernières il y aura même *rapport de grandeur* et même *rapport de position* qu'entre les deux premières. Ainsi il ne suffit pas, pour qu'il y ait proportion de grandeur et de position entre quatre droites, que le rapport dit *géométrique*, entre le second antécédent et son conséquent, soit le même que celui qui existe entre le premier antécédent et son conséquent; il faut, en outre, que le rapport que nous avons appelé *rapport de position*, soit aussi le même.

*Exemple.* Ainsi, pour avoir la proportion de grandeur et de position  $a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$ , il faut qu'on ait, à la fois,  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  et  $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ .

*Corollaire 1.<sup>er</sup>.* Il suit de là que, dans une proportion de grandeur et de position, les grandeurs absolues des droites sont en *proportion géométrique*, tandis que les angles que font ces mêmes droites avec l'axe des abscisses positives sont en *proportion arithmétique*.

*Corollaire 2.* Il s'ensuit encore que, dans deux figures semblables, disposées d'une manière quelconque sur un même plan, les côtés homologues sont en proportion de grandeur et de position; car les grandeurs absolues de ces côtés sont en proportion géométrique, et les angles qu'ils forment deux à deux sont égaux.

*Remarque.* L'idée de proportionnalité , en géométrie , est fondée sur la similitude des figures ; notre définition 2.<sup>e</sup> repose donc sur un principe fondamental de la géométrie ordinaire , et nous ne faisons qu'exprimer , d'une manière explicite , la double circonstance de la proportionnalité des côtés homologues et de l'égalité des angles compris entre ces côtés.

*Définition 3.* Lorsque , dans une proportion de grandeur et de position , le conséquent du premier rapport devient en même temps l'antécédent du second , la *proportion de grandeur et de position* est dite *continue* ; et une suite de termes , dont trois consécutifs quelconques forment une proportion continue de grandeur et de position , est une *progression de grandeur et de position*. Ainsi , une suite de droites en progression géométrique ordinaire ne forme une progression de grandeur et de position que lorsque les angles que les droites consécutives font entre elles sont égaux.

*Exemple 1.<sup>er</sup>* Pour avoir la proportion continue de grandeur et de position  $a_\alpha : b_\beta :: b_\beta : c_\gamma$ , il faut qu'on ait , à la fois ,  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$  et  $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ .

*Corollaire 1.<sup>er</sup>* Donc , pour qu'une droite  $b_\beta$  soit moyenne proportionnelle de grandeur et de position entre  $a_\alpha$  et  $c_\gamma$ , il faut qu'on ait  $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ ; en sorte que  $b_\beta$  partage en deux parties égales l'angle formé par les droites  $a_\alpha$ ,  $c_\gamma$ .

*Exemple 2.* Pour avoir la progression de grandeur et de position  $\dots : a_\alpha : b_\beta : c_\gamma \dots : l_\lambda : m_\mu$ , il faut qu'on ait , à la fois ,  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \dots = \frac{m}{l}$  et  $\beta - \alpha = \gamma - \beta = \dots = \mu - \lambda$ .

*Corollaire 2.* Donc , dans une progression de grandeur et de position , les grandeurs absolues des droits sont en progression géométrique , tandis que les angles qu'elles font avec l'axe des abscisses positives croissent en progression arithmétique.

*Notation 2.* Nous pouvons maintenant séparer , dans la notation ,

ce qui est relatif à la grandeur absolue d'une droite de ce qui est relatif à sa position. D'abord on a, par la première notation  $a_0 = a$ ,  $i_0 = i$ ; et ensuite on a, par la définition 2.<sup>e</sup>,  $i : i_\alpha :: a : a_\alpha$ , d'où l'on tire  $a_\alpha = a \cdot i_\alpha$ . Ainsi, nous pourrons représenter, de grandeur et de position, la droite  $a_\alpha$  par  $a \cdot i_\alpha$ , où  $a$  est la grandeur absolue, et  $i_\alpha$  le signe de position.

*Définition 4.* Nous appellerons *Droites positives* celles qui, étant parallèles à l'axe des abscisses, sont dirigées de gauche à droite, et *Droites négatives* celles qui, étant parallèles à l'axe des abscisses, sont dirigées de droite à gauche. Nous appellerons, de même, *Angles positifs* ceux qui sont comptés depuis l'axe des abscisses positives, en montant, et *Angles négatifs* ceux qui sont comptés depuis le même axe, en descendant. C'est là la définition ordinaire des quantités positives et des quantités négatives en géométrie; mais, il s'en faut de beaucoup qu'on en ait tiré toutes les conséquences qu'elle est susceptible d'offrir. En combinant cette définition avec les précédentes, nous allons en déduire une manière simple, uniforme et féconde de représenter les lignes de grandeur et de position.

*Corollaire 1.<sup>er</sup>*. Il suit de cette définition et de nos notations qu'on a  $+i = i_0$ , et  $-i = i \pm \omega$ , et par conséquent  $+a = a \times (+i) = a \cdot i_0$ , et  $-a = a \times (-i) = a \cdot i \pm \omega$ .

*Corollaire 2.* On sait, d'un autre côté, que  $+i = e^{0\pi\sqrt{-1}}$ , et  $-i = e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$ ; on a donc aussi  $+a = a \times (+i) = a \cdot e^{0\pi\sqrt{-1}}$ , et  $-a = a \times (-i) = a \cdot e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$ .

*Remarque.* Il est vrai qu'on a plus généralement,  $+i = e^{\pm 2n\pi\sqrt{-1}}$ , et  $-i = e^{\pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}}$ ,  $n$  étant un nombre entier quelconque; mais, dans le géométrie de position, on n'a besoin que d'un seul tour de circonférence, pour déterminer la position d'une droite, ce qui suppose  $n=0$ , et réduit ainsi les expressions de  $+i$  et de  $-i$  à celles du corollaire précédent.

*Théorème 1.<sup>er</sup>*. Les quantités imaginaires, de la forme  $\pm a\sqrt{-1}$  représentent, en géométrie de position, des perpendiculaires à l'axe des abscisses ; et réciproquement les perpendiculaires à l'axe des abscisses sont des imaginaires de la même forme.

*Démonstration.* La quantité  $\pm a\sqrt{-1}$  est une moyenne proportionnelle, de grandeur et de position, entre  $+a$  et  $-a$ , c'est-à-dire, entre  $a_0$  et  $a_{\pm \frac{\pi}{2}}$ ; donc, d'après le corollaire 1.<sup>er</sup> de la définition 3.<sup>e</sup>, la valeur de cette moyenne proportionnelle, de grandeur et de position, est  $a_{\pm \frac{\pi}{2}}$ ; c'est-à-dire, qu'elle est perpendiculaire à l'axe des abscisses, et dirigée soit en dessus soit en dessous de cet axe ; et l'on a  $+a\sqrt{-1}=a_{+\frac{\pi}{2}}$ , et  $-a\sqrt{-1}=a_{-\frac{\pi}{2}}$ . Réciproquement, toute perpendiculaire à l'axe des abscisses est représentée, d'après nos notations, par  $a_{\pm \frac{\pi}{2}}$ : elle est, par conséquent, d'après le corollaire 1.<sup>er</sup> de la définition 3, une moyenne proportionnelle entre  $a_0$  et  $a_{\pm a}$ , ou entre  $+a$  et  $-a$ : elle est donc une quantité imaginaire de la forme  $\pm a\sqrt{-1}$ .

*Corollaire 1.<sup>er</sup>*. Il suit de là que  $\pm \sqrt{-1}$  est un signe de position qui est identique avec  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

*Corollaire 2.* De plus, puisqu'on a  $-i=i_{\pm \frac{\pi}{2}}=e^{\pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ , on a aussi  $\pm \sqrt{-1}=i_{\pm \frac{\pi}{2}}=e^{\pm \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ .

*Corollaire 3.* Les quantités dites *imaginaires* sont donc tout aussi réelles que les quantités positives et les quantités négatives, et n'en diffèrent que par leur position qui est perpendiculaire à celle de ces dernières.

*Remarque générale.* Cette théorie des signes de position est une conséquence nécessaire et irrécusable des premiers principes. Elle est plus conforme aux règles d'une saine logique que la théorie ordinaire où l'on admet, un peu gratuitement ou du moins sans nécessité, deux espèces différentes de quantités positives, et autant d'espèces de

quantités négatives (les abscisses et les ordonnées) ; car, dès qu'on admet la définition 4.<sup>e</sup> des quantités positives et des quantités négatives ; il n'est plus permis d'en introduire d'autres qui ne soient pas comprises dans cette définition ; et l'on est obligé forcément d'admettre toutes les conséquences que cette même définition entraîne. Ces conséquences heurtent, à la vérité, les idées reçues ; mais c'est que ces idées sont fondées sur un défaut de dialectique, qui consiste à admettre deux principes, et deux principes incompatibles, là où un seul serait suffisant.

*Théorème 2.* Le signe de position  $i_\alpha$  a pour valeur  $e^{\alpha\sqrt{-1}}$ ; c'est-à-dire, que  $i_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$ .

*Démonstration.* Supposons que la demi-circonférence décrite d'un rayon = 1 soit divisée, dans le sens des angles positifs, en  $m$  parties égales, et qu'on mène des rayons aux points de division ; ces rayons formeront, d'après la définition 3.<sup>e</sup>, une progression de grandeur et de position : or, les deux termes extrêmes de cette progression étant  $i_0 = +1$  et  $i_m = -1 = e^{m\pi\sqrt{-1}}$ , les termes intermédiaires  $\frac{i_1}{m}, \frac{i_2}{m}, \frac{i_3}{m}, \dots, \frac{i_{(m-1)}}{m}$  auront pour valeurs  $e^{\frac{\pi}{m}\sqrt{-1}}, e^{\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}, e^{\frac{3\pi}{m}\sqrt{-1}}, \dots, e^{\frac{(m-1)\pi}{m}\sqrt{-1}}$ ; de sorte qu'en général on aura  $i_{\frac{n\pi}{m}} = e^{\frac{n\pi}{m}\sqrt{-1}}$ ; et, comme  $\frac{n\pi}{m}$  peut représenter un angle quelconque, on aura finalement  $i_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$ .

*Corollaire 1.<sup>er</sup>* Si l'on prend les logarithmes naturels des deux membres de l'équation  $i_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$ , on aura  $\alpha\sqrt{-1} = \text{Log.}(i_\alpha)$  : ce qui fait voir qu'en géométrie de position les arcs de cercle sont les logarithmes des rayons correspondans. Ces arcs de cercle sont, comme on le voit, affectés du signe de position  $\sqrt{-1}$ , ce qui paraît très-naturel, puisque leur direction est dans un sens perpendiculaire à l'axe des abscisses.

*Observation.* Le corollaire précédent contient le germe d'une théorie très-simple et très-lumineuse des logarithmes naturels, et de leurs rapports avec la circonference du cercle. Il explique l'expression énigmatique » *les arcs de cercle imaginaires sont des logarithmes* « ; il donne enfin un sens raisonnable et intelligible à l'équation symbolique et mystérieuse  $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \text{Log.}(\sqrt{-1})$ .

*Corollaire 2.* Puisque, d'après la notation 2.<sup>e</sup>, on a  $a_\alpha = a \cdot r_\alpha$ ; il suit du théorème précédent qu'on a aussi  $a_\alpha = a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$ .

*Corollaire 3.* Comme on a  $e^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos.\alpha + \sin.\alpha\sqrt{-1}$ , il s'en-suit que  $a_\alpha = a \cos.\alpha + a \sin.\alpha\sqrt{-1}$  c'est-à-dire que, pour exprimer une droite de grandeur et de position, il faut prendre la somme de ses projections sur deux axes de coordonnées rectangulaires : bien entendu qu'on prendra chaque projection avec son signe de position.

*Corollaire 4.* Il suit de là qu'à une droite quelconque, donnée de grandeur et de position, on peut substituer tant d'autres droites qu'on voudra, pourvu que la somme de toutes les projections de ces dernières soit égale à la somme des projections de la droite donnée ; c'est-à-dire, qu'à une droite  $x_\xi$  on peut substituer les droites  $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, \dots, m_\mu$ , pourvu qu'on ait, entre ces quantités, la relation

$$x \cdot e^{\xi\sqrt{-1}} = a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}} + b \cdot e^{\beta\sqrt{-1}} + c \cdot e^{\gamma\sqrt{-1}} + \dots + m \cdot e^{\mu\sqrt{-1}}, \quad (\text{A})$$

ou, à cause de l'indépendance du signe  $\sqrt{-1}$ ,

$$x \cos.\xi = a \cos.\alpha + b \cos.\beta + c \cos.\gamma + \dots + m \cos.\mu; \quad (\text{B})$$

$$x \sin.\xi = a \sin.\alpha + b \sin.\beta + c \sin.\gamma + \dots + m \sin.\mu.$$

On voit que toutes ces droites  $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, \dots$  peuvent être prises arbitrairement, à l'exception d'une seule, dont la grandeur et la position doivent être déterminées par l'équation (A) ou par ses équivalentes (B).

Réciproquement, on peut substituer à tant de droites, données

de grandeur et de direction , qu'on voudra une droite unique , pourvu que les projections de cette dernière , sur deux axes rectangulaires , soient respectivement égales aux sommes de projections des premières sur les mêmes axes ; et alors sa grandeur et sa position se trouveront déterminées par les équations (B).

*Corollaire 5.* Si les droites  $x_\zeta, a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, \dots, m_\mu$  du corollaire précédent forment un polygone fermé , les équations (B) sont évidemment satisfaites. Donc , on peut substituer à une droite quelconque donnée une suite d'autres droites , formant un polygone fermé avec la droite donnée ; et réciproquement , à une suite de droites formant un polygone non fermé , on peut substituer la droite qui fermerait le polygone.

*Application à la mécanique.* Les trois derniers corollaires sont immédiatement applicables à la composition et à la décomposition des forces. En effet , une force , donnée d'intensité et de direction , peut toujours être représentée par une droite donnée de grandeur et de position , qui est le chemin parcouru , en vertu de cette force , dans l'unité de temps. En substituant donc , dans les trois derniers corollaires , les mots « *force donnée d'intensité et de direction* » à ceux-ci « *droite donnée de grandeur et de position* » , on aura immédiatement les théorèmes connus sur la composition et sur la décomposition des forces. Cette théorie , qui était toujours sujette à quelque difficulté , se trouve donc réduite à une question de géométrie de position.

*Remarque.* Il est bon d'observer qu'au moyen du signe de position  $\sqrt{-1}$  , les abscisses et les ordonnées se trouvent aussi indépendantes , en géométrie de position , que le sont , en mécanique , les forces perpendiculaires entre elles. Cette conformité seule établirait un argument non équivoque en faveur de notre théorie , si d'ailleurs elle ne se justifiait pas d'elle-même.

*Théorème 3.* Le signe de position  $i_\alpha$  a aussi pour valeur  $i^{\frac{\alpha}{2\pi}}$  ; c'est-à-dire , que  $i_\alpha = i^{\frac{\alpha}{2\pi}}$ .

*Démonstration.*

*Démonstration.* Si l'on divise la circonference décrite d'un rayon = 1 en  $m$  parties égales, et qu'on mène des rayons aux points de division, ces rayons formeront, d'après la définition 3.<sup>e</sup>, une progression de grandeur et de position, dont les deux termes extrêmes seront également l'unité. On aura donc  $1 \frac{2\pi}{m} = 1^{\frac{1}{m}}$ ,  $1 \frac{4\pi}{m} = 1^{\frac{2}{m}}, \dots$ ,  $1 \frac{2n\pi}{m} = 1^{\frac{n}{m}}$ . Supposant donc  $\frac{2n\pi}{m} = \alpha$ , on aura  $\frac{n}{m} = \frac{\alpha}{2\pi}$ , et par conséquent  $1_\alpha = 1^{\frac{\alpha}{2\pi}}$ .

*Corollaire 1.<sup>er</sup>* Il suit de ce théorème, 1.<sup>o</sup> que les rayons qui partagent en  $m$  parties égales la circonference dont le rayon est 1, représentent les  $m$  racines  $m$ .<sup>me</sup> de l'unité; 2.<sup>o</sup> que toutes ces racines sont égales entre elles et à l'unité, et qu'elles ne diffèrent les unes des autres que par leur position; 3.<sup>o</sup> qu'enfin elles sont toutes également réelles, puisqu'elles sont représentées par des lignes données de grandeur et de position.

*Corollaire 2.* En comparant ce théorème avec le précédent, on obtient immédiatement les valeurs connues des racines de l'unité, qu'on peut exprimer, en général, par  $1^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{2n\pi}{m}\sqrt{-1}} = \cos \frac{2n\pi}{m} + \sin \frac{2n\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$ .

*Remarque 1.<sup>re</sup>* En combinant entre eux les théorèmes 2.<sup>e</sup> et 3.<sup>e</sup>, ainsi que leurs corollaires, on peut faire les rapprochemens les plus curieux et les plus intéressans entre les arcs de cercles, les logarithmes naturels et les racines de l'unité, et rattacher ces trois branches de calcul à une seule et unique théorie.

*Remarque 2.<sup>e</sup>.* On voit, par cette théorie des signes de position, qu'à la rigueur on pourrait se passer, en géométrie, des signes +, - et  $\pm\sqrt{-1}$ , comme signes de position; et que nos signes  $1_0$ ,  $1_{\pm\pi}$ ,  $1_{\pm\frac{\pi}{2}}$  les remplacent, avec avantage, en conservant la liaison de ces signes avec le signe général de position  $1_\alpha$ . Il en résulterait encore cet autre avantage que les signes + et - ne serviraient plus désormais qu'à indiquer l'addition et la soustraction; de sorte

que ces signes n'auraient jamais qu'une même signification ; ce qui éviterait bien des embarras , et serait en même temps beaucoup plus conforme aux règles d'une saine logique.

*Théorème 4.* Toutes les racines d'une équation d'un degré quelconque sont *réelles* , et peuvent être représentées par des droites données de grandeur et de position.

*Démonstration.* Il est démontré que toute équation d'un degré quelconque est toujours décomposable en facteurs réels , soit du premier soit du second degré ; et conséquemment il suffit de faire voir que les racines d'une équation du second degré peuvent être représentées par des droites données de grandeur et de position. Or, les racines d'une équation du second degré étant de la forme  $x=p\pm\sqrt{q}$  , sont immédiatement constructibles , par les corollaires 3.<sup>e</sup> et 4.<sup>e</sup> du théorème 2.<sup>e</sup> ; car 1.<sup>o</sup> si  $q$  est positif ,  $x$  sera la somme ou la différence de deux quantités positives ou négatives , comptées sur l'axe des abscisses ; 2.<sup>o</sup> si  $q$  est négatif ,  $x$  sera une droite partant de l'origine et dont les coordonnées de l'autre extrémité seront  $p$  et  $\sqrt{-q}$ .

Telle est l'esquisse , très-abrégée , des nouveaux principes sur lesquels il me paraît convenable et même nécessaire de fonder la *géométrie de position* , et que je soumets au jugement des géomètres. Ces principes étant en opposition formelle avec les idées admises jusqu'ici , sur la nature des quantités dites *imaginaires* , je dois m'attendre à des objections nombreuses ; mais j'ose croire qu'un examen approfondi de ces mêmes principes , les fera trouver exacts , et que les conséquences que j'en ai déduites , quelque étranges qu'elles puissent paraître d'ailleurs , au premier abord , seront néanmoins jugées conformes aux règles de la dialectique la plus rigoureuse.

Je dois , au surplus , à la justice de déclarer que le fond de ces idées nouvelles ne m'appartient pas. Je l'ai trouvé dans une lettre de M. Legendre à feu mon frère , dans laquelle ce grand géomètre lui fait part ( comme d'une chose qui lui a été communiquée , et

comme objet de pure curiosité ), du fond de mes définitions 2.<sup>e</sup> et 3.<sup>e</sup>, de mon théorème 1.<sup>er</sup>, et du corollaire 3.<sup>e</sup> de mon théorème 2.<sup>e</sup>; mais ce dernier n'était avancé que gratuitement , et n'était justifié que par l'exactitude de quelques applications. Ce qui m'appartient en propre se réduit donc à la manière d'exposer et de démontrer ces principes , à la notation , et à l'idée de mon signe de position  $i \pm \alpha$ .

Je désire que la publicité que je donne aux résultats auxquels je suis parvenu , puisse déterminer le premier auteur de ces idées à se faire connaître , et à mettre au jour le travail qu'il a fait lui-même sur ce sujet. (\*)

Metz , le 6 de juillet 1813.

(\*) Il y a environ deux ans qu'écrivant à M. de Maizière , au sujet de son mémoire inséré à la page 368 du 1.<sup>er</sup> volume de ce recueil, je lui mandais qu'on avait peut-être tort de vouloir comprendre toutes les grandeurs numériques dans une simple série ; et que , par leur nature , elles semblaient devoir former une table à double entrée qui , bornée aux seuls nombres entiers , pourrait être figurée comme il suit :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \dots & \dots \\ \dots, -2+2\sqrt{-1}, -1+2\sqrt{-1}, +2\sqrt{-1}, +1+2\sqrt{-1}, +2+2\sqrt{-1}, \dots \\ \dots, -2+\sqrt{-1}, -1+\sqrt{-1}, +\sqrt{-1}, +1+\sqrt{-1}, +2+\sqrt{-1}, \dots \\ \dots, -2, \quad -1, \quad \pm 0, \quad +1, \quad +2, \quad \dots \\ \dots, -2-\sqrt{-1}, -1-\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, +1-\sqrt{-1}, +2-\sqrt{-1}, \dots \\ \dots, -2-2\sqrt{-1}, -1-2\sqrt{-1}, -2\sqrt{-1}, +1-2\sqrt{-1}, +2-2\sqrt{-1}, \dots \\ \dots & \dots \end{array}$$

en sorte que déjà , comme M. Français , je supposais les nombres de la forme  $n\sqrt{-1}$  situés dans une ligne perpendiculaire à celle qui renferme les nombres de la forme  $n$  ; et que , comme lui encore , je représentais les nombres étran-

## ANALISE TRANSCENDANTE.

*Intégration , sous forme finie , de quelques fonctions différentielles circulaires ;*

Par M. DU BOURGUET , professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial ,



ON rencontre souvent , en mécanique , des fonctions différentielles de la forme

gers à ces deux lignes par la somme de leurs projections sur l'une et sur l'autre.

Le même M. de Maizière , au sujet de quelques difficultés que j'avais opposées au mémoire que je viens de citer , me man lait , dès le mois d'avril 1811 : *ce que j'avance ici sur les imaginaires est une idée hardie que je suis bien aise de jeter en avant , et dont , j'en suis sûr , vous aurez déjà reconnu l'exactitude* ; et , un peu plus loin : *ce paradoxe cessera d'en être un , lorsque j'aurai prouvé que les imaginaires du second degré , et par conséquent de tous les degrés , sont tout aussi peu imaginaires que les quantités négatives , ou les imaginaires du premier degré ; et que nous sommes exactement , à l'égard des uns , dans la situation où étaient nos algébristes du XVII<sup>e</sup> siècle à l'égard des autres.*

En rappelant ces circonstances , il est certes loin de ma pensée de chercher à dépouiller M. Français , non plus que le géomètre dont il a si bien su mettre les indications à profit , de la priorité de leurs idées ; mais je veux montrer que ces idées ne sont point tellement étranges que le fond n'en ait pu germer dans plusieurs têtes à la fois. Il faudra sans doute faire beaucoup encore pour parer à toutes les objections , pour éclaircir toutes les difficultés , pour dissiper tous les nuages , pour étendre et perfectionner la nouvelle théorie et en rendre bien évidens l'esprit , le but et les avantages ; mais , on ne peut espérer ces résultats que da

# DES FONCTIONS CIRCULAIRES. -3

$$z^n dz \cos^m z, \quad z^n dz \sin^m z.$$

Aucun auteur, du moins que je sache, n'ayant donné les intégrales, sous forme finie, de ces deux formules, j'ai pensé que l'on ne serait pas fâché de les rencontrer ici.

L'intégration de ces deux formules pouvant toujours, comme nous le verrons tout à l'heure, être ramenée à celle des formules

$$(az)^n d.\sin.(az), \quad (az)^n d.\cos.(az);$$

lesquelles reviennent à

$$x^n d.\sin.x, \quad x^n d.\cos.x,$$

c'est par celles-ci que nous commencerons. A la vérité, nous pourrions en déduire les intégrales de notre équation générale (432) [ *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, tome II, page 236, art. 425 ], en y faisant  $X=x^n$ ,  $a=0$  et  $b=1$ ; mais nous croyons devoir, dans ce mémoire, les intégrer immédiatement.

## *Intégration de $x^n d.\sin.x$ .*

On a

$$d(x^n \sin.x) = x^n d.\sin.x - nx^{n-1} d.\cos.x,$$

donc

temps et des efforts réunis de tous ceux qui voudront bien ne pas rejeter cette théorie avec dédain, sans l'avoir sérieusement examinée.

Ce qui me paraît résulter, bien clairement, du mémoire qu'on vient de lire; ce qui peut en être regardé comme le résumé, est la proposition suivante : *Lorsque cherchant, sur une droite indéfinie, une longueur déterminée, mais inconnue, qu'on croit être d'un certain côté d'un point fixe pris sur cette droite, il arrive que cette longueur est réellement du côté opposé de ce point fixe, on trouve, pour la longueur cherchée, une expression négative; et si cette longueur n'est pas même située sur la droite donnée, son expression se présente alors sous une forme imaginaire.*

*J. D. G.*

$$\int x^n d.\sin.x = x^n \sin.x + n \int x^{n-1} d.\cos.x ; \quad (a)$$

or ,

$$d(x^{n-1} \cos.x) = x^{n-1} d.\cos.x + (n-1)x^{n-2} d.\sin.x ;$$

donc

$$\int x^{n-1} d.\cos.x = x^{n-1} \cos.x - (n-1) \int x^{n-2} d.\sin.x. \quad (b)$$

De ces équations (a) et (b), on conclura aisément les valeurs de  $\int x^{n-2} d.\sin.x$ ,  $\int x^{n-3} d.\cos.x$ ,  $\int x^{n-4} d.\sin.x$ , ... et, par des substitutions successives, à partir de l'équation (a), on parviendra au résultat que voici :

$$(1) \quad \int x^n d.\sin.x = \{x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \dots\} \sin.x + \\ \{nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \dots\} \cos.x ;$$

dont les séries, régies par une loi très-simple à apercevoir, sont finies, lorsque  $n$  est un nombre positif et entier. Il est d'ailleurs aisé de voir que le coefficient de  $\cos.x$  est égal à la différentielle de celui de  $\sin.x$ , divisée par  $dx$ .

### *Intégration de $x^n d.\cos.x$ .*

Suivant la méthode des intégrations réciproques (Art. 217 de l'ouv. cité), on a

$$\int x^n d.\cos.x = x^n \cos.x - n \int x^{n-1} d.\sin.x , \quad (c)$$

$$\int x^{n-1} d.\sin.x = x^{n-1} \sin.x + (n-1) \int x^{n-2} d.\cos.x. \quad (d)$$

Mettant successivement  $n-2$ ,  $n-4$ , ... dans les équations (c) et (d); on forme une suite d'équations qui ont chacune leur dernier terme affecté d'un facteur intégral qui est le premier membre de l'équation qui suit immédiatement; donc, par une suite de substitutions successives, à partir de l'équation (c), on parvient aisément à celle

$$(2) \int x^n dx \cdot \cos x = \{x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \dots\} \cos x - \\ \{nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \dots\} \sin x;$$

dont les séries sont les mêmes que dans l'équation (1).

*Intégration de  $z^n dz \cos^m z$ .*

Des équations, connues en trigonométrie, qui donnent respectivement les valeurs des puissances paires et impaires du cosinus d'un arc, en fonction des premières puissances des cosinus de ces arcs, et que j'ai rappelées, sous les lettres (a) et (b), à la page 411 du premier volume de mon *Traité de calculs différentiel et intégral*, on tire pour le cas de  $m$  NOMBRE POSITIF ET PAIR,

$$\int z^n dz \cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \int z^n dz \cos mz + \frac{m}{1} \int z^n dz \cos(m-2)z + \right. \\ \left. \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \int z^n dz \cos(m-4)z + \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}m+2}{\frac{1}{2}m-1} \int z^n dz \cos 2z \right\} + \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m(n+1)} z^{n+1};$$

et, pour le cas de  $m$  NOMBRE POSITIF ET IMPAIR,

$$\int z^n dz \cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \int z^n dz \cos mz + \frac{m}{1} \int z^n dz \cos(m-2)z + \right. \\ \left. \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \int z^n dz \cos(m-4)z + \dots + \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+5)}{\frac{1}{2}(m+3)} \int z^n dz \cos 3z + \right. \\ \left. \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+3)}{\frac{1}{2}(m-1)} \int z^n dz \cos z \right\}.$$

Multippliant et divisant, dans ces deux équations, chaque terme du second membre par la  $(n+1)^{\text{me}}$  puissance du coefficient de  $z$  sous le cosinus, en observant qu'en général

$$k dz \cos kz = d \sin kz,$$

il viendra, pour le cas de  $m$  NOMBRE POSITIF ET PAIR ,

$$(3) \quad \int z^n dz \cos mz = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{1}{m^{n+1}} \int (mz)^n d \sin(mz) + \frac{m}{(m-2)^{n+1}} \int [(m-2)z]^n d \sin[(m-2)z] \right. \\ \left. + \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \cdot \frac{1}{2} \int (2z)^n d \sin(2z) \right\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{n+1} z^{n+1}.$$

et pour le cas de  $m$  NOMBRE POSITIF ET IMPAIR ,

$$(4) \quad \int z^n dz \cos mz = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{1}{m^{n+1}} \int (mz)^n d \sin(mz) + \frac{m}{(m-2)^{n+1}} \int [(m-2)z]^n d \sin[(m-2)z] \right. \\ \left. + \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \cdot \frac{1}{2} \int (3z)^n d \sin(3z) + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \cdot \frac{1}{2} \int z^n d \sin z \right\}.$$

Or, les valeurs de tous les termes intégraux des seconds membres de ces équations (3) et (4) sont données , sous forme finie , par l'équation (1), en y faisant successivement  $x=mz$  ,  $(m-2)z$  , ... ; donc on aura aussi , sous forme finie , les intégrales demandées.

### *Intégration de $z^n dz \sin^m z$ .*

Des équations , connues en trigonométrie , qui donnent respectivement les valeurs des puissances paires et impaires du sinus d'un arc simple , en fonction des premières puissances des lignes trigonométriques , soit sinus soit cosinus , des multiples de l'arc simple ; et que j'ai rappelées sous les lettres (a) et (b) , à la page 407 du premier volume de mon *Traité de calculs différentiel et intégral* , on tire , pour le cas de  $m$  NOMBRE POSITIF ET PAIR ,

$$(e) \quad \int z^n dz \sin^m z = \pm \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \int z^n dz \cos mz - \frac{m}{1} \int z^n dz \cos(m-2)z + \right. \\ \left. m \right.$$

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \int z^n dz \cos.(m-4)z - \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}m+2}{\frac{1}{2}m-1} \int z^n dz \cos.2z \} + \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{n+1} z^{n+1} ;$$

et, pour le cas de  $m$  NOMBRE POSITIF ET IMPAIR,

$$(f) \quad \int z^n dz \sin.mz = \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \int z^n dz \sin.mz - \frac{m}{1} \int z^n dz \sin.(m-2)z + \right. \\ \left. \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \int z^n dz \sin.(m-4)z - \dots + \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+5)}{\frac{1}{2}(m-3)} \int z^n dz \sin.3z + \right. \\ \left. \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}(m+3)}{\frac{1}{2}(m-1)} \int z^n dz \sin.z \right\} .$$

Multippliant et divisant chacun des termes des seconds membres de ces deux équations affectés du signe d'intégration, par la  $(n+1)^{\text{me}}$  puissance du coefficient de  $z$  sous le signe de cosinus, équation (e), et sous celui de sinus, équation (f), en remarquant qu'en général  $k dz \cos.kz = d \sin.kz$ ,  $k dz \sin.kz = -d \cos.kz$ , on trouvera, pour le cas de  $m$  NOMBRE POSITIF ET PAIR,

$$(5) \quad \int z^n dz \sin.mz = \pm \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{1}{m^{n+1}} \int (mz)^n d.S \sin.(mz) - \frac{m}{(m-2)^{n+1}} \int [(m-2)z]^n d.S \sin.[(m-2)z] \right. \\ \left. + \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{(m-4)^{n+1}} \int [(m-4)z]^n d.S \sin.[(m-4)z] - \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \dots \frac{\frac{1}{2}m+2}{\frac{1}{2}m-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \int (2z)^n d.S \sin.(2z) \right\} \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{m}{m-1} \cdot \frac{n+1}{1} z^{n+1} ;$$

les signes supérieurs devant être pris lorsque  $m$  est un nombre doublément pair et les inférieurs dans le cas contraire.

*Tom. IV.*

## HEXAGONES

Et, pour le cas de  $m$  NOMBRE POSITIF ET IMPAIR,

$$(6) \quad \int z^n dz \sin^m z = \mp \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \frac{1}{m^{n+1}} \int (mz)^n d. \cos.(mz) - \frac{m}{(m-2)^{n+1}} \int [(m-2)z]^n d. \cos.[(m-2)z] + \right.$$

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{1}{(m-4)^{n+1}} \int [(m-4)z]^n d. \cos.[(m-4)z] - \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdots \frac{\frac{1}{2}(m+5)}{\frac{1}{2}(m-3)} \cdot \frac{1}{3^{m+1}} \int (3z)^n d. \cos.(3z)$$

$$\left. + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdots \frac{\frac{1}{2}(m+3)}{\frac{1}{2}(m-1)} \int z^n d. \cos.z \right\};$$

les signes supérieurs devant être pris lorsque  $m-1$  est un nombre doublement pair, et les signes inférieurs dans le cas contraire.

Or, les valeurs des termes du second membre de l'équation (5) affectés du signe d'intégration, sont données, sous forme finie, par l'équation (1); et celles des termes du second membre de l'équation (6) sont également données, sous forme finie, par l'équation (2); donc, quelles que soient les valeurs entières et positives de  $m$  et  $n$ , on a exactement, et sous forme finie, l'intégrale demandée de  $z^n dz \sin^m z$ .

## GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

*Application de la doctrine des projections à la démonstration des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques;*

Par M. G E R G O N N E.



ON connaît déjà diverses démonstrations des théorèmes relatifs aux hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques (\*). En

(\*) Voyez, entr'autres, la note de la page 335 du premier volume de ce recueil.

voici d'autres que je crois nouvelles et qui me paraissent assez simples pour permettre d'introduire dans les élémens deux théorèmes si féconds en belles applications.

### I. Hexagone inscrit.

1. Par les élémens de géométrie, il est facile de démontrer que, *si deux côtés consécutifs d'un hexagone inscrit au cercle sont respectivement parallèles à leurs opposés, les deux autres côtés opposés de cet hexagone seront aussi parallèles l'un à l'autre.* (\*)

2. Il résulte de là que, *si deux côtés consécutifs d'un hexagone inscrit à l'ellipse sont respectivement parallèles à leurs opposés, les deux autres côtés opposés de cet hexagone seront aussi parallèles l'un à l'autre.* Que l'on conçoive en effet, qu'après avoir rendu le petit axe de l'ellipse parallèle à un plan fixe on fasse tourner son plan autour de cet axe, jusqu'à ce que la projection orthogonale du grand axe sur le plan fixe soit égale à ce même petit axe.

---

(\*) Soient  $A, B, C, D, E, F$  les sommets consécutifs de l'hexagone, et supposons que  $AB, BC$  soient respectivement parallèles à  $DE, EF$ ; on aura

$$\text{Arc.}BC + \text{Arc.}CD = \text{Arc.}EF + \text{Arc.}FA ,$$

$$\text{Arc.}FA + \text{Arc.}AB = \text{Arc.}CD + \text{Arc.}DE ;$$

d'où, en ajoutant et réduisant

$$\text{Arc.}AB + \text{Arc.}BC = \text{Arc.}DE + \text{Arc.}EF ,$$

ou, plus simplement

$$\text{Arc.}ABC = \text{Arc.}DEF ,$$

ce qui établit le parallélisme des côtés opposés  $CD, FA$ , du moins lorsque, comme nous le supposons ici, ces côtés ne se coupent pas dans le cercle.

La projection de toute la figure sur ce plan sera alors un cercle auquel sera inscrit un hexagone dont deux côtés consécutifs seront respectivement parallèles à leurs opposés, puisque les projections de parallèles sur un même plan sont elles-mêmes parallèles. Donc (1) les deux autres côtés opposés de l'hexagone inscrit au cercle sont aussi parallèles. Il en doit donc être de même de leurs correspondants dans l'ellipse, puisque les projections sur un plan de deux droites situées sur un autre plan ne sauraient être parallèles, si celles-ci ne le sont elles-mêmes.

3. Il suit de là que, *dans tout hexagone inscrit au cercle, les points de concours des prolongemens des côtés opposés sont tous trois situés sur une même ligne droite.* Que l'on fasse, en effet, une perspective de la figure, de telle manière que cette perspective soit une ellipse à laquelle soit inscrit un hexagone dont deux côtés consécutifs soient respectivement parallèles à leurs opposés (\*); les deux autres côtés opposés de cet hexagone seront également (2) parallèles l'un à l'autre. Donc les droites menées de l'œil aux points de concours des prolongemens des côtés opposés de l'hexagone inscrit au cercle sont toutes trois parallèles au tableau, et conséquemment dans un plan passant par l'œil; les points de concours sont donc dans ce plan; et, puisqu'ils sont aussi dans le plan du cercle, ils sont sur une même droite intersection de ces deux plans.

4. Comme toute section conique est la perspective d'un certain cercle, et comme, d'un autre côté, la perspective d'une droite est, elle-même une ligne droite; on peut conclure de ce qui précède que, généralement, *les points de concours des directions des côtés opposés de tout hexagone inscrit à une section conique, sont tous trois situés sur une même ligne droite.*

(\*) Il suffit pour cela de mener des droites de l'œil à deux quelconques des points de concours des prolongemens des côtés opposés de l'hexagone inscrit au cercle, et de disposer le plan du tableau parallèlement à celui de ces deux droites.

## II. Hexagone circonscrit.

1. Par les élémens de géométrie , on démontre facilement que, *si deux des diagonales joignant des sommets opposés d'un hexagone circonscrit au cercle se coupent à son centre , la diagonale joignant les deux autres sommets opposés passera aussi par le centre du cercle.* (\*)

2. Il résulte de là que, *si deux diagonales joignant des sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une ellipse se coupent à son centre , la diagonale joignant les deux autres sommets opposés passera aussi par le centre de l'ellipse.* Que l'on projette , en effet , la figure sur un plan tel que la projection de l'ellipse soit un cercle ; la projection

(\*) Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  les sommets consécutifs de l'hexagone et  $O$  le centre du cercle ; supposons que les diagonales  $AD$ ,  $BE$  se coupent en ce point , et soient menées les droites  $OC$ ,  $OF$  ; les deux triangles  $AOB$ ,  $DOE$  ayant un angle égal en  $O$  , on aura

$$\text{Ang.}OAB + \text{Ang.}ABO = \text{Ang.}ODE + \text{Ang.}DEO,$$

ou en doublant

$$\text{Ang.}FAB + \text{Ang.}ABC = \text{Ang.}CDE + \text{Ang.}DEF.$$

On a d'ailleurs

$$\text{Ang.}AFO = \text{Ang.}EFO, \quad \text{Ang.}BCO = \text{Ang.}DCO;$$

en ajoutant ces trois dernières équations membre à membre , on verra que la somme de quatre angles du pentagone  $OFABCO$  est égale à la somme de quatre angles du pentagone  $OCDEFO$  ; on en conclura donc que leurs angles en  $O$  sont aussi égaux ; puis donc que leur somme est quatre angles droits , chacun d'eux doit en valoir deux , ou , en d'autres termes , les droites  $OC$ ,  $OF$  n'en forment réellement qu'une seule , laquelle est la troisième diagonale  $CF$  qui passe conséquemment par le centre  $O$ .

de son centre sera le centre du cercle ; deux des diagonales joignant des sommets opposés de l'hexagone circonscrit au cercle passeront donc par son centre ; la troisième y passera donc aussi (1), et conséquemment la correspondante dans l'ellipse passera également par le centre de cette courbe.

3. Il suit de là que, *dans tout hexagone circonscrit au cercle, les diagonales joignant les sommets opposés se coupent toutes trois en un même point.* Que l'on fasse, en effet, une perspective de la figure, de telle manière que la perspective du cercle soit une ellipse ayant pour centre la perspective de l'intersection de deux quelconques des trois diagonales de l'hexagone circonscrit à ce cercle. (\*) Deux des diagonales joignant les sommets opposés de l'hexagone circonscrit à l'ellipse se couperont à son centre ; ces trois diagonales se couperont donc au même point (2) ; il en sera donc de même pour leurs correspondantes dans le cercle.

4. Comme toute section conique est la perspective d'un certain cercle, et comme, d'un autre côté, les perspectives de droites qui se coupent au même point sont des droites qui se coupent au même point, on peut conclure de ce qui précède que, généralement, *les diagonales qui joignent les sommets opposés de tout hexagone circonscrit à une section conique se coupent au même point.*

### III. *Généralisation de cette théorie.*

Dans les raisonnemens que j'ai faits ci-dessus, j'ai supposé tacitement, 1.<sup>o</sup> que l'hexagone inscrit au cercle était tel que la droite

(\*) Soient menées de l'œil trois droites, l'une à l'intersection des deux diagonales dont il s'agit et les deux autres aux deux extrémités du diamètre qui contient cette intersection. Par un point pris arbitrairement sur la première de ces trois droites, soit menée, dans leur plan, une droite, se terminant aux deux autres, dont ce point soit le milieu ; le plan du tableau devra passer par cette dernière droite et être perpendiculaire au plan des trois premières.

joignant deux des points de concours des directions des côtés opposés était extérieure à ce cercle; 2.<sup>o</sup> que l'hexagone circonscrit était tel que deux au moins de diagonales joignant des sommets opposés se coupaient dans l'intérieur du cercle.

Mais, lorsque les côtés de l'hexagone, soit inscrit soit circonscrit, se coupent les uns les autres, entre leurs extrémités, il est des cas nombreux où ces conditions ne peuvent plus être satisfaites, de sorte qu'il semblerait manquer quelque chose aux précédentes démonstrations; mais on peut les compléter à l'aide des considérations suivantes.

On sait que l'équation générale des lignes du second ordre renferme cinq coefficients nécessaires et indépendants, dont on peut disposer pour faire passer la courbe par cinq points ou la rendre tangente à cinq droites données.

Si l'on veut au contraire assujettir la courbe à passer par six points ou à toucher six droites données, on obtiendra entre les données qui déterminent ces six points ou ces six droites une certaine équation de relation, laquelle demeurera invariablement la même, quelle que soit la situation respective de ces points ou de ces droites, puisqu'on peut parvenir à cette équation de relation, sans savoir aucunement de quelle manière les points ou les droites sont situés.

Mais, si l'on supposait leur situation telle que les exceptions que je viens de mentionner n'eussent pas lieu, l'équation de relation ne pourrait être que l'expression analytique de l'un ou de l'autre de nos deux théorèmes; puisque, dans le cas contraire, on se trouverait avoir deux équations de relation au lieu d'une.

Puis donc que cette équation de relation est invariable dans sa forme, nos deux théorèmes doivent être vrais dans tous les cas.

Le tour de raisonnement par lequel ces deux théorèmes viennent d'être démontrés peut s'appliquer à la démonstration du suivant qui renferme la propriété des pôles des sections coniques;

*Deux hexagones étant l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même section conique, de manière que les sommets de l'inscrit*

*coïncident avec les points de tangence du circonscrit, si les diagonales joignant les sommets opposés de l'inscrit se coupent en un même point, les points de concours des directions des côtés opposés du circonscrit seront tous trois sur une même ligne droite, et réciproquement.*

On ne doit pas perdre de vue, dans tout ceci, que le système de deux droites tracées sur un même plan forme une véritable ligne du second ordre, et doit conséquemment en avoir toutes les propriétés.

Concevons que le centre d'une surface conique quelconque, du second ordre, coïncide avec celui d'une sphère ; le système total des courbes à double courbure résultant de l'intersection des deux surfaces jouira, par rapport aux arcs de grands cercles, des mêmes propriétés dont jouissent les lignes du second ordre par rapport aux lignes droites.

En général, tout problème qui se résout, sur un plan, en n'employant que la règle seulement, peut être résolu sur la sphère, à l'aide d'une ouverture de compas constante et égale à l'arête de l'octaèdre régulier inscrit.

## CHRONOLOGIE.

*Calendrier perpétuel ;*

Par M. SERVOIS, professeur aux écoles d'artillerie. (\*)



**L**E calendrier dont je vais expliquer les usages peut servir à résoudre cette question générale, qui en renferme quatre particuliers : *De*

(\*) Ce n'est qu'à la prière du rédacteur des *Annales* que M. Servois, qui lui avait communiqué cet ingénieux calendrier, sans y attacher la moindre importance, a bien voulu permettre qu'il parut dans ce recueil, où l'on a pensé qu'il ne serait point du tout déplacé.

J. D. G.

ces

*ces quatre choses , une année de l'ère vulgaire , le nom d'un mois de cette année , un quantième de ce mois et le nom du jour de la semaine qui répond à ce quantième , trois quelconques étant données , déterminer la quatrième ?*

Des exemples , toujours beaucoup plus clairs que des explications , vont faire connaître le parti que l'on peut tirer de ce petit calendrier (*Voyez la Planche*).

**PROBLÈME I.** *Déterminer à quel jour de la semaine répond un certain quantième d'un mois désigné , dans une année donnée?*

**Exemple.** *On veut savoir à quel jour de la semaine répondra le 28 de janvier 1821 ?*

Cherchez dans la table la colonne qui renferme le nombre 21 qui termine l'année ; vous trouverez que c'est la première à gauche. Cherchez dans la même colonne le mot *janvier* , que vous trouverez , en tête , suivi d'*octobre*. Marchez alors horizontalement sur la première ligne , jusqu'à ce que vous vous trouviez verticalement au-dessus du dernier des médaillons inférieurs , lequel renferme seul la date donnée 28. Le mot *dimanche* , que vous trouverez dans le cercle auquel vous vous serez arrêté , vous apprendra que le 28 de janvier 1821 sera un dimanche.

**Remarque.** Si l'année est bissextile , c'est-à-dire , si le nombre formé par ses deux dernières chiffres à droite est un multiple de 4 , il faudra , durant les deux premiers mois , *janvier* et *février* , faire usage de la colonne qui précèdera immédiatement à gauche la colonne qui en contiendra l'indication ; et de la dernière si cette colonne est la première. Cette remarque est générale.

Ainsi , par exemple , s'il s'agissait du jour de la semaine qui doit répondre au 28 de janvier 1824 ; comme 24 , qui appartient à la 5.<sup>e</sup> colonne , est un multiple de 4 , et comme janvier est un des deux premiers mois , il faudra se servir de la 4.<sup>e</sup> colonne ; on y trouvera *janvier* suivi d'*octobre* dans le quatrième cercle en descendant. Suivant donc horizontalement à droite jusqu'à la dernière

colonne , au-dessous de laquelle se trouve le quantième 28 , le mot *mercredi* , que l'on trouvera dans le cercle auquel on se sera arrêté , annoncera que le 28 de janvier 1824 doit être un mercredi.

**PROBLÈME II.** *Déterminer quels jours d'un mois désigné , dans une année donnée , correspondent à un certain jour de la semaine ?*

*Exemple.* On veut savoir quels sont les jours de février qui seront des dimanches , dans l'année 1836 ?

Comme 36 qui est dans la 6.<sup>e</sup> colonne est un multiple de 4 , et comme *février* est un des deux premiers mois , je me sers de la 5.<sup>e</sup>. J'y cherche le mot *février* qui est en tête , suivi de *mars* et *novembre* , et je file horizontalement jusqu'au mot *dimanche* , qui appartient à la dernière colonne ; ou bien je cherche le mot *dimanche* dans la 5.<sup>e</sup> colonne , et je file encore horizontalement , jusqu'à ce que je rencontre le mot *février* ; je tombe de nouveau sur la dernière colonne , et je lis au bas que les dimanches de février 1836 seront les 7 , 14 , 21 et 28.

**PROBLÈME III.** *Déterminer quels sont les mois d'une année désignée , dans lesquels un certain jour de la semaine répondra à une date donnée ?*

*Exemple.* On veut savoir quels sont les mois de l'année 1825 qui commenceront par un lundi ?

25 se trouve appartenir à la 6.<sup>e</sup> colonne dans laquelle je cherche le mot *lundi* , je file horizontalement à gauche , en partant de ce mot , jusqu'à la première colonne , au-dessous de laquelle se trouve le quantième 1 , et je lis dans le cercle qu'il n'y a que le seul mois d'août de l'année 1825 qui doive commencer par un lundi.

S'il s'agit de l'année 1828 , qui est bissextile , on cherchera d'abord le mot *lundi* dans la 2.<sup>e</sup> colonne , qui précède immédiatement celle qui renferme le nombre 28 ; filant alors horizontalement à gauche jusqu'à la première colonne , au-dessous de laquelle se trouve le quantième 1 , on trouvera d'abord les mois d'avril et de juillet , qu'on rejettéra , attendu qu'ils tombent au-delà des deux premiers , et qu'on a employé la colonne qui précède l'année ; prenant ensuite

le mot *lundi* dans la troisième colonne , et filant horizontalement jusqu'à la première , on rencontrera les mois *septembre* et *décembre* , qu'on admettra tous deux , puisqu'ils tombent au-delà des deux premiers , et qui sont conséquemment les seuls de l'année 1828 qui commenceront par un lundi.

*PROBLÈME IV.* Déterminer quelles sont les années dans lesquelles un certain jour de la semaine coïncidera avec une date donnée d'un mois désigné ?

*Exemple.* On veut savoir quelles sont les années où le 1.<sup>er</sup> d'avril sera un dimanche.

Le nombre 1 se trouvant au bas de la première colonne et *avril* se trouvant dans le cercle le plus inférieur de cette colonne , lequel renferme aussi le mot *dimanche* ; on en conclura que les années où le 1.<sup>er</sup> d'avril doit être un dimanche sont 1804 , 1810 , 1821 , 1827 , 1832 , 1838 , 1849 , 1855 , 1860 , 1866 , 1877 , 1883 , 1888 , 1894 , etc.

S'il s'agissait de l'un des deux premiers mois de l'année ; si , par exemple , on voulait savoir quelles sont les années dans lesquelles le 7 de février sera un samedi ; le nombre 7 se trouvant dans la dernière colonne , où le mot *février* est dans le 3.<sup>e</sup> cercle ; en filant à gauche horizontalement , jusqu'à celui qui renferme le mot *samedi* , on trouverait qu'il est dans la quatrième colonne. Mais il faudrait rejeter toutes les bissextiles de cette colonne et substituer aux astériques qu'on y rencontrerait les bissextiles de la colonne suivante ; ce qui donnerait 1801 , 1807 , 1818 , 1824 , 1829 , 1835 , 1846 , 1852 , 1857 , 1863 , 1874 , 1880 , 1885 , 1891 , etc.

*Remarque.* Ce calendrier n'est vraiment dressé que pour le siècle actuel , mais on le rendra vraiment perpétuel , par une simple transposition des nombres qui expriment les années , d'une colonne à l'autre , de manière que le nombre 00 se trouve dans la 7.<sup>e</sup> , dans la 5.<sup>e</sup> , dans la 3<sup>e</sup> ou dans la 1.<sup>re</sup> colonne , suivant que la division par quatre du nombre à gauche des deux derniers chiffres donnera pour reste 0 , 1 , 2 ou 3 , en sorte qu'avec quatre tableaux seulement ,

on aura un calendrier qui pourra servir pour tous les siècles passés et futurs ; du moins tant que l'erreur, aujourd'hui insensible, ne sera pas devenue, par l'accumulation des siècles, assez considérable pour commander une nouvelle réforme. (\*)

M. Gauss a donné, dans le 2.<sup>e</sup> volume de 1802 de l'excellent journal *Astronomico-Géographique* de M. le Baron de Zach, une méthode pour calculer, pour chaque année, l'époque de la fête de Pâques. J'en ai déduit la table suivante qu'il serait facile de prolonger, et qui, pour chaque année du XIX.<sup>e</sup> siècle, donne l'époque de la pleine lune de mars.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
180	9	29	17	6	26	13	2	22	10	30
181	18	7	27	15	4	24	12	1	21	9
182	29	17	6	26	13	2	22	10	30	18
183	7	27	15	4	24	12	1	21	9	29
184	17	6	26	13	2	22	10	30	18	7
185	27	15	4	24	12	1	21	9	29	17
186	6	26	13	2	22	10	30	18	7	27
187	15	4	24	12	1	21	9	29	17	6
188	26	13	2	22	10	30	18	7	27	15
189	4	24	12	1	21	9	29	17	6	26

(\*) Je ne sais s'il a déjà été remarqué que l'intercalation persane, je veux dire celle de 8 jours sur 33 ans, un peu plus exacte que l'intercalation grégorienne, pouvait être répartie d'une manière tout à fait remarquable par sa rigueur et son

Les dixaines d'années sont à la gauche de la table et les unités au-dessus , à peu près comme dans les tables de logarithmes. Les dates inférieures à 20 appartiennent au mois d'avril , et les autres au mois de mars. La loi de cette table est fort simple : en écrivant en cercle toutes les 30 dates , depuis le 21 mars jusqu'au 19 d'avril inclusivement , ces dates prises de dix-neuf en dix-neuf , dans l'ordre direct , formeront les lignes horizontales , et prises alternativement de neuf en neuf et de dix en dix , elles donneront les colonnes verticales.

Si , à l'aide de cette table , on veut connaître l'époque de la pleine lune de mars pour l'année 1854 , on trouvera , sur-le-champ , que c'est le 12 d'avril ; et si , au contraire , on veut savoir en quelles années la pleine lune de mars doit tomber le 4 d'avril , on trouvera que cela doit avoir lieu les années 1814 , 1833 , 1852 , 1871 et 1890.

Et , comme la fête de pâques est fixée au dimanche qui suit immédiatement la pleine lune de mars , il est facile , au moyen de la combinaison de cette petite table avec notre calendrier , de déterminer l'époque de pâques pour chaque année , et d'assigner réciproquement les années auxquelles cette fête arrivera à une époque désignée.

Si , par exemple , on veut connaître l'époque de pâques pour 1852 ; comme on vient de trouver que , pour cette année-là , la pleine lune de mars arrive le 4 d'avril , et , comme on trouve d'ailleurs , par le calendrier , que ce 4 d'avril est un dimanche , on en conclut qu'en 1852 la fête de pâques tombera le 11 d'avril,

uniformité ; il faudrait pour cela ajouter un jour , tous les quatre ans , le supprimer ; tous les siècles , le rétablir , tous les quatre siècles , le supprimer , tous les dix mille ans , le rétablir , tous les quarante mille ans , et ainsi de suite ; cela donnerait en effet , pour la longueur de l'année moyenne ,

$$365^j + \frac{1}{4} - \frac{1}{200} + \frac{1}{400} - \frac{1}{10000} + \frac{1}{40000} - \dots$$

ou

$$365^j + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{400} + \frac{1}{40000} + \dots \right) - \left( \frac{1}{200} + \frac{1}{10000} + \dots \right)$$

ou

$$365^j + \frac{15}{99} - \frac{1}{99} = 365^j + \frac{14}{99} = 365^j + \frac{14}{99}$$

J. D. G.

Si , à l'inverse , on demande en quelles années pâques tombera le 1.<sup>er</sup> avril ; on a déjà vu que ce jour n'était un dimanche qu'en 1804 , 1810 , 1821 , 1827 , 1832 , 1838 , 1849 , 1855 , 1860 , 1866 , 1877 , 1883 , 1888 , etc. ; d'un autre côté , pour que pâques tombe le 1.<sup>er</sup> d'avril , il faut que la pleine lune de mars arrive du 26 mars au 1.<sup>er</sup> avril inclusivement , ce qui n'a lieu que pour les années 1801 , 1804 , 1809 , 1812 , 1817 , 1820 , 1823 , 1828 , 1831 , 1836 , 1839 , 1842 , 1847 , 1850 , 1855 , 1858 , 1861 , 1866 , 1869 , 1874 , 1877 , 1880 , 1885 , 1888 , 1893 , 1896 , 1899 , etc ; donc pâques n'arrivera le 1.<sup>er</sup> avril que dans les années 1804 , 1855 , 1866 , 1877 , 1888 , etc.

---



---

## CORRESPONDANCE.

*Lettre de M. BRET , professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble ,*

*Au Rédacteur des Annales ;*

**En réponse aux lettres de MM. Du BOURGUET et BÉRARD , insérées aux pages 56 et 58 de ce volume.**

~~~~~  
MONSIEUR ET TRÈS-CHER CONFRÈRE ,

**J**E crois devoir répondre encore aux lettres de MM. Du Bourguet et Bérard ; je le ferai brièvement , et de manière à n'être plus obligé d'y revenir.

Je ne disconviens nullement que le théorème que M. Du Bourguet a voulu démontrer ne soit évident , pour qui est habitué à la marche de l'analyse algébrique ; mais je n'en persiste pas moins à regarder comme très-difficile d'en donner une démonstration en forme , qui ne pêche par aucun côté ; et voilà sans doute pourquoi

M. Du Bourguet ne peut défendre la sienne qu'à l'aide d'un cercle vicieux. Supposer, en effet, que, si l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots = b \quad (1)$$

ne donne pas  $x=a$ , elle donnera tout au moins  $x=a+\delta$ , c'est bien supposer, ce me semble, que toute équation est résoluble, ce qui est précisément la thèse à établir. (\*)

---

(\*) On démontre que toute équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Gx - H = 0, \quad (1)$$

dont le dernier terme est négatif, admet toujours au moins une racine que l'on peut représenter comme il suit :

$$x = \varphi(A, B, C, \dots, G, -H); \quad (2)$$

or, pour qui est familier avec la marche de l'algèbre, il est clair que, si la valeur (2) rend l'équation (1) identique, la valeur

$$x = \varphi(A, B, C, \dots, G, H) \quad (3)$$

produira le même effet sur l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Gx + H = 0. \quad (4)$$

Cette assertion pourrait, au surplus, se prouver comme il suit : soit mis le résultat de la substitution de (2) dans (1) sous la forme

$$a - bH + cH^2 - dH^3 + eH^4 - \dots = 0; \quad (5)$$

$a, b, c, \dots$  étant des fonctions de  $A, B, C, \dots, G$ ; cette équation (5) devant se vérifier d'elle-même, sans aucune détermination de  $H$ , on doit avoir

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0, \dots; \quad (6)$$

mais, si (6) est le résultat de la substitution de (2) dans (1), celui de la substitution de (3) dans (4) sera incontestablement

$$a + bH + cH^2 + dH^3 + eH^4 + \dots = 0; \quad (7)$$

or, en vertu des équation (7), l'équation (8) est identique; donc, en effet, (3) résout (4).

La difficulté de cette théorie se trouve donc encore, comme celle de tant d'autres, ramenée à ceci : Toute fonction peut-elle légitimement être supposée développée suivant les puissances entières et positives de l'un des symboles qui la composent ?

Au surplus, si l'on ne trouvait rien à objecter contre la théorie développée par M. de Maizière, à la page 368 du premier volume de ce recueil, on en pourrait peut-être déduire une démonstration du théorème de M. Du Bourguet.

Quant à M. Bérard , j'ai dit que la méthode de construction de la parabole qu'il croyait que je lui avais empruntée était différente de la sienne , et c'est une chose dont il convient aujourd'hui. J'ai ajouté que , tandis que la mienne était générale , la sienne souffrait une exception , et cela est si vrai que , pour le cas des axes rectangles , il est obligé de recourir à un nouveau procédé , dont il n'est fait aucune mention dans son ouvrage.

Je tiens très-peu , au surplus , à la propriété de ma construction , que tout bon écolier aurait pu trouver comme moi , et dont je n'aurais certes pas fait bruit , si un travail plus étendu ne m'avait conduit à la mettre en œuvre ; mais je dois tenir beaucoup à ne point être injustement accusé de plagiat.

Agréez , etc.

Grenoble , le 10 d'août 1813.

---



---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Théorème de Géométrie.*

**L**ES rectangles qui ont respectivement pour diagonales deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole , et dont les côtés sont parallèles aux axes de la courbe sont équivalens.

### *Problème d'architecture.*

La base et la montée d'une *anse de panier* , dont le nombre des centres est  $2n+1$  étant données ; construire la demi-anse , dont par conséquent le nombre des centres sera  $n+1$  , avec la condition que tous les arcs de cette demi-anse soient semblables et que leurs rayons forment une progression géométrique ?

Faire une application de la solution générale au cas particulier où  $n=2$  , et où par conséquent chacun des arcs de la demi-anse serait de  $30^\circ$  ?

*Calendrier perpétuel*

|                      |                          |                          |                          |                          |                          |                   |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 49.                  | 05.                      | 50.                      | 06.                      | 51.                      | 07.                      | *                 | 02.                      | 03.                      | 08.                      | 53.                      | 09.                      | 54.                      |
| Lun.<br>Jan.Oct.     | Mar.<br>Avr.Juil.        | Mer.<br>Sep.Déc.         | Jeu.<br>Juin.            | Ven.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Sam.<br>Aoust.           | DIM.<br>Mai.      | Lun.<br>Aoust.           | Mar.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Jeu.<br>Avr.Juil.        | Sam.<br>Sep.Déc.         | DIM.<br>Juin.            | Lun.<br>Fév.Mar.<br>Nov. |
| 55.                  | 11.                      | *                        | 56.                      | 12.                      | 57.                      | 13.               | 58.                      | 14.                      | 59.                      | 15.                      | *                        |                          |
| Mar.<br>Mai.         | Mer.<br>Jan.Oct.         | Jeu.<br>Avr.Juil.        | Ven.<br>Sep.Déc.         | Sam.<br>Juin.            | DIM.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Lun.<br>Aoust.    | Mar.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Jeu.<br>Avr.Juil.        | Sam.<br>Sep.Déc.         | DIM.<br>Juin.            | Lun.<br>Fév.Mar.<br>Nov. |                          |
| 60.                  | 16.                      | 61.                      | 17.                      | 62.                      | 18.                      | 63.               | 19.                      | *                        | 64.                      | 20.                      | 65.                      |                          |
| Mer.<br>Mai.         | Jeu.<br>Jan.Oct.         | Ven.<br>Avr.Juil.        | Sam.<br>Sep.Déc.         | DIM.<br>Juin.            | Lun.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Mar.<br>Aoust.    | Jeu.<br>Avr.Juil.        | Sam.<br>Sep.Déc.         | DIM.<br>Juin.            | Lun.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Mar.<br>Aoust.           |                          |
| 66.                  | 22.                      | 67.                      | 23.                      | *                        | 68.                      | 24.               | 69.                      | 25.                      | 70.                      | 26.                      | 71.                      |                          |
| Tue.<br>Mar.<br>Nov. | Ven.<br>Aoust.           | Sam.<br>Jan.Oct.         | DIM.<br>Avr.Juil.        | Lun.<br>Sep.Déc.         | Mar.<br>Juin.            | Mai.<br>Jan.Oct.  | Jeu.<br>Avr.Juil.        | Sam.<br>Sep.Déc.         | DIM.<br>Juin.            | Lun.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Mar.<br>Aoust.           |                          |
| *                    | *                        | 72.                      | 28.                      | 73.                      | 29.                      | 74.               | 30.                      | 75.                      | 31.                      | *                        | 76.                      |                          |
| Ven.<br>Juin.        | Sam.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | DIM.<br>Aoust.           | Lun.<br>Jan.Oct.         | Mar.<br>Mai.             | Mai.<br>Jan.Oct.         | Jeu.<br>Avr.Juil. | Sam.<br>Sep.Déc.         | DIM.<br>Juin.            | Lun.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Mar.<br>Aoust.           | Jeu.<br>Sep.Déc.         |                          |
| 77.                  | 33.                      | 78.                      | 34.                      | 79.                      | 35.                      | *                 | 80.                      | 36.                      | 81.                      | 37.                      | 82.                      |                          |
| Sam.<br>Fév.Déc.     | DIM.<br>Juin.            | Lun.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Mar.<br>Aoust.           | Mai.<br>Jan.Oct.         | Mai.<br>Jan.Oct.         | Mer.<br>Avr.Juil. | Jeu.<br>Sep.Déc.         | Ven.<br>Avr.Juil.        | Sam.<br>Jan.Oct.         | Jeu.<br>Avr.Juil.        | Ven.<br>Fév.Juil.        |                          |
| 83.                  | 39.                      | *                        | *                        | 84.                      | 40.                      | 85.               | 41.                      | 86.                      | 42.                      | 87.                      | 43.                      | *                        |
| DIM.<br>Avr.Juil.    | Lun.<br>Sep.Déc.         | Mar.<br>Juin.            | Mer.<br>Fév.Mar.<br>Nov. | Jeu.<br>Aoust.           | Ven.<br>Jan.Oct.         | Sam.<br>Mai.      | Jeu.<br>Avr.Juil.        | Ven.<br>Sep.Déc.         | Sam.<br>Jan.Oct.         | Jeu.<br>Avr.Juil.        | Ven.<br>Fév.Juil.        |                          |
| 88.                  | 44.                      | 89.                      | 45.                      | 90.                      | 46.                      | 91.               | 47.                      | *                        | 92.                      | 48.                      | 93.                      |                          |
| 94.                  | 95.                      | *                        | *                        | *                        | 96.                      | 97.               | 98.                      | 99.                      |                          |                          |                          |                          |
| 1.                   | 2.                       | 3.                       | 4.                       | 5.                       | 6.                       | 7.                | 8.                       | 9.                       | 10.                      | 11.                      | 12.                      | 13.                      |
| 8.                   | 9.                       | 10.                      | 11.                      | 12.                      | 13.                      | 14.               | 15.                      | 16.                      | 17.                      | 18.                      | 19.                      | 20.                      |
| 15.                  | 16.                      | 17.                      | 18.                      | 19.                      | 20.                      | 21.               | 22.                      | 23.                      | 24.                      | 25.                      | 26.                      | 27.                      |
| 22.                  | 23.                      | 24.                      | 25.                      | 26.                      | 27.                      | 28.               | 29.                      | 30.                      | 31.                      |                          |                          |                          |

J.D.G.fecit.



## GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

*Mémoire sur les surfaces du second ordre ;*

Par M. BRET, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.



J'AI donné, dans les *Annales de Mathématiques*, (tome II; page 144), l'équation qui détermine la grandeur des diamètres principaux, dans les surfaces du second ordre, rapportées à des axes rectangulaires. Je me propose ici de revenir de nouveau sur ce sujet, pour le traiter d'une manière plus générale et plus complète; mais auparavant je donnerai, sur la ligne droite et le plan, quelques notions dont j'ai besoin pour parvenir à mon but.

Dans tout ce qui va suivre, je supposerai constamment aux axes des coordonnées des directions quelconques, et j'adopterai les notations que voici.

$$\text{Ang.}(y, z) = \alpha, \quad \text{Ang.}(z, x) = \beta, \quad \text{Ang.}(x, y) = \gamma$$

### §. I. *Équations du plan et de la ligne droite.*

Concevons que, de l'origine, on ait abaissé une perpendiculaire  $p$  sur le plan dont on veut obtenir l'équation; et soient  $x, y, z$  les coordonnées courantes de ce plan; il est visible que la somme des projections des coordonnées  $x, y, z$  d'un point quelconque du plan dont il s'agit sur la perpendiculaire  $p$ , en détermine exactement la longueur. Si donc on dénote respectivement par  $\alpha', \beta', \gamma'$  les angles

que forme cette perpendiculaire avec les trois axes , l'équation du plan sera

$$(A) \quad x \cos.\alpha' + y \cos.\beta' + z \cos.\gamma' = p.$$

On exprime communément une droite , dans l'espace , en écrivant les équations de ses projections sur deux quelconques des plans coordonnés ; mais il est souvent plus commode et plus élégant de s'y prendre ainsi qu'il suit : soient  $x'$  ,  $y'$  ,  $z'$  les coordonnées fixes d'un point déterminé de la droite , et soit  $r$  la distance variable de ce point à un autre point quelconque de cette même droite , dont les coordonnées courantes sont supposées  $x$  ,  $y$  ,  $z$  ; on écrira

$$(B) \quad x = x' + ar , \quad y = y' + br , \quad z = z' + cr ;$$

$a$  ,  $b$  ,  $c$  étant des fonctions angulaires , non susceptibles de devenir infinies , et qui demeurent constantes pour toute l'étendue de la droite ; l'élimination de  $r$  , entre ces trois équations , conduirait aux équations ordinaires de la ligne droite.

### §. II. Du centre , du plan diamétral et du plan tangent , dans les surfaces du second ordre .

Soit posée , pour l'équation générale des surfaces du second ordre ,

$$(C) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy + 2A''x + 2B''y + 2C''z + D = 0.$$

Si , dans cette équation , on substitue , pour  $x$  ,  $y$  ,  $z$  , les valeurs données par les équations (B) , en posant , pour abréger ,

$$M = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2A'bc + 2B'ca + 2C'ab ,$$

$$M' = \begin{cases} (Ax' + B'z' + C'y' + A'')a \\ +(By' + C'x' + A'z' + B'')b \\ +(Cz' + A'y' + B'x' + C'')c , \end{cases}$$

$$M'' = Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2A'y'z' + 2B'z'x' + 2C'x'y' + 2A''x' + 2B''y' + 2C''z' + D ,$$

la transformée sera

$$(D) \quad Mr^2 + 2M'r + M'' = 0.$$

Dans cette équation,  $r$  est la distance entre le point fixe  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et celui où la droite (B) rencontre la surface (C); elle est du second degré, parce qu'en général la droite (B) rencontre la surface (C) en deux points.

Il peut être intéressant de discuter ce qui arrive, lorsque quelques-uns des coefficients  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  deviennent nuls, ou lorsque l'équation (D) a ses deux racines égales. Je bornerai cette discussion aux seuls cas qu'il m'est nécessaire de considérer.

1.<sup>o</sup> Si le coefficient  $M'$  est seul nul, les deux valeurs de  $r$  seront égales et de signes contraires, quels que soient d'ailleurs  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; et alors on pourra distinguer deux cas :

Si d'abord on suppose que  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sont les coordonnées d'un point fixe, mais inconnu, tandis que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont indéterminés, ce point fixe sera le centre de la surface (C); et on le déterminera en exprimant que l'équation  $M'=0$  a lieu indépendamment de toute détermination des quantités  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; ce qui conduira aux trois équations

$$(E) \quad \begin{aligned} Ax' + B'z' + C'y' + A'' &= 0, \\ By' + C'x' + A'z' + B'' &= 0, \\ Cz' + A'y' + B'x' + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Si, au contraire,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont constants, et  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  indéterminés, l'équation  $M'=0$  exprimera que le plan dont les coordonnées courantes sont  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  contient les milieux de toutes les cordes parallèles à une certaine droite fixe, et est conséquemment un plan diamétral ; l'équation générale du plan diamétral est donc

$$(F) \quad \begin{aligned} (Aa + B'c + C'b)x + (Eb + C'a + A'c)y + (Cc + A'b + B'a)z \\ + A''a + B''b + C''c = 0. \end{aligned}$$

2.<sup>o</sup> Si, outre l'équation  $M'=0$ , on a encore  $M''=0$ , cette dernière équation exprimera d'abord que le point  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  est sur la surface (C); et, puisqu'alors les valeurs de  $r$  seront toutes deux nulles, la droite (B) sera une tangente à cette surface. Or, comme

le système des équations  $M'=0$ ,  $M''=0$  laisse encore les quantités  $a$ ,  $b$ ,  $c$  indéterminées, il s'ensuit que, par un même point  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  pris sur (C), on peut lui mener une infinité de tangentes. L'équation du lieu de toutes ces tangentes s'obtiendra en éliminant  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de l'équation  $M'=0$ , au moyen des équations (B). Ce lieu, qui est le plan tangent par le point  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , a donc pour équation

$$\left. \begin{aligned} & (Ax' + B'z' + C'y' + A'') (x - x') \\ & + (By' + C'x' + A'z' + B'') (y - y') \\ & + (Cz' + A'y' + B'x' + C'') (z - z') \end{aligned} \right\} = 0.$$

En simplifiant cette équation, au moyen de l'équation de relation  $M''=0$ , elle prend la forme

$$(G) \quad \left. \begin{aligned} & (Ax' + B'z' + C'y' + A'') x \\ & + (By' + C'x' + A'z' + B'') y \\ & + (Cz' + A'y' + B'x' + C'') z \\ & + A''x' + B''y' + C''z' + D \end{aligned} \right\} = 0.$$

Il est aisément de voir que l'équation  $M=0$  seule exprimerait que la droite (B) ne rencontre la surface (C) qu'en un point, lequel serait le point  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , si l'on avait en outre  $M''=0$ . On voit aussi que, si l'on avait, à la fois,  $M=0$ ,  $M'=0$ , l'équation (D) et conséquemment l'équation (C) seraient absurdes, à moins qu'on n'eût en même temps  $M''=0$ , auquel cas  $r$  demeurerait indéterminée; on pourrait donc, par chacun des points de la surface (C), mener au moins une droite qui y fût entièrement contenue; cette surface serait donc une surface gauche ou une surface développable. Enfin, si l'équation (D) avait ses deux racines égales ou, ce qui revient au même, si l'on avait l'équation  $M'^2 - MM'' = 0$ , les équations (B) deviendraient celles d'une tangente par un point extérieur  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , laquelle tangente demeurerait indéterminée; on parviendrait donc à l'équation du lieu de toutes les tangentes menées par ce point, c'est-à-dire, à l'équation de la surface conique circonscrite, ayant

ce même point pour centre ou sommet, en chassant  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de l'équation  $M'^2 - MM'' = 0$ , au moyen des équations (B).

### §. III. Transformation générale des coordonnées.

Pour établir les formules qui servent à passer d'un système rectangulaire ou oblique de coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  à une autre système quelconque de coordonnées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , il suffit de remarquer que chacune des grandeurs  $x$ ,  $y$ ,  $z$  doit être une fonction entière du premier degré en  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ; on est dès-lors fondé à écrire, l'origine étant la même pour les deux systèmes,

$$(H) \quad \begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z' ; \\ y &= bx' + b'y' + b''z' , \\ z &= cx' + c'y' + c''z' , \end{aligned}$$

En faisant successivement, dans ces formules, les trois hypothèses suivantes

$$\begin{cases} y' = 0 , \\ z' = 0 ; \end{cases} \quad \begin{cases} z' = 0 , \\ x' = 0 ; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 , \\ y' = 0 ; \end{cases}$$

on trouvera, pour les équations respectives des axes des  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , rapportés au système primitif

$$\begin{aligned} (k) \quad x &= a r ; \quad y = b r , \quad z = c r , \\ (k') \quad x &= a' r , \quad y = b' r , \quad z = c' r , \\ (k'') \quad x &= a'' r , \quad y = b'' r , \quad z = c'' r . \end{aligned}$$

### §. IV. De la sphère et de son plan tangent.

Si l'on suppose que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  désignent les coordonnées rectangulaires des points d'une sphère qui a son centre à l'origine et son rayon égal à  $r$ , on aura évidemment

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

D'après les formules (H) l'équation de la même sphère, rapportée à des coordonnées obliques  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , sera

$$\left. \begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)x'^2 + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'')y'z' \\ & (a'^2 + b'^2 + c'^2)y'^2 + 2(a''a + b''b + c''c)z'x' \\ & (a''^2 + b''^2 + c''^2)z'^2 + 2(a'a' + b'b' + c'c')x'y' \end{aligned} \right\} = r^2$$

si, dans cette dernière équation, on fait successivement les trois hypothèses  $x'=0$ ,  $y'=0$ ,  $z'=0$ , on obtiendra pour les équations des traces de la sphère sur les trois plans coordonnés

$$\begin{aligned} & (a'^2 + b'^2 + c'^2)y'^2 + (a''^2 + b''^2 + c''^2)z'^2 + 2(a'a'' + b'b'' + c'c'')y'z' = r^2, \\ & (a''^2 + b''^2 + c''^2)z'^2 + (a^2 + b^2 + c^2)x'^2 + 2(a''a + b''b + c''c)z'x' = r^2, \\ & (a^2 + b^2 + c^2)x'^2 + (a'^2 + b'^2 + c'^2)y'^2 + 2(a'a' + b'b' + c'c')x'y' = r^2; \end{aligned}$$

mais on sait d'ailleurs que,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  désignant les angles des coordonnées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , les équations de ces traces doivent être

$$\begin{aligned} & y'^2 + z'^2 + 2y'z' \cos.\alpha = r^2, \\ & z'^2 + x'^2 + 2z'x' \cos.\beta = r^2, \\ & x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos.\gamma = r^2: \end{aligned}$$

comparant donc respectivement ces équations aux précédentes, il viendra

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = \cos.\alpha, \\ & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad a''a + b''b + c''c = \cos.\beta, \\ & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \quad a'a' + b'b' + c'c' = \cos.\gamma; \end{aligned}$$

et conséquemment l'équation de la sphère rapportée à des coordonnées obliques sera

$$(L) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos.\alpha + 2zx \cos.\beta + 2xy \cos.\gamma = r^2.$$

Cette équation donne aussi la distance  $r$  de l'origine à un point dont les coordonnées sont  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Si le centre, au lieu d'être situé à l'origine, se trouvait en un point ayant pour ses coordonnées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , l'équation de la sphère deviendrait

$$(M) \quad \left. \begin{aligned} & (x-x')^2 + z(y-y')(z-z')\cos.\alpha \\ & + (y-y')^2 + z(z-z')(x-x')\cos.\beta \\ & + (z-z')^2 + z(x-x')(y-y')\cos.\gamma \end{aligned} \right\} = r^2.$$

Si, dans l'équation (G), on fait

$$\begin{aligned} A' &= \cos.\alpha, & A'' &= 0, \\ B' &= \cos.\beta, & B'' &= 0, & D &= -r^2 \\ C' &= \cos.\gamma; & C'' &= 0, \end{aligned}$$

elle deviendra celle du plan tangent à la sphère qui a son centre à l'origine. Ainsi  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  étant les coordonnées du point de contact, l'équation de ce plan tangent est

$$(N) (x'+y'\cos.\gamma+z'\cos.\beta)x+(y'+z'\cos.\alpha+x'\cos.\gamma)y+(z'+x'\cos.\beta+y'\cos.\alpha)z=r^2.$$

### §. V. De la perpendiculaire à un plan.

Soit

$$(O) \quad Ax+By+Cz=D;$$

l'équation d'un plan, et soient

$$(P) \quad x=ar, \quad y=br, \quad z=cr,$$

les équations de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan. Si l'on conçoit une sphère ayant l'origine pour centre et cette perpendiculaire pour rayon, le plan (O) devra lui être tangent ; et, en désignant par  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  les coordonnées du point de contact, les équations (N) et (O) devront coïncider, à un facteur près, pouvant affecter tous les termes de l'une d'elles. Exprimant donc que leur coïncidence a lieu, il viendra

$$D(x'+y'\cos.\gamma+z'\cos.\beta)=Ar^2,$$

$$D(y'+z'\cos.\alpha+x'\cos.\gamma)=Br^2,$$

$$D(z'+x'\cos.\beta+y'\cos.\alpha)=Cr^2;$$

mais, comme le point de contact doit se trouver, à la fois, sur la droite (P) et sur la sphère, on doit avoir

$$x' = ar, \quad y' = br, \quad z' = cr,$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z' \cos.\alpha + 2z'x' \cos.\beta + 2x'y' \cos.\gamma = r^2.$$

En éliminant  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  entre ces équations, il viendra

$$D(a+b \cos.\gamma + c \cos.\beta) = Ar,$$

$$D(b+c \cos.\alpha + a \cos.\gamma) = Br,$$

$$D(c+a \cos.\beta + b \cos.\alpha) = Cr,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos.\alpha + 2ca \cos.\beta + 2ab \cos.\gamma = 1.$$

En éliminant  $r$  entre les trois premières équations, on obtiendra les deux suivantes

$$A(c+b \cos.\alpha + a \cos.\beta) = C(a+b \cos.\gamma + c \cos.\beta),$$

(Q)

$$B(c+b \cos.\alpha + a \cos.\beta) = C(b+c \cos.\alpha + a \cos.\gamma),$$

lesquelles expriment que le plan (O) et la droite (P) sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Si, entre toutes quatre, on élimine  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , la longueur  $r$  de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan (O) se trouvera donnée par l'équation

$$(R) \left\{ \begin{array}{l} A^2 \sin.^2 \alpha - 2BC(\cos.\alpha - \cos.\beta \cos.\gamma) \\ + B^2 \sin.^2 \beta - 2CA(\cos.\beta - \cos.\gamma \cos.\alpha) \\ + C^2 \sin.^2 \gamma - 2AB(\cos.\gamma - \cos.\alpha \cos.\beta) \end{array} \right\} r^2 = (1 - \cos.^2 \alpha - \cos.^2 \beta - \cos.^2 \gamma + 2 \cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma) D^2.$$

Si le point duquel on veut abaisser une perpendiculaire sur le plan (O) a pour ses coordonnées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , il suffira de transporter l'origine en ce point; ce qui reviendra à changer  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en  $x+x'$ ,  $y+y'$ ,  $z+z'$ , respectivement, ce qui donnera, pour la nouvelle équation du plan.

$$Ax + By + Cz + (Ax' + By' + Cz' - D) = 0,$$

et partant, pour la longueur de la perpendiculaire, celle qu'on déduirait de l'équation (R), en y changeant simplement  $D$  en  $Ax' + By' + Cz' - D$ .

L'équation



## L'équation

$$(S) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos.\alpha + 2ca\cos.\beta + 2ab\cos.\gamma = 1,$$

à laquelle nous sommes parvenus tout à l'heure, exprime la relation qui doit exister, dans les équations (B), entre les trois coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des coordonnées.

Si l'on prend sur les axes des  $x$ , des  $y$  et des  $z$ , respectivement, trois longueurs  $d$ ,  $e$ ,  $f$ , il sera facile d'assigner le volume du parallélépipède qui aura ces trois longueurs pour arêtes. En effet, d'après la formule (R), la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de  $f$ , sur le plan des  $xy$ , sera

$$\frac{f}{\sin.\gamma} \sqrt{1 - \cos.^2\alpha - \cos.^2\beta - \cos.^2\gamma + 2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma};$$

mais, en considérant cette perpendiculaire comme la hauteur du parallélépipède, l'aire de sa base sera  $de\sin.\gamma$ ; d'où il résulte que son volume sera

$$def\sqrt{1 - \cos.^2\alpha - \cos.^2\beta - \cos.^2\gamma + 2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma}.$$

Les conditions analitiques qui expriment le parallélisme, soit de deux droites, soit de deux plans, soit d'une droite et d'un plan, étant indépendantes des angles que forment entre eux les axes des coordonnées, nous ne nous arrêterons pas à leur recherche.

### §. VI. De la perpendicularité de deux plans.

Soient deux plans passant par l'origine, et ayant respectivement pour équations

$$(T) \quad Ax + By + Cz = 0;$$

$$(T') \quad A'x + B'y + C'z = 0.$$

On exprimera qu'ils sont perpendiculaires l'un à l'autre si l'on exprime qu'une droite

$$x = ar, \quad y = br, \quad z = cr,$$

perpendiculaire au premier, se trouve sur le second. Ainsi, par le précédent §, on aura les équations

## SURFACES

$$A(c+a\cos.\beta+b\cos.\alpha)=C(a+b\cos.\gamma+c\cos.\beta) ,$$

$$B(c+a\cos.\beta+b\cos.\alpha)=C(b+c\cos.\alpha+a\cos.\gamma) ,$$

$$A'a+B'b+C'c=0.$$

Si l'on élimine  $a$  et  $b$  entre elles,  $c$  disparaîtra de lui-même, et l'on obtiendra, pour condition de perpendicularité des deux plans (T), (T'), l'équation suivante :

$$(U) \quad \left. \begin{aligned} AA'\sin^2\alpha - (BC'+CB')(\cos.\alpha - \cos.\beta \cos.\gamma) \\ + BB'\sin^2\beta - (CA'+AC')(\cos.\beta - \cos.\gamma \cos.\alpha) \\ + CC'\sin^2\gamma - (AB'+BA')(\cos.\gamma - \cos.\alpha \cos.\beta) \end{aligned} \right\} = 0.$$

**§. VII. De la perpendicularité de deux droites, et de l'angle qu'elles forment entre elles.**

Soient deux droites passant par l'origine et ayant respectivement pour équations

$$(V) \quad x=a'r , \quad y=b'r , \quad z=c'r ,$$

$$(V') \quad x=a'r , \quad y=b'r , \quad z=c'r .$$

On exprimera qu'elles sont perpendiculaires l'une à l'autre, si l'on exprime qu'un plan

$$Ax+By+Cz=0 .$$

perpendiculaire à la première, contient la seconde ; ainsi, par le §. V, on aura les équations

$$A(c+a\cos.\beta+b\cos.\alpha)=C(a+b\cos.\gamma+c\cos.\beta) ,$$

$$B(c+a\cos.\beta+b\cos.\alpha)=C(b+c\cos.\alpha+a\cos.\gamma) ,$$

$$Aa'+Bb'+Cc'=0.$$

Si l'on élimine  $A$  et  $B$  entre elles,  $C$  disparaîtra de lui-même ; et l'on obtiendra, pour condition de perpendicularité des deux droites (V), (V'), l'équation suivante

$$(X) \quad \left. \begin{aligned} aa'+(bc'+cb')\cos.\alpha \\ +bb'+(ca'+ac')\cos.\beta \\ +cc'+(ab'+ba')\cos.\gamma \end{aligned} \right\} = 0.$$

Généralement, on peut trouver le cosinus de l'angle formé par les deux droites

$$\begin{aligned}x &= ar, \quad y = br, \quad z = cr; \\x' &= a'r', \quad y' = b'r', \quad z' = c'r'.\end{aligned}$$

car, en joignant les extrémités des distances  $r, r'$  par une droite, et appelant  $\theta$  l'angle cherché, la longueur de cette droite aura d'un côté pour expression

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos.\theta,$$

et de l'autre, par le §. IV,

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(z-z')^2 + 2(y-y')(z-z') \cos.\alpha + 2(z-z')(x-x') \cos.\beta + 2(x-x')(y-y') \cos.\gamma$$

ou, en substituant,

$$\begin{aligned}&(a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos.\alpha + 2ca \cos.\beta + 2ab \cos.\gamma)r^2 \\&+ (a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2b'c' \cos.\alpha + 2c'a' \cos.\beta + 2a'b' \cos.\gamma)r'^2 \\&- 2\{aa' + bb' + cc' + (bc' + cb') \cos.\alpha + (ca' + ac') \cos.\beta + (ab' + ba') \cos.\gamma\}rr':\end{aligned}$$

égalant donc cette expression à la première, et exprimant que leur égalité laisse  $r, r'$  indéterminés et indépendans, on obtiendra d'abord les deux relations déjà connues

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos.\alpha + 2ca \cos.\beta + 2ab \cos.\gamma &= 1, \\a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2b'c' \cos.\alpha + 2c'a' \cos.\beta + 2a'b' \cos.\gamma &= 1,\end{aligned}$$

et ensuite la formule

$$(Y) \quad \cos.\theta = \begin{cases} aa' + (bc' + cb') \cos.\alpha \\ + bb' + (ca' + ac') \cos.\beta \\ + cc' + (ab' + ba') \cos.\gamma. \end{cases}$$

Au moyen de cette formule il sera facile de déterminer, soit le sinus de l'angle de deux droites, soit les sinus et cosinus de l'angle de deux plans, ou de l'angle d'une droite et d'un plan.

§. VIII. *Recherche des diamètres principaux dans les surfaces du seconde ordre, rapportées à des axes quelconques.*

Repreneons l'équation générale des surfaces du second ordre

$$(1) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'y'z + 2B'zx + 2C'xy + 2A''x + 2B''y + 2C''z + D = 0.$$

Nous avons déjà dit que, pour passer du système des coordonnées  $x, y, z$  au système des coordonnées  $x', y', z'$ , de même origine que celui-là, il fallait poser

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z', \\ y &= bx' + b'y' + b''z', \\ z &= cx' + c'y' + c''z', \end{aligned}$$

et qu'alors les équations des axes des  $x', y', z'$ , rapportés au système primitif, étaient respectivement

$$\begin{aligned} (3) \quad x &= a r, & y &= b r, & z &= c r, \\ (4) \quad x &= a' r, & y &= b' r, & z &= c' r, \\ (5) \quad x &= a''r, & y &= b''r, & z &= c''r. \end{aligned}$$

Si l'on substitue les valeurs (2) dans l'équation (1), on obtiendra une transformée, du même degré en  $x', y', z'$ , que l'on pourra ensuite simplifier, en disposant des quantités arbitraires qui déterminent les directions des nouveaux axes.

Faisant donc disparaître tous les rectangles des coordonnées, nous aurons les équations

$$\begin{aligned} (6) \quad &(Aa'' + Bc'' + Cb'')a' + (Bb'' + Ca'' + A'c'')b' + (Cc'' + A'b'' + B'a'')c = 0, \\ (7) \quad &(Aa'' + Bc'' + Cb'')a + (Bb'' + Ca'' + A'c'')b + (Cc'' + A'b'' + B'a'')c = 0, \\ (8) \quad &(Aa' + Bc' + Cb')a + (Bb' + Ca' + A'c')b + (Cc' + A'b' + B'a')c = 0. \end{aligned}$$

Cela posé, en éliminant  $a, b, c$  entre les équations (3) et l'équation (7), on tombera sur l'équation d'un plan

$$(9) \quad (Aa'' + Bc'' + Cb'')x + (Bb'' + Ca'' + A'c'')y + (Cc'' + A'b'' + B'a'')z = 0,$$

tel que, l'axe des  $x'$  y étant situé, d'une manière quelconque, l'équation de la surface du second ordre se trouvera délivrée du terme

en  $x'z'$ . Pareillement si, entre les équations (4) et (6), on élimine  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , on obtiendra l'équation d'un plan tel que, l'axe des  $y$  y étant situé, d'une manière quelconque, l'équation de cette surface se trouvera délivrée du terme en  $y'z'$ . Mais, par la forme des équations (3), (4), (6), (7), ces deux plans doivent se confondre; donc, en écrivant seulement les équations (6), (7), on aura, pour un axe quelconque des  $z'$ , un plan unique des  $x'y'$  tel que l'équation transformée, en  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , se trouvera privée, à la fois, des rectangles  $x'z'$ ,  $y'z'$ ; et, comme il est toujours facile, l'axe des  $z'$  étant constant, ainsi que le plan des  $x'y'$ , de donner aux axes des  $x'$  et des  $y'$  des directions telles que le troisième rectangle  $x'y'$  disparaîsse aussi; il s'ensuit qu'il y a une infinité de systèmes d'axes transformés pour lesquels l'équation générale des surfaces du second ordre prend la forme plus simple

$$(10) \quad Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 + 2Qx' + 2Q'y' + 2Q''z' + D = 0.$$

Parmi tous les systèmes d'axes pour lesquels l'équation prend cette forme, il n'en est généralement qu'un seul qui soit rectangulaire. En effet, assujettissons la droite (5) à être perpendiculaire au plan (9); en employant les équations (Q) du §. V, nous trouverons

$$(Aa'' + B'b'' + Cc'')(c'' + b''\cos.\alpha + a''\cos.\beta) = (Cc'' + A'b'' + B'a'')(a'' + b''\cos.\gamma + c''\cos.\delta);$$

(11)

$$(Bb'' + C'a'' + A'c'')(c'' + b''\cos.\alpha + a''\cos.\beta) = (Cc'' + A'b'' + B'a'')(b'' + c''\cos.\alpha + a''\cos.\gamma);$$

Si l'on procède à l'élimination de  $\frac{a''}{c''}$  entre ces deux équations, on parviendra, en définitif, à deux équations de la forme

(12)

$$M\left(\frac{a''}{c''}\right) + M' = 0,$$

$$N\left(\frac{b''}{c''}\right)^3 + N'\left(\frac{b''}{c''}\right)^2 + N''\left(\frac{b''}{c''}\right) + N''' = 0,$$

dans lesquelles  $M$ ,  $M'$  renfermeront  $\frac{b''}{c''}$ , mais où  $N$ ,  $N'$ ,  $N''$ ,  $N'''$  ne seront fonctions que de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et des coefficients de l'équation (1).

Or, comme toute équation du troisième degré a toujours au moins une racine réelle, il s'ensuit qu'il existe, pour toutes les surfaces du second ordre, un axe des  $z'$ , perpendiculaire à un plan des  $x'y'$ , de manière que l'équation générale de ces surfaces ne renferme plus les rectangles  $x'z'$ ,  $y'z'$ ; et, comme on peut toujours chasser le rectangle  $x'y'$  qui reste encore dans l'équation, on en conclut qu'à, non seulement on trouve un axe des  $z'$ , perpendiculaire au plan des  $x'y'$ , qui prive la nouvelle équation des rectangles  $x'z'$ ,  $y'z'$ , mais encore qu'il existe un axe des  $x'$ , perpendiculaire au plan des  $y'z'$ , et un axe des  $y'$ , perpendiculaire au plan des  $x'z'$ , jouissant des mêmes propriétés. Or, si l'on écrit que l'axe (4) des  $y'$  est perpendiculaire au plan

$(Aa' + B'b' + C'c')x + (Bb' + C'a' + A'c')y + (Cc' + A'b' + B'a')z = 0$

qui contient les axes des  $x'$  et  $z'$ , on parviendra aux mêmes équations (11), en y changeant  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  en  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ; d'où il suit que les équations (11) déterminent  $\frac{b'}{c'}$  et  $\frac{a'}{c'}$ , en même temps que  $\frac{b''}{c''}$ ,  $\frac{a''}{c''}$ ; on prouvera de même que le troisième système de racines, tiré des équations (12), est  $\frac{b}{c}$  et  $\frac{a}{c}$ .

Il résulte de ce qui précède que, dans le cas où les axes qui doivent priver l'équation de la surface des trois rectangles  $x'y'$ ,  $y'z'$ ,  $z'x'$  doivent être rectangulaires, leur direction est absolument déterminée et unique, et qu'alors les coefficients de l'équation (10) sont réels et déterminés.

Il reste présentement à faire connaître, pour les surfaces du second ordre qui ont un centre, l'équation qui détermine les grandeurs des diamètres principaux. La chose se réduit à calculer les

coefficients  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  de l'équation (10). A cet effet, écrivons les résultats des substitutions des valeurs (2) dans l'équation (1), en ayant égard aux équations (6), (7), (8); nous trouverons

$$\left. \begin{aligned} & (Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2A'b'c + 2B'c'a + 2C'a'b)x'^2 \\ & + (Aa'^2 + Bb'^2 + Cc'^2 + 2A'b'c' + 2B'c'a' + 2C'a'b')y'^2 \\ & + (Aa''^2 + Bb''^2 + Cc''^2 + 2A'b''c'' + 2B'c''a'' + 2C'a''b'')z'^2 \\ & + (2Qx' + 2Q'y' + 2Q''z' + D) \end{aligned} \right\} = 0.$$

et partant

$$(13) \quad P'' = Aa''^2 + Bb''^2 + Cc''^2 + 2A'b''c'' + 2B'c''a'' + 2C'a''b'' ;$$

si donc on élimine  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  des équations (11), (13) et de l'équation de relation formée d'après l'équation (S) du §. V, on trouvera l'équation qui doit déterminer  $P''$ ; mais, comme ces équations, ont lieu, de la même manière, en changeant  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$ ,  $P''$  en  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $P'$  ou en  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $P$ , il s'ensuit que  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  sont donnés par une même équation du troisième degré.

Il s'agit donc actuellement d'effectuer le calcul qui vient d'être indiqué; mais auparavant débarrassons  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des accens qui les affectent dans les équations (11) et (13), et joignons-y l'équation (S), ce qui donnera

$$(14) \quad (Aa + B'b + C'c)(c + a \cos. \beta + b \cos. \alpha) = (Cc + A'b + B'a)(a + b \cos. \gamma + c \cos. \beta) ,$$

$$(15) \quad (Bb + C'a + A'c)(c + a \cos. \beta + b \cos. \alpha) = (Cc + A'b + B'a)(b + c \cos. \alpha + a \cos. \gamma) ,$$

$$(16) \quad Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2A'b'c + 2B'c'a + 2C'a'b = P ,$$

$$(17) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos. \alpha + 2ca \cos. \beta + 2ab \cos. \gamma = 1.$$

Posons ensuite

$$(18) \quad \begin{aligned} Aa + B'b + C'c &= L , \\ Bb + C'a + A'c &= L' , \\ Cc + A'b + B'a &= L'' ; \end{aligned}$$

les trois premières deviendront alors

$$(19) \quad \begin{aligned} L(c+a\cos.\beta+b\cos.\alpha) &= L''(a+b\cos.\gamma+c\cos.\beta), \\ L'(c+a\cos.\beta+b\cos.\alpha) &= L''(b+c\cos.\alpha+a\cos.\gamma), \\ La+L'b+L''c &= P. \end{aligned}$$

Si l'on chasse successivement de ces équations deux des trois quantités  $L$ ,  $L'$ ,  $L''$ , en ayant égard à l'équation (17), il viendra

$$(20) \quad \begin{aligned} L &= P(a+b\cos.\gamma+c\cos.\beta), \\ L' &= P(b+c\cos.\alpha+a\cos.\gamma), \\ L'' &= P(c+a\cos.\beta+b\cos.\alpha), \end{aligned}$$

et, en comparant aux équations (18).

$$(21) \quad \begin{aligned} (P-A)a+(PCos.\gamma-C')b+(PCos.\beta-B')c &= 0; \\ (P-B)b+(PCos.\alpha-A')c+(PCos.\gamma-C')a &= 0, \\ (P-C)c+(PCos.\beta-B')a+(PCos.\alpha-A')b &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant  $a$  et  $b$ , entre ces équations,  $c$  disparaîtra de lui-même; et il viendra

$$\begin{aligned} (P-A)(P-B)(P-C)+2(PCos.\alpha-A')(PCos.\beta-B')(PCos.\gamma-C') \\ + (P-A)(PCos.\alpha-A')^2 + (P-B)(PCos.\beta-B')^2 + (P-C)(PCos.\gamma-C')^2 &= 0, \\ \text{ou, en développant et ordonnant} \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} &(1-\cos.^2\alpha-\cos.^2\beta-\cos.^2\gamma+2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma)P^3 \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} A\sin.^2\alpha-2A'(\cos.\alpha-\cos.\beta\cos.\gamma) \\ +B\sin.^2\beta-2B'(\cos.\beta-\cos.\gamma\cos.\alpha) \\ +C\sin.^2\gamma-2C'(\cos.\gamma-\cos.\alpha\cos.\beta) \end{array} \right\} P^2 \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} BC-A'^2+2(B'C'-AA')\cos.\alpha \\ +CA-B'^2+2(C'A'-BB')\cos.\beta \\ +AB-C'^2+2(A'B'-CC')\cos.\gamma \end{array} \right\} P \\ &-(ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C') = 0; \end{aligned}$$

et les quantités  $\frac{a}{c}$ ,  $\frac{b}{c}$  seront déterminées par les équations

$$\{(P-A)$$

$$(23) \quad \begin{aligned} & \{(P-A)(P-B)-(PCos.\gamma-C')^2\} \frac{a}{c} \\ & + \{(P-B)(PCos.\beta-B')-(PCos.\alpha-A')(PCos.\gamma-C')\}=0, \\ & \{(P-A)(P-B)-(PCos.\gamma-C')^2\} \frac{b}{c} \\ & + \{(P-A)(PCos.\alpha-A')-(PCos.\beta-B')(PCos.\gamma-C')\}=0. \end{aligned}$$

Si l'on joint à ces deux équations l'équation (17), on aura tout ce qu'il faut pour déterminer  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; et partant, on pourra calculer, dans l'équation (10), les coefficients  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$ .

Il est maintenant facile de conclure des équations précédentes, quelles modifications il faut y apporter, pour qu'elles fassent connaître les grandeurs des diamètres principaux, dans les surfaces du second ordre qui ont un centre. On sait en effet que, pour ces surfaces, si l'on transporte l'origine des coordonnées au centre, les termes affectés des premières puissances de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  disparaissent de son équation. Ainsi, l'équation (1), après y avoir fait disparaître les premières puissances de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , deviendra

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=H;$$

d'où il suit que l'équation (10) prendra la forme

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2=H.$$

Représentant donc par  $T^2$  le carré d'un demi-diamètre principal ; on aura  $T^2=\frac{H}{P}$ , d'où  $P=\frac{H}{T^2}$ ; substituant cette valeur de  $P$  dans les équations (22) et (23), on trouvera les équations qui déterminent la situation et la grandeur des diamètres principaux. On doit observer, au surplus, que l'équation qui a pour racines les trois valeurs de  $T^2$  a nécessairement ses racines réelles, comme nous l'avons déjà démontré, en faisant voir que  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  sont des quantités réelles. Nous discuterons ici quatre cas différens des surfaces du second ordre.

*Premier cas.* Si l'équation (22) n'a aucune racine nulle, on

*Tom. IV.*

pourra toujours faire disparaître les premières puissances de  $x, y, z$ , dans l'équation (1), et par conséquent réduire l'équation (10) à la forme

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = H ;$$

donc 1.<sup>o</sup> on aura l'*ellipsoïde*, un point ou une surface *imaginaire*, lorsque les racines de l'équation (22) seront toutes de même signe.

2.<sup>o</sup> On obtiendra les *hyperboloides* à une ou à deux nappes, ou une *surface conique*, lorsque les racines de l'équation (21) ne seront pas toutes de mêmes signes.

*Deuxième cas.* Supposons que l'équation (22) ait une seule racine nulle ; l'équation (10) prend alors la forme

$$Px'^2 + P'y'^2 + 2Qx' + 2Q'y' + 2Q''z' + D = 0 ;$$

donc 1.<sup>o</sup> on aura le *paraboloïde elliptique*, ou une surface *imaginaire*, lorsque les deux racines de l'équation (22) seront de même signe, sans que  $Q''$  soit zéro.

2.<sup>o</sup> On aura le paraboloïde hyperbolique ou le système de deux plans, lorsque les deux seules racines effectives de l'équation (22) seront de signes contraires.

3.<sup>o</sup> Dans le cas particulier où  $Q''=0$ , quels que soient d'ailleurs les signes des deux racines effectives de l'équation (22), la surface est un cylindre ; or, comme l'équation  $Q''=0$  est satisfaite, lorsqu'en particulier on a  $A''=0$ ,  $B''=0$ ,  $C''=0$ ; il s'ensuit que l'équation

$$ABC - AA'^2 - BB'^2 - CC'^2 + 2A'B'C' = 0 ,$$

suffit pour exprimer que la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy + D = 0$$

est cylindrique. Il est remarquable que cette équation de condition est indépendante de  $\alpha, \beta, \nu$ .

*Troisième cas.* Si deux des racines de l'équation (22) sont nulles, l'équation (10) prendra la forme

$$Px'^2 + 2Qx' + 2Q'y' + 2Q''z' + D = 0 ;$$

elle représente une surface cylindrique, deux plans parallèles ou une surface imaginaire.

*Quatrième cas.* Supposons 1.<sup>o</sup> que la surface (1) soit sphérique; il y a alors une infinité de systèmes de diamètres principaux; et, comme les équations d'un diamètre principal sont

$$x=ar, \quad y=br, \quad z=cr;$$

il s'ensuit que  $a, b, c$  seront quelconques. Exprimant donc que les équations (21) laissent  $a, b, c$  indéterminés, on aura

$$A=B=C=P$$

$$A'=PCos.\alpha, \quad B'=PCos.\beta, \quad C'=PCos.\gamma.$$

2.<sup>o</sup> Supposons que la surface soit simplement de révolution autour de l'un des axes, alors les équations (21) devront être les mêmes à un facteur près; d'où l'on déduira les équations

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{P-A}{PCos.\beta-B'} &= \frac{PCos.\gamma-C'}{PCos.\alpha-A'} = \frac{PCos.\beta-B'}{P-C}, \\ \frac{PCos.\gamma-C'}{PCos.\beta-B'} &= \frac{P-B}{PCos.\alpha-A'} = \frac{PCos.\alpha-A'}{P-C}, \end{aligned}$$

on trouvera la racine  $P$  commune à ces équations par la théorie du plus grand commun diviseur. Égalant ensuite les valeurs de  $P$ , on aura deux équations de condition, qui exprimeront, si elles ont lieu, que la surface proposée du second ordre est de révolution autour d'un axe.

On obtient aussi l'équation du plan qui coupe la surface de révolution suivant un cercle, en éliminant  $a, b, c$  entre les équations (3) et l'une des équations (21); on a pour résultat

$$(25) \quad (P-A)x+(PCos.\gamma-C')y+(PCos.\beta-B')z=0.$$

Pour donner un exemple de cette théorie, supposons

$$\alpha=\beta=\gamma=\text{un angle droit};$$

les équations (24) et (25) deviendront

$$P = A - \frac{B'C'}{A'} = B - \frac{C'A'}{B'} = C - \frac{A'B'}{C'} ;$$

$$B'C'x + C'A'y + A'B'z = 0 ,$$

égalant les valeurs de  $P$ , deux à deux, on obtiendra les équations

$$(26) \quad \begin{aligned} A'B'(A-B) + C'(A'^2 - B'^2) &= 0 , \\ B'C'(B-C) + A'(B'^2 - C'^2) &= 0 , \\ C'A'(C-A) + B'(C'^2 - A'^2) &= 0 , \end{aligned}$$

dont deux comportent la troisième. Elles expriment que l'équation (1) appartient à une surface de révolution. L'équation (22) devient, en vertu des équations (26)

$$\left\{ P - A - \frac{B'C'}{A'} \right\}^2 \left\{ P - A - \frac{C'A'}{B'} - \frac{A'B'}{C'} \right\} = 0 .$$

Il nous resterait à examiner ce qui arrive dans ces résultats, lorsque un, deux ou trois rectangles des coordonnées manquent dans l'équation (1); mais nous renvoyons, pour cet objet, à notre mémoire qui traite de ces mêmes équations (page 144 du 2.<sup>e</sup> volume des *Annales de Mathématiques*.)

On peut déduire des théories précédentes d'autres conséquences très importantes; ainsi, par exemple, on démontre très-facilement, au moyen de l'équation (22), trois théorèmes principaux sur les surfaces du second ordre (voyez, pour cet objet, un mémoire de M. Bérard, page 105 du 3.<sup>e</sup> volume des *Annales de Mathématiques*). Nous discuterons seulement le cas particulier où les surfaces du second ordre dégénèrent en deux plans parallèles, et également distans de l'origine des coordonnées. L'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = H ,$$

prend alors la forme

$$(mx + ny + pz)^2 - 1 = 0$$

et l'équation en  $T^2$  devient

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 \sin^2 \alpha - 2np(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma) \\ + n^2 \sin^2 \beta - 2pm(\cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha) \\ + p^2 \sin^2 \gamma - 2mn(\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta) \end{array} \right\} T^2 = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Cette équation donne la longueur d'une perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan

$$mx + ny + pz = 1;$$

et elle coïncide parfaitement avec l'équation (R) du §. V.

Nous terminerons, sur cette théorie, en observant que la méthode que nous avons employée, pour les surfaces du second ordre, est exactement applicable aux lignes du même ordre, rapportées à un système primitif quelconque de coordonnées. Mais on peut, pour ces lignes, obtenir de suite l'équation qui détermine les quarrés des demi-diamètres principaux. En effet, soit posée l'équation

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = D,$$

et soit  $\gamma = mx$  celle d'un diamètre de la courbe. Si l'on cherche l'intersection du diamètre avec la courbe, puis la distance  $r$  de l'origine à ce point d'intersection, en se rappelant la formule

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma, \text{ où } \gamma = \text{Ang.}(x, y),$$

on aura l'équation

$$D(1 + m^2 + 2m \cos \gamma) = r^2(Am^2 + B + 2Cm)$$

ou

$$(Ar^2 - D)m^2 + 2(Cr^2 - DCos \gamma)m + (Br^2 - D) = 0;$$

qui sera telle qu'en donnant une valeur à  $r$ , il en résultera deux valeurs correspondantes pour  $m$ ; c'est-à-dire, que, généralement, il existe toujours deux diamètres de même longueur qui ont des directions différentes. Si maintenant on suppose que  $r$  désigne la longueur d'un demi-diamètre principal, alors les deux diamètres égaux qui répondront à cette hypothèse se confondront en un seul; les valeurs correspondantes de  $m$  devront donc être égales. Écrivant donc

## 114 SURFACES DU SECOND ORDRE.

la condition d'égalité des racines de l'équation en  $m$ , on trouvera que les carrés des longueurs des demi-diamètres principaux sont déterminés par l'équation

$$(AB - C^2)r^4 + D(A + B - 2CC\cos\gamma)r^2 + D^2\sin^2\gamma = 0.$$

De semblables considérations pourraient être appliquées à la recherche des longueurs des diamètres principaux, dans les surfaces du second ordre qui ont un centre.

Généralement, on peut parvenir aux équations qui déterminent les diamètres principaux, soit dans les lignes soit dans les surfaces du second ordre, en partant d'une propriété quelconque qui ne puisse convenir qu'à eux seuls; ainsi la propriété des *maximis* et *minimis* dont ils jouissent exclusivement se prête très-aisément à cet usage, et c'est d'elle, en effet, que M. Bérard est parti, pour parvenir aux formules dont la recherche a fait le sujet du présent mémoire et de l'autre que nous avons déjà rappelé. Mais, nous ferons à ce sujet la remarque que voici: c'est que, comme on ne démontre les propriétés des lignes et surfaces du second ordre, relatives à leurs diamètres principaux, qu'après avoir ramené leurs équations aux formes respectives

$$Px^2 + P'y^2 = H, \quad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H;$$

il s'ensuit qu'on ne peut employer ces propriétés, dans la recherche de  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ , qu'après avoir démontré, *a priori*, que ces équations donnent toutes les lignes et surfaces de cet ordre qui ont un centre. Les démonstrations des mêmes formules, par MM. Monge et Hachette, qui se trouvent dans la *Correspondance sur l'école polytechnique* (2.<sup>e</sup> vol., n.<sup>o</sup> 5, janvier 1812), sont aussi sujettes aux mêmes inconveniens. Il me paraît donc plus convenable et plus direct d'établir d'abord, par la transformation des coordonnées, les équations qui font connaître la situation et la grandeur des demi-diamètres principaux; et c'est ce que j'ai cherché à faire, dans ce mémoire, de la manière la plus simple, et en même temps la plus générale.

---

## ANALISE.

*Détermination du nombre des termes d'une équation complète d'un degré quelconque , entre un nombre quelconque d'inconnues.*

*Recherche des principales formules de la théorie des nombres figurés.*

*Démonstration du principe qui sert de fondement à la méthode publiée par M. BUDAN , pour la résolution des équations numériques ;*

Par M. GERGONNE.



**J**E réunis ici , dans un même article , diverses théories qui , à raison de la liaison étroite qui existe entre elles , ne peuvent que se simplifier beaucoup par leur rapprochement.

### §. I.

*Détermination du nombre des termes d'une équation complète d'un degré quelconque , entre un nombre quelconque d'inconnues.*

Soit  $m$  le degré d'une équation complète entre  $n$  inconnues ; le nombre des termes de cette équation sera une fonction de  $m$  et de  $n$  qu'il s'agit de déterminer , et que nous représenterons par  $A_{m,n}$ .

Pour plus de simplicité , concevons que les coefficients de tous les termes de cette équation soient positifs et égaux à l'unité : ce

qui ne changera rien à la nature du problème. L'équation proposée devant renfermer tous les termes de l'équation complète du  $(m-1)^{m-1}$  degré, entre  $n$  inconnues, plus la totalité des termes du  $m^{\text{me}}$  ordre, entre les mêmes inconnues ; en désignant par  $\nu$  le nombre de ces derniers, on devra avoir l'équation

$$A_{m,n} = A_{m-1,n} + \nu. \quad (1)$$

Il s'agit présentement de déterminer  $\nu$ .

Pour cela, concevons que l'on multiplie chacun des termes d'ordres inférieurs à  $m$  par une somme de puissances semblables des  $n$  inconnues, dont les exposants soient tels que ces multiplications donnent toutes des produits de l'ordre  $m$  : ce qui exigera que l'on multiplie le terme tout connu 1 par  $x^m+y^m+z^m+\dots$ , l'ensemble des termes du premier ordre par  $x^{m-1}+y^{m-1}+z^{m-1}+\dots$ , et ainsi de suite ; il est clair que le nombre total des termes de ces produits, abstraction faite de toute réduction, sera  $nA_{m-1,n}$ .

Or, je dis que ces mêmes termes ne seront autre chose que les termes du  $m^{\text{me}}$  ordre de la proposée, écrits chacun  $m$  fois. En effet, en représentant généralement l'un de ces derniers par  $x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$ , avec la condition  $\alpha+\beta+\gamma+\dots=m$ , on voit qu'il aura été formé autant de fois qu'il y a de manières de diminuer successivement chacun de ses exposants de toutes les unités qu'il renferme ; c'est-à-dire, de  $m$  manières différentes.

On a donc, d'après cela

$$nA_{m-1,n} = m\nu, \quad \text{d'où } \nu = \frac{n}{m} A_{m-1,n}; \quad (2)$$

et par conséquent (1)

$$A_{m,n} = A_{m-1,n} + \frac{n}{m} A_{m-1,n} = \frac{m+n}{m} A_{m-1,n};$$

ou enfin

$$mA_{m,n} = (m+n)A_{m-1,n}. \quad (3)$$

En changeant successivement, dans cette équation,  $m$  en  $m-1$ ,  $m-2$ ,

## FIGURÉS.

117

$$\begin{aligned}
 & m-2, m-3, \dots, 2, 1, \text{ et remarquant que } A_{1,n} = n+1, \text{ il viendra} \\
 & mA_{m,n} = (m+n)A_{m-1,n}, \\
 & (m-1)A_{m-1,n} = (m+n-2)A_{m-2,n}, \\
 & (m-2)A_{m-2,n} = (m+n-1)A_{m-3,n}, \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\
 & 2A_{2,n} = (n+2)A_{1,n}, \\
 & A_{1,n} = (n+1);
 \end{aligned}$$

ce qui donnera , en multipliant , supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation produit , et tirant la valeur de  $A_{m,n}$  (\*) ,

$$A_{m,n} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdots \frac{n+m}{m}; \quad (4)$$

formule qui résout le problème.

Cette solution, la plus simple que je connaisse, m'a été communiquée par M. G. Fornier, élève très-distingué du lycée de Nismes.

Si l'on multiplie, haut et bas, la valeur de  $A_{m,n}$  par  $1.2.3...n$ , elle devient

$$A_{m,n} = \frac{1.2.3.\dots\dots(m+n)}{1.2.3.\dots\dots m \times 1.2.3.\dots\dots n};$$

ou, en adoptant les notations de M. Kramp (\*\*),

$$A_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

On voit alors que  $A_{m,n}$  est une fonction symétrique de  $m$  et  $n$ , et qu'ainsi on doit avoir

$$A_{m,n} = A_{n,m}; \quad (5)$$

ce qui revient à dire qu'il y a autant de termes dans une équation complète du  $n^{\text{me}}$  degré entre  $m$  inconnues qu'il y en a dans une équation complète du  $m^{\text{me}}$  degré entre  $n$  inconnues.

(\*) Voyez la note de la page 200 du second volume de ce recueil.

(\*\*) Voyez la note de la page 1.<sup>re</sup> du 3.<sup>e</sup> volume de ce recueil.

## §. II.

*Recherche des principales formules de la théorie des nombres figurés.*

Parce que  $A_{m,n}$  est une fonction symétrique des nombres  $m$  et  $n$ , nous emploirons, à l'avenir, pour représenter cette fonction, la notation plus simple

$$A_{m,n} = (m, n).$$

En conséquence, nous aurons

$$(m, n) = (n, m), \quad (6)$$

et, quels que soient  $p$  et  $q$

$$(o, p) = (o, q) = (p, o) = (q, o) = 1. \quad (7)$$

Cette notation admise, l'équation (3), dans laquelle on peut permute entre eux les nombres  $m$  et  $n$ , donnera

$$\begin{aligned} m(m, n) &= (m+n)(m-1, n) , \\ n(m, n) &= (m+n)(m, n-1) ; \end{aligned}$$

la somme de ces deux équations, divisée par  $m+n$ , sera

$$(m, n) = (m-1, n) + (m, n-1); \quad (8)$$

or, en se rappelant les équations (7), on voit que cette dernière exprime la construction du *triangle arithmétique*; et qu'ainsi  $(m, n)$  est la formule générale des *nombres figurés*.

L'équation (6) exprime donc que *le  $(n+1)^{\text{me}}$  nombre figuré du  $m^{\text{me}}$  ordre est égal au  $(m+1)^{\text{me}}$  nombre figuré du  $n^{\text{me}}$  ordre*; et l'équation (8) exprime que *le  $(m+1)^{\text{me}}$  nombre figuré du  $n^{\text{me}}$  ordre, ou le  $(n+1)^{\text{me}}$  nombre figuré du  $m^{\text{me}}$  ordre, est la somme du  $m^{\text{me}}$  nombre figuré du  $n^{\text{me}}$  ordre et du  $n^{\text{me}}$  nombre figuré du  $m^{\text{me}}$  ordre*.

De cette dernière on tire

$$(m, n) - (m-1, n) = (m, n-1) ;$$

substituant successivement pour  $m$ , dans celle-ci, les nombres 1, 2, 3, ...,  $m$ , il viendra

$$\begin{aligned}
 (1, n) - 1 &= (1, n-1), \\
 (2, n) - (1, n) &= (2, n-1), \\
 (3, n) - (2, n) &= (3, n-1), \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots, \\
 (m, n) - (m-1, n) &= (m, n-1)
 \end{aligned}$$

ajoutant ces dernières et réduisant, on aura

$$(m, n) = (n, m) = (0, n-1) + (1, n-1) + (2, n-1) + \dots + (m, n-1); \quad (9)$$

et l'on aurait pareillement

$(m, n) = (n, m) = (0, m-1) + (1, m-1) + (2, m-1) + \dots + (n, m-1)$  ;  
 c'est-à-dire, que le  $(n+1)^{\text{me}}$  nombre figuré du  $m^{\text{me}}$  ordre, ou le  $(m+1)^{\text{me}}$  nombre figuré du  $n^{\text{me}}$  ordre, est égal à la somme des  $n^{\text{me}}$  nombres figurés de tous les ordres jusqu'au  $m^{\text{me}}$  ordre inclusivement; ou encore à la somme des  $m+1$  premiers nombres figurés du  $(n-1)^{\text{me}}$  ordre.

Je terminerai par donner, d'après M. Lhuilier (\*), la sommation des inverses des nombres figurés. Il est aisément de se convaincre, par le développement et les réductions, que l'équation suivante est identique

$$\frac{1}{(m, n-1)} = \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{m!}{(m+n-2)!} - \frac{(m+1)!}{(m+n-1)!} \right\}. \quad (10)$$

Si l'on y substitue successivement pour  $m$  les nombres  $0, 1, 2, \dots, m$ , il viendra

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(0, n-1)} &= \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1!}{(n-1)!} \right\}, \\
 \frac{1}{(1, n-1)} &= \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{1!}{(n-1)!} - \frac{2!}{n!} \right\}, \\
 \frac{1}{(2, n-1)} &= \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{2!}{n!} - \frac{3!}{(n+1)!} \right\}, \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
 \end{aligned}$$

(\*). Voyez ses *Éléments raisonnés d'algèbre*.

## NOMBRES

$$\frac{1}{(m, n-1)} = \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{m!}{(m+n-2)!} - \frac{(m+1)!}{(m+n-1)!} \right\};$$

d'où, en ajoutant et réduisant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0, n-1)} + \frac{1}{(1, n-1)} + \frac{1}{(2, n-1)} + \dots + \frac{1}{(m, n-1)} \\ = \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{1}{(n-2)!} - \frac{(m+1)!}{(m+n-1)!} \right\}; \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0, n-1)} + \frac{1}{(1, n-1)} + \frac{2}{(2, n-1)} + \dots + \frac{1}{(m, n-1)} \\ = \frac{n-1}{n-2} \left\{ 1 - \frac{1}{(m+1, n-2)} \right\}; \quad (11) \end{aligned}$$

Si, dans cette dernière formule, on suppose  $m = \infty$ , elle deviendra simplement,

$$\frac{1}{(0, n-1)} + \frac{1}{(1, n-1)} + \frac{1}{(2, n-1)} + \frac{1}{(3, n-1)} + \dots = \frac{n-1}{n-2}; \quad (12)$$

c'est-à-dire,

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{3}{n-2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{4}{n+3} + \dots = \frac{n-1}{n-2}.$$

## §. III.

*Démonstration du principe qui sert de fondement à la méthode donnée par M. BUDAN, pour la résolution des équations numériques.*

Soient  $P_{0,0}, P_{0,1}, P_{0,2}, P_{0,3}, \dots, P_{0,n-1}, P_{0,n}, \dots$  les termes de la première ligne horizontale d'une table à double entrée, dont la loi soit telle qu'un terme quelconque de cette table soit égal à celui qui le précède immédiatement à gauche, augmenté de celui qui est immédiatement au-dessus de lui. En désignant par  $P_{k,n}$  ce terme quelconque, on aura

$$P_{k,n} = P_{k,n-1} + P_{k-1,n}. \quad (13)$$

Pour connaître ce terme  $P_{k,n}$ , il est clair qu'il sera nécessaire et suffisant de connaître les termes de la première ligne horizontale, jusqu'au terme  $P_{0,n}$  inclusivement; d'où on peut conclure que si

l'on trouve une expression de  $P_{k,n}$  qui, renfermant la totalité de ces termes, satisfasse à l'équation (13), elle en sera la valeur complète.

Or, l'expression

$$P_{k,n} = (k-1,n)P_{\circ,\circ} + (k-1,n-1)P_{\circ,\circ} + \dots + (k-1,1)P_{\circ,n-1} + (k-1,0)P_{\circ,n}, \quad (14)$$

satisfait d'abord à la première de ces deux conditions; elle satisfait en outre à la seconde. On en tire en effet

$$P_{k-n,1} = (k-2,n)P_{\circ,\circ} + (k-2,n-1)P_{\circ,\circ} + \dots + (k-2,1)P_{\circ,n-1} + (k-2,0)P_{\circ,n},$$

$$P_{k,n-1} = (k-1,n-1)P_{\circ,\circ} + (k-1,n-2)P_{\circ,\circ} + \dots + (k-1,0)P_{\circ,n-1};$$

d'où on conclut, en ajoutant, et ayant égard à l'équation (8),

$$P_{k-1,n} + P_{k,n-1} = (k-1,n)P_{\circ,\circ} + (k-1,n-1)P_{\circ,\circ} + \dots + (k-1,1)P_{\circ,n-1} + (k-1,0)P_{\circ,n} = P_{k,n};$$

ce qui est précisément l'équation (13).

Si, dans l'équation (14), on change  $k$  en  $m-n+1$ , elle deviendra

$$P_{m-n+1,n} = (m-n,n)P_{\circ,\circ} + (m-n,n-1)P_{\circ,\circ} + \dots + (m-n,0)P_{\circ,n}; \quad (15)$$

équation qui va nous servir tout à l'heure.

Dans la table à double entrée dont il s'agit ici, les termes de la seconde ligne sont dits les *sommes premières* de ceux de la première; ceux de la troisième en sont dits les *sommes secondes*, et ainsi de suite.

Soit présentement l'équation quelconque

$$P_{\circ,\circ}x^m + P_{\circ,1}x^{m-1} + P_{\circ,2}x^{m-2} + \dots + P_{\circ,n}x^{m-n} + \dots + P_{\circ,m-1}x + P_{\circ,m} = 0. \quad (16)$$

Soit posé  $x-1=y$ , d'où  $x=y+1$ . En substituant, et conservant toujours les mêmes notations, il viendra

$$\begin{aligned} & P_{\circ,\circ}y^m + (m-1,1)P_{\circ,\circ} \left| y^{m-1} + \dots + (m-n, n)P_{\circ,\circ} \right| y^{m-n} + \dots + P_{\circ,\circ} \left| = 0; \quad (17) \right. \\ & + (m-1,0)P_{\circ,\circ} \left| \begin{array}{c} + \dots + (m-n, n-1)P_{\circ,\circ} \\ + \dots + (m-n, n-2)P_{\circ,\circ} \\ + \dots \dots \dots \dots \dots \\ + \dots + (m-n, 0)P_{\circ,\circ} \end{array} \right| \begin{array}{c} + \dots + P_{\circ,1} \\ + \dots + P_{\circ,2} \\ + \dots + P_{\circ,3} \\ + \dots + \\ + \dots + P_{\circ,m} \end{array} \end{aligned}$$

équation qui, en vertu des formules (7, 14 et 15), devient simplement

$$P_{m+1,0} \cdot y^m + P_{m,1} \cdot y^{m-1} + P_{m-1,2} \cdot y^{m-2} + \dots + P_{m-n+1,n} \cdot y^{m-n} + \dots + P_{1,m} = 0. \quad (18)$$

Ainsi, les coefficients successifs, de gauche à droite, des termes de l'équation dont les racines sont celles d'une équation proposée diminuée d'une unité, sont, à partir du premier terme, la première somme  $(m+1)^{\text{me}}$ , la seconde somme  $m^{\text{me}}$ , la troisième somme  $(m-1)^{\text{me}}$ , et ainsi de suite, des coefficients de la proposée.

C'est sur ce principe que repose la méthode publiée par M. Budan, pour la résolution des équations numériques; méthode qui n'exige uniquement que l'usage de l'addition et de la soustraction.

Rien n'est plus facile, d'après cela, que de diminuer les racines d'une équation d'une unité. Que l'équation proposée soit

$$5x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 15x + 24 = 0,$$

par le procédé indiqué ci-dessus, on formera la table suivante :

$$\begin{array}{r} 5 - 8 - 11 + 15 + 24, \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 - 3 - 14 + 29 + 53, \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 + 2 - 12 + 17, \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 + 7 - 5, \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 + 12, \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5, \\ \hline \end{array}$$

et l'équation transformée sera

$$5(x-1)^4 + 12(x-1)^3 - 5(x-1)^2 + 17(x-1) + 53 = 0;$$

identique avec la proposée. Nous renvoyons, pour les applications, à l'ouvrage de M. Budan.

## QUESTIONS RÉSOLUES.

*Solution du problème d'Arithmétique proposé à la page 384 du 3.<sup>me</sup> volume de ce recueil;*

Par un A B O N N É.



**E**NONCÉ. *Etant donné le produit de la multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un autre nombre , dont les chiffres ne sont que ceux du premier, écrits dans un ordre rétrograde ; trouver les deux facteurs ?*

Le premier moyen qui s'offre à l'esprit , pour résoudre le problème proposé , est d'écrire , sur une même ligne , tous les diviseurs du nombre donné ; de former une seconde ligne des quotiens obtenus en divisant le nombre donné par les nombres de la première ligne , et de comparer enfin les nombres correspondans dans les deux lignes. Il est clair , en effet , que tous ceux de la seconde ligne qui ne différeront de leurs correspondans dans la première qu'en ce que les mêmes chiffres y seront écrits dans un ordre rétrograde , pourront , avec ces correspondans , être pris pour les deux facteurs cherchés.

Il est même aisé de voir qu'on peut n'écrire dans la première ligne que ceux des diviseurs du nombre proposé qui n'excèdent pas sa racine carrée et borner de même ceux de la seconde ligne aux quotiens que ceux-ci fourniront , puisqu'en les prolongeant plus loin l'un et l'autre , on ne ferait que répéter , dans la ligne inférieure ,

des nombres déjà écrits dans la ligne supérieure, et vice versa.

*Exemple.* Soit le produit donné 252.

La racine quarrée de 252 tombant entre 15 et 16, on bornera la première ligne aux nombres inférieurs à ce dernier, ce qui donnera

Diviseurs.... 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14.

Quotiens.... 252, 126, 84, 63, 42, 36, 28, 21, 18.

d'où on conclura que les facteurs cherchés sont 12 et 21, dont le produit est en effet 252; et qu'ainsi le problème n'a qu'une solution.

Mais cette méthode, bonne tout au plus pour de très-petits nombres, deviendrait, pour ainsi dire, impraticable par sa longueur, si l'on voulait l'appliquer à des nombres tant soit peu considérables. Il faut donc en chercher une autre qui n'ait point cet inconvénient. Pour y parvenir plus facilement, proposons-nous d'abord le problème que voici :

*PROBLÈME.* Étant donné le produit d'un polynôme ordonné par rapport à une lettre quelconque, par un autre polynôme du même degré, ordonné par rapport à la même lettre, et ayant pour ses coefficients les coefficients du premier, écrits dans un ordre rétrograde; trouver les deux facteurs?

*Limites du problème.* Pour que le problème soit possible, le polynôme donné doit être d'un degré pair; et ce polynôme doit être réciproque; c'est-à-dire, que ses termes, à égale distance des extrêmes, doivent avoir les mêmes coefficients.

*Mode général de solution.* Soit le polynôme donné

$$ax^{2n} + bx^{2n-1} + cx^{2n-2} + \dots + hx^n + \dots + cx^2 + bx + a, \quad (1)$$

on supposera que les deux facteurs cherchés sont

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Gx + H, \quad Hx^n + Gx^{n-1} + \dots + Bx + A, \quad (2)$$

dont le produit est

$$\begin{array}{c}
 AHx^{2n} + AG|x^{2n-1} + AF|x^{2n-2} + \dots + A^2|x^n + \dots + AG|x + AH; (3) \\
 + BH| \quad + BG| \quad + \dots + B^2| \quad + .. + BH| \\
 - \quad + CH| \quad + \dots + C^2| \quad + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad + \dots \quad + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad + F^2 \quad + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad + G^2 \quad + \dots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad + H^2 \quad + \dots
 \end{array}$$

exprimant donc que ce produit est identique avec le polynôme (1), on obtiendra les  $n+1$  équations

$$\begin{aligned}AH &= a, \\AG+BH &= b, \\AF+BG+CH &= c,\end{aligned}$$

. . . . .

$$A^2+B^2+C^2+\dots+F^2+G^2+H^2=h;$$

lesquelles seront en nombre suffisant pour déterminer les  $n+1$  coefficients  $A, B, \dots, G, H$ , qui sont ici les inconnues du problème,

*Remarques.* Comme le produit (1) ne change pas en changeant les signes de ses facteurs, il s'ensuit qu'à chaque valeur de chacun des coefficients  $A, B, \dots, G, H$ , il doit nécessairement en répondre un autre qui n'en diffère que par le signe. Cette circonstance doit donc doubler le degré des équations du problème.

De plus, l'échange des facteurs entre eux ne devant pas changer le produit, et un même coefficient se trouvant dans l'un occuper le même rang, en allant de gauche à droite, qu'il occupe dans l'autre, en allant de droite à gauche; il s'ensuit que les coefficients également distans des extrêmes, dans l'un quelconque des facteurs, doivent être donnés, tous deux, par la même équation : circonstance

qui doit encore , comme la première , doubler le degré des équations du problème.

Il faut pourtant remarquer que , lorsque  $n$  est un nombre pair , il y a un coefficient du milieu , qui occupe le même rang dans les deux facteurs ; et auquel conséquemment la considération à laquelle nous venons de nous arrêter n'est point applicable ; ce coefficient doit donc alors être déterminé par une équation moins élevée de moitié que celles qui déterminent les autres.

Ainsi , en résumé , la recherche de l'un quelconque des coefficients  $A$  ,  $B$  ,.... $G$  ,  $H$  , devra généralement conduire à une équation ne renfermant que des puissances paires de ce coefficient , et dont le degré sera quadruple du nombre des solutions proprement dites que le problème pourra admettre ; mais le coefficient du milieu , lorsque le nombre des coefficients sera impair , sera donné par une équation d'un degré moindre.

Il est aisé, au surplus , d'éviter l'embarras des \'equations de degrés trop élevés , et d'en avoir dont le degré soit précisément ´egal au nombre des solutions du problème. Il ne s'agit , pour cela , que de substituer aux inconnues primitives  $A$  ,  $B$  ,.... $G$  ,  $H$  , les inconnues  $AH$  ,  $A^2+H^2$  ,  $BG$  ,  $B^2+G^2$  ,.... Il est ´evident , en effet , que ces nouvelles inconnues sont ´a la fois indifférentes et aux signes des facteurs et au renversement de leurs coefficients.

Eclaircissons présentement ces généralités par la considération de quelques cas particuliers , de plus en plus compliqués.

*Premier cas.  $n=1$ .*

Soit le produit proposé

$$ax^2+bx+a.$$

En posant ce produit ´egal ´a

$$(Ax+B)(Bx+A)=ABx^2+(A^2+B^2)x+AB ,$$

on aura , pour déterminer  $A$  et  $B$  , les deux \'equations

$$AB=a, \quad A^2+B^2=b;$$

ajoutant et retranchant successivement à la seconde le double de la première et extrayant ensuite la racine quarrée des deux membres, il viendra

$$A+B=\sqrt{b+2a}, \quad A-B=\sqrt{b-2a},$$

d'où

$$A=\frac{1}{2}\{\sqrt{b+2a}+\sqrt{b-2a}\}, \quad B=\frac{1}{2}\{\sqrt{b+2a}-\sqrt{b-2a}\};$$

Ainsi le produit donné, décomposé en facteurs, sera

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2}[\sqrt{b+2a}+\sqrt{b-2a}]x + \frac{1}{2}[\sqrt{b+2a}-\sqrt{b-2a}] \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2}[\sqrt{b+2a}-\sqrt{b-2a}]x + \frac{1}{2}[\sqrt{b+2a}+\sqrt{b-2a}] \right\}. \end{aligned}$$

*Application.* Si le produit donné est

$$18x^2+45x+18;$$

on aura  $a=18$ ,  $b=45$ ,  $b+2a=81$ ,  $b-2a=9$ ,  $\sqrt{b+2a}=9$ ,

$$\sqrt{b-2a}=3, \quad \frac{1}{2}[\sqrt{b+2a}+\sqrt{b-2a}]=6, \quad \frac{1}{2}[\sqrt{b+2a}-\sqrt{b-2a}]=3,$$

et ce produit décomposé sera

$$(3x+6)(6x+3).$$

*Deuxième cas. n=2.*

Soit le produit proposé

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+a.$$

En posant ce produit égal à

$$(Ax^2+Bx+C)(Cx^2+Bx+A)=ACx^4+AB|x^3+A^2|x^2+AB|x+AC|+$$

$$+BC|+B^2|+BC|$$

$$+C^2|$$

on aura, pour déterminer  $A$ ,  $B$ ,  $C$  les trois équations

$$AC=a, \quad B(A+C)=b, \quad A^2+C^2=c-B^2.$$

Si, à la troisième équation, on ajoute le double de la première il viendra

## QUESTIONS

$$(A+C)^2 = (c+2a) - B^2 ;$$

mais la seconde donne

$$(A+C)^2 = \frac{b^2}{B^2} ;$$

on aura donc, par l'égalité de ces deux valeurs,

$$B^4 - (c+2a)B^2 + b^2 = 0$$

d'où, en négligeant le double signe de  $B$ ,

$$B = \sqrt{\frac{(c+2a) \pm \sqrt{(c+2a)^2 - 4b^2}}{2}} ;$$

d'un autre côté, en retranchant le double de l'équation  $AC=a$  de l'équation  $A^2 + C^2 = c - B^2$ , et extrayant ensuite la racine quarrée, il vient

$$A-C = \sqrt{(c-2a)-B^2} ;$$

et puisqu'on a d'ailleurs

$$A+C = \frac{b}{B} ,$$

on trouvera

$$A = \frac{b}{2B} + \frac{1}{2}\sqrt{(c-2a)-B^2} , \quad C = \frac{b}{2B} - \frac{1}{2}\sqrt{(c-2a)-B^2} ;$$

au moyen de quoi tout sera connu, dans les deux facteurs du produit donné.

*Application.* Si le produit donné est

$$12x^4 + 8x^3 + 41x^2 + 8x + 12 ,$$

on aura  $a=12$ ,  $b=8$ ,  $c=41$ , d'où  $c+2a=65$ ,  $c-2a=17$   $(c+2a)^2=4225$ ,  $(c+2a)^2-4b^2=3969$ ,  $\sqrt{(c+2a)^2-4b^2}=63$ ,  $B=1$  ou  $8$ ,  $A=6$  ou  $\frac{1}{2}(1+\sqrt{-47})$ ,  $C=2$  ou  $\frac{1}{2}(1-\sqrt{-47})$ ; le produit décomposé sera donc

$$(2x^2+x+6)(6x^2+x+2) ,$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2}(1+\sqrt{-47})x^2 + 8x + \frac{1}{2}(1-\sqrt{-47}) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2}(1-\sqrt{-47})x^2 + 8x + \frac{1}{2}(1+\sqrt{-47}) \right\}. \end{aligned}$$

*Troisième cas. n=3.*

Soit le produit proposé

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g.$$

En posant ce produit égal à

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)(Dx^3 + Cx^2 + Bx + A) = ADx^6 + AC + BD \quad | \quad x^5 + AB \\ + BC \quad | \quad x^4 + A^2 \\ + CD \quad | \quad x^3 + \dots \\ + D^2 \quad | \quad + \dots$$

on aura, pour déterminer  $A, B, C, D$ , les quatre équations

$$AD=a, \quad AC+BD=b, \quad AB+BC+CD=c, \quad A^2+B^2+C^2+D^2=d,$$

en y joignant les quatre suivantes

$$AD=M, \quad (1) \quad A^2+D^2=P, \quad (3)$$

$$BC=N, \quad (2) \quad B^2+C^2=Q, \quad (4)$$

elles deviendront

$$M=a, \quad (5) \quad AC+BD=b, \quad (6) \quad AB+CD=c-N, \quad (7) \quad P+Q=d, \quad (8)$$

en prenant successivement le produit et la somme des quarrés des équations (6), (7), et ayant égard aux équations (1), (2), (3), (4), il vient

$$NP+MQ=b(c-N), \quad (9) \quad PQ+4MN=(b^2+c^2)-2cN+N^2, \quad (10)$$

éliminant  $M$  et  $N$  entre les équations (5), (9), (10), il viendra

$$\begin{aligned} & a^2Q^2 - \{P^3 - 2bP^2 - [2a(c+2a) - b^2]P - 4abc\}Q \\ & + \{(b^2+c^2)P^2 + 2b(b^2-2ac)P + b^2(b^2-4ac)\} = 0; \end{aligned}$$

chassant enfin  $Q$  de cette équation, au moyen de l'équation (8), elle deviendra

$$P^4 + (3b-d)P^3 + (2b^2 - 2bd - 3a^2 - 2ac + c^2)P^2 \\ + (2b^3 - b^2d - 4abc - 4a^2b + 2a^2d + 2acd)P + (b^4 - 4ab^2c + 4a^2bd + a^2d^2) = 0.$$

Telle est l'équation qu'il faudra résoudre pour avoir la valeur de  $P$ ; on aura ensuite

$$Q = d - P, \quad M = a, \quad N = \frac{bc - aQ}{P + b},$$

et enfin

$$A = \frac{1}{2} \{ \sqrt{P+2M} + \sqrt{P-2M} \}, \quad B = \frac{1}{2} \{ \sqrt{Q+2N} - \sqrt{Q-2N} \}, \\ C = \frac{1}{2} \{ \sqrt{Q+2N} + \sqrt{Q-2N} \}, \quad D = \frac{1}{2} \{ \sqrt{P+2M} - \sqrt{P-2M} \}.$$

*Application.* Si le produit donné est

$$12x^6 + 56x^5 + 33x^4 + 122x^3 + 33x^2 + 56x + 12,$$

on aura  $a=12$ ,  $b=56$ ,  $c=33$ ,  $d=122$ ; en conséquence, l'équation en  $P$  sera

$$P^4 - 10P^3 - 7527P^2 - 20560P + 10945600 = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles positives, dont l'une entière qui est 40 et l'autre incommensurable, comprise entre 84 et 85; les deux autres racines sont imaginaires. En ne conservant que la seule racine  $P=40$ , nous aurons

$$Q = 82, \quad M = 12, \quad N = 9, \\ A = 6, \quad B = 1, \quad C = 9, \quad D = 2,$$

le produit décomposé sera donc

$$(6x^3 + x^2 + 9x + 2)(2x^3 + 9x^2 + x + 6).$$

On voit aisément ce qu'il y aurait à faire pour des produits de degrés plus élevés.

Tout nombre pouvant être considéré comme un polynôme ordonné par rapport aux puissances de la base du système de numération, le problème d'arithmétique qui a été proposé ne diffère uniquement de celui qui vient de nous occuper qu'en ce que, dans les multiplications numériques, les dixaines de chaque ordre vont

continuellement se joindre , comme unités , avec les unités de l'ordre immédiatement supérieur ; et en ce qu'on ne peut admettre , pour les inconnues , que des valeurs entières et positives moindres que 10.

Ce problème se résoudrait donc de la même manière que l'autre , si l'on parvenait à faire rentrer dans chaque ordre les dixaines qu'on en a fait sortir ; or , c'est là une chose très-aisée , ainsi que nous l'allons voir .

*Exemple I.* Soit le produit donné = 2268.

Ce produit devant être un polynôme d'un nombre impair de termes , le nombre de ses termes doit être trois et le terme le plus élevé , qui doit avoir deux chiffres , doit être compris dans 22 ; mais comme l'autre terme extrême , auquel celui-là doit être égal , est terminé par 8 , il s'ensuit que l'un et l'autre doivent être égaux à 18 , d'où il est aisé de conclure que celui du milieu est 45 , ce qui , en effet , complète le produit total , ainsi qu'on le voit ici

$$1800+450+18 ;$$

le problème revient donc au cas où il serait question du polynôme  $18x^2+45x+18$  ; on trouvera donc , par la première application ci-dessus

$$2268=36\times 63.$$

*Exemple II.* Soit le produit donné = 132192.

On voit d'abord que les deux produits extrêmes sont égaux à 12 , ce qui donne

$$120000+12180+12 ;$$

décomposant de même le nombre 1218 on trouvera 8 pour chacun des produits extrêmes , ce qui donnera

$$120000+8000+4100+80+12 ;$$

il s'agira donc de décomposer le polynôme  $12x^4+8x^3+41x^2+8x+12$  , ce qui donnera , par la seconde application ,

$$132192=216\times 612.$$

*Exemple III.* Soit le produit = 18055872.

Ce produit se décomposant comme il suit

$$12000000 + 5600000 + 330000 + 122000 + 3300 + 560 + 12 ;$$

on trouvera, par le troisième cas,

$$18055872 = 2916 \times 6192.$$


---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Problèmes de Géométrie.*

I. DÉTERMINER l'ellipse de plus grande surface inscriptible ou circonscriptible à un triangle donné ?

II. Déterminer l'ellipsoïde de plus grand volume inscriptible ou circonscripible à un tétraèdre donné ?

### *Problème d'Analyse.*

Assigner le terme général du développement de la série

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \dots + \frac{x^m}{1-x^m} + \dots$$

ordonnée suivant les puissances ascendantes de  $x$ ? (\*)

---

(\*) Le géomètre qui propose ce problème observe que sa résolution offrirait un caractère certain pour discerner les nombres qui sont premiers de ceux qui ne le sont pas. Il est aisément de voir en effet que, dans le terme général  $A_n x^n$ , le coefficient  $A_n$  n'est autre chose que le nombre abstrait qui indique combien l'exposant  $n$  a de diviseurs, y compris lui-même et l'unité; de manière que  $n$  sera ou ne sera pas premier, suivant que sa substitution dans  $A_n$  rendra ce coefficient égal à 2 ou à un nombre plus grand que 2.

## PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques;*

Par M. ARGAND.



AU RÉDACTEUR DES *ANNALES*,

MONSIEUR,

LE mémoire de M. J. F. Français qui a paru à la page 61 du 4<sup>e</sup> volume des *Annales*, a pour objet d'exposer quelques nouveaux principes de géométrie de position, dont les conséquences tendent particulièrement à modifier les notions admises jusqu'ici sur la nature des quantités imaginaires.

En terminant son mémoire, M. Français annonce qu'il a trouvé le fond de ces nouvelles idées dans une lettre de M. Legendre qui en parlait comme d'une chose qui lui avait été communiquée, et il témoigne le désir que le premier auteur de ces idées mette au jour son travail sur ce sujet. Il y a tout lieu de croire que le vœu de M. Français est depuis long-temps rempli. J'ai publié en 1806, un opuscule sous le titre d'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*, dont les principes sont entièrement analogues à ceux de M. Français, ainsi que vous pourrez en juger par l'exemplaire que j'ai l'honneur de vous adresser (\*). M. Legendre a eu, dans le temps, la bonté d'examiner mon manuscrit et de me donner ses avis, et ce doit être là, si je ne m'abuse, la source de la communication dont parle M. Français.

---

(\*) L'ouvrage se trouve à Paris, chez l'auteur, faubourg St-Marceau, rue du chemin de Gentilly, n.<sup>o</sup> 12.

J. D. G.

Tom. IV, n.<sup>o</sup> V, 1.<sup>er</sup> novembre 1813.

18

## 134 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

L'écrit dont il s'agit n'ayant été répandu qu'à très-petit nombre, il est extrêmement probable qu'aucun de vos lecteurs n'en a connaissance; et je crois pouvoir prendre cette occasion de leur en présenter un extrait, présumant que cette matière pourra les intéresser, au moins par sa nouveauté; et faire naître chez quelques-uns d'entre eux des réflexions propres à perfectionner et à étendre une théorie dont mon ouvrage ne présente encore que les premières bases.

1. Si nous considérons la suite des grandeurs

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \dots;$$

nous pouvons concevoir chacun de ses termes comme naissant de celui qui le précède, en vertu d'une opération la même pour tous, et qui peut être répétée indéfiniment.

Dans la suite inverse

$$\dots, 4\alpha, 3\alpha, 2\alpha, \alpha, 0,$$

on peut également concevoir chaque terme comme provenant du précédent; mais la suite ne peut être prolongée au-delà de zéro, qu'autant qu'il sera possible d'opérer sur ce dernier terme comme sur les précédens.

Or, si  $\alpha$  désigne, par exemple, un objet matériel, comme *un franc, un gramme*, les termes qui, dans la seconde suite, devraient suivre zéro, ne peuvent rien représenter de réel. On doit donc les qualifier d'*imaginaires*.

Si  $\alpha$ , au contraire, désigne un certain degré de pesanteur, agissant sur le bassin A d'une balance contenant des poids dans ses deux bassins; comme il est possible de diminuer  $\alpha$ , soit en enlevant des poids au bassin A, soit en en ajoutant au bassin B, la suite en question pourra être prolongée au-delà de zéro; et  $-\alpha, -2\alpha, -3\alpha, \dots$  seront des quantités aussi réelles que  $+\alpha, +2\alpha, +3\alpha, \dots$

Cette distinction des grandeurs en *réelles* et *imaginaires* est plutôt physique qu'analytique; elle n'est pas d'ailleurs tout à fait insolite dans le langage de la science. Le nom de *foyer imaginaire* est usité en optique, pour désigner le point de concours des rayons qui, analytiquement parlant, sont négatifs.

2. Lorsque nous comparons entre elles, sous le point de vue appelé *rapport géométrique*, deux quantités d'un genre susceptible de fournir des valeurs négatives, l'idée de ce rapport est évidemment complexe. Elle se compose 1.<sup>o</sup> de l'idée du rapport numérique, dépendant de leurs grandeurs respectives, considérées *absolument*; 2.<sup>o</sup> de l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent: rapport qui, dans ce cas-ci, ne peut être que l'*identité* ou l'*opposition*. Ainsi, quand nous disons que  $+a : -b :: ma : mb$ , nous énonçons, non seulement que  $a : b :: ma : mb$ , mais nous affirmons de plus que la direction de la quantité  $+a$  est, relativement à la direction de la quantité  $-b$ , ce que la direction de  $-ma$  est relativement à la direction de  $+mb$ ; et nous pouvons même exprimer cette dernière conception d'une manière absolue, en écrivant

$$(A) \quad +1 : -1 :: -1 : +1.$$

3. Soit proposé maintenant de déterminer la moyenne proportionnelle entre  $+1$  et  $-1$ , c'est-à-dire, d'assigner la quantité  $x$  qui satisfait à la proportion

$$+1 : x :: x : -1.$$

On ne pourra égaler  $x$  à aucun nombre positif ou négatif, d'où il semble qu'on doit conclure que la quantité cherchée est imaginaire.

Mais, puisque nous avons trouvé plus haut que les quantités négatives, qui paraissaient d'abord ne pouvoir exister que dans l'imagination, acquièrent une existence réelle, lorsque nous combinons l'idée de la *grandeur absolue* avec celle de la *direction*; l'analogie doit nous porter à chercher si l'on ne pourrait pas obtenir un résultat analogue, relativement à la quantité proposée.

Or, s'il existe une direction  $d$ , telle que la direction positive soit à  $d$  ce que celle-ci est à la direction négative, en désignant par  $i_d$  l'unité prise dans la direction  $d$ , la proportion

$$(B) \quad +1 : i_d :: i_d : -1,$$

présentera 1.<sup>o</sup> une proportion purement numérique  $1 : 1 :: 1 : 1$ , 2.<sup>o</sup> une proportion ou similitude de rapports de direction, analogue à celle de la proportion (A); et, puisqu'on admet la vérité de cette

136 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE  
dernière, on ne saurait se refuser à reconnaître également la légitimité de la proportion (B).

4. Nous allons encore établir ici une distinction physique entre les quantités réelles et imaginaires. Que l'unité dont il s'agit soit, comme plus haut, un certain degré de pesanteur, agissant sur un des bras d'une balance. Nous avons trouvé que ce genre de grandeur peut réellement être positif ou négatif; mais on ne saurait aller plus loin; et on ne peut, en aucune manière, concevoir un genre de poids tel que  $i_d$  représente quelque chose de réel. Donc, dans ce cas,  $i_d$  est une quantité imaginaire.

Prenons maintenant pour unité positive une ligne KA (fig. 1), considérée comme ayant sa direction de K à A. Suivant les notions universellement reçues, l'unité négative sera KI, égale à KA, mais prise dans un sens opposé.

Tirons KE, perpendiculaire à IKA; nous aurons la relation suivante :  
La direction de KA est, à la direction de KE, comme celle-ci est à la direction de KI.

La condition nécessaire pour réaliser la proportion (B) se trouvera donc complètement satisfaite, en prenant pour  $\alpha$  la direction de KE; et on aura  $i_d = KE$ : quantité tout aussi réelle que KA et KI. On voit aussi que la même condition est également remplie par KN, opposée à KE: ces deux dernières quantités étant entre elles ::+1:-1, ainsi que cela doit être.

De même qu'on a assigné une moyenne proportionnelle réelle KE entre +1 et -1, ou entre KA et KI, on pourra construire les moyennes KC, KG, . . . . , entre KA et KE, KE et KI, . . . .

De là, et par une suite de raisonnemens que nous supprimons, on arrivera à cette conséquence générale que, si (fig. 2)

$$\text{Ang.} AKB = \text{Ang.} A'K'B' ,$$

on a, abstraction faite des grandeurs absolues,

$$KA:KB::K'A':K'B'.$$

C'est là le principe fondamental de la théorie dont nous avons essayé de poser les premières bases, dans l'écrit dont nous donnons ici un extrait. Ce principe n'a rien au fond de plus étrange que celui sur lequel est fondée la conception du rapport géométrique entre deux lignes de signes différens, et il n'en est proprement qu'une généralisation.

5. Comme, dans ce qui suivra, nous aurions à répéter fréquemment la phrase : *lignes considérées comme tirées dans une certaine direction*, nous emploirons l'expression abrégée : *lignes en direction* ou *lignes dirigées*; et nous dénoterons par  $\overline{AB}$  la ligne  $AB$ , dirigée de  $A$  en  $B$ , et par  $AB$ , simplement, cette même ligne, considérée dans sa grandeur absolue. Nous préférons le mot de *direction* à celui de *position*, parce que le premier indique, entre les deux extrémités de la ligne, une différence, essentielle dans notre théorie, que ne marque pas le dernier. Nous pourrons réservier celui-ci pour désigner collectivement deux directions opposées, et nous dirons que  $\overline{AB}$  et  $\overline{BA}$  ont la même position.

6. Nous allons maintenant examiner comment les lignes dirigées se combinent entre elles par addition et multiplication, et en construire les sommes et les produits.

La multiplication ne présente aucune difficulté. Un produit  $A \times B$  n'étant autre chose que le quatrième terme de la proportion  $1:A::B:x$ , il ne s'agit que d'appliquer aux lignes données le principe du n.<sup>o</sup> 4.

Quant à l'addition, la règle que nous allons donner peut se démontrer facilement par les théorèmes qui donnent les sinus et cosinus de la somme de deux arcs; mais il semble qu'il serait plus élégant de la tirer, *a priori*, des principes de la chose. En raisonnant par analogie, on peut remarquer que, lorsqu'il s'agit d'ajouter deux lignes, positives ou négatives  $a, b$ , on a pour règle générale quels que soient les signes, de tirer d'abord  $\overline{AB} =$  l'une des lignes,  $a$  par exemple; de prendre le point d'arrivée  $B$  de cette ligne pour point de départ de la ligne  $b$ , de tirer ensuite  $\overline{BC} = b$ , et la ligne  $\overline{AC}$ , dont les points de départ et d'arrivée  $A, C$  sont respective-

138 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

ment le point de départ de la première ligne  $a$  et le point d'arrivée de la seconde ligne  $b$ , sera  $=a+b$ .

Généralisons ce principe et nous conclurons que A, B, C, ..., F, G, H, étant des points quelconques, on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{C} \dots + \dots + \overline{F} + \overline{FG} + \overline{GH} = \overline{AH}.$$

7. On peut décomposer une ligne en direction donnée  $\overline{KP}$  (fig. 3) en deux parties appartenant à des *positions* données KA et KB. Il suffit, pour cela, de tirer, sur KB, KA, les lignes PM, PN, parallèles à KA, KB; et on aura

$$\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP} = \overline{KN} + \overline{NP};$$

mais, comme on a

$$\overline{KM} = \overline{NP} \text{ et } \overline{KN} = \overline{MP},$$

et comme d'ailleurs il n'y a que ces deux manières d'opérer la décomposition proposée, il faut en conclure, en général, que si, ayant

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A'} + \overline{B'},$$

A, A' ont la même direction  $a$ , et B, B' la même direction  $b$ ,  $a$  et  $b$  n'appartenant pas à la même position, on doit avoir aussi

$$\overline{A} = \overline{A'} \text{ et } \overline{B} = \overline{B'}.$$

Cette partition a fréquemment lieu, lorsque l'une des positions est celle de  $\pm i$  et l'autre la position perpendiculaire; ce qui revient à la séparation du réel et de l'imaginaire.

8. Passons aux applications, et établissons d'abord quelques conséquences dont l'emploi est le plus fréquent.

Soient (fig. 4) AB, BC, ..., EN, AB', B'C', ..., E'N', des arcs égaux, au nombre de  $n$ , de chaque côté du point A; KA étant prise pour unité; et soit  $\overline{KB} = u$ ; on aura

$$\overline{KA} = 1, \overline{KB} = u, \overline{KC} = u^2, \overline{KD} = u^3, \dots, \overline{KN} = u^n,$$

$$\overline{KA} = 1, \overline{KB'} = \frac{1}{u}, \overline{KC'} = \frac{1}{u^2}, \overline{KD'} = \frac{1}{u^3}, \dots, \overline{KN'} = \frac{1}{u^n},$$

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KA}} = 1, \frac{\overline{KB}}{\overline{KB'}} = u^2, \frac{\overline{KC}}{\overline{KC'}} = u^4, \frac{\overline{KD}}{\overline{KD'}} = u^6, \dots, \frac{\overline{KN}}{\overline{KN'}} = u^{2n}.$$

Et, si l'on prend, sur les rayons correspondans,  $K\beta' = K\beta$ ,  $K\gamma' = K\gamma$ ,  $K\delta' = K\delta$ , ..., les longueurs  $K\beta$ ,  $K\gamma$ ,  $K\delta$ , ... étant à volonté, on aura encore

$$\frac{\overline{K\beta}}{\overline{K\beta'}} = u^2, \frac{\overline{K\gamma}}{\overline{K\gamma'}} = u^4, \frac{\overline{K\delta}}{\overline{K\delta'}} = u^6, \dots$$

Si sur des rayons  $\overline{KA}$ ,  $\overline{KM}$ ,  $\overline{KN}$ , ..., pris pour bases, on construit des figures semblables, et que  $\overline{a}$ ,  $\overline{m}$ ,  $\overline{n}$ , ... soient des lignes homologues de ces figures, on aura

$$(C) \quad \overline{m} = \overline{a} \times \overline{KM}, \quad \overline{n} = \overline{a} \times \overline{KN}, \dots$$

9. Soient (fig. 5)  $\text{Arc.}AB = CD = a$ ,  $\text{Arc.}AC = b$ ; on aura (5, 6, 7)

$$\begin{aligned} \text{Cos.(}a+b\text{)} + \sqrt{-1} \text{Sin.(}a+b\text{)} &= \overline{K\delta} + \overline{\delta D} = \overline{KD} = \overline{KB} \times \overline{KC} \\ &= (\overline{K\beta} + \overline{\beta B}) \times (\overline{K\gamma} + \overline{\gamma C}) = (\text{Cos.}a + \sqrt{-1} \text{Sin.}a)(\text{Cos.}b + \sqrt{-1} \text{Sin.}b) \\ &= (\text{Cos.}a \text{Cos.}b - \text{Sin.}a \text{Sin.}b) + \sqrt{-1}(\text{Sin.}a \text{Cos.}b + \text{Cos.}a \text{Sin.}b); \end{aligned}$$

donc, en séparant,

$$\begin{aligned} \text{Cos.(}a+b\text{)} &= \text{Cos.}a \text{Cos.}b - \text{Sin.}a \text{Sin.}b, \\ \text{Sin.(}a+b\text{)} &= \text{Sin.}a \text{Cos.}b + \text{Cos.}a \text{Sin.}b. \end{aligned}$$

Soient (fig. 6)  $AC = a$ ,  $AB = b$ ,  $BD = BC = \frac{a-b}{2}$ ; prenons

$$\begin{aligned} \text{AE} &= BD \text{ et tirons } KD \text{ et } BC \text{ se coupant en } d; \text{ nous aurons} \\ (\text{Cos.}a - \text{Cos.}b) + \sqrt{-1}(\text{Sin.}a - \text{Sin.}b) &= (\text{Cos.}a + \sqrt{-1} \text{Sin.}a) \\ - (\text{Cos.}b + \sqrt{-1} \text{Sin.}b) &= (\overline{K\gamma} + \overline{\gamma C}) - (\overline{K\beta} + \overline{\beta B}) = \overline{KC} - \overline{KB} \\ &= \overline{KC} + \overline{BK} = \overline{BC} = 2\overline{dC} = (\text{n.}^o 8. C) 2\overline{E} \times \overline{KD} \\ &= 2\overline{E} \times (\overline{K\delta} + \overline{\delta D}) = 2\sqrt{-1} \text{Sin.} \frac{a-b}{2} \left( \text{Cos.} \frac{a+b}{2} + \sqrt{-1} \text{Sin.} \frac{a+b}{2} \right) \\ &= -2 \text{Sin.} \frac{a-b}{2} \text{Sin.} \frac{a+b}{2} + 2\sqrt{-1} \text{Sin.} \frac{a-b}{2} \text{Cos.} \frac{a+b}{2}; \end{aligned}$$

140 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

Donc, en séparant,

$$\cos.a - \cos.b = -2\sin.\frac{a-b}{2} \sin.\frac{a+b}{2},$$

$$\sin.a - \sin.b = +2\sin.\frac{a-b}{2} \cos.\frac{a+b}{2}.$$

Soient (fig. 7)  $AB, BC, \dots EN$ , des arcs égaux, au nombre de  $n$ ; et faisons  $AB=a$ . Nous aurons

$$\begin{aligned} \cos.na + \sqrt{-1}\sin.na &= \cos.AN + \sqrt{-1}\sin.AN = \overline{K}_v + \overline{N} = \\ \overline{KN} &= \overline{KB}^n = (\overline{K}_v + \overline{sB})^n = (\cos.a + \sqrt{-1}\sin.a)^n. \end{aligned}$$

On aura encore

$$\begin{aligned} \cos.a + \sqrt{-1}\sin.a &= \overline{K}_v + \overline{sB} = \overline{KB} = \overline{KN}^{\frac{1}{n}} = (\overline{K}_v + \overline{N})^{\frac{1}{n}} \\ &= \overline{K}_v^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left( \frac{\overline{N}}{\overline{K}_v} \right) + \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 1}{1 \cdot 2} \left( \frac{\overline{N}}{\overline{K}_v} \right)^2 + \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 1 \cdot \frac{1}{n} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{\overline{N}}{\overline{K}_v} \right)^3 + \dots \right\} \\ &= (\cos.na)^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{-1}\sin.na}{\cos.na} + \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(-1)\sin.2na}{\cos.na} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Faisant  $na=x$  et ensuite  $n=\infty$ , on obtient, par les termes affectés de  $\sqrt{-1}$ ,

$$x = \operatorname{Tang} x - \frac{1}{2} \operatorname{Tang}^3 x + \frac{1}{2} \operatorname{Tang}^5 x - \dots$$

Soit l'arc  $AN$  (fig. 7) divisé en  $n$  parties égales. Les rayons  $\overline{KA}$ ,  $\overline{KB}$ ,  $\overline{KC}$ , ..., forment une progression géométrique, et les arcs correspondants, ou certains multiples de ces arcs, peuvent être pris pour les logarithmes de ces rayons.

Posons  $\operatorname{Log.} \overline{KN} = mAN = mnAB$ ,  $m$  étant le module indéterminé. Si l'on fait  $n=\infty$ , l'arc  $AB$  pourra être considéré comme une droite perpendiculaire sur  $\overline{KA}$ ; on aura donc  $\overline{AB} = \sqrt{-1}AB$ ; ou  $AB = -\sqrt{-1}\overline{AB}$  ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Log.} \overline{KN} &= mnAB = -mn\sqrt{-1}\overline{AB} = -mn\sqrt{-1}(\overline{AK} + \overline{KB}) = \\ &= -mn\sqrt{-1}(-1 + \overline{KN}^{\frac{1}{n}}). \end{aligned}$$

Faisant  $\overline{KN} = 1 + x$ , il vient

$$\operatorname{Log.}$$

DES GRANDEURS IMAGINAIRES. 141

$$\begin{aligned}\text{Log.}(1+x) &= -mn\sqrt{-1}[-1+(1+x)^{\frac{1}{n}}] = -mn\sqrt{-1}(-1+1+\frac{1}{n}x-\frac{1}{2n}x^2+\dots) \\ &= -m\sqrt{-1}(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots)\end{aligned}$$

ou encore, parce que  $m$  est indéterminé

$$\text{Log.}(1+x) = m(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots).$$

Divisons les deux arcs égaux  $AN$ ,  $AN'$  (fig. 8) en  $n$  parties égales ; tirons la double tangente  $nn'$  et les sécantes  $Kb$ ,  $Kc$ , ...; nous aurons (8)

$$\therefore \frac{\overline{KA}}{\overline{KA}} : \frac{\overline{Kb}}{\overline{Kb'}} : \frac{\overline{KC}}{\overline{KC'}} : \dots : \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}};$$

d'où les arcs correspondans, ou certains multiples de ces arcs peuvent encore être pris pour les logarithmes de ces mêmes quantités, savoir :

$$m \cdot AN = \text{Log.} \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}}.$$

Soit  $AN=x$ ; on a

$$mx = \text{Log.} \frac{\overline{Kn}}{\overline{Kn'}} = \text{Log.} \frac{\overline{KA} + \overline{An}}{\overline{KA} + \overline{An'}} = \text{Log.} \frac{i + \sqrt{-1} \tan x}{i - \sqrt{-1} \tan x}.$$

Soit encore (fig. 9) l'arc  $AN=2\alpha$  divisé en un nombre infini de parties égales, dont  $AB$  soit la première, prenons  $AP=\frac{AN}{2}=\alpha$ , et tirons  $AN$ ,  $KP$  et  $P\phi$ ; nous aurons

$$\begin{aligned}2\alpha\sqrt{-1} &= 2AN\sqrt{-1} = 2n \cdot AB\sqrt{-1} = 2n \cdot \overline{AB} = 2n(\overline{AK} + \overline{KB}) \\ &= 2n(-1 + \overline{KN}^{\frac{1}{n}}) = 2n[-1 + (\overline{KA} + \overline{AN})^{\frac{1}{n}}] = 2n[-1 + (1 + \overline{AN})^{\frac{1}{n}}] \\ &= 2n(-1 + 1 + \frac{1}{n} \overline{AN} + \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 1}{2} \overline{AN}^2 + \dots) = 2(\overline{AN} - \frac{\overline{AN}^2}{2} + \frac{\overline{AN}^3}{3} - \dots); \quad (D)\end{aligned}$$

$$\text{mais (8), } \overline{AN} = \overline{2P}N = \overline{2\phi P} \times \overline{KP} = \overline{2\phi P}(\overline{K\phi} + \overline{\epsilon P})$$

$$= 2\sqrt{-1} \sin \alpha (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha);$$

*Tom. IV.*

d'où

$$\overline{AN}^2 = -(2 \sin a)^2 (\cos 2a + \sqrt{-1} \sin 2a) ,$$

$$\overline{AN}^3 = -\sqrt{-1}(2 \sin a)^3 (\cos 3a + \sqrt{-1} \sin 3a) ,$$

.....

En substituant ces valeurs dans la série (D) et séparant, il vient

$$2a = + \frac{2\sin a}{1} \cos a + \frac{(2\sin a)^2}{2} \sin 2a - \frac{(2\sin a)^3}{3} \cos 3a - \dots$$

$$o = -\frac{2 \sin a}{1} \sin a + \frac{(2 \sin a)^2}{2} \cos 2a + \frac{(2 \sin a)^3}{3} \sin 3a - \dots$$

9. Nous bornerons ici ces applications. On peut, ainsi que nous l'avons fait dans notre *Essai*, obtenir, d'une manière analogue, les principaux théorèmes de la trigonométrie, comme les développemens de  $\sin na$ ,  $\cos na$ ,  $(\sin a)^n$ ,  $(\cos a)^n$ , les sommes de séries  $\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \dots$ ,  $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots$ , et la décomposition de  $x^{2n} - 2x \cos na + 1$  en facteurs du second degré.

Comme application à l'algèbre, nous démontrerons que tout polynôme

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + fx + g ,$$

est décomposable en facteurs du premier degré ou , ce qui revient au même , qu'on peut toujours trouver une quantité qui , prise pour  $x$  , rende égal à zéro le polynôme proposé que nous désignerons par  $y$ . Les lettres  $a$  ,  $b$  ,  $\dots$  ,  $f$  ,  $g$  n'étant point d'ailleurs restreintes ici à n'exprimer que des nombres réels.

Soient  $y_p$ ,  $y_{p+i}$  les valeurs de  $\gamma$  résultant des suppositions  $x=p$ ,  $x=p+i$ ;  $p$  et  $i$  étant des nombres pris à volonté et  $r$  désignant un rayon en direction; on aura

$$y_p = p^n + ap^{n-1} + bp^{n-2} + \dots + fp + g ,$$

$$y_{p+\rho i} = (p+\rho i)^n + a(p+\rho i)^{n-1} + b(p+\rho i)^{n-2} + \dots + f(p+\rho i) + g \\ = y_p + i\rho Q + i^2 \rho^2 R + i^3 \rho^3 S + \dots + i^n \rho^n ;$$

$Q$ ,  $R$ ,  $S$ , ... étant des quantités connues, dépendantes de  $p$ ,  $n$ ,

$a, b, c, \dots, f, g$ , qui s'obtiennent en développant les puissances de  $\rho + i\rho$ . Si l'on suppose  $i$  infiniment petit, les termes affectés de  $i^2, i^3, \dots, i^n$  disparaissent, et l'on a simplement

$$\gamma_{\rho+i\rho} = \gamma_\rho + i\rho Q.$$

Construisons le second membre de cette équation, suivant les règles précédentes. Soit  $\alpha$  l'angle que fait  $\gamma_\rho$  avec la ligne prise pour origine des angles; on peut prendre  $\rho$  de manière que  $i\rho Q$  fasse avec cette même ligne un angle  $-\alpha$ , c'est-à-dire, que la direction de  $i\rho Q$  soit opposée à celle de  $\overline{\gamma_\rho}$ . La grandeur de  $\gamma_{\rho+i\rho}$  sera ainsi plus petite que celle de  $\gamma_\rho$ . On obtiendra, de la même manière, une nouvelle valeur de  $\gamma$ , plus petite que  $\gamma_{\rho+i\rho}$ , et ainsi de suite, jusqu'à ce que  $\gamma$  soit nul; donc, etc.

Cette démonstration est cependant sujette à une difficulté dont nous devons la remarque à M. Legendre. La quantité  $Q$  peut être nulle, et alors la construction prescrite n'est plus praticable; mais nous observerons que cette objection n'anéantit pas notre démonstration; car le terme  $i^2\rho^2 R$ , ou le terme  $i^3\rho^3 S$  si  $R$  est nulle, et ainsi de suite, peut remplacer le terme  $i\rho Q$ , puisque  $\rho^2, \rho^3, \dots$  sont des quantités de la même nature que  $\rho$ ; or, quand même on voudrait supposer tous ces termes nuls, le dernier au moins  $i^n\rho^n$  ne le serait pas.

10. La théorie dont nous venons de donner un aperçu, peut être considérée sous un point de vue propre à écarter ce qu'elle peut présenter d'obscur, et qui semble en être le but principal, savoir: d'établir des notions nouvelles sur les quantités imaginaires. En effet, mettant de côté la question si ces notions sont vraies ou fausses, on peut se borner à regarder cette théorie comme un moyen de recherches, n'adopter les lignes en direction que comme *signes* des quantités réelles ou imaginaires, et ne voir, dans l'usage que nous en avons fait, que *le simple emploi d'une notation particulière*. Il suffit, pour cela, de commencer par démontrer, au moyen des premiers théorèmes de la trigonométrie, les règles de multiplication

## 144 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

et d'addition données plus haut ; les applications iront de suite ; et il ne restera plus à examiner que la question de didactique » si l'emploi de cette notation peut être avantageux ? s'il peut ouvrir » des chemins plus courts et plus faciles, pour démontrer certaines » vérités ? » c'est ce que le fait seul peut décider.

11. Nous ne croyons pas devoir omettre quelques aperçus sur une extension dont nos principes paraissent susceptibles. Soient, comme plus haut (fig. 10),  $\overline{KA}=+1$ ,  $\overline{KC}=-1$ ,  $\overline{KB}=+\sqrt{-1}$ ,  $\overline{KD}=-\sqrt{-1}$ ; tout autre rayon  $\overline{KN}$ , mené dans le plan de ceux-là, sera de la forme  $p+q\sqrt{-1}$ ; et réciproquement, toute expression de cette forme sera celle d'une ligne dirigée dans ce plan. Tirons maintenant, du centre K, une perpendiculaire  $KP=KA$  à ce plan. Que sera la ligne dirigée  $\overline{KP}$ , relativement aux précédentes ? Leur est-elle tout à fait hétérogène, ou bien peut-on la rapporter analitiquement à l'unité primitive  $\overline{KA}$ , et assigner son expression algébrique, comme celle de  $\overline{KB}$ ,  $\overline{KC}$ ,...?

Si nous nous laissons guider par l'analogie, voici ce qu'elle nous suggère sur ces questions.

En prenant pour unité des angles la circonférence entière, il suit des principes ci-dessus qu'un rayon en direction, faisant un angle  $\alpha$  avec  $\overline{KA}$  peut être exprimé par  $1^\alpha$ . Mais, d'après la nature des exposans, cette expression a des valeurs multiples, lorsque  $\alpha$  est fractionnaire, ce qui peut amener quelques difficultés. On évitera cet inconvénient, en employant la notation de M. Français (*mémoire cité*), et en écrivant  $1_\alpha$ ; on aura ainsi  $\overline{KA}=1_0$ ,  $\overline{KB}=1_{\frac{1}{4}}$ ,  $\overline{KC}=1_{\frac{1}{2}}$ ,  $\overline{KD}=1_{\frac{3}{4}}$ .

Nous avons pris, de part et d'autre du point A, sur la circonference ABCD, deux directions opposées, affectées l'une aux angles positifs, l'autre aux angles négatifs; or, si nous appliquons aux angles les mêmes considérations qu'aux lignes, nous serons conduits à prendre les angles imaginaires dans une direction perpendiculaire à celle qui appartient aux angles réels.

Supposons que le demi-cercle ABC tourne autour de AC, le point B décrivant le cercle BPDQ; puisqu'on a déjà

$$\text{Ang.} \overline{AKB} = +\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot (+1),$$

$$\text{Ang.} \overline{AKD} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot (-1);$$

on pourra dire que

$$\text{Ang.} \overline{AKP} = \frac{1}{4} \sqrt{-1} = \frac{1}{4} \cdot i \frac{1}{4};$$

d'où on conclura

$$\overline{KP} = i \frac{1}{4} \cdot i \frac{1}{4} = i \frac{1}{4} \sqrt{-1} = i^{\frac{1}{4}} \sqrt{-1} = \left( i^{\frac{1}{4}} \right) \sqrt{-1} = (\sqrt{-1}) \sqrt{-1}.$$

Telle paraît devoir être l'expression analytique demandée.

Si l'on prend un point M sur le cercle BPD tel qu'on ait  $\text{Ang.} \overline{BKM} = \mu$ , on aura pareillement

$$\text{Ang.} \overline{AKM} = \frac{1}{4} (\cos \mu + \sqrt{-1} \sin \mu);$$

et, en faisant pour abréger  $\cos \mu + \sqrt{-1} \sin \mu = r$ ,

$$\overline{KM} = i \frac{1}{4} r = i^{\frac{1}{4}} r = \left( i^{\frac{1}{4}} \right)^r = (\sqrt{-1})^{\cos \mu + \sqrt{-1} \sin \mu},$$

c'est l'expression générale de tous les rayons perpendiculaires au rayon primitif de  $\overline{KA}$ .

Cherchons maintenant l'expression de l'angle  $\overline{BKP}$ .

De part et d'autre du point B, sur la circonference ABC, les angles sont positifs et négatifs réels, et le plan BKP est perpendiculaire à leur direction; il semblerait donc que l'angle  $\overline{BKP}$  est ainsi que l'angle  $\overline{AKP} = \frac{1}{4} \sqrt{-1}$ , et qu'il en doit être de même de tout angle  $\overline{NKP}$ , N étant pris sur la circonference ABCD; mais on s'aperçoit bientôt de la fausseté de cette conclusion, en faisant coïncider N avec le point C, ce qui donnerait  $\overline{CKP} = \frac{1}{4} \sqrt{-1}$ , tandis que cet angle est évidemment  $-\overline{AKP} = -\frac{1}{4} \sqrt{-1}$ .

## 146 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

Pour éclaircir cette difficulté, observons qu'une direction étant adoptée pour celle de  $+i$ , il y a une infinité de directions qui lui sont perpendiculaires, parmi lesquelles on en prend arbitrairement une, pour l'affecter à l'unité imaginaire  $\sqrt{-1}$ . L'expression générale de toute unité prise dans l'une de ces directions est, comme nous venons de le voir,

$$i_{\frac{1}{2}\rho} = e^{\frac{i}{2}\rho} = (\sqrt{-1})^\rho = (\sqrt{-1})^{\cos.\rho + i \sin.\rho}.$$

Imaginons au point A une infinité de direction perpendiculaires à la circonférence en ce point; une de ces directions sera parallèle à  $\overline{KP}$ . C'est celle que nous avons prise pour construire les angles imaginaires positifs  $+\alpha\sqrt{-1}$ ; c'est-à-dire, que nous avons choisi, pour ce cas,  $\rho=i=\overline{KA}$ . Pareillement, au point C, la direction parallèle à  $\overline{KP}$  nous a donné les angles imaginaires négatifs  $-\alpha\sqrt{-1}$ ; c'est-à-dire, que nous avons fait  $\rho=-i=\overline{KC}$ .

Donc l'analogie nous conduit à faire  $\rho=\sqrt{-1}=\overline{KB}$ , lorsqu'il s'agit de la direction parallèle à  $\overline{KP}$ , à partir du point B.

L'angle  $\overline{BKP}$  aura donc pour expression

$$\frac{1}{2}(\sqrt{-1})\sqrt{-1}.$$

12. Nous ne pousserons pas plus loin ces aperçus; et nous observerons, en terminant, que les expressions,  $a$ ,  $a_b$ ,  $a_{b_c}$ , qui désignent des lignes considérées par rapport à une, à deux, à trois dimensions, ne sont que les premiers termes d'une suite qui peut être prolongée indéfiniment.

Si les notions exposées dans l'article précédent étaient admises, la question, souvent agitée, de savoir si toute fonction peut être ramenée à la forme  $p+q\sqrt{-1}$  se trouverait résolue négativement; et  $\overline{KP}=(\sqrt{-1})\sqrt{-1}$  offrirait l'exemple le plus simple d'une quantité non réductible à cette forme, et aussi hétérogène par rapport à  $\sqrt{-1}$  que l'est celle-ci par rapport à  $+i$ .

Il existe, à la vérité, des démonstrations tendant à établir que la fonction  $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$  peut toujours être réduite à la forme  $p+q\sqrt{-1}$ ; mais qu'il nous soit permis de remarquer sur ces démonstrations, que celles qui emploient le développement en séries, ne sauraient être concluantes qu'autant qu'on prouverait que  $p$  et  $q$  ont des valeurs finies. Il arrive souvent, en effet, dans l'analyse, qu'une série qui, par sa nature, ne peut exprimer que des quantités réelles, prend une valeur, ou plutôt une forme infinie, lorsqu'elle doit représenter une quantité imaginaire; et on peut présumer pareillement qu'une série composée de termes de la forme  $p+q\sqrt{-1}$  ou  $a_b$ , peut devenir infinie, si elle doit exprimer une quantité de l'ordre  $a_{b_c}$ .

Quant aux démonstrations qui emploient les logarithmes, elles laissent aussi, ce nous semble, quelques nuages dans l'esprit, en ce qu'on n'a pas encore des notions bien précises sur les logarithmes imaginaires. Il faudrait d'ailleurs s'assurer si un même logarithme nè pourrait pas appartenir à la fois à plusieurs quantités d'ordres différents  $a$ ,  $a_b$ ,  $a_{b_c}$ . En outre, la multiplicité des valeurs dues aux radicaux de l'expression proposée, est une autre source d'incertitude; de telle sorte qu'on pourrait parvenir, de la manière la plus rigoureuse, à réduire  $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$  à la forme  $p+q\sqrt{-1}$ , sans qu'il s'ensuivit nécessairement que cette fonction n'a pas encore d'autres valeurs de l'ordre  $a_{b_c}$ , non réductibles à cette forme (\*)

(\*) On ne peut, sans doute, que savoir beaucoup de gré à M. Français d'avoir, en quelque sorte, provoqué M. Argand à donner plus de publicité à ses vues sur l'un des points les plus délicats et les plus épineux de l'analyse algébrique. Espérons qu'il s'établira désormais une heureuse rivalité entre ces deux estimables géomètres, et qu'ils s'empresseront, à l'envi l'un de l'autre, à perfectionner et à éclaircir l'intéressante théorie dont ils viennent de poser les fondemens.

## ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

*Développement de la théorie donnée par M. LAPLACE,  
pour l'élimination au premier degré ;*

Par M. GERGONNE.



**C**RAMER est , je crois , le premier qui ait remarqué la loi que suivent les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré , et qui ait indiqué des méthodes pour construire ces valeurs , sans passer par le calcul de l'élimination. Postérieurement , Bezout , dans sa *Théorie générale des équations algébriques* , a apporté quelques modifications à ces méthodes ; mais , quoiqu'il fût sur la voie d'en donner une démonstration proprement dite , elles sont demeurées entre ses mains , comme entre celles de Cramer , le résultat d'une simple induction.

Ce n'est seulement qu'en 1772 que M. Laplace , dans les *Mémoires de l'académie des sciences* , a démontré , pour la première fois , d'une manière générale et rigoureuse , l'exactitude de ces formules. Mais , soit que la précieuse collection où la théorie de cet illustre géomètre est exposée , ne se trouve pas sous la main de tout le monde , soit plutôt que M. Laplace , ne présentant pour ainsi dire cette théorie qu'en passant , ne lui ait point donné le développement suffisant pour la faire bien apprécier , on a toujours continué depuis lors , dans tous les traités d'algèbre , à n'appuyer les méthodes de construction des valeurs générales des inconnues que sur une simple induction.

Une

Une expérience de plus de dix années m'a convaincu que la théorie de M. Laplace , suffisamment développée n'excède pas la portée des esprits les plus ordinaires. Voici sous quelle forme j'ai coutume de la présenter. J'ose croire qu'on la trouvera plus courte et plus simple que les calculs qu'il faudrait faire pour donner quelque vraisemblance aux conclusions qu'on voudrait tirer de l'induction.

1. Dans tout ce qui va suivre , j'appellerai *Nombres de même espèce* deux nombres qui seront l'un et l'autre *pairs* ou l'un et l'autre *impairs*. J'appellerai , au contraire , *Nombres d'espèces différentes* deux nombres dont l'un sera *pair* tandis que l'autre sera *impair*.

2. Ainsi , il sera vrai qu'on change l'espèce d'un nombre en lui ajoutant ou en lui retranchant une unité ou , plus généralement , un nombre *impair* quelconque , et qu'on ne la change pas en lui ajoutant ou en lui retranchant un nombre *pair*.

3. Il sera encore vrai de dire que , si l'on change plusieurs fois consécutivement l'espèce d'un nombre , son espèce se trouvera définitivement être ou n'être plus la même qu'elle était en premier lieu , suivant que le nombre des changemens d'espèces qu'il aura subi sera pair ou impair.

4. Soient des lettres  $a$  ,  $b$  ,  $c$  ,..., toutes différentes les unes des autres , au nombre de  $m$ . Concevons que ces lettres soient écrites , les unes à la suite des autres , dans un ordre arbitraire. Si alors deux d'entre elles se trouvent tellement disposées , l'une par rapport à l'autre , dans l'arrangement total , que celle qui se trouve le plus à droite soit , au contraire , à la gauche de l'autre dans l'alphabet ; nous exprimerons cette circonstance en disant que ces deux lettres forment entre elles une *inversion*. Nous dirons , en conséquence , que l'arrangement total présente autant d'inversions qu'il s'y trouvera de systèmes de deux lettres pour lesquelles la même circonstance aura lieu.

5. On voit par là que , si les  $m$  lettres se trouvent écrites suivant *Tom. IV.*

l'ordre alphabétique , le nombre des inversions sera nul ; et qu'au contraire il n'y aura que des inversions , lesquelles par conséquent seront au nombre de  $\frac{1}{2}m(m-1)$  , si elles sont écrites dans un ordre absolument inverse de celui de l'alphabet.

6. Soit  $M$  un arrangement quelconque de nos  $m$  lettres ; permutois-y entre elles deux lettres consécutives quelconques , sans toucher aucunement aux autres ; et soit  $M'$  le nouvel arrangement qui en résulte. Je dis que , dans  $M$  et  $M'$  , les nombres d'inversions sont d'espèces différentes. En effet , les deux lettres permutées devant nécessairement former une inversion dans l'un des arrangemens  $M$  ,  $M'$  , et n'en point former dans l'autre , et toutes les autres lettres demeurant , dans les deux arrangemens , disposées de la même manière , soit entre elles , soit par rapport à celle-là ; il s'ensuit que , soit en plus soit en moins , le nombre des inversions de  $M'$  diffère seulement d'une unité du nombre des inversions de  $M$  ; ces deux nombres sont donc d'espèces différentes.

7. Il suit de là que , si l'on déplace une seule lettre d'une manière quelconque , l'espèce du nombre des inversions demeurera la même ou se trouvera changée , suivant que le nombre des places parcourues par cette lettre sera pair ou impair. En effet , on peut concevoir que le déplacement ne s'opère que successivement , par la permutation continue de cette lettre avec sa voisine , soit de droite soit de gauche ; or , à chaque permutation partielle (6) , l'espèce du nombre des inversions variera ; donc , à la fin (3) , l'espèce du nombre des inversions se retrouvera la même qu'au commencement ou sera changée , selon que le nombre de permutations partielles , c'est-à-dire , le nombre des places parcourues sera pair ou impair.

8. Concluons de là que , si l'on déplace deux lettres , pour leur faire parcourir , en tout , un nombre impair de rangs , l'espèce du nombre des inversions se trouvera nécessairement changée. Il est clair , en effet , qu'il faut , pour cela , que l'une des deux lettres déplacées parcoure un nombre pair de rangs , ce qui ne change pas (7) l'espèce du nombre des inversions , et que l'autre en par-

coure ensuite un nombre impair, ce qui doit nécessairement la changer (7).

9. Donc, si l'on permute entre elles deux lettres non consécutives, on changera nécessairement l'espèce du nombre des inversions. Soit en effet  $n$  le nombre des lettres intermédiaires à ces deux-là; on pourra d'abord porter la lettre la plus à gauche immédiatement à gauche de l'autre, ce qui lui fera parcourir  $n$  places; puis remettre cette dernière à la place de la première; et, comme elle sera obligée de passer par-dessus celle-ci, elle se trouvera avoir parcouru  $n+1$  places. Le nombre total des places parcourues par les deux lettres sera donc  $2n+1$ , et conséquemment (8) l'espèce du nombre des inversions se trouvera changée.

10. Soit écrite successivement la lettre  $b$  à la gauche et à la droite de la lettre  $a$ , en changeant le signe au changement de place; on formera ainsi le binôme

$$ab - ba.$$

Soit introduite successivement, et en allant de gauche à droite, la lettre  $c$ , dans chacun des termes de ce polynôme, en lui faisant parcourir, dans chacun, toutes les places de droite à gauche, et changeant encore de signe à chaque changement de place, on formera ainsi le polynôme

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Concevons que l'on en fasse de même successivement pour les lettres suivantes  $d, e, f, \dots$ , jusqu'à la dernière inclusivement, en suivant toujours exactement l'ordre alphabétique : on parviendra ainsi à un polynôme homogène  $P$ , de  $m$  dimensions, dont les termes, au nombre de  $1.2.3.\dots.m$ , ne seront évidemment autre chose que la totalité des permutations dont nos  $m$  lettres sont susceptibles. Je vais prouver que, d'après ce mode de génération, les termes de ce

polynôme auront le signe + ou le signe -, suivant que le nombre des inversions qu'ils présenteront sera pair ou impair.

Il est d'abord aisé de voir que les deux résultats que nous venons de former satisfont à cette loi. Supposons donc qu'elle se soutienne encore pour l'avant-dernier polynôme , de manière que chacun de ses termes porte déjà le signe qui convient au nombre de ses inversions. L'introduction de la dernière lettre à la droite de l'un de ces termes ne changera rien à cet état de choses puisqu'elle n'en changera ni le signe ni le nombre des inversions. A mesure que cette lettre avancera ensuite vers la droite , l'espèce du nombre des inversions se trouvera alternativement (7) changée et rétablie ; mais le signe se trouvant aussi , par hypothèse , alternativement changé et rétabli , la loi dont il est question continuera à subsister , si , comme nous le supposons , elle a lieu dans l'avant-dernier polynôme ; puis donc qu'elle subsiste dans les deux premiers , il s'ensuit qu'elle est générale.

11. Concevons actuellement que , dans chacun des termes du polynôme  $P$  , on affecte chaque lettre d'un indice égal au rang de cette lettre , en cette manière

on formera ainsi un nouveau polynôme  $D$ , qui n'aura plus de termes semblables. Je vais prouver que si, dans ce polynôme  $D$ , on change une lettre quelconque en une autre, en laissant d'ailleurs celle-ci où elle se trouve déjà, et sans toucher aux indices, tout le polynôme s'anéantira.

Supposons, en effet, que l'on change  $h$  en  $g$ , sans toucher à

$g$  ni aux indices. Soient, pour un terme pris au hazard dans le polynôme,  $p$  et  $q$  les indices respectifs de  $g$  et  $h$ ; ce polynôme, renfermant toutes les permutations, doit avoir un autre terme ne différant uniquement de celui-là qu'en ce que c'est  $h$  qui y porte l'indice  $p$  et  $g$  l'indice  $q$ : et de plus (9) ces deux termes doivent être affectés de signes contraires; ils se détruiront donc, lorsqu'on changera  $h$  en  $g$ ; et il en sera de même de tous les autres termes pris deux à deux.

12. La lettre  $a$  devant se trouver dans tous les termes du polynôme  $D$ , et ne pouvant se trouver qu'une seule fois dans chacun; ce polynôme peut être ordonné suivant les indices de cette lettre, ainsi qu'il suit :

$$D = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \dots + A_m a_m; \quad (1)$$

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  étant des fonctions de  $b_1, c_1, d_1, \dots, b_2, c_2, d_2, \dots, b_m, c_m, d_m$ . Alors, d'après ce qui vient d'être dit (11), on devra avoir

$$\begin{aligned} o &= A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + \dots + A_m b_m, \\ o &= A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3 + \dots + A_m c_m, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (2) \\ (*) \end{array} \right\}$$

Le polynôme  $D$ , ordonné par rapport à quelqu'autre lettre, donnerait lieu à des conséquences analogues.

13. Ces choses entendues, soient, entre les  $m$  inconnues  $x, y, z, \dots$ ; les  $m$  équations

(\*) Ce sont ces fonctions dont il a été question à la page 153 du 3.<sup>e</sup> volume de ce recueil.

## ÉLIMINATION

$$\left. \begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\dots=k_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z+\dots=k_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z+\dots=k_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_mx+b_my+c_mz+\dots=k_m. \end{array} \right\} \quad (3)$$

En prenant la somme de leurs produits respectifs par  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , ...,  $A_m$ , et ayant égard aux équations (1 et 2), il viendra

$$Dx = A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \dots + A_mk_m; \quad (4)$$

d'où

$$x = \frac{A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \dots + A_mk_m}{A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + \dots + A_ma_m}.$$

Ainsi le dénominateur commun des valeurs des inconnues n'est autre chose que le polynôme  $D$ ; et on en conclut le numérateur de la valeur de chacune d'elles, en y mettant la lettre qui représente le terme tout comme à la place de celle qui représente le coefficient de cette inconnue, toujours sans toucher aux indices.

14. Si, dans les équations (3), on change  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , ...,  $k_m$  en  $-k_1\nu$ ,  $-k_2\nu$ ,  $-k_3\nu$ , ...,  $-k_m\nu$ ,  $\nu$  étant une  $(m+1)^{\text{me}}$  inconnue, ces équations, toujours au nombre de  $m$ , deviendront

$$\left. \begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\dots+k_1\nu=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\dots+k_2\nu=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \dots \end{array} \right\} \quad (5)$$

et donneront, par un semblable changement opéré dans l'équation (4),

$$\Gamma x = -(A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \dots + A_m k_m) \nu, \quad (6)$$

or, comme  $\nu$ , dans cette équation, demeure arbitraire, on peut fort bien poser  $\nu = -D\alpha$ : on aura ainsi

$$x = (A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \dots + A_m k_m) \alpha;$$

formule dans laquelle  $\alpha$  demeure indéterminée. On aurait des valeurs analogues pour  $y, z, \dots, \nu$ .

15. Ainsi, la même méthode qui nous a conduit aux valeurs générales des inconnues, dans les problèmes déterminés du premier degré, nous donne également les valeurs entières les plus générales des inconnues dans les problèmes indéterminés de ce degré; du moins lorsque les équations n'ont point de terme tout connu, et que le nombre des inconnues n'y surpassé que d'une seule unité le nombre de ces équations.

16. Mais, de ce cas particulier on peut facilement passer aux autres. Si, en effet, le nombre des inconnues surpassé de  $n$  unités celui des équations, il ne s'agira que de joindre aux équations données  $n-1$  autres équations de même forme affectées de coefficients arbitraires; la question se trouvera ramenée au cas que nous venons de considérer, avec cette différence qu'au lieu d'une seule arbitraire, les valeurs des inconnues en contiendront plusieurs. C'est à peu près par cette voie que, depuis long-temps, M. Servois était parvenu, de son côté, aux résultats que j'ai donnés à la page 156 du 3.<sup>e</sup> volume de ce recueil.

17. Enfin la même méthode peut conduire encore aux équations de condition qui doivent avoir lieu entre les coefficients, lorsque les équations sont en plus grand nombre que les inconnues. Si, en effet, entre  $m$  inconnues on a  $m+n$  équations, en tirant des  $m$  premières équations les valeurs de ces inconnues pour les substituer dans les  $n$  suivantes, on obtiendra ainsi les équations de condition demandées.

## QUESTIONS RÉSOLUES.

*Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 28 de ce volume;*

Par M. SERVOIS, professeur aux écoles d'artillerie.



**ENONCÉ.** Une droite mobile parcourt le plan d'un triangle de manière que le produit des segmens qu'elle détermine sur deux de ses côtés, vers leur point de concours, est constamment égal au produit des deux autres segmens des mêmes côtés. On propose d'assigner la courbe à laquelle, dans son mouvement, cette droite sera perpétuellement tangente ?

*Solution.* Soient M, M' (fig. 11) deux points quelconques d'une parabole, dont F soit le foyer; et soit O le point de concours des tangentes en M, M'. Robert Simson a démontré que, d'après cette construction, les triangles FMO, FOM' sont semblables, de telle manière qu'on doit avoir

$$\frac{FM}{FO} = \frac{FO}{FM'} = \frac{MO}{OM'} ,$$

ou

$$\text{Ang.} MFO = \text{Ang.} OFM' ,$$

$$\text{Ang.} FOM = \text{Ang.} FM'O ,$$

*Ang.*

$$\text{Ang.OMF} = \text{Ang.M'OF} ; \quad (*)$$


---

(\*) La similitude de ces triangles peut être facilement déduite du théorème suivant :

**THÉORÈME.** Si ayant mené, dans une parabole, un nombre quelconque des rayons vecteurs, de direction arbitraire, ou fait tourner tous ces rayons vecteurs, un seul excepté, autour du foyer de manière que les angles qu'ils forment respectivement avec le rayon vecteur fixe soient diminués de moitié; et si, en même temps, on allonge ou on raccourcit les rayons vecteurs mobiles de manière que leur nouvelle longueur soit moyenne proportionnelle entre la longueur du rayon vecteur fixe et leur longueur primitive; leurs extrémités se trouveront toutes alors sur la tangente à l'extrémité du rayon vecteur fixe.

Ce théorème n'est lui-même qu'un cas particulier de cet autre théorème :

**THÉORÈME.** La ligne dont les rayons vecteurs sont moyens proportionnels entre ceux d'une parabole et une longueur arbitraire donnée, et où ces rayons vecteurs forment, deux à deux, des angles moitié de ceux que forment leurs correspondants dans cette parabole, est une ligne droite.

Ce dernier théorème se démontre assez simplement comme il suit :

Soient  $r, r', r''$  trois rayons vecteurs d'une parabole dont la distance du sommet au foyer soit  $p$ ; et soient  $\alpha, \alpha', \alpha''$  les angles que forment respectivement ces rayons vecteurs avec  $p$ , on sait qu'on aura

$$\left. \begin{array}{l} r \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = p, \\ r' \cos^2 \frac{1}{2} \alpha' = p, \\ r'' \cos^2 \frac{1}{2} \alpha'' = p; \end{array} \right\} \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r} \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{p}, \\ \sqrt{r'} \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha' = \sqrt{p}, \\ \sqrt{r''} \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha'' = \sqrt{p}. \end{array} \right.$$

Prenant la somme des produits respectifs de ces trois dernières équations par  $+\sqrt{r''} \cdot \sin \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha), -\sqrt{rr''} \cdot \sin \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha) + \sqrt{rr'} \cdot \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)$ , et réduisant, il viendra

$$\sqrt{rr'} \cdot \sin \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) - \sqrt{rr''} \cdot \sin \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha') + \sqrt{r'r''} \cdot \sin \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha') = 0. \quad (1)$$

Or, soient présentement  $M, M', M''$  trois points de la ligne dont on cherche la nature,  $F$  le pôle auquel on la rapporte et  $a$  la longueur arbitraire donnée; on aura, par hypothèse,

$$\text{Ang.} M'FM = \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha), \quad \text{Ang.} M''FM = \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha), \quad \text{Ang.} M''FM' = \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha');$$

$$FM = \sqrt{ra}, \quad FM' = \sqrt{r'a}, \quad FM'' = \sqrt{r''a};$$

d'où

*Tom. IV.*

## QUESTIONS

on a donc, par la proportionnalité des côtés,

$$\frac{FM}{FO} = \frac{OM}{OM'}, \quad \frac{FM'}{FO} = \frac{OM'}{OM};$$

d'où on tire, par l'élimination de FO,

$$\frac{\overline{MO}^2}{\overline{MF}^2} = \frac{\overline{M'O}^2}{\overline{M'F}^2};$$

et ainsi se trouve démontré, en passant, le théorème de la page 60.

Soient présentement (fig. 12) LP, PQ, QN trois tangentes à une parabole dont le foyer est F; soient L, M, N les points de contact respectifs des tangentes, et R le point de concours des tangentes extrêmes. Suivant le théorème de Simson

$$\text{Ang.} LRF = \text{Ang.} RNF = \text{Ang.} MQF;$$

d'où il suit que le quadrilatère FPRQ est inscriptible au cercle.

On a d'après cela

$$\text{Ang.} RPF = \pi - \text{Ang.} RQF = \text{Ang.} NQF,$$

$$\text{Ang.} RQF = \pi - \text{Ang.} RPF = \text{Ang.} LPF;$$

les triangles RPF, RQF sont donc respectivement semblables aux triangles NQF, LPF, et on a par conséquent

$$QN : NF :: PR : RF,$$

$$PL : LF :: QR : RF;$$

d'où on tire, en multipliant

$$\overline{RF}^2 = LF \cdot NF \cdot \frac{PR \cdot QR}{QN \cdot PL};$$

$$\text{Triang.} MFM' = \frac{1}{2} FM \times FM' \sin. M' FM = \frac{1}{2} a \sqrt{rr'} \sin. \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha),$$

$$\text{Triang.} MFM'' = \frac{1}{2} FM \times FM'' \sin. M'' FM = \frac{1}{2} a \sqrt{rr''} \sin. \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha),$$

$$\text{Triang.} M'' FM' = \frac{1}{2} FM' \times FM'' \sin. M'' FM' = \frac{1}{2} a \sqrt{r'r''} \sin. \frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha'),$$

donc (1)

$$\text{Triang.} MFM' - \text{Triang.} MFM'' + \text{Triang.} M'' FM' = 0.$$

Propriété qui appartient exclusivement à la ligne droite.

J. D. G.

mais, par le théorème de Simson,

$$\overline{RF}^2 = LF \cdot NF ;$$

donc

$$PR \times QR = PL \times QN ;$$

relation indépendante du point M, et qui prouve par conséquent que, si la droite PQ se meut sur le plan du triangle LRN, de manière à y satisfaire constamment, elle sera constamment tangente à une parabole, touchant respectivement RL et RN en L et N. (\*)

(\*) Ce problème fournit une application des plus simples de la théorie développée à la page 361 du 3.<sup>e</sup> volume de ce recueil.

Soient  $a$ ,  $b$  ceux des côtés du triangle donné que la droite mobile doit couper suivant les conditions données; et soient  $A$ ,  $B$ , respectivement, les segmens qu'elle détermine sur eux, du côté de leur point de concours; en prenant  $a$  et  $b$  pour les axes des coordonnées, l'équation de la droite mobile sera

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1 \quad \text{ou} \quad Bx + Ay = AB ; \quad (1)$$

et l'on aura la condition

$$AB = (a - A)(b - B) \quad \text{ou} \quad Ba + Ab = ab ; \quad (2)$$

faissant varier  $A$  et  $B$ , dans les équations (1) et (2), il viendra

$$(x - A)\delta B + (y - B)\delta A = 0, \quad a\delta B + b\delta A = 0 ;$$

d'où

$$b(x - A) = a(y - B) ; \quad (3)$$

tirant enfin des équations (2) et (3) les valeurs de  $A$  et  $B$ , pour les substituer dans l'équation (1), il viendra

$$(ay - bx)^2 - 2ab(ay + bx) + a^2b^2 = 0 ;$$

équation d'une parabole touchant les deux côtés  $a$ ,  $b$  à leurs points de concours avec le troisième.

Nous observerons que ceci peut fournir un mode de construction plus simple de la parabole de raccordement des routes, dont il est question à la page 250 du 1.<sup>er</sup> volume de ce recueil.

On résoudrait, par un procédé analogue, le 2.<sup>e</sup> problème de la page 28 du présent volume; mais le calcul en est fort compliqué.

J. D. G.

On peut déterminer plus particulièrement cette parabole par une construction qui me paraît assez élégante. Soient LRN (fig. 13) le triangle proposé, et P, Q, respectivement, les milieux des côtés RL, RN; PQ sera évidemment une des situations de la droite mobile. Soit  $p$  le centre du cercle passant par les trois points PRQ; le foyer devra être sur la circonférence de ce cercle. Soit menée  $Rp$ , prolongée jusqu'à la rencontre de la circonférence en  $q$ ; le point  $q$  sera le centre du cercle circonscrit à LRN; de sorte qu'en menant  $qL$  et  $qN$  l'angle  $LqN$  sera le double du supplément de  $LRN$ ; mais, dans la figure 12, l'angle LFN doit aussi être double du supplément de  $LRN$ ; donc (fig. 13) le foyer cherché doit être sur la circonférence passant par les points  $LqN$ , laquelle coupe la première en un nouveau point F qui sera conséquemment le foyer; et comme d'ailleurs on connaît deux tangentes et leurs points de contact, rien ne sera plus aisé que de déterminer le sommet. (\*)

---

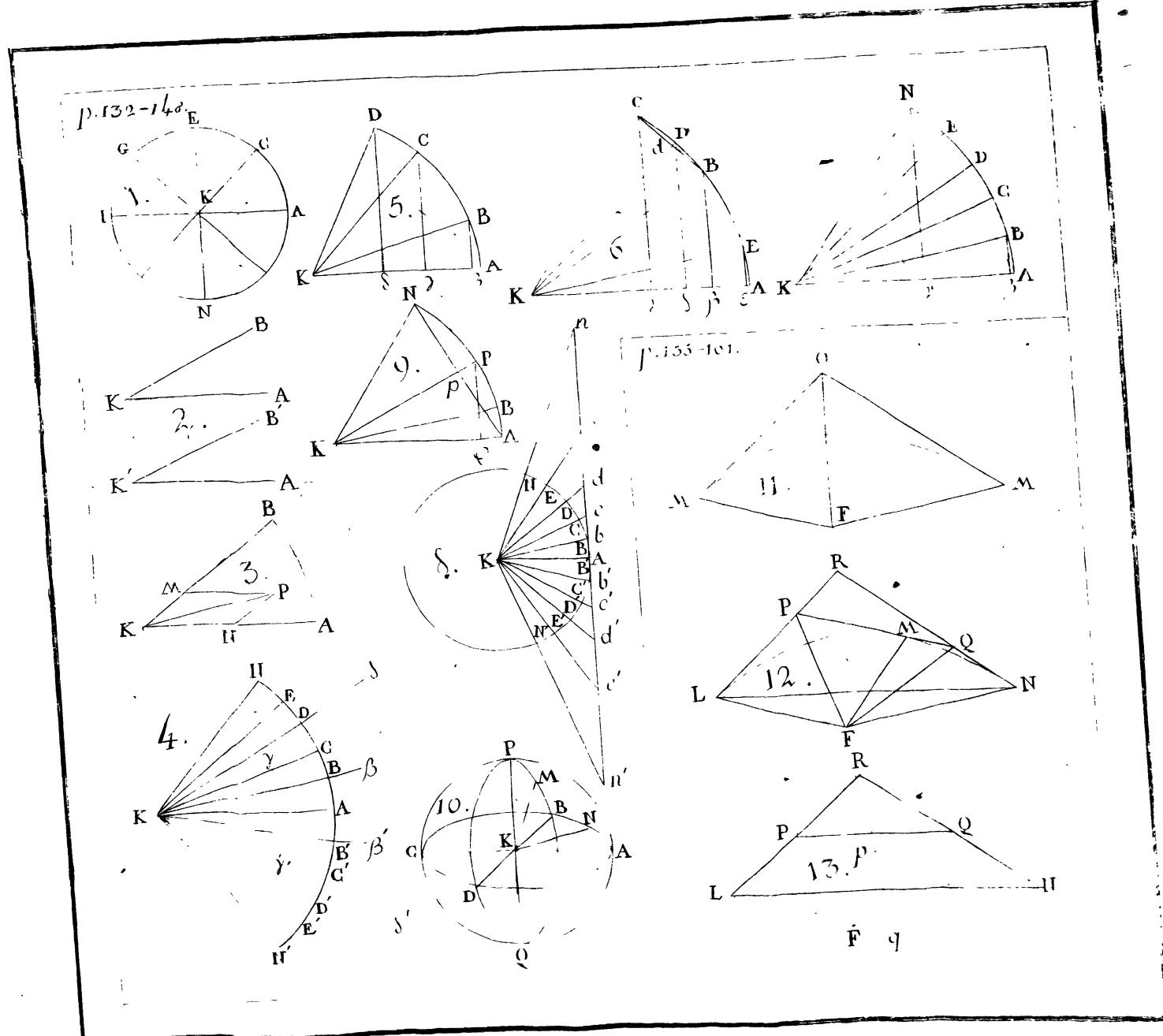
## QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Théorème de Géométrie.*

CA, CB sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole, dont le centre est C. On a mené la droite AB; et, par un point quelconque M de la courbe, on a mené à cette droite une parallèle, coupant respectivement CA et CB en A' et B'. On propose de démontrer que  $\overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2$  est une quantité constante.

---

(\*) On peut aussi employer à la recherche du foyer et du sommet les méthodes, soit de M. Bérard, soit de M. Bret, dont il est fait mention à la page 58 de ce volume.



J.L. feit.



## ASTRONOMIE.

*Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;*

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



1. SOIENT,  $p$  le temps périodique d'une planète ;  $a$ , le demi-grand axe ;  $a\cos.\lambda$ , le demi-petit axe ;  $a\sin.\lambda$ , l'excentricité ;  $\phi$ , l'anomalie vraie ;  $\phi'$ , l'anomalie de l'excentrique ;  $t$ , le temps, compté depuis l'aphélie; ce qui donne  $\frac{2\pi t}{p}$  pour l'anomalie moyenne.

On parviendra de  $\phi$  à  $\phi'$ , et de là à  $t$ , moyennant les équations connues

$$\frac{2\pi t}{p} = \phi' + \sin.\lambda \sin.\phi', \quad \sin.\phi' = \frac{\cos.\lambda \sin.\phi}{1 - \sin.\lambda \cos.\phi}, \quad \cos.\phi' = \frac{\cos.\phi - \sin.\lambda}{1 - \sin.\lambda \cos.\phi}.$$

2. PROBLÈME I. Connaissant le temps  $t$ , et par conséquent l'anomalie moyenne  $\frac{2\pi t}{p}$ , on demande l'anomalie vraie  $\phi$ , exprimée par une série disposée selon les puissances ascendantes de l'excentricité  $\lambda$ , telle que  $\phi = A + B\lambda + C\lambda^2 + \dots$ ; les coefficients  $A, B, C, \dots$  étant des fonctions de  $t$  qui ne renferment point  $\lambda$  et qu'il s'agit de déterminer?

A cet énoncé, on reconnaît le *Problème de Képler*. Pour le résoudre, on a employé jusqu'ici la série  $\phi = t + A\sin.t + B\sin.2t + C\sin.3t + \dots$ . Ici les coefficients  $A, B, C, \dots$  étaient des séries, ordonnées selon les puissances ascendantes de l'excentricité; convergentes, à la vérité, mais pourtant infinies, et qui ne sont sommables

dans aucun cas. Les coefficients de la nôtre seront des expressions finies ; et elle se trouvera ainsi exempte du défaut de l'autre.

3. *Solution.* Le premier terme est ce que devient  $\phi$ , dans le cas de  $\lambda=0$ , ce qui donne  $\frac{2\pi t}{p} = \phi' = \phi$ . Ainsi  $A = \frac{2\pi t}{p}$ . Les autres coefficients seront ce que deviennent, dans ce même cas de  $\lambda=0$ , les coefficients différentiels partiels  $\frac{d\phi}{dt}, \frac{d^2\phi}{dt^2}, \frac{d^3\phi}{dt^3}, \dots$  pris en regardant  $\lambda$  comme la seule variable, et le temps  $t$  comme exempt de différentiation. Cherchons d'abord l'équation différentielle complète entre  $dt$ ,  $d\lambda$  et  $d\phi$ .

$$4. \text{ De } \sin.\phi' = \frac{\cos.\lambda \sin.\phi}{1 - \sin.\lambda \cos.\phi} \text{ ou de}$$

$$0 = \sin.\phi' - \sin.\phi / \sin.\lambda \cos.\phi - \cos.\lambda \sin.\phi,$$

on tire en différentiant

$$\begin{aligned} 0 &= d\lambda(\cos.\lambda \cos.\phi \sin.\phi' - \sin.\lambda \sin.\phi) \\ &\quad - d\phi(\sin.\lambda \sin.\phi \sin.\phi' - \cos.\lambda \cos.\phi) \\ &\quad - d\phi'/\cos.\phi'(1 - \sin.\lambda \cos.\phi). \end{aligned}$$

En mettant à la place de  $\sin.\phi'$  et de  $\cos.\phi'$  leurs expressions en  $\lambda$  et en  $\phi$ , cette équation deviendra divisible par  $\cos.\phi - \sin.\lambda$ , et fournira, après les réductions

$$d\phi' = \frac{d\lambda \sin.\phi + d\phi \cos.\lambda}{1 - \sin.\lambda \cos.\phi}.$$

L'autre équation

$$\frac{2\pi t}{p} = \phi' + \sin.\lambda \sin.\phi',$$

donne, après avoir été différentiée et réduite

$$d\phi' = -d\lambda \sin.\phi + \frac{2\pi dt}{p} \cdot \frac{1 - \sin.\lambda \cos.\phi}{\cos.^2\lambda}.$$

Egalant entre elles les deux expressions de  $d\phi'$ , on aura une équation entre les trois différentielles  $dt$ ,  $d\lambda$ ,  $d\phi$ , d'après laquelle

$$d\phi = \frac{2\pi(1-\sin.\lambda\cos.\phi)^2}{p\cos.^3\lambda} dt - \frac{\sin.\phi(2-\sin.\lambda\cos.\phi)}{\cos.\lambda} d\lambda ;$$

d'où il résulte

$$\left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{(1-\sin.\lambda\cos.\phi)^2}{\cos.^3\lambda},$$

$$\left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = - \frac{\sin.\phi(2-\sin.\lambda\cos.\phi)}{\cos.\lambda}.$$

5. Considérons ici le temps  $t$  et l'anomalie vraie  $\phi$  comme les seules variables, on aura l'équation très-connue

$$dt = \frac{p\cos.^3\lambda d\phi}{2\pi(1-\sin.\lambda\cos.\phi)^2},$$

d'où l'on pourrait tirer, sur-le-champ, l'anomalie vraie  $\phi$ , moyennant une série, ordonnée d'après les sinus des angles multiples de l'anomalie moyenne. Mais, si l'on regarde  $\lambda$  comme la seule variable, et le temps  $t$  comme exempt de différentiation, on aura d'abord

$$\frac{d\phi}{dt} = - \frac{\sin.\phi(2-\sin.\lambda\cos.\phi)}{\cos.\lambda},$$

pour le premier de nos *rappports différentiels partiels*. Faisons ici  $\lambda=0$ , on aura  $\phi=A$ , et  $\frac{d\phi}{dt}=-2\sin.A$ . Il en résulte  $B=-2\sin.A$ ; et tel est le coefficient du second terme de la série.

6. Pour faciliter les différentiations ultérieures, et les développemens qui, dès le troisième terme deviennent assez compliqués, faisons  $\sin.\lambda=x$  et  $\cos.\phi=y$ ; ce qui donne

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = - \frac{\sin.\phi}{\cos.\lambda} (2-xy), \quad \frac{dx}{d\lambda} = \cos.\lambda, \quad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{\sin.^2\phi}{\cos.\lambda} (2-xy).$$

Remarquons, de plus, que le rapport différentiel  $\frac{d\phi}{d\lambda^n}$  est constamment de la forme  $\frac{z\sin.\phi}{\cos.^n\lambda}$ , la lettre  $z$  désignant une fonction entièrement algébrique, ordonnée selon les puissances ascendantes de  $x$  et de  $y$ . Si l'on désigne par  $Pdx+Qdy$  la différentielle de cette fonction  $z$ , on aura, après les réductions

$$\frac{d^{n+1}\phi}{d\lambda^{n+1}} = \frac{\sin.\phi}{\cos.^n\lambda} (z(nx-2y+xy^2)+P(1-x^2)+Q(2-xy-2y^2+xy^3)).$$

Ainsi, pour trouver ces coefficients, il faudra effectuer les multiplications; c'est la seule difficulté qu'il restera à surmonter.

7. D'après cela, pour passer du premier  $\frac{d\phi}{d\lambda} = -\frac{\sin.\phi}{\cos.\lambda}(2-xy)$  au second  $\frac{d^2\phi}{d\lambda^2}$ , on aura  $n=1$ ,  $z=-2+xy$ ,  $P=y$ ,  $Q=x$ , d'où il résulte

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} = \frac{\sin.\phi}{\cos.^2\lambda} (5y-x^2y-6xy^2+2x^2y^3).$$

On en tire

$$n=2; z=5y-x^2y-6xy^2+2x^2y^3,$$

$$P=-2xy-6y^2+4xy^3,$$

$$Q=5-x^2-12xy+6x^2y^2,$$

donc

$$\frac{d^3\phi}{d\lambda^3} = \frac{\sin.\phi}{\cos.^3\lambda} \left\{ \begin{array}{l} 10-2x^2+2xy-26y^2+x^3y \\ +22x^2y^2+50xy^3-8x^3y^3-34x^2y^4+8x^3y^5 \end{array} \right\}.$$

Faisant ensuite  $n=3$  et

$$z=10-2x^2-2xy-26y^2+x^3y+22x^2y^2+50xy^3-8x^3y^3-34x^2y^4+8x^3y^5,$$

$$P=-4x-21y+3x^2y+44xy^2+50y^3-24x^2y^3-68xy^4+24x^2y^5,$$

$$Q=-21x-52y+x^3+44x^2y+150xy^2-24x^3y^2-136x^2y^3+40x^3y^4;$$

d'où il résulte

$$\frac{d^4\phi}{d\lambda^4} = \frac{\sin.\phi}{\cos.^4\lambda} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -16x-145y+74x^2y+412xy^2+206y^3 \\ -x^4y-76x^3y^2-520x^2y^3-546xy^4+26x^4y^3 \\ +288x^3y^4+564x^2y^5-72x^4y^5-266x^3y^6+48x^4y^7 \end{array} \right\}.$$

Et ainsi des autres.

8. Il ne reste donc qu'à faire, dans tous ces rapports différentiels,  $\lambda=0$ , et par conséquent  $x=0$ ,  $\phi=A$ ,  $y=\cos.A$ . On aura

$$B=-2\sin.A,$$

$$2C = -\frac{1}{2} \sin A \cos A,$$

$$6D = + \sin A (10 - 26 \cos^2 A);$$

$$24E = - \sin A \cos A (145 - 206 \cos^2 A),$$

$$120F = - \sin A (306 - 2228 \cos^2 A + 2194 \cos^4 A),$$

et ainsi des autres. On aura  $\varphi = A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \dots$ . La série, ordonnée selon les puissances ascendantes de la petite fraction angulaire  $\lambda$ , est convergente par elle-même; et les coefficients numériques qui accompagnent les puissances de  $\cos A$  ne mettent aucun obstacle à cette convergence.

9. La série donnée par l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* (tome I, page 181), est

$$\begin{aligned}\varphi = A &+ (2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{1}{96}e^5) \sin A + (\frac{1}{4}e^2 - \frac{11}{144}e^4 + \frac{17}{192}e^6) \sin 2A \\ &+ (\frac{11}{144}e^3 - \frac{43}{64}e^5) \sin 3A + (\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6) \sin 4A \\ &+ \frac{1027}{960}e^5 \sin 5A + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6A.\end{aligned}$$

Pour la transformer dans la nôtre, il suffira de mettre à la place de  $\sin 2A$ ,  $\sin 3A$ , ..., les formules connues, ordonnées selon les puissances ascendantes de  $\cos A$ ; il faudra faire de plus  $e = \sin \lambda$  et changer enfin les signes de  $\lambda$  et de toutes ses puissances impaires, attendu que, dans notre formule, les anomalies sont comptées, non du périhélie, mais de l'aphélie. On reconnaîtra bientôt ainsi l'identité absolue entre l'une et l'autre.

10. Faisant, dans cette formule,  $t=p$  ou  $t=\frac{1}{2}p$ , on aura  $\varphi=A$ . Et si l'on fait  $t=\frac{1}{2}p$ , il résultera  $\varphi=90^\circ-2\lambda+\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{11}{10}\lambda^5+\dots$  On aura donc  $90^\circ-\varphi=2\lambda-\frac{1}{3}\lambda^3+\frac{11}{10}\lambda^5-\dots$ ; et telle est aussi, à très-peu près, la plus grande *équation du centre*.

11. PROBLÈME II. On demande d'exprimer le rayon vecteur  $r$ , par une série analogue à la précédente, savoir  $r=1+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+\dots$ ; le demi-grand axe étant supposé égal à l'unité?

12. Solution. On a, par la théorie connue de l'ellipse,

$$r = \frac{\cos^2 \lambda}{1 - \sin \lambda \cos \varphi}.$$

Le premier terme de la série étant ce que devient  $r$ , dans le cas de  $\lambda=0$ , c'est-à-dire, égal à l'unité; pour trouver  $\frac{dr}{d\lambda}$ , faisons encore

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin. \lambda, \\ y = \cos. \varphi; \end{array} \right\} \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = d\lambda \cos. \lambda, \\ dy = -d\varphi \sin. \varphi; \end{array} \right.$$

donc

$$\frac{dx}{d\lambda} = \cos. \lambda; \quad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \lambda} (2 - xy), \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{\sin. \varphi}{\cos. \lambda} (2 - xy);$$

de plus

$$r = \frac{1 - x^2}{1 - xy},$$

d'où on conclura, après les réductions, la formule très-simple

$$\frac{dr}{d\lambda} = \gamma \cos. \lambda.$$

13. Pour effectuer, avec facilité, les différentiations ultérieures, remarquons que le rapport différentiel  $\frac{dr}{d\lambda^n}$  aura généralement la forme

$\frac{z}{\cos.^{n-2}\lambda}$ ; la lettre  $z$  désignant un polynôme ordonné selon les puissances ascendantes de  $x$  et de  $y$ , et dont la différentielle complète pourra être supposée  $dz = Pdx + Qdy$ . Il en résultera, après les réductions, le rapport suivant

$$\frac{d^{n+1}r}{d\lambda^{n+1}} = \frac{(n-2)zx + P(1-x^2) + Q(2-xy-2y^2+xy^3)}{\cos.^{n-2}\lambda}.$$

Aidé de cette formule générale, on passera facilement d'un rapport différentiel à l'autre; les multiplications à faire seront la seule difficulté qu'il faudra surmonter.

Ainsi, ayant eu  $\frac{dr}{d\lambda} = \gamma \cos. \lambda$ , on aura d'abord, par la différentiation,

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = 2 - 2xy - 2y^2 + xy^3;$$

et dès lors on pourra se servir de la formule générale. Pour trouver  $\frac{d^3y}{d\lambda^3}$ , on aura

$$n=2, \quad z=2-2xy-2y^2+xy^3,$$

$$P=-2y+y^3,$$

$$Q=-2x-4y+3xy^2;$$

d'où on conclura

$$\frac{d^3r}{d\lambda^3} = \frac{1}{\cos.\lambda} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -4x-10y+4x^2y+14xy^2 \\ +9y^3-6x^2y^3-10xy^4+3x^2y^5 \end{array} \right\}.$$

Par un semblable procédé, on fera ensuite  $n=3$ ,

$$z=-4x-10y+4x^2y+14xy^2+9y^3-6x^2y^3-10xy^4+3x^2y^5,$$

$$P=-4+8xy+14y^2-12xy^3-10y^4+6xy^5,$$

$$Q=-10+4x^2+28xy+27y^2-18x^2y^2-40xy^3+15x^2y^4;$$

d'où on conclura

$$\frac{d^4r}{d\lambda^4} = \frac{1}{\cos.^2\lambda} \left\{ \begin{array}{l} -24+8x^2+64xy+88y^2-8x^3y \\ -72x^2y^2-176xy^3-64y^4+28x^3y^3+134x^2y^4 \\ +113xy^5-36x^3y^5-70x^2y^6+15x^3y^7 \end{array} \right\};$$

et ainsi du reste.

14. Ainsi donc, pour trouver les coefficients de la série  $r=1+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+\dots$ , il faudra voir ce que deviendront ces rapports différentiels  $\frac{dr}{d\lambda}, \frac{d^2r}{d\lambda^2}, \frac{d^3r}{d\lambda^3}, \dots$ , dans le cas de  $\lambda=0$ ,

qui donne  $x=0, \varphi=A=\frac{2\pi t}{p}$ , et  $y=\cos.A$ ; et l'on aura

$$B=+\cos.A,$$

$$2C=-2-\cos.^2A;$$

$$6D=-10\cos.A+9\cos.^3A;$$

$$24E=-24+88\cos.^2A-64\cos.^4A,$$

$$120F=+416\cos.A-1040\cos.^3A+625\cos.^5A;$$

et ainsi des autres.

15. Dans le cas de  $t=0$ , on aura  $A=0$ ,  $\cos A=1$ , et  $r=1+\lambda-\frac{\lambda^3}{6}+\frac{\lambda^5}{120}-\dots$ , ou bien,  $r=1+\sin \lambda$ . Dans le cas de  $t=\frac{1}{4}p$ , on aura  $A=\frac{1}{2}\pi$ ,  $\cos A=-1$ , et  $r=1-\lambda+\frac{\lambda^3}{6}-\frac{\lambda^5}{120}+\dots$ , ou bien,  $r=1-\sin \lambda$ . Il est presque superflu de remarquer que ces deux expressions  $1+\sin \lambda$ ,  $1-\sin \lambda$ , sont effectivement celles des distances du foyer de l'ellipse à ses deux apsides. Faisant enfin  $t=\frac{1}{4}p$ , on aura  $A=\frac{1}{2}\pi$ ,  $\cos A=0$ , et  $r=1+\lambda^2-\lambda^4+\lambda^6-\dots$ , ou bien,  $r=\frac{1+2\lambda^2}{1-\lambda^2}$ . Ainsi, le rayon vecteur qui répond au quart de la révolution est une fonction algébrique de la quantité angulaire  $\lambda$ .

16. Nous nous proposerons, en troisième lieu, de déterminer, pour un temps quelconque proposé, la *longitude géocentrique* d'une planète, moyennant une série double, ordonnée selon les puissances ascendantes des excentricités de la planète et de la terre. L'extrême complication des calculs auxquels nous conduit le développement des coefficients nous oblige à faire une supposition qui heureusement est admissible, et qui ne restreint en aucune manière la généralité du problème. Nous supposerons que, la terre étant dans l'aphélie de son orbite, la planète soit en même temps à une très-petite distance de l'une de ses deux apsides. De pareilles époques sont toujours assignables, et leurs retours doivent former des périodes que l'on peut déterminer avec toute la précision qu'on désire. Soient, en effet,  $p$  et  $q$ , les durées des *révolutions anomalistiques* des deux planètes et  $\alpha$ ,  $\beta$  leurs anomalies vraies, pour une époque quelconque. Il est clair que la première des deux planètes passera par l'une de ses apsides au bout d'un temps égal à  $\frac{\alpha+m\pi}{2\pi}p$ , tandis que l'autre passera par l'un des siens au bout d'un temps  $\frac{\beta+n\pi}{2\pi}q$ : les deux nombres  $m$ ,  $n$  étant des nombres entiers quelconques, *positifs* ou *négatifs*. Donc, pour déterminer une des époques où les deux

deux planètes auront été ou seront, à la fois, dans l'une de leurs apsides, il faudra déterminer les deux nombres entiers  $m$  et  $n$  de manière qu'ils remplissent le plus exactement que possible la condition

$$\frac{\alpha+m\pi}{2\pi} \cdot p = \frac{\beta+n\pi}{2\pi} q \quad \text{ou} \quad mp - nq = \frac{\beta q - \alpha p}{\pi};$$

et l'on sent que la solution de cette question ne peut présenter de difficulté.

17. *PROBLÈME III.* On demande, pour un temps quelconque proposé, la longitude géocentrique d'une planète généralement exprimée par une série double, ordonnée selon les puissances ascendantes des excentricités de l'orbite de la planète et de celle de la terre?

18. *Solution.* Supposons que la terre et la planète ayant quitté au même instant leurs aphélie A, B (fig. 1), soient arrivées, au bout du temps  $t$ , aux points P, Q de leurs orbites respectives; en désignant par F le foyer commun ou le centre du soleil, et supposant que la ligne des équinoxes soit EE', l'angle EHQ sera la longitude géocentrique de la planète. Désignons de plus:

- par  $p$  et  $q$  les durées des révolutions anomalistiques,
- par  $a$  et  $b$  les demi-grands axes des deux orbites,
- par  $a \cos.\lambda$  et  $b \cos.\mu$  leurs demi-petits axes,
- par  $a \sin.\lambda$  et  $b \sin.\mu$  leurs excentricités,
- par  $\alpha$  et  $\beta$  les longitudes EFA, EFB des deux aphélie,
- par  $\phi$  et  $\psi$  les deux anomalies vraies AFP, BFQ, à l'époque  $t$ ,
- par  $\phi'$  et  $\psi'$  les deux anomalies de l'excentrique,
- par  $r$  et  $s$  les deux rayons vecteurs FP, FQ,
- et enfin par  $\omega$  la longitude géocentrique demandée EHQ.

19. Les deux longitudes héliocentriques seront ainsi les angles EFP, EFQ; et l'on aura

$$EFP = \alpha - \phi, \quad EFQ = \beta - \psi;$$

ce qui donne

$$\text{Tang. } \omega = \frac{s \sin.(\beta - \psi) - r \sin.(\alpha - \phi)}{s \cos.(\beta - \psi) - r \cos.(\alpha - \phi)}.$$

## PROBLÈMES

On aura de plus, pour les deux rayons vecteurs FP et FQ ou  $r$  et  $s$

$$r = \frac{a \cos^2 \lambda}{1 - \sin \lambda \cos \phi}, \quad s = \frac{b \cos^2 \mu}{1 - \sin \mu \cos \psi}.$$

On aura enfin les équations, déjà employées dans le premier problème, par lesquelles on passe de l'anomalie vraie à l'anomalie moyenne, et réciproquement : savoir,

$$\begin{aligned}\sin \phi' &= \frac{\cos \lambda \sin \phi}{1 - \sin \lambda \cos \phi}, & \sin \psi' &= \frac{\cos \mu \sin \psi}{1 - \sin \mu \cos \psi}, \\ \cos \phi' &= \frac{\cos \phi - \sin \lambda}{1 - \sin \lambda \cos \phi}, & \cos \psi' &= \frac{\cos \psi - \sin \mu}{1 - \sin \mu \cos \psi}, \\ \frac{2\pi t}{p} &= \phi' + \sin \lambda \sin \phi', & \frac{2\pi t}{q} &= \psi' + \sin \mu \sin \psi.\end{aligned}$$

20. Comme on demande pour  $w$  une série double, ordonnée selon les puissances ascendantes des deux excentricités, telle que

$$\begin{aligned}w &= A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \dots \\ &\quad + B'\mu + C'\lambda\mu + D'\lambda^2\mu + \dots \\ &\quad + C''\mu^2 + D''\lambda\mu^2 + \dots \\ &\quad + D'''\mu^3 + \dots \\ &\quad + \dots\end{aligned}$$

on voit que son premier terme  $A$  sera ce que devient l'angle  $w$ , dans le cas de  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ; ce qui donne  $r=a$ ,  $s=b$ ,  $\phi=\frac{2\pi t}{p}$ ,  $\psi=\frac{2\pi t}{q}$ ; d'où il résulte

$$\text{Tang. } A = \frac{a \sin \left( \alpha - \frac{2\pi t}{p} \right) - b \sin \left( \beta - \frac{2\pi t}{q} \right)}{a \cos \left( \alpha - \frac{2\pi t}{p} \right) - b \cos \left( \beta - \frac{2\pi t}{q} \right)}.$$

21. Les deux coefficients qui suivent,  $B$  et  $B'$ , seront ce que deviennent les deux rapports différentiels  $\frac{dw}{d\lambda}$ ,  $\frac{dw}{d\mu}$ , dans la même superposition de  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ; et l'on voit que la differentiation doit

porter uniquement sur les deux excentricités  $\lambda$  et  $\mu$ , et que le temps  $t$  doit être regardé comme exempt de différentiation. On aura ainsi

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = -\frac{\sin.\phi(2-\sin.\lambda\cos.\phi)}{\cos.\lambda}, \quad \frac{dr}{d\lambda} = a\cos.\lambda\cos.\phi,$$

$$\frac{d\psi}{d\mu} = -\frac{\sin.\psi(2-\sin.\mu\cos.\psi)}{\cos.\mu}; \quad \frac{ds}{d\mu} = b\cos.\mu\cos.\psi.$$

22. Enfin, de l'expression de  $\text{Tang.}\omega$ , donnée ci-dessus, on tire l'expression générale de  $d\omega$ , ainsi qu'il suit

$$d\omega = \frac{-r^2 d\phi + rs d\phi \cos.(\alpha - \beta - \phi + \psi) - s dr \sin.(\alpha - \beta - \phi + \psi)}{-s^2 d\psi + rs d\psi \cos.(\alpha - \beta - \phi + \psi) + r ds \sin.(\alpha - \beta - \phi + \psi)};$$

ce qui donnera, pour les deux coefficients partiels  $\frac{d\omega}{d\lambda}$ ,  $\frac{d\omega}{d\mu}$

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{\cos.\lambda}{r^2 - 2rs \cos.(\alpha - \beta - \phi + \psi) + s^2} \left\{ \frac{a^2 \cos.^2 \lambda \sin.\phi(2 - \sin.\lambda \cos.\phi)}{(1 - \sin.\lambda \cos.\phi)^2} \right.$$

$$- \frac{ab \cos.^2 \mu \sin.\phi(2 - \sin.\lambda \cos.\phi)}{(1 - \sin.\lambda \cos.\phi)(1 - \sin.\mu \cos.\psi)} \cos.(\alpha - \beta - \phi + \psi)$$

$$\left. - \frac{ab \cos.^2 \mu \cos.\phi}{(1 - \sin.\mu \cos.\psi)} \sin.(\alpha - \beta - \phi + \psi) \right\};$$

$$\frac{d\omega}{d\mu} = \frac{\cos.\mu}{r^2 - 2rs \cos.(\alpha - \beta - \phi + \psi) + s^2} \left\{ \frac{b^2 \cos.^2 \mu \sin.\psi(2 - \sin.\mu \cos.\psi)}{(1 - \sin.\mu \cos.\psi)^2} \right.$$

$$- \frac{ab \cos.^2 \lambda \sin.\psi(2 - \sin.\mu \cos.\psi)}{(1 - \sin.\lambda \cos.\phi)(1 - \sin.\mu \cos.\psi)} \cos.(\alpha - \beta - \phi + \psi)$$

$$\left. + \frac{ab \cos.^2 \lambda \cos.\psi}{(1 - \sin.\lambda \cos.\phi)} \sin.(\alpha - \beta - \phi + \psi) \right\}.$$

24. Pour en tirer les deux coefficients  $B$ ,  $B'$ , il faudra faire, dans les deux expressions,  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ,  $r=a$ ,  $s=b$ ,  $\phi=\frac{2\pi t}{p}$ ,

$\psi=\frac{2\pi t}{q}$ ; on aura ainsi

## PROBLÈMES

$$B = \frac{1}{a^2 - ab\cos\left(\alpha - \beta - \frac{2\pi t}{p} + \frac{2\pi t}{q}\right) + b^2} \left\{ 2a^2 \sin\frac{2\pi t}{p} \right. \\ \left. - 2ab \sin\frac{2\pi t}{p} \cos\left(\alpha - \beta - \frac{2\pi t}{p} + \frac{2\pi t}{q}\right) - ab \cos\frac{2\pi t}{p} \sin\left(\alpha - \beta - \frac{2\pi t}{p} + \frac{2\pi t}{q}\right) \right\},$$

$$B' = \frac{1}{a^2 - 2ab\cos\left(\alpha - \beta - \frac{2\pi t}{p} + \frac{2\pi t}{q}\right) + b^2} \left\{ 2b^2 \sin\frac{2\pi t}{q} \right. \\ \left. - 2ab \sin\frac{2\pi t}{p} \cos\left(\alpha - \beta - \frac{2\pi t}{p} + \frac{2\pi t}{q}\right) + ab \cos\frac{2\pi t}{q} \sin\left(\alpha - \beta - \frac{2\pi t}{p} + \frac{2\pi t}{q}\right) \right\}.$$

25. La forme, très-compliquée, des deux différentielles partielles  $\frac{d\omega}{d\lambda}$ ,  $\frac{d\omega}{d\mu}$  ne permet guère de procéder, avec quelque espérance de succès, au développement des coefficients ultérieurs; et nous avouons que la formule que nous venons de trouver ne pourra guère être regardée que comme le résultat d'une première approximation, à laquelle il nous paraît convenable de nous arrêter. Pour trouver la longitude géocentrique, avec une plus grande précision, il faudra encore recourir, dans chaque cas particulier, à l'emploi des tables, et renoncer aux avantages qui pourraient résulter d'une formule générale.

26. Connaissant la position des deux aphélies, ou les angles EFA, EFB; et les deux longitudes héliocentriques EFP, EFQ, et par conséquent aussi les deux rayons vecteurs FP, FQ, on trouvera la longitude géocentrique, ou l'angle EHQ par la formule

$$\text{Tang.EHQ} = \frac{FQ \sin.EFQ - FP \sin.EFP}{FQ \cos.EFQ - FP \cos.EFP}.$$

Ici la ligne FP, rayon vecteur de la terre, peut toujours être regardée comme donnée; mais, pour trouver FQ, rayon vecteur de la planète, il faut connaître l'anomalie vraie de cette dernière, ou l'angle AFQ, qui est lui-même égal à la longitude EFB de l'aphélie, moins la longitude héliocentrique EFQ; ce qui fait naître une difficulté, lorsque, de la longitude géocentrique, qui est la seule donnée, tapt

par les tables que par l'observation, on veut repasser à la longitude héliocentrique. La difficulté sera levée, par la résolution du problème que voici.

27. *Connaissant, outre les longitudes des deux aphélies, aussi bien que les grands axes et les excentricités des deux orbites, la longitude géocentrique d'une planète, pour un instant donné, trouver sa longitude héliocentrique ?*

Désignons par

$B$  l'angle EFB, longitude de l'aphélie de la planète;

$b$  le côté BF, demi-grand axe,

$\omega$  l'angle EHQ, longitude géocentrique de la planète,

$f$  le rayon vecteur FP,

" l'angle EFP, longitude héliocentrique de la terre,

$\theta$  l'angle EFQ, longitude héliocentrique de la planète;

donc,  $\text{Ang.FPH} = \omega - \eta$ ,

$$\text{Ang.PQF} = \omega - \theta.$$

L'angle BFQ, anomalie vraie de la planète, sera  $B - \theta$ ; et l'angle  $\theta$  formera ainsi l'inconnue du problème.

Le triangle FPQ donnera  $FP : FQ = \sin.(\omega - \theta) : \sin.(\omega - \eta)$ ; donc

$$FQ = \frac{\sin.(\omega - \eta)}{\sin.(\omega - \theta)} f.$$

Mais, parce que FQ est un rayon vecteur de l'ellipse; on a aussi

$$FQ = \frac{b \cos^2 \mu}{1 - \sin. \mu \cos. (B - \theta)} ;$$

donc, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{b \cos^2 \mu}{f \sin. (\omega - \eta)} = n,$$

on aura l'équation

$$1 = n \sin. (\omega - \theta) + \sin. \mu \cos. (B - \theta).$$

Pour la résoudre, il suffira de faire

$$\text{Tang. K} = \frac{n \cos. \omega - \sin. \mu \sin. B}{n \sin. \omega + \sin. \mu \cos. B}, \quad R^2 = n^2 + 2n \sin. \mu \sin. (\omega - B) + \sin^2 \mu ;$$

et l'on aura finalement

$$\cos(\epsilon + K) = \frac{1}{R}.$$

Le problème sera résolu.

28. *PROBLÈME VI.* On demande de comprendre les époques des conjonctions et des oppositions d'une planète dans une seule série double, ordonnée selon les puissances ascendantes des deux excentricités?

29. *Solution.* Par les mêmes raisons exposées au sujet du précédent problème, le temps  $t$  sera compté d'une époque où, la terre étant dans son aphélie en A, la planète était très-près de l'une de ses deux apsides B ou B'. Les quantités données du problème seront donc : savoir, les demi-grands axes  $a, b$  des deux orbites; les deux demi-petits axes  $a\cos.\lambda, b\cos.\mu$ ; les deux révolutions anomalistiques,  $p, q$ ; enfin l'angle AFB que les deux grands axes font entre eux, et que nous désignerons par  $\epsilon$ ; et les lettres  $\varphi$  et  $\psi$  continueront à désigner les anomalies vraies AFP, BFQ des deux planètes au bout du temps  $t$ . On aura ainsi  $\text{AFP}=\varphi, \text{AFQ}=\epsilon+\psi$ ; ce qui donne, pour le cas du problème  $\varphi-\psi-\epsilon=n\pi$ ; la lettre  $n$  désignant un nombre entier pris à volonté, pair dans les *conjonctions*, impair dans les *oppositions*. Il en résulte l'équation différentielle  $d\varphi=d\psi$ ; c'est la première des équations différentielles qui nous conduiront à la connaissance des coefficients.

30. La série étant supposée de la forme

$$\begin{aligned} t = & A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \dots \\ & + B'\mu + C'\lambda\mu + D'\lambda^2\mu + \dots \\ & + C''\mu^2 + D''\lambda\mu^2 + \dots \\ & + D'''\mu^3 + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

Le premier terme  $A$  sera ce que devient  $t$  dans le cas de  $\lambda=0, \mu=0$ ; or, on a, dans ce cas,  $\frac{2\pi t}{p}=\varphi, \frac{2\pi t}{q}=\psi$ , ce qui fournit l'équation  $\frac{2\pi t}{p}-\frac{2\pi t}{q}=n\pi+\epsilon$ ; donc

$$A = \frac{(n\pi + \epsilon) pq}{2\pi(q-p)}.$$

Telle est la valeur du *premier* coefficient de la série.

31. Les coefficients  $B$ ,  $B'$  seront ce que deviennent, dans le cas de  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ , les deux rapports différentiels partiels  $\frac{dt}{d\lambda}$ ,  $\frac{dt}{d\mu}$ :

On a trouvé (4), dans le premier problème, pour la différentielle complète de  $\phi$ ,

$$d\phi = \frac{2\pi(1 - \sin.\lambda \cos.\phi)^2}{p \cos.^3\lambda} dt - \frac{\sin.\phi(2 - \sin.\lambda \cos.\phi)}{\cos.\lambda} d\lambda;$$

on aura de même, pour la seconde orbite,

$$d\psi = \frac{2\pi(1 - \sin.\mu \cos.\psi)^2}{q \cos.^3\mu} dt - \frac{\sin.\psi(2 - \sin.\mu \cos.\psi)}{\cos.\mu} d\mu;$$

Égalant entre elles ces deux différentielles, ce qui est effectivement l'équation de condition (29) des syzygies, on en tirera la différentielle complète de  $t$  qui doit répondre à la nature du problème; ce qui donnera ensuite, pour les rapports différentiels  $\frac{dt}{d\lambda}$ ,  $\frac{dt}{d\mu}$ ,

$$\frac{dt}{d\lambda} = + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{pq \cos.^2\lambda \cos.^3\mu \sin.\phi(2 - \sin.\lambda \cos.\phi)}{q \cos.^3\mu(1 - \sin.\lambda \cos.\phi)^2 - p \cos.^3\lambda(1 - \sin.\mu \cos.\psi)^2},$$

$$\frac{dt}{d\mu} = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{pq \cos.^2\mu \cos.^3\lambda \sin.\psi(2 - \sin.\mu \cos.\psi)}{q \cos.^3\mu(1 - \sin.\lambda \cos.\phi)^2 - p \cos.^3\lambda(1 - \sin.\mu \cos.\psi)^2}.$$

32. Il ne restera qu'à faire, dans ces expressions,  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ; ce qui donne  $\phi = \frac{2\pi A}{p}$ ,  $\psi = \frac{2\pi A}{q}$ , pour avoir les deux coefficients  $B$ ,  $B'$ . On trouvera ainsi

$$B = \frac{pq \sin.\frac{2\pi A}{p}}{\pi(q-p)}, \quad B' = \frac{pq \sin.\frac{2\pi A}{q}}{\pi(q-p)}.$$

33. Les coefficients  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  des termes du second ordre seront ce que deviennent, dans le même cas de  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ , les trois

rapports différentiels partiels  $\frac{d^2t}{2d\lambda^2}$ ,  $\frac{2d^2t}{2d\lambda d\mu}$ ,  $\frac{d^2t}{2d\mu^2}$ . Faisant, pour abréger

$$P = 1 - \sin \lambda \cos \phi, \quad Q = 1 - \sin \mu \cos \psi,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} dP &= -d\lambda \cos \lambda \cos \phi + d\phi \sin \lambda \sin \phi, \\ dQ &= -d\mu \cos \mu \cos \psi + d\psi \sin \mu \sin \psi; \end{aligned}$$

on parviendra ainsi à donner une forme un peu plus abrégée aux deux rapports  $\frac{dt}{d\lambda}$ ,  $\frac{dt}{d\mu}$ , lesqués deviendront

$$\begin{aligned} {}_{2\pi}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right) &= + \frac{pq \cos^2 \lambda \cos^3 \mu \sin \phi (1+P)}{q P^2 \cos^3 \mu - p Q^2 \cos^3 \lambda}, \\ {}_{2\pi}\left(\frac{dt}{d\mu}\right) &= - \frac{pq \cos^2 \mu \cos^3 \lambda \sin \psi (1+Q)}{q P^2 \cos^3 \mu - p Q^2 \cos^3 \lambda}. \end{aligned}$$

Mais il est convenable d'abréger encore. Désignons par  $F$ ,  $M$ ,  $N$  le dénominateur commun et les numérateurs de ces deux valeurs, de manière qu'on ait

$${}_{2\pi}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right) = \frac{M}{F}, \quad {}_{2\pi}\left(\frac{dt}{d\mu}\right) = \frac{N}{F};$$

les différentiations partielles nous apprendront que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{d\lambda}\right) &= -2qP \cos \lambda \cos^3 \mu \cos \phi + 3pQ^2 \sin \lambda \cos^2 \lambda \\ &\quad + \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) (2qP \cos^3 \mu \sin \lambda \sin \phi - 2pQ \cos^3 \lambda \sin \mu \sin \psi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{d\mu}\right) &= +2pQ \cos \mu \cos^3 \lambda \cos \psi - 3qP^2 \sin \mu \cos^2 \mu \\ &\quad + \left(\frac{d\psi}{d\mu}\right) (2qP \cos^3 \mu \sin \lambda \sin \phi - 2pQ \cos^3 \lambda \sin \mu \sin \psi); \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dM}{d\lambda}\right) = -pq \cos \lambda \cos^3 \mu \sin \phi (4 \sin \lambda + \cos^2 \lambda \cos \phi - 2 \sin^2 \lambda \cos \phi)$$

+

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) (pq \cos^2 \lambda \cos^3 \mu (2 \cos \varphi - \sin \lambda \cos^2 \varphi + \sin \lambda \sin^2 \varphi), \\
\left( \frac{dM}{d\mu} \right) & = -3pq \cos^2 \lambda \cos^2 \mu \sin \lambda \sin \varphi (2 - \sin \lambda \cos \varphi) \\
& + \left( \frac{d\psi}{d\mu} \right) pq \cos^2 \lambda \cos^3 \mu (2 \cos \varphi - \sin \lambda \cos^2 \varphi + \sin \lambda \sin^2 \varphi), \\
\left( \frac{dN}{d\lambda} \right) & = -3pq \cos^2 \lambda \sin \lambda \cos^2 \mu \sin \psi (2 - \sin \mu \cos \psi) \\
& + \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) pq \cos^3 \lambda \cos^2 \mu (2 \cos \psi - \sin \mu \cos^2 \psi + \sin \mu \sin^2 \psi), \\
\left( \frac{dN}{d\mu} \right) & = -pq \cos^3 \lambda \cos \mu \sin \psi (4 \sin \mu + \cos^2 \mu \cos \psi - 2 \sin^2 \mu \cos \psi) \\
& + \left( \frac{d\psi}{d\mu} \right) pq \cos^3 \lambda \cos^2 \mu (2 \cos \psi + \sin \mu \sin^2 \psi - \sin \mu \cos^2 \psi).
\end{aligned}$$

Reste donc à trouver les expressions littérales de  $\left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)$ ,  $\left( \frac{d\psi}{d\mu} \right)$  en  $d\lambda$  et  $d\mu$ , et à effectuer ensuite les développemens. Or, ayant déjà exprimé  $d\phi$  en  $dt$  et  $d\lambda$ , de même que  $d\psi$  en  $dt$  et  $d\mu$ , on n'aura qu'à substituer, dans l'une de ses expressions, la valeur de  $dt$  en  $d\lambda$  et  $d\mu$ : on aura ainsi la différentielle complète de  $d\phi$  ou  $d\psi$ , d'où on conclura

$$\left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = \frac{p \sin \phi \cos^2 \lambda (1 + P) Q^2}{q P^2 \cos^3 \mu - p Q^2 \cos^3 \lambda}, \quad \left( \frac{d\psi}{d\mu} \right) = -\frac{q \sin \psi \cos^2 \mu (1 + Q) P^2}{q P^2 \cos^3 \mu - p Q^2 \cos^3 \lambda}.$$

34. Après avoir effectué ces développemens, on pourra procéder, sans difficulté, à la détermination des rapports différentiels  $\frac{d^2 t}{d\lambda^2}$ ,  $\frac{d^2 t}{d\mu^2}$ ,  $\frac{d^2 t}{d\lambda d\mu}$ . Ayant  ${}_{2\pi} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right) = \frac{M}{F}$ ,  ${}_{2\pi} \left( \frac{dt}{d\mu} \right) = -\frac{N}{F}$ , il en résultera

$${}_{2\pi} F^2 \left( \frac{d^2 t}{d\lambda^2} \right) = F \left( \frac{dM}{d\lambda} \right) - M \left( \frac{dF}{d\lambda} \right),$$

*Tom. IV.*

$$2\pi F^2 \left( \frac{d^2t}{d\lambda d\mu} \right) = F \left( \frac{dM}{d\mu} \right) - M \left( \frac{dF}{d\mu} \right) = -F \left( \frac{dN}{d\lambda} \right) + N \left( \frac{dF}{d\lambda} \right),$$

$$2\pi F^2 \left( \frac{d^2t}{d\mu^2} \right) = - \left( \frac{dN}{d\mu} \right) + N \left( \frac{dF}{d\mu} \right).$$

35. Ainsi donc, pour trouver les coefficients  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$ , de nos termes du second ordre, il faudra voir ce que deviennent ces rapports différentiels partiels, dans le cas de  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ . On tire de cette supposition  $P=1$ ,  $Q=1$ ,  $\phi=\frac{2\pi A}{p}$ ,  $\psi=\frac{2\pi A}{q}$ ; et en continuant, par abréviation, d'employer les lettres  $\phi$  et  $\psi$  à la place de leurs valeurs, on aura, dans la même supposition de  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ,

$$F=q-p, \quad M=2pq\sin.\phi, \quad N=2pq\sin.\psi,$$

$$\left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = \frac{2p\sin.\phi}{q-p}, \quad \left( \frac{d\psi}{d\mu} \right) = -\frac{2q\sin.\psi}{q-p};$$

et ensuite

$$\left( \frac{dF}{d\lambda} \right) = -2q\cos.\phi, \quad \left( \frac{dF}{d\mu} \right) = +2p\cos.\psi;$$

$$\left( \frac{dM}{d\lambda} \right) = -\frac{pq(q-5p)\sin.\phi\cos.\phi}{q-p}, \quad \left( \frac{dM}{d\mu} \right) = -\frac{4pq^2\cos.\phi\sin.\psi}{q-p};$$

$$\left( \frac{dN}{d\mu} \right) = -\frac{pq(5q-p)\sin.\psi\cos.\psi}{q-p}, \quad \left( \frac{dN}{d\lambda} \right) = +\frac{4p^2q\cos.\psi\sin.\phi}{q-p}.$$

36. De là on pourra passer immédiatement aux rapports différentiels du second ordre  $\frac{d^2t}{d\lambda^2}$ ,  $\frac{d^2t}{d\lambda d\mu}$ ,  $\frac{d^2t}{d\mu^2}$ . On aura, toujours dans le cas de  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ ,

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = \frac{pq(5p+3q)}{2\pi(q-p)^2} \sin.\phi\cos.\phi,$$

$$\frac{d^2t}{d\lambda d\mu} = -\frac{4pq}{2\pi(q-p)^2} (p\sin.\phi\cos.\psi + q\sin.\psi\cos.\phi),$$

$$\frac{d^2t}{d\mu^2} = \frac{pq(5q+3p)}{2\pi(p-q)^2} \sin.\psi \cos.\psi ;$$

d'où l'on tire enfin

$$C = \frac{pq(5p+3q)\sin.\phi \cos.\phi}{4\pi(q-p)^2},$$

$$C' = -\frac{8pq(p\sin.\phi \cos.\psi + q\sin.\psi \cos.\phi)}{4\pi(q-p)^2},$$

$$C'' = \frac{pq(5q+3p)\sin.\psi \cos.\psi}{4\pi(q-p)^2}.$$

37. Pour trouver pareillement les coefficients  $D$ ,  $D'$ ,  $D''$ ,  $D'''$ , des termes du troisième ordre, il faudra différencier de même, par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$ , les rapports différentiels dont nous avons donné la liste (33). Nous n'exécuterons pas ces développemens; mais la route est tracée, et, en attendant, la série

$$t = A + B\lambda + C\lambda^2$$

$$+ B'\mu + C'\lambda\mu$$

$$+ C''\mu^2,$$

fera connaître, à peu près, les époques auxquelles il arrivera quelque conjonction ou opposition de la planète à laquelle se rapporte l'ellipse BQB' de la figure.

Nous poursuivrons ces recherches dans un prochain article.



---

## OPTIQUE.

*Note sur la construction des miroirs concaves de grandes dimensions ;*

Par M. A.\*\*\*, abonné.



**O**N sait que la construction des miroirs concaves , de grandes dimensions , présente des difficultés considérables , soit pour obtenir l'uniformité de courbure , soit pour donner au poli la perfection nécessaire. On surmonte , en partie , ces difficultés , avec du temps , du travail et du soin ; mais les opérations sont toujours très-longues et très-coûteuses. Si donc il était possible de ramener la fabrication des instrumens de cette espèce aux procédés qu'on emploie , ou du moins qu'on peut employer , pour celle des miroirs plans , il n'est pas douteux qu'il n'en résultât beaucoup d'économie et de facilité , et par suite un perfectionnement sensible , dans cette partie intéressante de l'art de l'opticien.

Le moyen dont on va parler paraît tendre à ce but ; mais on ne devrait penser à le mettre en pratique qu'après s'être préalablement assuré , par la théorie , du résultat qu'on pourrait en espérer ; abstraction faite des différences inévitables entre le calcul et l'exécution. Les questions dont il provoque l'examen sont d'ailleurs de nature à mériter l'attention des géomètres. Par ce double motif , on croit pouvoir entrer dans quelques détails sur le procédé dont il s'agit.

On rappellera d'abord celui qui a été mis en usage par Buffon , il y a environ soixante ans , pour se procurer des miroirs ardens.

Il consiste à couper une glace circulairement , à l'astreindre par son bord , et à la rendre concave , par une pression appliquée au centre , d'une manière permanente (*Mémoires de l'académie des sciences*, pour 1754). Prenons , au lieu d'une glace , une plaque métallique , convenablement préparée ; et imaginons que sa convexité se forme du côté qu'on destine à la face antérieure du miroir. Supposons , de plus , qu'il soit possible de soumettre cette face convexe aux opérations par lesquelles on applani et polit une grande pièce de métal ; on enlèvera ainsi la calotte très-mince qu'intercepterait un plan passant par l'arête de cette même face. Si l'on supprime ensuite la force comprimante , la plaque reprendra son état primitif ; et la face sur laquelle on aura opéré deviendra concave , avec une courbure sensiblement pareille à celle qu'elle avait dans son état de convexité.

Deux questions se présentent d'abord , relativement à ce procédé. La première de pratique : comment obtenir la condition absolument nécessaire pour que l'opération proposée soit praticable , savoir , que toutes les parties de la machine soient situées du même côté , par rapport au plan indéfini qui passe par la surface à polir ? La seconde de théorie : quelle est la courbe que forme un diamètre de la plaque , dans son état de compression ; et , plus particulièrement , quelle est la portion de cette courbe qui peut , sans erreur sensible , relativement à sa destination , être prise pour une parabole ?

On ne croit pas devoir entrer ici , sur la première question , dans un discussion qui ne pourrait qu'être prématurée ; et il conviendra seulement d'observer que les difficultés , peut-être insurmontables en opérant sur le verre , disparaissent , lorsqu'il s'agit d'une matière aussi facile à travailler qu'une substance métallique. La seconde question , indépendamment même de toute application , paraît digne d'exercer la sagacité des géomètres. Il conviendrait peut-être de l'étendre au cas où la pression aurait lieu , non sur le centre , mais sur tous les points d'un cercle concentrique à la circonference de la plaque , et même sur plusieurs cercles de cette espèce , à la fois ; et , pour

ce dernier cas , on pourrait rechercher quels seraient les rayons des cercles et les forces à appliquer qui produiraient la courbure la plus approchante de la parabole. (\*)

Comme , à l'exécution , il se trouve nécessairement des défauts d'exactitude dont on fait abstraction en théorie , il ne serait point inutile de rechercher les anomalies que produiraient , dans l'effet cherché , des irrégularités dont l'ordre pourrait être supposé très-petit par rapport aux dimensions du miroir ; comme , par exemple , si les deux faces n'étaient pas exactement parallèles ; si , au lieu d'être planes , elles étaient des portions de cylindres , de cônes ou d'ellipsoïdes très-grands ; si la plaque et le support nécessaires à l'opération ne se touchaient pas complètement par tous les points , etc.

(\*) Un problème beaucoup plus général serait le suivant : *Une surface courbe rigide et élastique , d'une forme connue et d'une épaisseur constante , ou variant suivant une loi donnée , est invariablement fixée dans l'espace , par plusieurs de ses points , ou même par une ou plusieurs courbes continues tracées sur elle. On a appliqué des pressions constantes , données d'intensité et de direction , en divers autres points de cette surface , ou même suivant d'autres courbes continues tracées sur elle. On propose d'assigner la nouvelle courbure qu'affectera cette surface?*

On pourrait aussi renverser le problème , et demander quels devraient être les points d'application , directions et intensités des pressions , ainsi que la situation des points fixes , pour produire une courbure donnée.

Pour préparer , par un problème plus simple , à un autre plus compliqué , on pourrait d'abord se proposer celui-ci : *Une verge courbe , rigide et élastique , d'une courbure connue , et d'une épaisseur constante , ou variant suivant une loi donnée , est invariablement fixée dans l'espace , par plusieurs de ses points. On a appliqué des pressions constantes , données d'intensité et de direction , en divers autres points de cette verge. On propose d'assigner la nouvelle courbure qu'elle affectera , par l'effet de ces diverses pressions ?*

Ce problème est susceptible du même renversement que le précédent ; c'est-à-dire , qu'on peut demander quels sont les points fixes et les pressions qui produiront une courbure donnée ?

Ces problèmes paraissent avoir beaucoup d'analogie avec celui de la courbe élastique ; le premier suppose nécessairement dans la surface une certaine extensibilité et contractibilité , sans laquelle on ne pourrait obtenir que des surfaces développables.

*J. D. G.*

Ce contact exact est vraisemblablement une condition très-importante ; mais on aurait des moyens assez faciles de l'obtenir, avec toute la précision désirable.

Paris, le 23 octobre 1813.

---



---

## QUESTIONS RÉSOLUES.

*Démonstrations du théorème de géométrie énoncé à la page 60 de ce volume ;*

Par MM. MASSABIEAU et GUILLAUME, professeurs de mathématiques au lycée de Rodez, GOBERT, élève du lycée d'Angers, et M. BÉRARD, principal et professeur de mathématiques au collège de Briançon. (\*)



**ENONCÉ.** M', M'' étant deux points quelconques d'une parabole, O le point de concours des tangentes en ces points, et F le foyer; on propose de démontrer que

$$\frac{\overline{M'O}^2}{\overline{M'F}} = \frac{\overline{M''O}^2}{\overline{M''F}};$$

d'où il suit que, si F tombe sur M'M'', le sommet de l'angle O, qui devient droit, est placé sur la directrice, et la ligne OF est perpendiculaire sur la corde M'M''.

Les solutions fournies par MM. Massabieau, Guillaume et Gobert sont purement analitiques, et reviennent à peu près à ce qui suit.

---

(\*) Le théorème a été proposé par M. Bérard.

Soit

$$y^2 = 4cx, \quad (1)$$

l'équation de la parabole, et soient les coordonnées des points  $M'$ ,  $M''$ ,  $O$  et  $F$  ainsi qu'il suit

$$\text{pour } M' \begin{cases} x' \\ y' \end{cases}, \quad \text{pour } M'' \begin{cases} x'' \\ y'' \end{cases}, \quad \text{pour } O \begin{cases} a \\ b \end{cases}, \quad \text{pour } F \begin{cases} c \\ o \end{cases},$$

on aura conséquemment

$$y'^2 = 4cx', \quad y''^2 = 4cx''. \quad (2)$$

Les équations des tangentes, par les points  $M'$ ,  $M''$  seront

$$yy' = 2c(x+x'), \quad yy'' = 2c(x+x''); \quad (3)$$

et, comme le point  $O$  appartient à la fois à ces deux tangentes, on aura

$$by' = 2c(a+x'), \quad by'' = 2c(a+x''); \quad (4)$$

d'où on tire, en ayant égard aux équations (2)

$$a = \frac{y'y''}{4c}, \quad b = \frac{1}{2}(y'+y''). \quad (5)$$

Cela posé on a

$$\overline{M'O}^2 = (x'-a)^2 + (y'-b)^2 = \left\{ \frac{y'^2}{4c} - \frac{y'y''}{4c} \right\}^2$$

$$+ \left\{ y' - \frac{1}{2}(y' - y'') \right\}^2 = \frac{y'^2 + 4c^2}{16c^2} (y' - y'')^2,$$

ou

$$\overline{M'O}^2 = \frac{x'+c}{4c} (y' - y'')^2,$$

et on a pareillement

$$\overline{M''O}^2 = \frac{x''+c}{4c} (y' - y'')^2;$$

mais, d'un autre côté, on a aussi

$$\overline{M'F}^2$$

$$\overline{M'F}^2 = (x'-c)^2 + y'^2 = (x'-c)^2 + 4cx' = (x'+c)^2 ;$$

d'où

$$M'F = x' + c ;$$

et l'on a pareillement

$$M''F = x'' + c ;$$

done

$$\frac{\overline{M'O}^2}{\overline{M'F}} = \frac{\overline{M''O}^2}{\overline{M''F}} = \frac{(y'-y'')^2}{4c} ; \quad (6)$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

On a de plus

$$MF \times M'F = (x'+c)(x''+c) = \left\{ \frac{y'^2}{4c} + c \right\} \left\{ \frac{y''^2}{4c} + c \right\} = \left\{ \frac{y'y''}{4c} - c \right\}^2 + \{y' + y''\}^2 ;$$

ou

$$MF \times M'F = (x-c)^2 + l^2 = \overline{OF}^2 .$$

Éliminant successivement  $M'F$  et  $M''F$  entre cette dernière équation et l'équation (6), et extrayant chaque fois la racine quarrée, il viendra

$$\frac{M'O}{M''O} = \frac{M'F}{OF} = \frac{OF}{M''F} ;$$

d'où il résulte que les deux triangles  $FM'O$  et  $FOM''$  sont semblables. (\*)

Cela posé, si la somme des angles égaux  $OFM'$ ,  $OFM''$  vaut

(\*) C'est le théorème de Robert Simson, rappelé par M. Servois, à la page 156 de ce volume.

## QUESTIONS

deux angles droits ; c'est-à-dire, si le point F est sur la corde M'M'', chacun de ces deux angles sera droit ou, en d'autres termes, OF sera perpendiculaire sur M'M'' ; la somme des deux angles FOM' et FM'O vaudra donc deux angles droits ; et, puisque le dernier est égal à FOM'', il en résulte que l'angle M'OM'' est alors droit.

Lorsque les trois points M', F, M'' sont en ligne droite, on a

$$\frac{y'}{x'-c} = \frac{y''}{x''-c},$$

ou

$$y' \left\{ \frac{y''^2}{4c} - c \right\} = y'' \left\{ \frac{y'^2}{4c} - c \right\},$$

ou

$$(y'y'' + 4c^2)(y' - y'') = 0,$$

ou simplement

$$y'y'' + 4c^2 = 0;$$

ce qui donne

$$a = \frac{y'y''}{4c} = -c;$$

ainsi alors le point O est perpétuellement sur la directrice.

Voici présentement la démonstration de M. Bérard, qui est purement géométrique.

Par les trois points M', M'', O (fig. 2) soient menées des parallèles à l'axe ; et soit H le point où la dernière rencontre la courbe. Par ce point H soient menées des parallèles à OM' et à OM'', rencontrant respectivement en P', P'' les diamètres menés par M', M''. Le carré d'une ordonnée au diamètre étant le produit de l'abscisse par le quadruple de la distance du sommet de ce diamètre au foyer ; on a

$$\overline{HP'}^2 = 4M'F \times M'P', \quad \overline{HP''}^2 = 4M''F \times M''P'';$$

mais , à cause des parallélogrammes  $OP'$ ,  $OP''$ , on a

$$M'P'=M''P''=OH, \quad HP'=OM', \quad HP''=OM'';$$

donc

$$\overline{OM'}^2 = 4FM' \times OH, \quad \overline{OM''}^2 = 4FM'' \times OH;$$

ce qui donne , par l'élimination de  $OH$ ,

$$\frac{\overline{OM'}^2}{\overline{FM'}} = \frac{\overline{OM''}^2}{\overline{FM''}}.$$

Si le point F est en ligne droite avec les points  $M'$ ,  $M''$  (fig. 3); cette équation n'exprimera autre chose que la proportionnalité des carrés des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle avec leurs projections sur l'hypothénuse ; le triangle  $M'OM''$  sera donc rectangle en O, et  $OF$  sera perpendiculaire sur  $M'M''$ .

Soit , dans ce cas , prolongée  $OH$  jusqu'à la rencontre de  $M'M''$  en I , et soit menée  $HF$ . On sait que , par la propriété de la parabole le point H est le milieu de OI; puis donc que l'angle OFI est droit , ce point H est le centre du cercle circonscrit au triangle OFI , et par conséquent  $HO=HF$ ; et puisque  $OH$  est parallèle à l'axe , le point O est un point de la directrice.

*Tentatives et réflexions relatives au problème proposé  
à la page 352 du troisième volume de ce recueil;*

Par M. KRAMP , professeur , doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



**L**E problème proposé à la page 352 du troisième volume des *Annales* revient évidemment à celui où il s'agirait de déterminer

l'angle au sommet d'une pyramide ou d'un cône donné, à base quelconque. C'est aussi sous ce point de vue que je me propose de l'envisager, dans ce qui va suivre.

1. L'angle au sommet de tout corps pyramidal a pour mesure naturelle de sa capacité le polygone sphérique décrit de son sommet comme centre, avec un rayon arbitraire, dans toutes les faces qui le comprennent; et le rapport de la surface de ce polygone à celle de la sphère entière, ou bien à la huitième partie de cette sphère, connue sous le nom de *triangle sphérique tri-rectangle*, et que, dans mes *Éléments de géométrie*, j'ai désigné par le nom d'*orthoèdre*.

2. Désignant par  $s$  la somme des angles externes d'un polygone sphérique quelconque, la surface de ce polygone sera égale à  $360^\circ - s$ ; l'angle droit étant l'unité des angles linéaires, de même que l'orthoèdre est celui des angles solides. Ainsi l'angle droit sera à  $360^\circ - s$ , comme l'orthoèdre est à la surface du polygone sphérique.

3. La figure 4 désigne la surface antérieure d'une pyramide, ayant pour base le polygone rectiligne ABCD..... Si du point S comme centre, et avec un rayon arbitraire, on décrit, dans les faces de cette pyramide, le polygone sphérique *abcd*....; la surface de ce dernier polygone exprimera la capacité de l'angle solide pyramidal dont le sommet est S, tandis que ses angles exprimeront les inclinaisons mutuelles de ses faces entre elles; c'est ainsi que, par exemple, l'angle sphérique  $b$  exprime l'angle plan (\*) compris entre les deux faces triangulaires ABS, CBS. On le trouvera, lorsque l'on connaîtra tous les angles linéaires aux sommets de la base; c'est ainsi qu'en désignant par  $B$  l'angle ABC, par  $m$  l'angle ABS, et par  $n$  l'angle CBS, on aura le cosinus de l'angle plan ABSC, ou

(\*) Il est presque superflu d'observer que l'auteur emploie ici les anciennes démonstrations d'*angles linéaires, plans et solides*, correspondant aux dénominations nouvelles d'*angles plans, dièdres et polyèdres*.

$$\cos.b = \frac{\cos.B - \cos.m \cos.n}{\sin.m \sin.n} ;$$

4. Mais, pour appliquer ces principes généraux aux conoides; ayant pour base une courbe quelconque, rentrant en elle-même, il faut nécessairement réduire à des coordonnées rectangulaires la position des sommets de cette base, considérée comme polygone rectiligne d'un nombre de côtés fini. Soient donc (fig. 5) L, M, N, trois sommets consécutifs de cette base, que nous rapporterons à l'axe indéfini AZ, mené dans le plan de cette même base, par le pied A de la perpendiculaire SA. Nous désignerons par  $h$  cette même hauteur SA; et, prenant le point A pour origine des coordonnées, nous exprimerons par  $x$ ,  $y$  les coordonnées du premier sommet L; par  $t$ ,  $u$ , celles du second sommet M; et par  $p$ ,  $q$ , celles du troisième sommet N; de manière que

$$AO=x, \quad AP=t, \quad AQ=p,$$

$$OL=y; \quad PM=u; \quad QN=q;$$

Il en résultera

$$\overline{SL}^2 = h^2 + x^2 + y^2, \quad \overline{LM}^2 = (t-x)^2 + (u-y)^2,$$

$$\overline{SM}^2 = h^2 + t^2 + u^2, \quad \overline{MN}^2 = (p-t)^2 + (q-u)^2,$$

$$\overline{SN}^2 = h^2 + p^2 + q^2; \quad \overline{LN}^2 = (p-x)^2 + (q-y)^2;$$

d'où l'on tire

$$\cos.SML = \frac{t^2 + u^2 - lx - uy}{SM \times LN},$$

## QUESTIONS

$$\cos.SMN = \frac{t^2 + u^2 - pt - qu}{SM \times MN},$$

$$\cos.LMN = \frac{t^2 + u^2 - tx - uy - pt - qu + px + qy}{LM \times MN}.$$

Il faudra aussi se procurer les expressions des sinus des deux premiers SML et SMN de ces angles. On aura, après les réductions nécessaires,

$$\sin^2 SML = \frac{h^2 \cdot \overline{LM}^2 + (ty - ux)^2}{\overline{SM}^2 \times \overline{LM}^2},$$

$$\sin^2 SMN = \frac{h^2 \cdot \overline{MN}^2 + (qt - pu)^2}{\overline{SM}^2 \times \overline{MN}^2}.$$

Le produit  $SM \times LM \cdot \sin.SML$  exprime le double de la surface du triangle LSM; d'où il suit que cette surface aura pour expression

$$\frac{1}{2} \sqrt{h^2 \cdot \overline{LM}^2 + (ty - ux)^2}.$$

5. Le cosinus de l'angle plan LSMN, qui exprime l'inclinaison mutuelle des deux faces triangulaires LSM et MSN, ayant pour son sommet linéaire l'arête pyramidal SM, est exprimé comme il suit :

$$\cos.LSMN = \frac{\cos.LMN - \cos.LMS \cos.NMS}{\sin.LMS \sin.NMS}.$$

Après les substitutions, et les réductions, en assez grand nombre; qui se présentent, cette expression devient

$$\text{Cos.LSMN} = \frac{h^2(t^2+u^2-tx-uy-pt-qu+px+qy)-(ty-ux)(qt-pu)}{\sqrt{\{h^2\overline{LM}^2+(ty-ux)^2\}\{h^2\overline{MN}^2+(qt-pu)^2\}}}.$$

On trouve ensuite, pour le sinus du même angle,

$$\text{Sin.LSMN} = \frac{h\cdot\overline{SM}(pu-qt+ty-ux-py+qx)}{\sqrt{\{h^2\overline{LM}^2+(ty-ux)^2\}\{h^2\overline{MN}^2+(qt-pu)^2\}}}.$$

d'où il résulte enfin

$$\text{Tang.LSMN} = \frac{h\cdot\overline{SM}(pu-qt+ty-ux-py+qx)}{h^2(t^2+u^2-tx-uy-pt-qu+px+qy)-(ty-ux)(pu-qt)};$$

et telle est la tangente de l'angle plan, compris entre les deux faces triangulaires contiguës LSM, NSM.

6. Pour passer du polygone rectiligne au cas d'une courbe continue, prenons sur son périmètre les trois points L, M, N, à des distances infiniment petites l'une de l'autre; et, en continuant de désigner par les lettres  $t$ ,  $u$ , les deux coordonnées AP, PM, du point intermédiaire M, nous aurons  $t+dt$ ,  $u+du$ , respectivement, pour les coordonnées AQ, QN, du point suivant N; tandis que  $t-dt+d^2t-d^3t+\dots$ ,  $u-du+d^2u-d^3u+\dots$  seront, respectivement, les expressions complètes des coordonnées AO, OL, du point précédent L. Comme, dans le problème que nous nous proposons, il suffira de nous arrêter aux secondees différentielles, nous aurons

$$AO=x=t-dt+d^2t; \quad AP=t, \quad AQ=p=t+dt,$$

$$OL=y=u-du+d^2u; \quad PM=u; \quad QN=q=u+du:$$

En faisant ces substitutions, dans l'expression ci-dessus, nous aurons

## QUESTIONS

pour la différentielle de la somme des angles extérieurs, différentielle que nous représenterons conséquemment par  $ds$ , et de laquelle dépend la solution de notre problème, l'expression suivante

$$ds = \frac{h \cdot SM(dt^2 - du^2)}{h^2(dt^2 + du^2) + (tdu - udt)^2}.$$

7. Si nous désignons, en outre, par  $A$  la portion de la surface convexe de ce corps conique, comprise entre les deux arêtes  $AL$ ,  $AN$ , nous aurons

$$dA = \sqrt{h^2(dt^2 + du^2) + (tdu - udt)^2},$$

d'où

$$ds = \frac{h dt du \sqrt{h + t^2 + u^2}}{4 dA^2}.$$

L'expression de  $ds$  est donc beaucoup plus compliquée que celle de  $dA$ ; et, comme cette dernière n'est intégrable que dans un nombre de cas très-borné, desquels celui du cône oblique, à base circulaire, est formellement exclu; on voit que l'on doit encore moins se flatter d'une solution complète du problème qui concerne la capacité des angles au sommet.

8. A la place des coordonnées rectangulaires  $t$  et  $u$ , essayons de substituer le rayon vecteur  $AM=r$  et l'angle  $MAZ=\phi$  qu'il fait avec l'axe des  $t$ , ce qui donne  $t=r\cos.\phi$ ,  $u=r\sin.\phi$ . On trouvera ainsi

$$dA = \sqrt{h^2 dr^2 + (h^2 + r^2)r^2 d\phi^2};$$

et si l'on fait  $d\phi$  constant, d'où  $d^2\phi=0$ , on aura

$$ds = \frac{2dr^2 d\phi + r^2 d\phi^2 - rd^2 r d\phi}{h^2 dr^2 + (h^2 + r^2)r^2 d\phi^2} \cdot h \sqrt{h^2 + r^2},$$

9. Prenons pour premier exemple le cône droit ayant A pour centre de sa base, et  $r$  pour rayon de cette base. Ici on aura  $dr=0$ ; la différentielle de la surface conoïdique deviendra donc

$$dA = \frac{1}{2} r d\varphi \sqrt{h^2 + r^2},$$

ayant pour intégrale

$$A = \frac{1}{2} r \varphi \sqrt{h^2 + r^2} + C;$$

ce qui donne, pour la surface entière du cône  $\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ . Faisant, pour abréger, le côté du cône ou  $\sqrt{h^2 + r^2} = f$ , on aura  $ds = \frac{h d\varphi}{f}$ , et  $s = \frac{h\varphi}{f}$ . Ainsi, la somme des angles extérieurs, pour le cône entier, étant d'après cela  $\frac{2\pi h}{f}$ , la capacité de l'angle au sommet deviendra  $\frac{2\pi(f-h)}{f}$ . On aura donc la proportion: l'angle droit, ou  $\frac{\pi}{2}$ , est à  $\frac{2\pi(f-h)}{f}$ , comme l'orthoèdre est à la capacité de l'angle qu'on cherche, lequel, par conséquent, sera égal à l'orthoèdre multiplié par  $\frac{4(f-h)}{f}$ . Effectivement, l'angle en question occupe, sur la surface d'une sphère du rayon  $f$ , une calotte sphérique de la hauteur  $f-h$ , dont la surface sera, par conséquent,  $2\pi f(f-h)$ ; d'un autre côté, l'orthoèdre, égal au huitième de cette sphère, sera  $\frac{\pi f^2}{2}$ ; divisant donc la première expression par la seconde, on aura la fraction  $\frac{4(f-h)}{f}$ , que le précédent calcul nous a fait obtenir.

10. On sait que la surface du cône oblique se refuse à tous les moyens connus d'intégration. On peut en conclure, à plus forte raison, que la capacité de son angle au sommet se trouvera hors du domaine de l'analyse actuelle. Soit SA (fig. 6) la hauteur d'un

## QUESTIONS

tel cône , ayant pour base le cercle décrit du centre C , avec le rayon CB=CD=r ; soient , de plus , AS=h , AC=a , AP=t , PM=u , ce qui nous fournit l'équation  $(a-t)^2+u^2=r^2$ . On aura , d'après cela

$$dA = \frac{1}{2} dt \sqrt{\frac{h^2 r^2 + (a^2 - r^2 - at)^2}{r^2 - (a - t)^2}} ;$$

différentielle qui n'est intégrable dans aucun cas. On trouvera ensuite

$$ds = \frac{hr^2 dt}{h^2 r^2 + (a^2 - r^2 - at)^2} \cdot \sqrt{\frac{h^2 + r^2 - a^2 + 2at}{r^2 - (a - t)^2}} .$$

D'après l'essai que j'en ai fait , cette différentielle m'a paru aussi peu intégrable que la précédente.

En faisant

$$y = \sqrt{h^2 + r^2 - a^2 + 2at} ,$$

et posant de plus , pour abréger ,

$$a^2 + r^2 + h^2 = m^2 , \quad a^2 - r^2 + h^2 = n^2 ,$$

cette différentielle deviendra

$$ds = \frac{8hr^2y^2 dy}{(4h^2r^2 + n^4 - 2n^2y^2 + y^4)\sqrt{4a^2r^2 - m^4 + 2m^2y^2 - y^4}} ;$$

formule qui n'est pas susceptible d'être intégrée.

11. L'une des courbes qui semblerait promettre des résultats plus favorables , c'est la développée de l'ellipse , comprise sous l'équation

$$\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{u}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 ; \quad (*)$$

il en résulte, en posant  $a^2 - b^2 = c^2$ ,

$$dt^2 + du^2 = \frac{b^2 a^{\frac{2}{3}} + c^2 t^{\frac{2}{3}}}{a^2 t^{\frac{2}{3}}} dt^2 .$$

La racine quarrée de cette formule est entièrement intégrable; il en résulte que l'arc de la développée elliptique, pris depuis  $t=a$  est

$$\frac{a^{\frac{2}{3}} - \{b^2 a^{\frac{2}{3}} + c^2 t^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{1}{2}}}{ac^2} ;$$

ce qui donne; pour la longueur du quart de cette développée,

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} ;$$

cette courbe est donc rectifiable; comme le sont les développées de toutes les courbes algébriques. Mais cet avantage est perdu, tant pour la surface que pour la capacité angulaire du cône dont elle est la base. Les différentielles dont dépendent ces deux problèmes sont aussi peu intégrables que dans le cas du cône oblique à base circulaire.

(\*) Dans cette équation  $a$  et  $b$  ne sont point les demi-axes, mais des troisièmes proportionnelles à ces demi-axes et à l'excentricité.

## QUESTIONS PROPOSÉES.

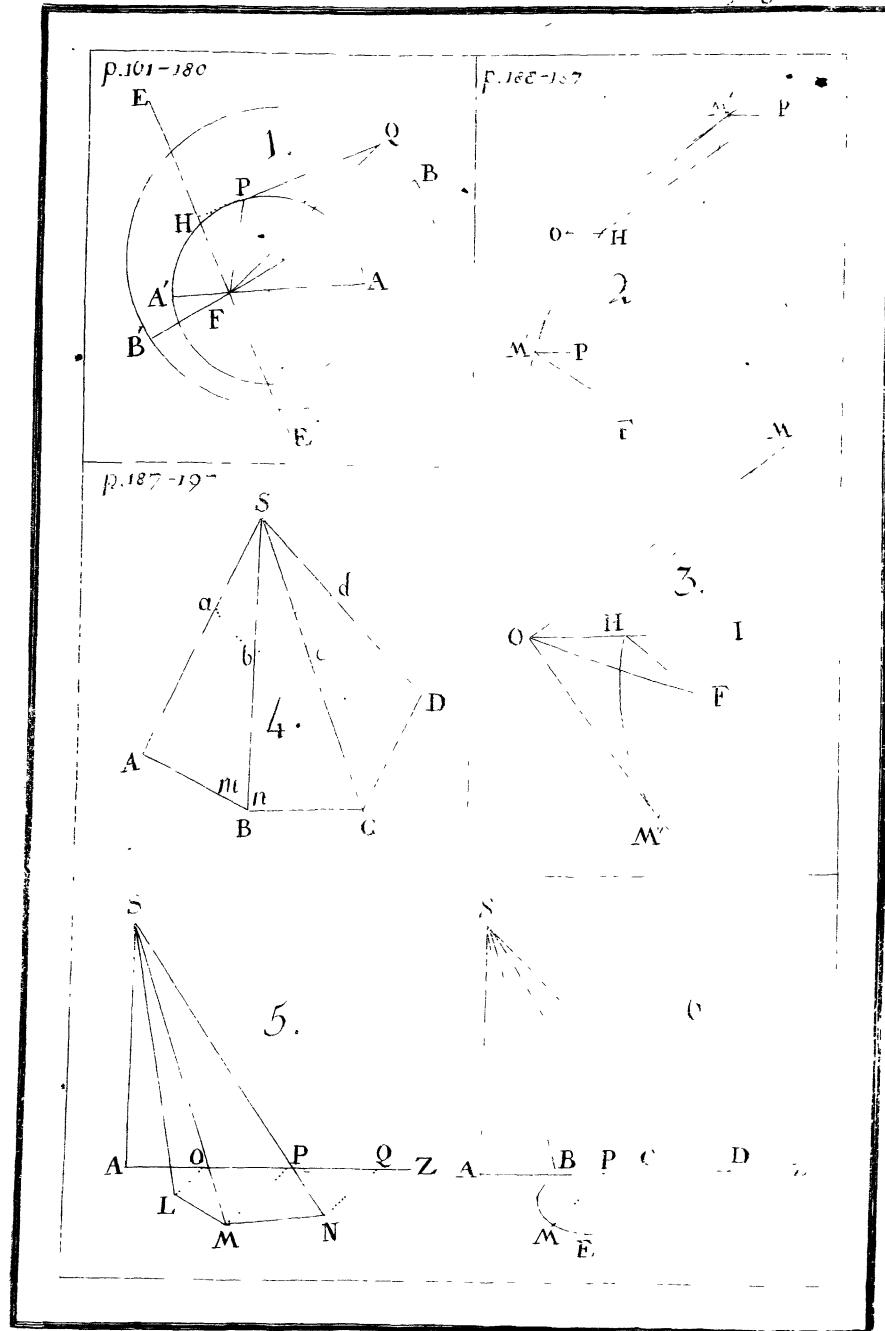
*Théorèmes appartenant à la géométrie de la règle.*

I. DEUX hexagones étant tracés d'une manière quelconque sur le plan d'une section conique , en sorte cependant que les sommets du second soient les pôles des côtés du premier ; si les points de concours des directions des côtés opposés de celui-ci sont tous trois sur une même ligne droite , les droites joignant les sommets opposés de l'autre se couperont toutes trois au même point , et réciproquement. (\*)

II. Quelqu'un soupçonne 1.<sup>o</sup> que , dans tout dodécaèdre-icosagone , régulier ou non , inscrit à une surface du second ordre , les six intersections des directions des faces opposées sont situées dans un même plan ; 2.<sup>o</sup> que , dans tout icosaèdre-dodécagone , régulier ou non , les six diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent toutes en un même point ; on propose de vérifier , par le raisonnement , si ce soupçon est fondé ? (\*\*).

(\*) On remarquera sans peine que les théorèmes démontrés à la page 78 de ce volume , ne sont que des cas très-particuliers de celui-ci. On peut , au surplus pour la définition des *pôles* , consulter la page 337 du premier volume de ce recueil.

(\*\*) Neuf points ou neuf plans tangens suffisant pour déterminer une surface du second ordre ; si ces théorèmes sont vrais , les six droites auxquelles ils sont relatifs doivent être , en outre , assujetties à d'autres conditions , comme , par exemple , de former un hexagone inscriptible à une ligne du second ordre , ou un angle hexaèdre circonscriptible à un cône du même ordre. Il serait intéressant de trouver aussi ces relations.



G. G. fecit



## ASTRONOMIE.

*Recherche des éléments d'une ellipse, dont le foyer et trois points sont connus ;*

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



SOIENT F le foyer et P, Q, R trois points donnés sur le périmètre d'une ellipse, et soit EF une droite fixe, dirigée d'une manière quelconque, dans le plan de ces quatre points. Il s'agit de déterminer les éléments de la courbe.

Les données du problème sont au nombre de six ; savoir : les trois angles EFP, EFQ, EFR, et les trois rayons vecteurs FP, FQ, FR. Soient donc

$$\begin{aligned} P &= \text{Ang.}EFP, \quad p = \text{ray. vec. } FP, \\ Q &= \text{Ang.}EFQ, \quad q = \text{ray. vec. } FQ, \\ R &= \text{Ang.}EFR; \quad r = \text{ray. vec. } FR. \end{aligned}$$

Les inconnues du problème sont au nombre de trois ; savoir : l'angle EFA que fait la direction FA du grand axe de l'ellipse avec la droite fixe EF, le demi-grand axe de l'orbite et son excentricité. Soient donc

$$\varphi = \text{Ang.}EFA,$$

$a$  = le demi-grand axe,

$\text{Sin.}\lambda$  = l'excentricité, divisée par le demi-grand axe.

En supposant que le point A est l'aphélie, on aura.

*Tom. IV, n.<sup>o</sup> VII, 1.<sup>er</sup> janvier 1814.*

## É L É M È N S

$$AF = a(1 + \sin.\lambda)$$

$$\text{Ang. AFP} = P - \phi ,$$

$$\text{Ang. AFQ} = Q - \phi ,$$

$$\text{Ang. AFR} = R - \phi .$$

Et, par les propriétés connues de l'ellipse, on trouvera

$$p = \frac{a \cos^2 \lambda}{1 - \sin.\lambda \cos.(P - \phi)} ,$$

$$q = \frac{a \cos^2 \lambda}{1 - \sin.\lambda \cos.(Q - \phi)} ,$$

$$r = \frac{a \cos^2 \lambda}{1 - \sin.\lambda \cos.(R - \phi)} .$$

Divisant successivement la première de ces deux équations par les deux autres, il vient

$$\frac{p}{q} = \frac{1 - \sin.\lambda \cos.(Q - \phi)}{1 - \sin.\lambda \cos.(P - \phi)} ,$$

$$\frac{p}{r} = \frac{1 - \sin.\lambda \cos.(R - \phi)}{1 - \sin.\lambda \cos.(P - \phi)} .$$

Il en résulte les deux équations qui suivent

$$p - q = \{p \cos.(P - \phi) - q \cos.(Q - \phi)\} \sin.\lambda ,$$

$$p - r = \{p \cos.(P - \phi) - r \cos.(R - \phi)\} \sin.\lambda .$$

En égalant entre elles les valeurs de  $\sin.\lambda$  tirées de ces deux équations, il vient

$$\sin.\lambda = \frac{p - q}{p \cos.(P - \phi) - q \cos.(Q - \phi)} = \frac{p - r}{p \cos.(P - \phi) - r \cos.(R - \phi)} ,$$

et par conséquent

$$(p - q)\{p \cos.(P - \phi) - r \cos.(R - \phi)\} = (p - r)\{p \cos.(P - \phi) - q \cos.(Q - \phi)\}$$

en développant  $\cos.(P - \phi)$ ,  $\cos.(Q - \phi)$ ,  $\cos.(R - \phi)$ , et divisant ensuite par  $\cos.\phi$ , on tire de cette équation

$$\tan.\phi = - \frac{p(r - q) \cos.P + q(p - r) \cos.Q + r(q - p) \cos.R}{p(r - q) \sin.P + q(p - r) \sin.Q + r(q - p) \sin.R} .$$

On déduit de là, après les réductions

$$\text{Tang.}(P-\phi) = \frac{p(r-q)+q(p-r)\cos.(Q-P)+r(q-p)\cos.(R-P)}{q(p-r)\sin.(Q-P)+r(q-p)\sin.(R-P)},$$

$$\text{Tang.}(Q-\phi) = \frac{p(r-q)\cos.(P-Q)+q(p-r)+r(q-p)\cos.(R-Q)}{p(r-q)\sin.(P-Q)+r(q-p)\sin.(R-Q)},$$

$$\text{Tang.}(R-\phi) = \frac{p(r-q)\cos.(P-R)+q(p-r)\cos.(Q-R)+r(q-p)}{p(r-q)\sin.(P-R)+q(p-r)\sin.(Q-R)}.$$

La nature du problème exige que des tangentes on passe aux cosinus. On y parvient moyennant une certaine fonction, qu'en attendant nous représenterons par  $F^2$ , et dont la valeur, que nous nous réservons de simplifier plus loin, peut être exprimée ainsi qu'il suit :

$$F^2 = \begin{cases} (r-q)^2 p^2 + 2rq(p-r)(q-p)\cos.(R-Q) \\ +(p-q)^2 r^2 + 2pr(q-p)(r-q)\cos.(P-R) \\ +(q-p)^2 r^2 + 2qp(r-q)(p-r)\cos.(Q-P). \end{cases}$$

On trouve alors

$$\sin.\lambda = \frac{F}{pq\sin.(Q-P)+qr\sin.(R-Q)+rp\sin.(P-R)};$$

et ensuite

$$FCos.(P-\phi) = q(p-r)\sin.(Q-P)+r(q-p)\sin.(R-P),$$

$$FCos.(Q-\phi) = r(q-p)\sin.(R-Q)+p(r-q)\sin.(P-Q),$$

$$FCos.(R-\phi) = p(r-q)\sin.(P-R)+q(p-r)\sin.(Q-R);$$

d'où encore

$$\sin.\lambda \cos.(P-\phi) = \frac{q(p-r)\sin.(Q-P)+r(q-p)\sin.(R-P)}{pq\sin.(Q-P)+qr\sin.(R-Q)+rp\sin.(P-R)},$$

$$\sin.\lambda \cos.(Q-\phi) = \frac{r(q-p)\sin.(R-Q)+p(r-q)\sin.(P-Q)}{pq\sin.(Q-P)+qr\sin.(R-Q)+rp\sin.(P-R)},$$

$$\sin.\lambda \cos.(R-\phi) = \frac{p(r-q)\sin.(P-R)+q(p-r)\sin.(Q-R)}{pq\sin.(Q-P)+qr\sin.(R-Q)+rp\sin.(P-R)}.$$

De là résulte l'égalité suivante

$$\frac{1 - \sin \lambda \cos(P-\phi)}{qr} = \frac{1 - \sin \lambda \cos(Q-\phi)}{rp} = \frac{1 - \sin \lambda \cos(R-\phi)}{pq};$$

attendu que ces trois expressions se réduisent également à

$$\frac{\sin(Q-P) + \sin(R-Q) + \sin(P-R)}{pq\sin(Q-P) + qr\sin(R-Q) + rp\sin(P-R)}.$$

Il ne reste plus à déterminer que le demi-grand axe de l'orbite.  
On a

$$a = \frac{pqr}{\cos^2 \lambda} \cdot \frac{\sin(Q-P) + \sin(R-Q) + \sin(P-R)}{pq\sin(Q-P) + qr\sin(R-Q) + rp\sin(P-R)}. \quad (*)$$

En remarquant que

$$\cos(R-Q) = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}(R-Q);$$

$$\cos(P-R) = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}(P-R),$$

$$\cos(Q-P) = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}(Q-P);$$

L'expression de  $F^2$  donnée ci-dessus peut être réduite à cette forme plus simple

$$\begin{aligned} F^2 = & 4qr(p-q)(p-r)\sin^2 \frac{1}{2}(R-Q) \\ & + 4rp(q-r)(q-p)\sin^2 \frac{1}{2}(P-R) \\ & + 4pq(r-p)(r-q)\sin^2 \frac{1}{2}(Q-P). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> (\*) Il convient de remarquer que le numérateur  $\sin(Q-P) + \sin(R-Q) + \sin(P-R)$  peut être réduit à la forme suivante, plus commode pour le calcul par logarithmes,

$$-4 \sin \frac{1}{2}(Q-P) \sin \frac{1}{2}(R-Q) \sin \frac{1}{2}(P-R).$$

On peut remarquer aussi que le dénominateur  $pq\sin(Q-P) + qr\sin(R-Q) + rp\sin(P-R)$  n'est autre chose que le double de l'aire du triangle qui a ses sommets aux trois points donnés.

J. D. G.

on pourra aussi écrire

$$\text{Tang.}\varphi = \frac{p(r-q)\text{Sin.}^2 \frac{1}{i}P + q(p-r)\text{Sin.}^2 \frac{1}{i}Q + r(q-p)\text{Sin.}^2 \frac{1}{i}R}{p(r-q)\text{Sin.} \frac{1}{i}P\text{Cos.} \frac{1}{i}P + q(p-r)\text{Sin.} \frac{1}{i}Q\text{Cos.} \frac{1}{i}Q + r(q-p)\text{Sin.} \frac{1}{i}R\text{Cos.} \frac{1}{i}R}. \quad (*)$$


---



---

## ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

*Mémoire sur les principes fondamentaux de la théorie générale des équations ;*

Par M. D. ENCONTRE, professeur doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier.



1. LA théorie générale des équations repose, toute entière, sur deux théorèmes dont la démonstration me paraît n'avoir pas encore été donnée d'une manière qui puisse être mise à la portée des commençans. Le premier de ces théorèmes est que, dans une équation à une seule inconnue  $x$ , si deux nombres  $a, b$ , successivement substitués à  $x$ , donnent des résultats de signes contraires, il y a nécessairement une racine réelle, comprise entre  $a$  et  $b$ . Le second est qu'une équation quelconque à une seule inconnue  $x$ , étant

---

(\*) Si, dans l'application à un cas particulier, on trouve  $\text{Sin.}\lambda=1$  ou, ce qui revient au même

$$F=pq\text{Sin.}(Q-P)+qr\text{Sin.}(R-Q)+rp\text{Sin.}(P-R),$$

on en conclura que la courbe est une parabole. Il serait aisément de faire voir que cette équation de relation revient à celle qui a été donnée à la page 157 de ce volume. On pourrait en faire usage, pour simplifier, dans ce cas, la valeur de  $\text{Tang.}\varphi$ .

J. D. G.

ordonnée suivant les puissances de cette inconnue, qu'on suppose toujours entières et positives, son premier membre est nécessairement décomposable en facteurs simples de la forme réelle  $x \pm a$ , ou de la forme imaginaire  $x \pm a \pm b\sqrt{-1}$ .

2. L'illustre Lagrange, dans son beau *Traité de la résolution des équations numériques*, démontre le premier de ces deux théorèmes en supposant le second.

« Soient, dit-il,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  les racines de l'équation ; elle se réduira, comme on sait, à cette forme  $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots=0$ . Or, soient  $p, q$  les nombres qui, substitués à  $x$ , donnent des résultats de signes contraires, il faudra que ces deux quantités

(p- $\alpha$ )(p- $\beta$ )(p- $\gamma$ )....., (q- $\alpha$ )(q- $\beta$ )(q- $\gamma$ ).....,  
» soient de signes contraires ; par conséquent, il faudra qu'il y ait,  
» au moins, deux facteurs correspondans, comme  $p-\alpha$  et  $q-\alpha$ ,  
» qui soient de signes contraires ; donc il y aura, au moins, une  
» des racines de l'équation, comme  $\alpha$ , qui sera entre les deux  
» nombres  $p$  et  $q$ , c'est-à-dire, moindre que le plus grand de ces  
» deux nombres, et plus grande que le plus petit ; donc cette  
» racine sera nécessairement réelle. »

3. Lagrange convient lui-même, dans ses notes, que cette démonstration peut laisser du doute, relativement aux facteurs imaginaires, ce qui l'oblige à en donner une autre qui n'est pas sujette à la même difficulté.

« Représentons, dit-il, en général l'équation proposée par  $P-Q=0$ ,  
»  $P$  étant la somme de tous les termes qui ont le signe  $+$ , et  
»  $-Q$  la somme de tous les termes qui ont le signe  $-$ . Sup-  
» posons que les deux nombres  $p, q$  soient positifs, et que  $q$  soit  
» plus grand que  $p$ . Si, en faisant  $x=p$ , on a  $P-Q<0$ , et  
» et qu'en faisant  $x=q$ , on ait  $P-Q>0$ , il est clair  
» que, dans le premier cas,  $P$  sera plus petit que  $Q$ , et  
» que, dans le second,  $P$  sera plus grand que  $Q$ . Or, par la  
» forme des quantités  $P$  et  $Q$ , qui ne contiennent que des termes  
» positifs, et des puissances entières et positives, il est évident que

» ces quantités augmentent à mesure que  $x$  augmente , et qu'en  
 » faisant augmenter  $x$  , par tous les degrés insensibles , depuis  $p$   
 » jusqu'à  $q$  , elles augmenteront aussi , par des degrés insensibles ,  
 » mais de manière que  $P$  augmentera plus que  $Q$  , puisque de plus  
 » petite qu'elle était , elle devient la plus grande. Il y aura donc  
 » nécessairement un terme entre les deux valeurs  $p$  ,  $q$  où  $P$  éga-  
 » lera  $Q$  : comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même  
 » ligne , dans le même sens , et qui , partant à la fois de deux  
 » points differens , arrivent en même temps à deux autres points ,  
 » mais de manière que celui qui était d'abord en arrière se trouve  
 » ensuite plus avancé que l'autre , doivent nécessairement se ren-  
 » contrer dans leur chemin. »

Lagrange étend ensuite le même raisonnement au cas où  $p$  et  $q$  seraient négatifs , et à celui où ils seraient de signes différens , ce qui est facile.

4. Cette démonstration me paraît très-rigoureuse , et celle qu'on trouvera ci-après n'en est qu'une sorte de commentaire ; mais l'expérience m'a prouvé que les jeunes-gens ont beaucoup de peine à la saisir telle qu'elle vient d'être présentée ; qu'ils se font mille difficultés sur la comparaison de deux fonctions à deux mobiles (\*), et qu'ils se plaignent sur-tout , avec quelque apparence de raison , de ce que la considération des quantités infiniment petites , qui leur est interdite , dans une partie des mathématiques , quoiqu'elle pût leur épargner bien des calculs , est permise et devient même , en quelque sorte , nécessaire dans celle-ci.

(\*) Si l'on voulait faire servir la géométrie à rendre plus palpables les vérités purement algébriques , on pourrait , dans le cas dont il s'agit ici , raisonner de la manière suivante. Soient posés  $y=P$  ,  $y'=Q$ . Chacune de ces équations , qu'on peut rapporter à la même origine et aux mêmes axes , exprime une courbe continue : ce qu'il est aisé de démontrer , sans supposer connue la théorie générale des équations. Or ,  $y$  étant actuellement moindre que  $y'$  ne peut ensuite la surpasser , sans que les deux courbes se coupent , et qu'il y ait conséquemment une valeur de  $x$  qui donne  $y=y'$ .

5. Le second théorème fondamental exige des connaissances plus profondes , ce qui oblige les analistes à ne le donner que vers la fin de la théorie des équations , tandis qu'il devrait être placé au commencement , puisqu'on en suppose la vérité dans toute cette même théorie. Je crois donc rendre un service de quelque importance aux élèves qui suivent les classes de mathématiques spéciales , en démontrant ici , d'une manière facile , les deux théorèmes dont il s'agit , sans rien supposer au-delà des connaissances qu'on a dû , ou du moins qu'on a pu acquérir avant de s'occuper de cette matière.

6. *Hypothèses et définitions.* Les équations que nous considérons ici sont de la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + T = 0.$$

Les exposants  $m$  ,  $m-1$  ,  $m-2$  ,.... sont supposés entiers et positifs. Les coefficients  $A$  ,  $B$  ,  $C$  ,.... , au nombre desquels nous comprenons le terme connu  $T$  , sont réels , mais peuvent être indifféremment entiers ou fractionnaires , positifs , négatifs ou nuls.

Tout nombre qui , mis à la place de  $x$  , satisfait à l'équation , est dit , racine de cette équation.

Les racines des équations peuvent être déterminées d'une manière exacte ou d'une manière approchée.

Une racine est déterminée d'une manière exacte , lorsqu'un nombre substitué à  $x$  réduit absolument le premier membre à zéro. Une racine est déterminée d'une manière approchée , lorsqu'on a une suite de nombres qui , substitués successivement à  $x$  , rendent le premier membre de plus en plus petit , et peuvent le rendre moindre que toute grandeur donnée , quelque petite qu'on la suppose.

7. *THÉORÈME.* Si un nombre  $a$  , mis à la place de  $x$  , dans une équation de la forme ci-dessus , satisfait à cette équation , ou , ce qui revient au même , en réduit le premier membre à zéro , ce premier membre est exactement divisible par  $x-a$ .

*Démonstration.* Soit exécutée , autant que possible , la division par

par  $x-a$ ; il suit des premiers principes de cette opération que le reste  $R$ , s'il y en a un, ne renfermera pas  $x$ , et que, le quotient partiel obtenu indépendamment du reste étant désigné par  $P$ ,

le quotient total sera  $P + \frac{R}{x-a}$ ; de manière qu'on aura

$$\frac{x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T}{x-a} = P + \frac{R}{x-a}.$$

Ces quantités égales, multipliées l'une et l'autre par  $x-a$ , donneront des produits égaux; donc

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T = P(x-a) + R.$$

Or, par hypothèse, l'un et l'autre membres de cette équation doivent se réduire à zéro, lorsqu'on y met  $a$  pour  $x$ , ce qui d'ailleurs n'apporte aucun changement à  $R$ , puisque  $R$  ne renferme pas  $x$ . Nous aurons donc

$$0 = P(a-a) + R \quad \text{ou} \quad 0 = R;$$

c'est-à-dire, que le reste de la division est nul, ou que la division est nécessairement exacte. Cette démonstration est de d'Alembert. (\*)

8. *Remarque.* En exécutant réellement la division par  $x-a$ , on trouvera au quotient

$$x^{m-1} + (A+a)x^{m-2} + (B+Aa+a^2)x^{m-3} + (C+Ba+Aa^2+a^3)x^{m-4} + \dots;$$

quantité qu'on peut mettre sous la forme

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T'.$$

(\*) Cette démonstration prouve qu'en général, quel que soit  $a$ , le reste de la division du premier membre de l'équation proposée par  $x-a$ , n'est autre chose que ce que devient ce premier membre, lorsqu'on y met  $a$  au lieu de  $x$ ; d'où il résulte que ce reste sera ou ne sera pas nul, suivant que  $a$  sera ou ne sera pas racine de l'équation.

9. *PROBLÈME.* Former une équation, de tel degré qu'on voudra, qui ait au moins une racine réelle ?

*Solution.* Prenez un polynôme quelconque de la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T;$$

$m$  étant un nombre entier positif, moindre d'une unité que le nombre qui exprime le degré de l'équation demandée. Multipliez ce polynôme par  $x$  moins ou plus une quantité réelle et connue  $a$ ; et égalez le produit à zéro. Le problème sera résolu; car, en premier lieu, l'équation ainsi formée est nécessairement du degré  $m+1$  qui, par hypothèse, est le degré prescrit; et, en second lieu, l'une des deux quantités  $+a$  ou  $-a$  est évidemment racine de cette équation.

10. *Corollaire.* Il y a, dans tous les degrés, une infinité d'équations qui ont au moins une racine réelle.

11. *THÉORÈME.* Il est possible qu'une équation du degré  $m$  ait  $m$  racines réelles.

*Démonstration.* Soit une équation du degré  $m$ , laquelle ait une racine réelle, ce qui est possible (10). Le premier membre de cette équation, savoir:  $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T$ , sera divisible par  $x-a$ , et le quotient sera de la forme  $x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T'$ ; ainsi l'équation primitive sera changée en celle-ci

$$(x-a)(x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T') = 0.$$

On y pourra donc satisfaire de deux manières différentes; premièrement en faisant  $x-a=0$ , secondement en faisant

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T' = 0.$$

Or; si cette dernière équation a une racine réelle  $b$ , ce qui est possible, on pourra la mettre sous la forme

$$(x-b)(x^{m-2} + A''x^{m-3} + B''x^{m-4} + \dots + T'') = 0;$$

et l'équation primitive deviendra

$$(x-a)(x-b)(x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}+\dots+T'')=0.$$

S'il arrive encore , ce qui est toujours possible , que l'équation

$$x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}+\dots+T''=0$$

ait une racine réelle  $c$  , l'équation primitive deviendra

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x^{m-3}+A'''x^{m-4}+B'''x^{m-5}+\dots+T''')=0.$$

Et , si l'on continue à supposer que , le dernier facteur étant égalé à zéro , il soit toujours possible de satisfaire à l'équation résultante , supposition qui , comme nous l'avons vu , n'a rien d'absurde ; il devient évident que le premier membre de l'équation primitive sera décomposable en autant de facteurs simples qu'il y a d'unités dans l'exposant  $m$ . Il devient donc aussi évident que cette équation aura  $m$  racines réelles ; car elle sera nécessairement satisfaite , quel que soit celui de ces  $m$  facteurs qu'on rend égal à zéro.

12. *Corollaire.* Nous sommes donc en droit de conclure , non que toute équation du degré  $m$  ait  $m$  racines réelles , et que son premier membre soit décomposable en  $m$  facteurs simples ; mais qu'il existe une infinité d'équations du degré quelconque  $m$  qui ont  $m$  racines réelles , et dont le premier membre est décomposable en  $m$  facteurs simples. Chacun peut même composer à volonté , autant qu'il lui plaira , de ces sortes d'équations.

13. *LEMME.* Le produit de deux ou de plusieurs facteurs simples , tels que  $x-a$  ,  $x-b$  ,  $x-c$  , . . . , ne peut être exactement divisé par un facteur simple , qu'autant que ce facteur est un de ceux qui ont concouru à former ce produit.

C'est ce qu'on démontre dans la théorie des nombres. (\*)

(\*) Soient  $M$  ,  $N$  deux facteurs algébriques , dont le produit  $MN$  est divisible par le facteur simple  $x-a$  ; je dis que l'un , au moins , des deux facteurs  $M$  ,  $N$  est divisible par  $x-a$ .

En effet , soit exécutée , autant que possible , la division de  $M$  par  $x-a$ ;

14. *Corollaire.* Si le premier membre de l'équation  $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\dots=0$  est une fois décomposé en  $m$  facteurs simples, on ne saurait le décomposer en d'autres facteurs simples différens des premiers. Il est donc possible qu'une équation du degré  $m$  ait  $m$  racines; mais elle ne saurait en avoir un plus grand nombre.

15. *Remarques.* I. On démontre ordinairement cette vérité de la manière suivante :

Soit l'équation  $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\dots+T=0$ , décomposée en  $m$  facteurs simples, de manière qu'on ait

$$(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-r)=0,$$

et soit  $x-a$  un diviseur exact de  $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\dots+T$ , lequel diviseur ne soit égal à aucun des  $m$  diviseurs  $x-a$ ,  $x-b$ ,  $x-c$ , ...,  $x-r$ .

Ce diviseur donnera un quotient de la forme  $x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}+\dots+T'$ ; et nous aurons, par conséquent,

le reste  $R$ , s'il y en a un, ne contiendra plus  $x$ , et l'on aura  $\frac{M}{x-a}=P+\frac{R}{x-a}$ ; ce qui donne

$$M=P(x-a)+R.$$

Soit pareillement exécutée la division de  $N$  par  $x-a$ , le reste  $S$ , s'il y en a un, ne contiendra plus  $x$ ; et l'on aura

$$N=Q(x-a)+S.$$

Donc

$$MN=PQ(x-a)^2+(QR+PS)(x-a)+RS.$$

Et, puisque  $MN$  est divisible par  $x-a$ , il faut que  $RS$  soit nul ou divisible par  $x-a$ ; or, il ne peut être divisible par  $x-a$ , puisqu'il ne renferme pas  $x$ ; on doit donc avoir nécessairement  $RS=0$ ; et par conséquent  $R=0$  ou  $S=0$ ; c'est-à-dire, que la division, soit de  $M$  soit de  $N$ , par  $x-a$  ne doit absolument laisser aucun reste.

Il suit de là que, si une formule algébrique est le produit de plusieurs facteurs simples  $x-a$ ,  $x-b$ ,  $x-c$ , ..., et qu'un facteur simple  $x-h$  divise exactement ce produit, ce facteur  $x-h$  est identique avec quelqu'un des facteurs  $x-a$ ,  $x-b$ ,  $x-c$  .....

$$(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-r) = (x-a)(x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T').$$

Or,  $x-a$  est un diviseur exact du premier membre de cette équation; il doit donc être aussi un diviseur exact du second membre; et, ne divisant pas le facteur  $x-a$ , il divise nécessairement l'autre facteur  $x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T'$ .

Soit exécutée cette division; il en résultera

$$(x-b)(x-c)(x-d)\dots(x-r) = (x-a)(x^{m-2} + A''x^{m-3} + B''x^{m-4} + \dots + T'').$$

Le même raisonnement fera trouver ensuite

$$(x-c)(x-d)(x-e)\dots(x-r) = (x-a)(x^{m-3} + A'''x^{m-4} + B'''x^{m-5} + \dots + T''');$$

et, en poursuivant toujours ainsi, on arrivera enfin à la conclusion  $x-r=x-a$ ; ce qui est contre l'hypothèse; cette hypothèse ne peut donc subsister; et il n'existe conséquemment d'autres diviseurs simples de  $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T$  que les  $m$  diviseurs simples  $x-a$ ,  $x-b$ ,  $x-c$ , ...,  $x-r$ .

II. Il est aisé de voir que ce raisonnement est inutile ou faux.

Il est inutile, si les facteurs  $x-a$ ,  $x-b$ ,  $x-c$ , ...,  $x-r$  sont considérés comme ils doivent l'être, c'est-à-dire, comme des facteurs premiers.

Il est faux, s'ils ne sont pas considérés comme tels; car s'ils ne sont pas premiers, on n'est pas en droit de conclure, de ce que  $x-a$  divise le produit  $(x-a)(x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T')$ , et ne divise pas l'un de ces deux facteurs, savoir  $x-a$ , qu'il divise nécessairement l'autre facteur. Le nombre 10, par exemple, qui ne divise ni 5 ni 8, divise pourtant le produit 40 de ces deux nombres. Pareillement la formule  $x^2 - a^2$ , qui ne divise aucun des trinômes  $x^2 - 2ax + a^2$  et  $x^2 + 2ax + a^2$  divise pourtant leur produit  $x^4 - 2a^2x^2 + a^4$ . (\*)

(\*) Le Corollaire du n.<sup>o</sup> 14 peut être établi directement, d'une manière très-simple, indépendamment du Lemme du n.<sup>o</sup> 13.

16. *PROBLÈME.* On a un polynôme  $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + T$ , dont tous les termes sont positifs; et l'on sait qu'un nombre  $\alpha$ , substitué à  $x$ , dans ce polynôme a donné un résultat  $k$ . On demande un nombre  $\beta$  tel que, si l'on substitue  $\alpha+\beta$  pour  $x$ , dans ce même polynôme, le nouveau résultat soit plus grand que  $k$  et moindre que  $k+h$ ,  $h$  étant une quantité positive donnée, et qui peut être prise aussi petite qu'on voudra?

*Solution.* Mettons, en effet,  $\alpha+\beta$  pour  $x$ , ce qui nous donnera

$$Ax^m = A\alpha^m + \frac{m}{1} A\alpha^{m-1}\beta + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} A\alpha^{m-2}\beta^2 + \dots + A\beta^m$$

$$Bx^{m-1} = B\alpha^{m-1} + \frac{m-1}{1} B\alpha^{m-2}\beta + \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} B\alpha^{m-3}\beta^2 + \dots$$

$$Cx^{m-2} = C\alpha^{m-2} + \frac{m-2}{1} C\alpha^{m-3}\beta + \frac{m-2}{1} \cdot \frac{m-3}{2} C\alpha^{m-4}\beta^2 + \dots$$

$$T = T.$$

Or nous avons, par hypothèse;

$$A\alpha^m + B\alpha^{m-1} + C\alpha^{m-2} + \dots + T = k ;$$

en désignant donc respectivement par  $P, Q, R, \dots$  les coefficients de  $\beta, \beta^2, \beta^3, \dots$ , tout se réduira à prendre  $\beta$  de manière que

Tout se réduit, en effet, à prouver l'absurdité de la prétendue identité

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-r) = (x-\alpha)(x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \dots + T')^2$$

Or, cette absurdité s'aperçoit sur-le-champ, en y faisant  $x=\alpha$ ; elle devient alors, en effet

$$(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\dots(\alpha-r) = (\alpha^{m-1} + A'\alpha^{m-2} + B'\alpha^{m-3} + \dots + T') = 0 ;$$

en sorte qu'elle exprime que le produit d'une suite de nombres tous différents de zéro est égal à zéro.

Cette remarque est de M. Fauquier, ancien élève du lycée de Nişmes, maintenant élève à l'école du génie.

J. D. G.

$$P_\beta + Q_{\beta^2} + R_{\beta^3} + \dots + A_{\beta^m}$$

soit moindre que  $h$ .

Soit  $S$  le plus grand des coefficients  $P, Q, R, \dots, A$ ; il est clair que, si nous trouvons pour  $\beta$  une valeur qui rende

$$S_\beta + S_{\beta^2} + S_{\beta^3} + \dots + S_{\beta^m} \text{ moindre que } h,$$

nous aurons, à plus forte raison,

$$P_\beta + Q_{\beta^2} + R_{\beta^3} + \dots + A_{\beta^m} \text{ moindre que } h.$$

Mais

$$\begin{aligned} S_\beta + S_{\beta^2} + S_{\beta^3} + \dots + S_{\beta^m} &= S_\beta(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{m-1}) \\ &\longrightarrow S_\beta \cdot \frac{1 - \beta^m}{1 - \beta} \\ &= \frac{S_\beta}{1 - \beta} - \frac{S_{\beta^m+1}}{1 - \beta}; \end{aligned}$$

puis donc que cette quantité doit être moindre que  $h$ , nous n'avons qu'à faire  $\frac{S_\beta}{1 - \beta} = h$ ; ce qui donne  $\beta = \frac{h}{S+h}$ ; et le problème est résolu.

Car 1.º  $\beta$  est évidemment moindre que l'unité; d'où il suit que  $\frac{S_\beta}{1 - \beta} - \frac{S_{\beta^m+1}}{1 - \beta}$  est une quantité positive, et qu'ainsi le résultat de la substitution de  $a+\beta$  sera plus grand que  $k$ .

2.º Ce nouveau résultat est moindre que  $k+h$ , puisque  $\frac{S_\beta}{1 - \beta} = h$ , et que ce qu'il faut retrancher de  $\frac{S_\beta}{1 - \beta}$  pour avoir l'excès du nouveau résultat sur le premier, ou plutôt une quantité plus grande que cet excès, est  $\frac{S_{\beta^m+1}}{1 - \beta}$ , quantité positive et moindre que  $h$ .

*Exemple.* Soit proposé le polynôme  $x^3 + 5x^2 + 4x + 12$  qui, lorsqu'on y fait  $x=4$ , donne le résultat 172. Et soit demandée pour

$x$  une autre valeur  $4+\beta$ , telle que le nouveau résultat soit plus grand que 172 et moindre que 173.

La substitution de  $4+\beta$  à  $x$  donne

$$x^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 \beta + 3 \cdot 4 \beta^2 + \beta^3$$

$$5x^5 = 5 \cdot 4^5 + 5 \cdot 2 \cdot 4^3 \beta + 5 \beta^2$$

$$4x = 4 \cdot 4 + 4\beta$$

$$12 = 12.$$

Le plus grand des coefficients des différentes puissances de  $\beta$  est évidemment  $3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 4 = 92 = S$ ;

Ce qui donne  $\beta = \frac{1}{92}$  et  $a + \beta = 4 + \frac{1}{92} = \frac{373}{92}$ .

Le résultat de la substitution est  $172 + \frac{96840}{804357}$ .

Résultat plus grand que 172 et moindre que 173.

17. *Remarques.* I. Si au lieu de prendre  $\beta = \frac{h}{S+h}$ , on le prend encore plus petit, l'accroissement du polynôme sera moindre, mais demeurera positif.

II.  $S$  désignant toujours le plus grand des coefficients  $P, Q, R, \dots, A$ , l'accroissement du polynôme sera moindre que  $\frac{S\beta}{1-\beta} - \frac{S\beta^{m+1}}{1-\beta}$ .

III.  $S'$  désignant, au contraire, le plus petit de ces mêmes coefficients, l'accroissement du polynôme sera plus grand que  $\frac{S'\beta}{1-\beta} - \frac{S'\beta^{m+1}}{1-\beta}$ .

Cet accroissement sera donc compris entre les deux limites finies

$$\frac{S\beta}{1-\beta} - \frac{S\beta^{m+1}}{1-\beta} \quad \text{et} \quad \frac{S'\beta}{1-\beta} - \frac{S'\beta^{m+1}}{1-\beta}.$$

18. *PROBLÈME.* Étant donnés deux polynômes

$$P = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + T,$$

$$Q = A'x^n + B'x^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + T',$$

dont tous les termes sont positifs; et étant donnés, de plus, deux nombres  $a, b$ , tels que le premier étant substitué à  $x$ , dans l'un

et dans l'autre polynômes , donne pour  $P$  un résultat plus grand que pour  $Q$  , et que le second étant substitué à  $x$  , dans l'un et dans l'autre polynômes , donne pour  $Q$  un résultat plus grand que pour  $P$  ; trouver , entre  $a$  et  $b$  , un nombre qui , mis à la place de  $x$  , dans l'un et dans l'autre polynômes , donne , pour  $P$  et pour  $Q$  , deux résultats dont la différence soit moindre qu'une certaine quantité  $h$  , quelque petite qu'on la puisse prendre ?

*Solution.* Substituons  $a+\beta$  à  $x$  ; ordonnons par rapport à  $\beta$  , et soit  $S$  le plus grand des coefficients des différentes puissances de  $\beta$  , dans l'un et dans l'autre polynômes , considérés comme n'en formant qu'un seul ; puis prenons  $\beta = \frac{h}{S+h}$ .

En substituant  $a+\beta$  , au lieu de  $a$  , chacun des deux polynômes recevra une augmentation moindre que  $h$ .

Soit fait  $a+\beta=a'$  , et substituons  $a'+\beta'$  à  $x$  , dans  $P$  et dans  $Q$  ; nous trouverons pour  $\beta'$  une valeur telle que le nouvel accroissement , tant de  $P$  que de  $Q$  , sera encore moindre que  $h$ .

En continuant à opérer de la même manière , nous ferons croître  $P$  et  $Q$  , à chaque opération , d'une quantité moindre que  $h$  ; et ces accroissements n'étant pas infiniment petits , puisqu'ils sont toujours compris (17) entre deux limites finies , il ne pourra y en avoir qu'un nombre fini entre  $a$  et  $b$  ; un nombre fini d'opérations suffira donc pour donner deux résultats consécutifs tels que  $P$  , étant encore moindre que  $Q$  dans le premier , devienne plus grand que  $Q$  dans le second ; or , en passant du premier état au second ,  $P$  et  $Q$  recevront une augmentation moindre que  $h$  ; donc leur différence , tant dans le premier que dans le second état , sera moindre que  $h$  ; donc le problème sera résolu.

19. *THÉORÈME.* Si deux quantités positives  $a$  ,  $b$  , successivement substituées à l'inconnue , dans une équation quelconque , donnent des résultats de signes contraires , cette équation a une racine positive , comprise entre  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.* Trouver une racine positive d'une équation , c'est

*Tom. IV.*

(6) trouver un nombre positif qui , mis à la place de l'inconnue , rende la somme des termes positifs égale à la somme des termes négatifs , ou rende la différence , entre ces deux sommes , moindre que toute quantité assignée quelconque.

Or , soient  $P$  ,  $Q$  ces deux sommes ; puisque  $a$  et  $b$  donnent des résultats de signes contraires , il faut que  $a$  rende  $P$  plus grand que  $Q$  , et que  $b$  , au contraire , rende  $Q$  plus grand que  $P$  , ou réciproquement. Mais nous venons de prouver que , dans cette hypothèse , on peut toujours trouver , entre  $a$  et  $b$  , un nombre qui rende la différence , entre  $P$  et  $Q$  , moindre que toute quantité donnée ; on peut donc toujours trouver une racine réelle et positive de l'équation proposée , et cette racine est entre  $a$  et  $b$ .

20. *THÉORÈME.* Si deux quantités négatives  $-a$  et  $-b$  , successivement substituées à l'inconnue , dans une équation quelconque , donnent des résultats de signes contraires , cette équation a au moins une racine réelle négative , comprise entre  $-a$  et  $-b$ .

*Démonstration.* Soit fait  $x=-y$ . Nous aurons une équation en  $y$  dont les racines positives seront égales aux racines négatives de l'équation en  $x$ . Les résultats seront d'ailleurs les mêmes , si l'on fait  $x=-a$  ou  $y=a$  ,  $x=-b$  ou  $y=b$  ; puis donc que  $-a$  et  $-b$  , substitués à  $x$  , donnent des résultats de signes contraires ,  $a$  et  $b$  substitués à  $y$  donneront aussi des résultats de signes contraires. Donc l'équation en  $y$  aura au moins une racine réelle et positive , entre  $a$  et  $b$  ; donc l'équation en  $x$  aura au moins une racine réelle et négative , entre  $-a$  et  $-b$ .

21. *Corollaire.* On prouvera , avec la même facilité , que , si deux quantités de signes contraires ,  $+a$  et  $-b$  , donnent des résultats qui soient aussi de signes contraires , l'équation proposée aura nécessairement une racine réelle comprise entre entre 0 et  $+a$  ou entre 0 et  $-b$  , et par conséquent entre  $a$  et  $-b$ . (\*)

---

(\*) M. Encontre a négligé de remarquer que son problème du n.<sup>o</sup> 18 fournit , au besoin , une méthode d'approximation , pour une racine dont on aurait déjà deux limites.

J. D. G.

**22. PROBLÈME.** Etant proposé un polynôme de la forme  $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T$ , trouver un nombre  $M$  qui, substitué à  $x$ , rende le premier terme plus grand que la somme de tous les autres ?

*Solution.* Soit  $S$  le plus grand des coefficients  $A, B, \dots, T$ . Si nous parvenons à rendre  $x^m$  plus grand que  $Sx^{m-1} + Sx^{m-2} + Sx^{m-3} + \dots + S$ , à plus forte raison aurons-nous rendu  $x^m$  plus grand que  $Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T$ .

Or ,

$$\begin{aligned} Sx^{m-1} + Sx^{m-2} + \dots + S &= S(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1) \\ &= S \frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{Sx^m}{x - 1} - \frac{S}{x - 1}. \end{aligned}$$

Il faut donc que  $x^m$  soit plus grand que  $\frac{Sx^m}{x - 1} - \frac{S}{x - 1}$ . Pour cela, nous n'avons qu'à faire  $x^m = \frac{Sx^m}{x - 1}$ , ou bien  $1 = \frac{S}{x - 1}$  ce qui donne  $x = 1 + S$ . C'est-à-dire, que le nombre  $M$  qui, mis à la place de  $x$ , rendra le premier terme plus grand que la somme de tous les autres est  $1 + S$ , ou le plus grand des coefficients du polynôme augmenté d'une unité.

**23. THÉORÈME.** Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.

*Démonstration.* Soit ce dernier terme négatif, et soit mis zéro pour  $x$ ; le résultat sera négatif. Soit mis ensuite  $M$  pour  $x$ ; le résultat sera positif. Donc l'équation aura au moins une racine réelle positive, comprise entre 0 et  $+M$ .

Soit, au contraire, ce dernier terme positif, et soit mis zéro pour  $x$ ; le résultat sera positif. Soit mis ensuite  $-M$  pour  $x$ ; le résultat sera négatif. Donc l'équation aura au moins une racine réelle négative, comprise entre 0 et  $-M$ .

**24. THÉORÈME.** Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.

*Démonstration.* Soient substitués successivement 0 et  $+M$  à la place de l'inconnue ; les résultats seront de signes contraires : il y aura donc une racine réelle entre 0 et  $+M$ .

Soient ensuite substitués successivement 0 et  $-M$  à la place de l'inconnue ; les résultats seront encore de signes contraires ; il y aura donc encore une racine réelle entre 0 et  $-M$ .

25. *Corollaire.* Toute équation qui n'a pas de racines réelles est de degré pair, et son dernier terme est positif.

Ceci ne veut pas dire que toute équation de degré pair, dont le dernier terme est positif, n'a pas de racines réelles.

26. *LEMME.* Toute fonction dans laquelle entrent les quantités imaginaires  $\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt[4]{-1}$ ,  $\sqrt[6]{-1}$ , ...,  $\sqrt[m]{-1}$ , peut être ramenée à la forme  $A+B\sqrt{-1}$ .

*Démonstration.*

$$\text{I. } (a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1}) = (a+a')+(b+b')\sqrt{-1} \\ = A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{II. } (a+b\sqrt{-1})-(a'+b'\sqrt{-1}) = (a-a')+(b-b')\sqrt{-1} \\ = A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{III. } (a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = (aa'-bb')+(ab'+a'b)\sqrt{-1} \\ = A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{IV. } \frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})} = \frac{(aa'+bb')+(a'b-ab')\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2} \\ = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\sqrt{-1} = A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{V. } (a+b\sqrt{-1})^m = \left( a^m - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} a^{m-4} b^4 - \dots \right) \\ + \left( \frac{m}{1} a^{m-1} b - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3 + \dots \right) \sqrt{-1} \\ = A+B\sqrt{-1}.$$

$$\text{VI. } \sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{a} \left( 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{m-1}{2m} \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{2m-1}{3m} \cdot \frac{3m-1}{4m} \frac{b^4}{a^4} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} & + \sqrt[m]{a} \left( \frac{1}{m} \frac{b}{a} - \frac{1}{m} \cdot \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{2m-1}{3m} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \dots \right) \sqrt{-1} \\ & = A + B\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

VII. L'on a  $(\sqrt{-1})^{4n+1} = \pm \sqrt{-1}$ , d'où  $\sqrt[4n+1]{\pm \sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$   
 $= 0 + \sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$ ; et  $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$ , d'où  $\sqrt[4n+2]{-1} = \sqrt{-1} = \sqrt{-1} = 0 + \sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}$ ; donc, en général,  $\sqrt[m]{\sqrt{-1}}$  ou  $\sqrt[m]{-1} = A + B\sqrt{-1}$ .

VIII. Soit  $a = 1 \pm p$ , on aura

$$a^m = 1 \pm \frac{m}{1} p + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} p^2 \pm \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} p^3 + \dots$$

Soit fait ensuite  $m = \sqrt{-1}$ , il viendra

$$\begin{aligned} a^{\sqrt{-1}} &= 1 \pm p\sqrt{-1} + p^2 \cdot \frac{\sqrt{-1}}{1} \frac{-1 + \sqrt{-1}}{2} \pm \dots \\ &= (g + h\sqrt{-1}) + (g' + h'\sqrt{-1}) + (g'' + h''\sqrt{-1}) + \dots \\ &= A + B\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

IX. De là on conclura aisément

$$(a + b\sqrt{-1})^{a+b\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}. (*)$$

27. *LEMME.* Dans toute équation  $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + T = 0$ , la valeur de l'inconnue est une *fonction* des coefficients  $A, B, C, \dots, T$ .

*Démonstration.* Une quantité est dite fonction d'une ou de plusieurs autres, lorsque sa valeur dépend de celles qu'on attribue à ces autres quantités ; or, il est évident que la valeur de  $x$  dépend, et dépend même uniquement, lorsque  $m$  est donnée, de celles des coefficients  $A, B, C, \dots, T$ .

28. *Remarque.* Quoiqu'on sache, d'une manière certaine, que  $x$

(\*) Voy. les pages 20 et 147 de ce volume.

est fonction de  $A, B, C, \dots, T$ , on ne connaît la forme de cette fonction que pour les quatre premiers degrés. Il est seulement démontré que la fonction qui donne la valeur de l'inconnue, par les coefficients  $A, B, C, \dots, T$ , dans une équation du degré  $m$ , renferme toutes les fonctions qui donnent les valeurs de l'inconnue, dans les équations de tous les degrés inférieurs. Car  $x$  étant une fonction de  $A, B, C, \dots, T$  laquelle change de valeur, et non de forme, lorsqu'on y fait varier  $A, B, C, \dots, T$ , nous pouvons y supposer  $T=0$ ; et, dans ce cas, les valeurs de  $x$  seront, outre la valeur zéro, toutes les valeurs que peut donner l'équation du degré immédiatement inférieur. Ainsi, la fonction qui donne les valeurs de  $x$ , dans l'équation générale du degré  $m$ , renferme la fonction qui donne les valeurs de  $x$ , dans l'équation du degré  $m-1$ ; celle-ci renferme la fonction qui donne les valeurs de  $x$ , dans l'équation du degré  $m-2$ , et ainsi de suite.

29. *THÉORÈME.* Toute équation qui n'a point de racines réelles, en a au moins deux imaginaires de la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$ .

*Démonstration.* Une équation qui n'a point de racines réelles est nécessairement (25) de la forme

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots + T^2 = 0.$$

Je désigne le dernier terme par  $T^2$ , pour mieux faire entendre qu'il est essentiellement positif.

Soit fait  $x^{2m} = -y^{2m}$  ou  $x = y\sqrt[m]{-1}$ .

Nous aurons en substituant,

$$-y^{2m} - \frac{A}{\sqrt[m]{-1}} y^{2m-1} - \frac{B}{(\sqrt[m]{-1})^2} y^{2m-2} - \dots + T^2 = 0,$$

ou bien

$$y^{2m} + \frac{A}{\sqrt[m]{-1}} y^{2m-1} + \frac{B}{(\sqrt[m]{-1})^2} y^{2m-2} + \dots - T^2 = 0;$$

Soient faits

$$\frac{A}{\sqrt[m]{-1}} = A' , \quad \frac{B}{(\sqrt[m]{-1})^2} = B' , \dots ;$$

nous aurons

$$y^{2m} + A'y^{2m-1} + B'y^{2m-2} + \dots - T = 0.$$

Or, il a été démontré ci-dessus (24) que, si  $A'$ ,  $B'$ , ... étaient des quantités réelles, il existerait une fonction de  $A'$ ,  $B'$ , ..., laquelle donnerait au moins deux racines réelles pour  $y$ .  $A'$ ,  $B'$ , ... n'étant pas réelles, les deux valeurs données par la fonction pourront n'être pas réelles; mais, de quelque nature qu'elles soient, il suffira de les multiplier par  $\sqrt[m]{-1}$ , et nous aurons pour  $x$  deux valeurs correspondantes, compliquées, à la vérité, de différentes sortes d'imaginaires; mais qu'on pourra toujours ramener (26) à la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$ . (\*)

(\*) Il serait peut-être aussi exact, et il paraîtrait du moins un peu plus simple de raisonner comme il suit.

Soit toujours l'équation proposée

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots + T = 0$$

Soit fait

$$T = -U^2 \quad \text{ou} \quad U = T\sqrt{-1} ;$$

et alors l'équation proposée deviendra

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \dots - U^2 = 0.$$

Or, si  $U$  était réel, il est démontré qu'alors il existerait au moins deux fonctions réelles de  $A$ ,  $B$ , ...  $U$  qui pourraient être prises pour valeurs de  $x$ . Soit

$$x = F(A, B, \dots, U)$$

l'une de ses valeurs. Si  $U$  n'est pas réelle, elle deviendra

$$x = F(A, B, \dots, T\sqrt{-1}),$$

et pourra cesser elle-même d'être réelle; mais elle ne devra pas moins en résoudre l'équation proposée, et sera de plus (26) de la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$ . Ceci rentre, à peu près, dans le raisonnement qu'on trouve à la note de la page 91 de ce volume.

J. D. G.

30. *THÉORÈME.* Si une équation, dont les coefficients sont réels, a une racine égale à  $a+b\sqrt{-1}$ , elle en a nécessairement une autre égale à  $a-b\sqrt{-1}$ .

*Démonstration.* Puisque  $a+b\sqrt{-1}$  est racine de l'équation proposée, le premier membre de cette équation doit être divisible par  $x-a-b\sqrt{-1}$ ; et, en exécutant la division par ce diviseur, on obtiendra (26) un quotient de la forme  $P+Q\sqrt{-1}$ .

Or, le produit de  $x-a-b\sqrt{-1}$  par  $P+Q\sqrt{-1}$  est

$$\{P(x-a)+Qb\} + \{Q(x-a)-Pb\}\sqrt{-1};$$

quantité qui, par hypothèse, doit être nulle. Égalant donc séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, nous aurons les deux équations

$$P(x-a)+Qb=0, \quad Q(x-a)-Pb=0,$$

entre lesquelles éliminant  $P$ , il viendra

$$(x-a)^2+b^2=0:$$

donc  $x=a\pm b\sqrt{-1}$  et  $x=a\mp b\sqrt{-1}$ .

Donc, si la proposée a une racine  $x=a+b\sqrt{-1}$ , elle en a nécessairement une autre  $x=a-b\sqrt{-1}$ . (\*)

(\*) On peut encore démontrer de cette autre manière que, généralement, toute quantité réelle  $R$  divisible exactement par  $a+b\sqrt{-1}$  l'est aussi nécessairement par  $a-b\sqrt{-1}$ , et par conséquent par le produit de ces deux diviseurs, si du moins  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

Concevons que l'on fasse la division de  $R$  par  $a+b\sqrt{-1}$ , les termes du quotient ne pourront être que des quatre formes suivantes

$$c, d(\sqrt{-1})^a, \frac{e}{(\sqrt{-1})^3}, f \frac{(\sqrt{-1})^2}{(\sqrt{-1})^5},$$

lesquels seront tous conséquemment réductibles à l'une des deux formes  $g$  et  $h\sqrt{-1}$ ; par où l'on voit que ce quotient pourra être représenté par  $p+q\sqrt{-1}$ . On aura donc

$$R=(a+b\sqrt{-1})(p+q\sqrt{-1})=(ap-bq)+(aq+bp)\sqrt{-1},$$

et, puisque  $R$  est réelle, on devra avoir

31. *THÉORÈME.* Toute équation qui n'a pas de racines réelles a autant de racines imaginaires de la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$  qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue.

*Démonstration.* 1.<sup>o</sup> Toute équation qui n'a pas de racines réelles est de degré pair (25).

2.<sup>o</sup> Toute équation qui n'a pas de racines réelles en a au moins deux imaginaires, telles que, l'une d'elles étant représentée par  $a+b\sqrt{-1}$ , l'autre peut être représentée par  $a-b\sqrt{-1}$  (30).

3.<sup>o</sup> Le premier membre de l'équation proposée étant divisible par  $x-a-b\sqrt{-1}$  et par  $x-a+b\sqrt{-1}$ , est nécessairement divisible par le produit de ces deux diviseurs, c'est-à-dire, par  $x^2-2ax+a^2+b^2$ ; or, ce produit, étant réel, donnera un quotient réel de la forme  $x^{2m-2}+A'x^{2m-3}+B'x^{2m-4}+\dots$ .

4.<sup>o</sup> Ce quotient peut être égalé à zéro, ce qui donne une nouvelle équation, laquelle étant exactement dans le cas de la précédente a

$$aq+bp=0 \quad \text{et} \quad ap-bq=R.$$

Présentement on a

$$(a-b\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})=(ap-bq)-(aq+bp)\sqrt{-1};$$

ou, en vertu des deux équations ci-dessus

$$(a-b\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})=R;$$

donc  $a-b\sqrt{-1}$  est diviseur de  $R$ .

Présentement, pour que  $R$  ne soit pas divisible par le produit  $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$ , il faudrait que les deux facteurs de ce produit eussent un diviseur commun; et, comme tout diviseur commun à deux quantités divise aussi leur somme et leur différence, il faudrait que ce diviseur divisât aussi  $2a$  et  $2b\sqrt{-1}$ , ce qui ne peut avoir lieu si, comme nous le supposons,  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

J. D. G.

*Tom. IV.*

30

comme elle ; deux racines imaginaires  $a' + b'\sqrt{-1}$ ,  $a' - b'\sqrt{-1}$ , et à conséquemment son premier membre exactement divisible par  $x^2 - 2a'x + a'^2 + b'^2$ . Le quotient sera de la forme  $x^{2m-4} + A''x^{2m-6} + B''x^{2m-8} + \dots$  et, ce quotient étant encore égalé à zéro, la nouvelle équation qui en résultera sera encore dans le cas des deux précédentes.

5.<sup>o</sup> En continuant à raisonner de la même manière, il devient évident que, lorsque l'exposant  $2m$  sera épuisé, on aura obtenu  $m$  couples de facteurs imaginaires, et que, par conséquent, le nombre de ces facteurs sera  $2m$ , c'est-à-dire, qu'il y en aura autant qu'il y a d'unités dans le nombre qui indique le degré de l'équation.

32. *Corollaire.* Le premier membre de toute équation est décomposable en autant de facteurs simples, de l'une des formes  $x \pm a$ ,  $x \pm a \pm b\sqrt{-1}$  qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré de cette même équation.

---

## PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Extraits de deux lettres, l'une de M. J. F. FRANÇAIS, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie, et l'autre de M. SERVOIS, professeur aux écoles d'artillerie,

Au Rédacteur des *Annales*;

*Sur la théorie des quantités imaginaires.*

*Lettre de M. FRANÇAIS.*

EN attendant que le mémoire de M. Argand, que vous me faites l'honneur de m'annoncer me soit parvenu, je prends, Monsieur, la liberté de vous indiquer brièvement les résultats auxquels j'ai

été conduit par mes réflexions sur la manière d'étendre la nouvelle théorie des imaginaires à la géométrie à trois dimensions.

D'après ma définition 4.<sup>e</sup> ( pag. 64 ), les angles , tant positifs que négatifs , sont censés situés dans un même plan que , pour abréger , j'appellerai plan des  $xy$ . Il serait donc naturel de supposer que les angles imaginaires sont situés dans des plans perpendiculaires à celui des  $xy$ ; et l'analogie seule justifierait cette supposition ; mais on peut en démontrer la légitimité comme il suit : l'angle  $\pm b\sqrt{-1}$  est moyen proportionnel de grandeur et de position entre  $+\beta$  et  $-\beta$ ; donc il est situé par rapport à l'angle  $+\beta$  comme l'angle  $-\beta$  est situé par rapport à lui; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que le plan qui contient l'angle  $\pm\beta\sqrt{-1}$  partage en deux parties égales l'angle formé par les plans des angles  $+\beta$  et  $-\beta$ ; or , ces deux plans se confondent en un seul ; donc le plan qui contient l'angle  $\pm\beta\sqrt{-1}$  est perpendiculaire au plan des  $xy$ . Réciprocement , tout plan perpendiculaire à celui des  $xy$ , partageant en deux parties égales l'angle formé par les plans des angles positifs et des angles négatifs ; tout angle  $\beta$  , situé dans un plan perpendiculaire à celui des  $xy$  peut être considéré comme moyen proportionnel de grandeur et de position entre les deux angles  $+\beta$  et  $-\beta$ ; donc sa valeur de grandeur et de position est  $\pm\beta\sqrt{-1}$ .

Il suit de là , et de mes théorèmes 2.<sup>e</sup> et 3.<sup>e</sup> ( pag. 66 et 68 ) qu'on a

$$i_{\beta\sqrt{-1}} = e^{(\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = e^{-\beta} = i^{\frac{\beta\sqrt{-1}}{2\pi}} = \cos.(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\sin.(\beta\sqrt{-1}).$$

Voilà donc aussi les *sinus et cosinus hyperboliques de LAMBERT* rattachés à la même théorie que les arcs de cercles , les logarithmes naturels et les racines de l'unité.

Il suit encore de là qu'on a

$$i_{\alpha+i\beta\sqrt{-1}} = e^{\alpha\sqrt{-1}} \cdot e^{(\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = i^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

## THEORIE

$$\begin{aligned}
 &= e^{\alpha\sqrt{-1}} \{ \cos(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1} \cdot \sin(\beta\sqrt{-1}) \} \\
 &= \cos.\alpha \cos.(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1} \cdot \sin.\alpha \cos.(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1} \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}} \cdot \sin.(\beta\sqrt{-1}).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha_a + s\sqrt{-1} = a \cos.\alpha \cos.(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1} a \sin.\alpha \cos.(\beta\sqrt{-1}) + \sqrt{-1} \cdot a e^{\alpha\sqrt{-1}} \cdot \sin.(\beta\sqrt{-1}).$$

Les projections de  $\alpha$  sur les trois axes des coordonnées, ou plutôt ses trois composantes seront donc

$$a \cos.\alpha \cos.(\sqrt{-1}), \sqrt{-1} \cdot a \sin.\alpha \cos.(\beta\sqrt{-1}), \sqrt{-1} \cdot a \sin.(\beta\sqrt{-1}).$$

Voilà, Monsieur, le résultat auquel je suis parvenu ; mais je vous avoue que je n'en suis pas encore satisfait. Je voudrais élaguer entièrement la notation imaginaire, comme je l'ai fait pour la géométrie à deux dimensions. Je m'explique : pour la géométrie à deux dimensions, j'ai réduit les droites obliques de la forme  $A + B\sqrt{-1}$  à celle  $\alpha_\alpha$ , où  $\alpha$  représente la grandeur absolue de la droite, et  $\alpha$  l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses. Dans la géometrie à trois dimensions, je voudrais exprimer la position d'une droite quelconque par  $\alpha_{\alpha_A}$ , où  $\alpha$  exprimerait la grandeur absolue de la droite,  $\alpha$  l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses, et  $A$  celui que le plan de l'angle  $\alpha$  fait avec le plan des  $xy$  ; mais toutes mes tentatives à cet égard ont été jusqu'ici infructueuses. Je désire que quelqu'un plus habile que moi vienne à bout de compléter cette lacune. Quoi qu'il en soit, je suis persuadé que le vrai moyen d'étendre notre théorie des imaginaires à la géométrie à trois dimensions réside dans la considération des angles imaginaires.

Metz, le 8 de novembre 1813.

*P. S.* Je viens de recevoir, à l'instant, le mémoire de M. Argand; que j'ai lu avec autant d'intérêt que d'empressement. Il ne m'a pas été difficile d'y reconnaître le développement des idées contenues dans la lettre de M. Legendre à feu mon frère; et il n'y a pas le moindre doute qu'on ne doive à M. Argand la première idée de représenter géométriquement les quantités imaginaires. C'est avec bien du plaisir que je lui en fais hommage; et je me félicite de l'avoir engagé à publier ses idées, dans l'ignorance où j'étais de leur publication antérieure. J'ai vu aussi que nous nous étions rencontrés dans le principe qui doit servir à étendre cette nouvelle théorie des imaginaires à la géométrie à trois dimensions; mais, en partant d'un même principe, nous parvenons à des résultats différens.

J'ai dit plus haut que je n'avais pu parvenir à ramener l'expression de la position d'une droite quelconque dans l'espace à la forme  $\alpha_A = \alpha \cdot e^{A\sqrt{-1}} = \alpha(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)$ . Voici quels sont les motifs de cette impuissance. J'avais

essayé de faire, par analogie,  $\alpha_A = \alpha \cdot e^{A\sqrt{-1}} = \alpha(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)$ , d'où l'on tire

$$i_{\alpha_A} = (e^{\alpha\sqrt{-1}})^{e^{A\sqrt{-1}}} = (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^{(\cos A + \sqrt{-1} \sin A)}$$

ce qui, dans le cas de  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ,  $A = \frac{1}{2}\pi$ , donne  $i_{\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ ,

comme le trouve M. Argand. Mais, en faisant le développement du cas général, on a

$$i_{\alpha_A} = (e^{\alpha\sqrt{-1}})^{e^{A\sqrt{-1}}} = e^{(\alpha \cdot e^{A\sqrt{-1}})\sqrt{-1}} = e^{(\alpha \cos A + \sqrt{-1} \alpha \sin A) \sqrt{-1}}$$

$$= e^{\sqrt{-1} \cdot \alpha \cos A} \cdot e^{(\sqrt{-1} \cdot \alpha \sin A) \sqrt{-1}}$$

$$= \{\cos(\alpha \cos A + \sqrt{-1} \sin(\alpha \cos A))\} \{\cos((\sqrt{-1} \alpha \sin A) + \sqrt{-1} \sin((\sqrt{-1} \alpha \sin A)))\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos(\alpha \cos A) \cos(\sqrt{-1} \cdot \alpha \sin A) + \sqrt{-1} \cdot \sin(\alpha \cos A) \cos(\sqrt{-1} \cdot \alpha \sin A) \\
 &\quad + \sqrt{-1} \cdot e^{\sqrt{-1} \cdot \alpha} \cos A \cdot \sin(\sqrt{-1} \cdot \alpha \sin A) ;
 \end{aligned}$$

expression qui, vu la double transcendance de ses termes, me paraît inadmissible. Sa comparaison avec

$$\lambda + \mu \sqrt{-1} = \cos \lambda \cos(\lambda \sqrt{-1}) + \sqrt{-1} \sin \lambda \cos(\mu \sqrt{-1}) + \sqrt{-1} e^{\lambda \sqrt{-1}} \sin(\mu \sqrt{-1})$$

me l'a fait rejeter entièrement ; parce que les angles  $\alpha$  et  $A$  sont aisés à déterminer en  $\lambda$  et  $\mu$ , par la trigonométrie sphérique. On trouve, en effet,

$$\cos \lambda \cos(\mu \sqrt{-1}) = \cos \alpha ,$$

$$\sin \lambda \cos(\mu \sqrt{-1}) = \sin \alpha \cos(A \sqrt{-1}) ,$$

$$\sin(\mu \sqrt{-1}) = \sin \alpha \sin(A \sqrt{-1}) ;$$

d'où l'on déduit

$$\cos \mu = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2(A \sqrt{-1})}}, \quad \sin \mu = \frac{\sin \alpha \cos(A \sqrt{-1})}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2(A \sqrt{-1})}} ,$$

On a donc

$$r_{\alpha A} = \{\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha \cos(A \sqrt{-1})\} \{1 + \frac{\sin \alpha \sin(A \sqrt{-1})}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2(A \sqrt{-1})}} \sqrt{-1}\} .$$

Il me paraît prouvé, d'après cela, que  $r_A$  ne doit pas être déter-

miné de la même manière que  $a_\alpha$ , et que l'analogie supposée entre les angles et les lignes ne subsiste pas.

Vous avez dû remarquer, au surplus, Monsieur, que M. Argand ne démontre pas ma proposition  $a_\alpha = a(\cos.\alpha + \sqrt{-1}\sin.\alpha)$ ; et que cette proposition fondamentale n'est chez lui qu'une simple supposition, justifiée seulement par quelques exemples. (\*)

Je n'ai pas trop vu non plus, Monsieur, pourquoi M. Argand, n.<sup>o</sup> 11 (pag. 144), introduit une nouvelle unité, en posant  $2\pi=1$ ; cela m'a paru répandre de l'obscurité sur le reste de son mémoire.

Enfin j'aurais peine à passer à cet estimable géomètre son assertion sur la non réductibilité de  $(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-1}}$  à la forme  $A+B\sqrt{-1}$ . On a, en effet,

$$c\sqrt{-1} = e^{\text{Log.}(c\sqrt{-1})} = e^{\text{Log.}c + \text{Log.}\sqrt{-1}} = e^{\text{Log.}c + \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = e^{\text{Log.}c} \cdot e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}},$$

donc

$$\begin{aligned} (c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-1}} &= e^{d\text{Log.}c\sqrt{-1}} \cdot e^{-\frac{1}{2}d\pi} \\ &= e^{-\frac{1}{2}d\pi} \{ \cos.(d\text{Log.}c) + \sqrt{-1} \cdot \sin.(d\text{Log.}c) \} \end{aligned}$$

qui est bien de la forme  $A+B\sqrt{-1}$ . Je crois donc être fondé à ne regarder la forme  $(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-1}}$  qu'il assigne à la troisième coordonnée que comme une simple conjecture sujette à une sérieuse contestation.

(\*) La démonstration de cette proposition n'était point nécessaire dans le système de M. Argand qui a admis, comme *définition de nom*, que la *somme dirigée* de plusieurs *droites dirigées* se compose de l'ensemble des expressions de ces droites prises en égard à leurs signes de direction; et M. Argand n'a fait en ceci que donner une extension fort naturelle à une définition généralement admise en algèbre.

*Lettre de M. SERVOIS.*

J'accueille ordinairement avec faveur , mon vieux camarade , les idées nouvelles en fait de doctrine , sur-tout lorsqu'elles se présentent sous la garantie de noms connus honorablement , par d'autres travaux scientifiques. Loin donc que je songe à donner aux idées de MM. Argand et Français sur les imaginaires les qualifications odieuses *d'inutiles* , *d'erronées* , etc. , qui ne prouveraient autre chose que peu de courtoisie et beaucoup de prévention de ma part ; je désire vivement , au contraire , qu'elles puissent acquérir , avec le temps , ce qui leur manque encore , sous le rapport de l'évidence et de la fécondité. C'est donc dans cet esprit ; c'est autant dans l'intérêt de la science que pour satisfaire au vœu que vous manifestez de connaître mon opinion personnelle sur ce sujet , que je hasarde ici les réflexions suivantes.

1.<sup>o</sup> La démonstration du 1.<sup>er</sup> théorème de M. Français ( pag. 65 ) est , à mon avis , tout à fait insuffisante et incomplète. En effet , cette proposition , qui en fait la base : « la quantité  $\pm a\sqrt{-1}$  est » une moyenne proportionnelle *de grandeur* et *de position* entre »  $+a$  et  $-a$  » , équivaut à ces deux-ci , dont une  $(\pm a\sqrt{-1})$  moyenne *de grandeur* entre  $+a$  et  $-q$  ) est évidente , et dont l'autre  $(\pm a\sqrt{-1})$  moyenne *de position* entre  $+a$  et  $-a$  ) n'est pas prouvée , et renferme précisément le théorème dont il s'agit. (\*)

(\*) La moyenne proportionnelle *de grandeur* entre  $+a$  et  $-a$  n'est et ne saurait être que  $a$  ; car , lorsqu'on parle uniquement de grandeur , on doit faire abstraction des signes ; et  $\sqrt{a \cdot a} = a$ . Mais lorsqu'on prend pour la moyenne  $\pm a\sqrt{-1}$  , on annonce par là même qu'on a eu égard aux positions inverses de  $+a$  et  $-a$  ; la moyenne doit donc alors conserver l'empreinte de cette considération ; elle est donc , par le fait même , une moyenne *de position* aussi bien que *de Cela*

Cela est d'autant plus fâcheux que tout le reste du mémoire porte sur ce premier théorème. Quant à M. Argand, il s'est contenté d'appuyer cette proposition sur une sorte d'analogie et de convenance. Or, il me paraît que, lorsqu'il s'agit de sonder une doctrine extraordinaire, opposée en quelque sorte aux principes reçus, dans une science telle que l'analyse mathématique, la simple analogie n'est point un moyen suffisant (\*). Au surplus, on doit croire que M. Argand a porté de la démonstration de M. Français le même jugement que moi; car, dans le cas contraire, il n'aurait sans doute pas manqué d'en étayer son analogie, ne fût-ce que par une simple citation.

2.<sup>e</sup> Mais la nouvelle théorie est-elle au moins justifiée, *d posteriori*,

---

*grandeur*: l'interprétation du symbole  $\pm a\sqrt{-1}$  est donc réduite à chercher une droite de laquelle on puisse dire qu'elle est posée par rapport à  $+a$  comme  $-a$  est posée par rapport à elle.

M. Servois trouve évident que, dans l'ancienne doctrine  $\pm a\sqrt{-1}$  soit moyenne de *grandeur* entre  $+a$  et  $-a$ . Il me paraît pourtant difficile de concevoir qu'une *négation de grandeur*, un être de raison puisse être dit moyen entre deux *grandeur effectives*.

(\*) Il serait sans doute fort à désirer que l'esprit humain procédât constamment comme on le fait dans les traités *ex professo* et sur les bancs des écoles; mais malheureusement cela n'arrive presque jamais. M. Servois, qui tient ici un langage à peu près pareil à celui de Viviani, dans des circonstances assez semblables à celles-ci, a-t-il donc oublié que ce n'est qu'après plus d'un siècle de méditations et d'essais infructueux qu'on est enfin parvenu à asseoir le calcul dit infinitésimal sur des bases solides? et encore trouve-t-on aujourd'hui des gens qui prétendent qu'on n'y a pas complètement réussi. Où en serions-nous pourtant si l'on avait exigé des premiers inventeurs de ce calcul, qu'ils démontrent rigoureusement leurs méthodes avant d'en faire des applications? Il en a été exactement de même à l'égard des quantités négatives isolées; et il en sera toujours aussi de toutes les théories; l'homme les aperçoit par une sorte d'instinct, bien longtemps avant d'être en état de les démontrer en rigueur.

J. D. G.

Tom. IV.

31

## T H É O R I E

par de nombreuses applications ? C'est du moins de ce côté que M. Argand semble avoir voulu spécialement diriger ses moyens. Cependant , il convient lui-même , avec franchise , ( page 143 ) qu'on pourrait ne voir là que le simple emploi d'une notation particulière. Pour moi , j'avoue que je ne vois encore , dans cette notation , qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif. (\*) Je n'en donnerai qu'un exemple sur la première application de M. Argand , dans laquelle il se propose de trouver les développemens de Sin.( $a+b$ ) et Cos.( $a+b$ ). De la formule générale

$$e^{a\sqrt{-1}} = \text{Cos.} a + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin.} a ,$$

je tire

$$e^{(a+b)\sqrt{-1}} = \text{Cos.}(a+b) + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin.}(a+b) ,$$

et ensuite

$$e^{(a+b)\sqrt{-1}} = e^{a\sqrt{-1}} \cdot e^{b\sqrt{-1}} = (\text{Cos.} a + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin.} a)(\text{Cos.} b + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin.} b) ,$$

ou

$$e^{(a+b)\sqrt{-1}} = (\text{Cos.} a \text{Cos.} b - \text{Sin.} a \text{Sin.} b) + \sqrt{-1} \cdot (\text{Sin.} a \text{Cos.} b + \text{Cos.} a \text{Sin.} b) ;$$


---

(\*) Voilà encore le langage de Viviani. M. Servois compterait-il donc pour peu de voir enfin l'analyse algébrique débarrassée de ces formes inintelligibles et mystérieuses , de ces *non-sens* qui la déparent et en font , pour ainsi dire , une sorte de science cabalistique ? J'ai toutes sortes de raisons pour ne point lui prêter cette pensée. Or , c'est là principalement ce que M. Argand a eu en vue , comme il nous l'apprend lui-même , au commencement de son opuscule.

J. D. G.

égalant donc ces deux valeurs de  $e^{(a+b)\sqrt{-1}}$ , et séparant le réel de l'imaginaire, on aura

$$\cos.(a+b) = \cos.a \cos.b - \sin.a \sin.b, \quad \sin.(a+b) = \sin.a \cos.b + \cos.a \sin.b.$$

Toutes les autres applications géométriques dérivent de la même source, avec la même facilité. On les trouve développées dans différens ouvrages, et notamment dans la *Théorie purement algébrique des quantités imaginaires*, par M. Suremain-de-Misséry (Paris 1801). L'application unique à l'algèbre (pag. 142), laisse, suivant moi, beaucoup à désirer. Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de  $x$  qui donnent au polynôme des valeurs sans cesse décroissantes ; il faut de plus que la loi des décroissemens amène nécessairement le polynôme à zéro, ou qu'elle soit telle que zéro ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'*asymptote* du polynôme. Je ne dirai rien de l'extension du principe dont s'occupe M. Argand à la fin de son mémoire : d'autant qu'elle est aussi uniquement fondée sur l'analogie ; mais je ne puis pourtant passer sous silence une assertion que je crois inexacte. Selon M. Argand (pag. 146), la forme  $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$  offre l'exemple le plus simple d'une quantité non réductible à la forme générale  $p+q\sqrt{-1}$ . Ce géomètre aurait-il donc oublié qu'Euler a démontré que l'expression  $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$  n'est point imaginaire, mais égale à  $e^{-\frac{1}{2}\pi}$ ? (\*)

(\*) On a, en effet,

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos.x + \sqrt{-1} \sin.x \quad \text{d'où} \quad e^{-x} = (\cos.x + \sqrt{-1} \sin.x)^{\sqrt{-1}}$$

qui, en faisant  $x = \frac{1}{2}\pi$ , devient

## T H É O R I E

3.<sup>o</sup> Les géomètres ; exprimant assez souvent la position d'un point sur un plan , par un *rayon vecteur* et une *anomalie* , n'ont certainement point ignoré les conséquences que fournit la définition 4.<sup>e</sup> de M. Français , et sont conséquemment à l'abri du reproche que leur adresse ce géomètre ( pag. 66 ). Mais , se contentant de considérer séparément la *grandeur* et la *position* d'une droite sur un plan , ils n'avaient point encore formé l'*idée composée* de ces deux *idées simples* ou , si l'on veut , ils n'avaient pas créé un nouvel *être géométrique* , réunissant , à la fois , la *grandeur* et la *position*.

---

$$e^{-\frac{1}{2}\pi} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}.$$

Mais , sans rien préjuger sur le fond de l'assertion de M. Argand ; assertion qu'il n'énonce , au surplus , qu'avec le ton du *doute* ; j'observerai avec lui ( pag. 147 ) que , tant qu'on n'aura pas une théorie bien claire des formes algébriques , non rigoureusement et immédiatement évaluable , il sera tout au moins permis de regarder comme précaires les démonstrations fondées sur l'usage de ces mêmes formes.

C'est probablement aussi l'opinion de M. Servois lui-même ; car , lui observant , il n'y a pas long-temps , que l'équation évidente

$$\sqrt[m]{\frac{1}{1+m}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{(1-m)}{1.2} + \frac{(1-m)(1-2m)}{1.2.3} + \dots$$

devenant , dans le cas où  $m=0$  ,

$$\sqrt[2]{\frac{1}{1+1}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots;$$

il paraissait s'ensuivre que  $\sqrt[2]{\frac{1}{1}}$  qui , en général , se présente sous la forme doubllement indéterminée  $(\frac{1}{0})^{\frac{1}{2}}$  , est cependant égal à  $e$  ; il parut ne pas goûter ce raisonnement , précisément pour les raisons que je viens d'expliquer.

J. D. G.

La grandeur d'une droite , et sa position , c'est - à - dire , l'angle qu'elle fait avec un axe fixe , sont deux quantités qu'on peut même regarder comme *homogènes* ; or , comment les liera-t-on pour en faire le nouvel *être* appelé *ligne droite de grandeur et de position* ou , plus brièvement , *droite dirigée* ? voilà une question qui ne me paraît pas encore assez approfondie.  $\alpha$  étant la longueur d'une droite ,  $\omega$  l'arc du rayon = 1 compris dans l'angle qu'elle forme avec un axe fixe , on pourra , sans doute , représenter , en général , la *droite dirigée* par  $\varphi(\alpha, \omega)$  , et il faudra tâcher de déterminer la fonction  $\varphi$  d'après les conditions auxquelles elle doit essentiellement éta- faire. Ainsi , 1.<sup>o</sup> il faudra qu'à  $\omega=0$  ,  $\omega=2\pi$  , . . . . .  $\omega=2n\pi$  réponde  $\varphi(\alpha, \omega)=+\alpha$  , et qu'à  $\omega=\pi$  ,  $\omega=3\pi$  , . . . . .  $\omega=(2n+1)\pi$  réponde  $\varphi(\alpha, \omega)=-\alpha$  : c'est évident ; 2.<sup>o</sup> il faudra que , de  $\varphi(\alpha, \omega)=\varphi(b, \beta)$  , on puisse conclure  $\alpha=b$  ,  $\omega=\beta$  : c'est encore évident. Mais faudra-t-il , 3.<sup>o</sup> , comme M. Français le demande ( pag. 62 ) , que de la pro- portion  $\frac{\varphi(\alpha, \omega)}{\varphi(b, \beta)} = \frac{\varphi(c, \nu)}{\varphi(d, \delta)}$  on puisse conclure  $\frac{\alpha}{b} = \frac{c}{d}$  et  $\omega-\beta = \nu-\delta$  ? Je ne vois pas que cela découle nécessairement de l'idée de la fonction  $\varphi$ . La signification même du rapport  $\frac{\varphi(\alpha, \omega)}{\varphi(b, \beta)}$  est fort obs- cure. Comment , en effet , peut-on dire d'une *droite dirigée* qu'elle est double , triple , . . . . . d'une autre ? C'est ce qu'on n'aperçoit point *a priori*. M. Français lui-même paraît l'avoir bien senti , puisqu'il ne parle de la *somme* des droites dirigées que comme conséquence de ses deux premiers théorèmes ( pag. 67 ). Cependant , je ne m'oppose point à ce qu'on admette cette condition comme un des caractères essentiels de la fonction  $\varphi$  ; mais alors la définition complète de la droite dirigée sera une définition *nominis , non rei* , ou , en d'autres termes , *droite dirigée* sera le nom d'une certaine fonction analitique de la grandeur et de la position d'une droite. Il suivra de là mal- heureusement qu'on ne construit plus les imaginaires , mais sim- plement qu'on les ramène à une même forme analitique. Quoi qu'il en soit , voyons quelle sera cette fonction. Il est d'abord clair que

l'expression  $\phi(a, \alpha) = a \cdot e^{\alpha \sqrt{-1}}$  satisfait aux trois conditions annoncées.

En effet, on a 1.<sup>o</sup>  $\phi(a, 0) = a \cdot e^{0\sqrt{-1}} = a$ ;  $\phi(a, \pi) = a \cdot e^{\pi\sqrt{-1}} = a(\cos.\pi + \sqrt{-1} \cdot \sin.\pi) = -a$ ; 2.<sup>o</sup> l'équation  $\phi(a, \alpha) = \phi(b, \beta)$  devient  $a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}} = b \cdot e^{\beta\sqrt{-1}}$ ; ou bien, en prenant les logarithmes, séparant et repassant ensuite aux nombres,  $a = b$ ,  $\alpha = \beta$ ; 3.<sup>o</sup> enfin la proportion ci-dessus donne, par de semblables transformations,  $\frac{a}{b} = \frac{e^\alpha}{e^\beta}$

et  $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ . Mais la forme  $a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$  est elle la seule qui satisfasse à ces trois conditions? Je ne le crois pas; et il me paraît même évident qu'on y satisferait également en substituant un coefficient arbitraire à l'imaginaire  $\sqrt{-1}$ . Ainsi la forme  $a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$  ne sera, à mon avis, qu'un cas particulier de celle que doit affecter l'expression analytique de la *droite dirigée*, dans sa *signification de convention*. Y a-t-il encore d'autres conditions qui dérivent de cette signification? C'est ce qu'on ne dit pas; et c'est ce que je ne vois pas non plus.

4.<sup>o</sup> La table à double argument que vous proposez dans votre note (pag. 71) étant appliquée sur un plan conçu divisé par points ou carreaux *infinitésimes*, de manière qu'à chaque carreau correspond un nombre qui en serait l'*indice* ou la *cote*, serait très-propre à indiquer la grandeur et la position des rayons vecteurs qu'on ferait tourner autour du point ou carreau central portant  $\pm 0$ ; et il est bien remarquable qu'en désignant alors par  $a$  la longueur d'un rayon vecteur, par  $\alpha$  l'angle qu'il ferait avec la ligne réelle...  
 $-1$ .  $\pm 0$ ,  $\pm 1$ , ..., par  $x$ ,  $y$  les coordonnées rectangles du point extrême opposé à l'origine, rapporté à cette ligne réelle, comme axe des  $x$ , la cote de ce point serait exprimée par  $x + y\sqrt{-1}$ . et par conséquent, à cause de  $x = a \cos.\alpha$ ,  $y = a \sin.\alpha$ , par  $a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$ . Ainsi, voilà une nouvelle *interprétation géométrique* de la fonction  $a \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}}$  qui vaut bien, à mon avis, celle de MM. Argand et Français;

mais certes, on n'en conclura pas que ce soit un nouveau moyen de construire *géométriquement* les quantités imaginaires, car les *cotes* ou *indices* dont il s'agit impliquent déjà l'imaginaire. Quoi qu'il en soit, il est clair que votre ingénieuse disposition tabulaire des grandeurs numériques peut être regardée comme une *tranche* centrale d'une table à triple argument qui remplirait l'espace suivant ses trois dimensions, et pourrait servir à fixer, de grandeur et de position, les droites dans l'espace. Vous donneriez sans doute à chaque terme la forme *trinomiale*; mais quel coefficient aurait le 3.<sup>e</sup> terme? Je ne le vois pas trop (\*). L'analogie semblerait exiger que le trinôme fût de la forme  $p\cos.\alpha + q\cos.\beta + r\cos.\gamma$ :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  étant les angles d'une droite avec trois axes rectangulaires; et qu'on eût

$$(p\cos.\alpha + q\cos.\beta + r\cos.\gamma)(p'\cos.\alpha + q'\cos.\beta + r'\cos.\gamma) = \cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma - 1.$$

Les valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$  qui satisferaient à cette condition seraient *absurdes*; mais seraient-elles imaginaires, réductibles à la forme générale  $A + B\sqrt{-1}$ ? Voilà une question d'analyse fort singulière que je soumets à vos lumières. La simple proposition que je vous en fais suffit pour vous faire voir que je ne crois point que toute fonction analytique *non réelle* soit vraiment réductible à la forme  $A + B\sqrt{-1}$ .

Lafère, le 23 novembre 1813.

(\*) Mon estimable ami fait ici beaucoup trop d'honneur à ma pénétration. La vérité est que, lorsque j'imaginai cette petite table, je n'avais aucunement la pensée que l'on puisse songer à l'étendre aux trois dimensions de l'espace, et que j'étais même fort disposé à croire que les grandeurs numériques ne s'étendaient que suivant deux de ces dimensions seulement. La lecture des mémoires de MM. Français et Argand m'a bien fait soupçonner qu'il n'en était pas ainsi; mais sans m'apprendre encore de quelle manière je devais construire la table à triple argument.

J. D. G.

## QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Problèmes de Géométrie.*

**I.** **D**e tous les trapèzes qui ont les deux mêmes côtés parallèles et la même section perpendiculaire à ces côtés , quel est celui de moindre contour ?

**II.** **D**e tous les troncs de prismes triangulaires qui ont les trois mêmes arêtes parallèles et la même section perpendiculaire à ces arêtes , quel est celui de moindre surface ?

**III.** **D**e tous les troncs de parallélépipèdes dans lesquels les arêtes latérales sont égales , chacune à chacune , et où la section qui leur est perpendiculaire est donnée de grandeur et d'espèce , quel est celui de moindre surface ?

**IV.** **D**e tous les troncs de parallélépipèdes dans lesquels deux faces latérales opposées sont données de grandeur et d'espèce , et où la section perpendiculaire aux arêtes latérales est aussi donnée de grandeur et d'espèce , quel est celui de moindre surface ?

---

## ASTRONOMIE.

*Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;*

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

(*Deuxième mémoire.*) (\*)



38. Les éléments de l'orbite d'un corps céleste, assujetti aux lois de la gravitation, sont au nombre de six; savoir : la longitude du noeud, l'inclinaison de l'orbite, la position de la ligne des apsides, le grand axe, l'excentricité, et l'instant du passage par l'une des deux apsides. Trois observations complètes, en nous faisant connaître les longitudes et les latitudes géocentriques de ce corps dans trois instans donnés, nous fournissent six équations lesquelles suffisent pour déterminer un nombre pareil d'inconnues. En continuant de désigner par  $\sin \lambda$  l'excentricité connue de l'orbe terrestre, nous tâcherons de représenter chacune de ces six inconnues par une série ordonnée selon les puissances ascendantes de  $\lambda$ , telle que

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \dots$$

Le premier terme  $A$  est ce que devient cette série, dans le cas de  $\lambda=0$ , qui est celui d'un mouvement de la terre supposé uni-

---

(\*) Voyez la pag. 161 de ce volume.

forme et circulaire ; et on voit que ce premier terme suffira , dans le cas où l'observateur se trouverait près de l'une des deux apses de l'orbite terrestre. Comme cette excentricité est une fraction assez petite , égale à *un soixantième* , à peu près ; la série sera très-convergente , même dans les cas les moins favorables. En réservant , pour le mémoire qui suivra celui-ci , la recherche du second et du troisième termes de la série , nous nous bornerons , dans le mémoire actuel , à la recherche du seul premier terme que nous avons désigné par la lettre *A*.

39. PROBLÈME V. *Les éléments de l'orbite étant supposés connus , on demande , pour un instant quelconque , l'expression littérale de la longitude et de la latitude géocentrique de l'astre ?*

*Solution.* Soient (fig. 1)

*S* , le centre du soleil ;

*EZAT* , l'orbite de la terre ;

*MBN'* , l'orbite de l'astre ;

*SN'* , la ligne des nœuds ;

*SE* , la ligne des équinoxe ;

*T* , un lieu de la terre ;

*M* , le lieu correspondant de l'astre ;

*MN* une perpendiculaire sur la ligne des nœuds ;

*ML* , une perpendiculaire sur le plan de l'écliptique ; et soient menées *ST* , *SL* , *SM* , *LN* et *TL* prolongée jusqu'à la rencontre de *SN'* en *Q* , et enfin *SZ* parallèle à *TQ* , projection sur l'écliptique du rayon visuel *TM*. Alors ,

Les triangles *MLT* , *MLS* , *MLN* seront tous trois rectangles en *L* ;

*ST* et *SM* seront respectivement les rayons vecteurs de la terre et de l'astre ;

L'angle *MNL* mesurera l'inclinaison de l'orbite ;

Et les angles *ESZ* et *MTL* seront respectivement les longitude et latitude géocentriques de la planète ou de la comète.

40. Faisant  $ST=a$ ,  $SM=r$ , le triangle  $MNS$ , rectangle en  $N$ , donnera

$$MN=r \cdot \sin.MSN, SN=r \cdot \cos.MSN.$$

Le triangle  $MLN$ , rectangle en  $L$ , donnera ensuite

$$ML=MN \cdot \sin.MNL=r \cdot \sin.MSN \cdot \sin.MNL,$$

$$NL=MN \cdot \cos.MNL=r \cdot \sin.MSN \cdot \cos.MNL;$$

et si, du point  $T$ , on abaisse sur la ligne des nœuds  $SN$  la perpendiculaire  $TO$ , et qu'on mène la parallèle  $LP$  à cette même ligne  $SN$ , on aura

$$SO=a \cdot \cos.NST, TO=a \cdot \sin.NST;$$

d'où on conclura

$$NO=LP=SN-SO=r \cdot \cos.MSN-a \cdot \cos.NST,$$

$$PT=TO-LN=a \cdot \sin.NST-r \cdot \sin.MSN \cdot \cos.MNL;$$

on aura donc

$$\text{Tang.TLP}=\text{Tang.TQS}=\text{Tang.NSZ}=\frac{a \cdot \sin.NST-r \cdot \sin.MSN \cdot \cos.MNL}{r \cdot \cos.MSN-a \cdot \cos.NST};$$

cet angle pourra donc être regardé comme donné, dès que l'on connaîtra l'inclinaison  $MNL$  de l'orbite, les deux rayons vecteurs  $ST=a$  et  $SM=r$ , et les angles  $TSN$ ,  $MSN$  qu'ils font avec la ligne des nœuds. On n'aura qu'à retrancher ensuite cet angle  $NSZ$  de la longitude  $ESN$  du nœud, pour avoir la longitude géocentrique  $ESZ$ .

41. Après la recherche de la longitude, celle de la latitude est très-facile. Des deux triangles  $LTP$ , rectangle en  $P$ , et  $MLT$ , rectangle en  $L$ , on tire les deux égalités qui suivent

$$NO=LP=LTCos.TLP=LT \cdot \cos.NSZ,$$

$$LM=LT \cdot \text{Tang.MTL};$$

d'où

## PROBLÈMES

$$Tang.MTL = \frac{LM}{NO} \cos.NSZ = \frac{r \cdot \sin.MSN \cdot \sin.MNL \cdot \cos.TLP}{r \cdot \cos.MSN - a \cdot \cos.NST}.$$

Et telle est la tangente de la latitude géocentrique.

42. Il reste donc à exprimer les angles NST, MSN, MLN, ainsi que les rayons vecteurs  $a$  et  $r$ , en d'autres quantités qui, d'après l'énoncé de notre problème, doivent être regardées comme données : et ce sont les éléments de l'orbite de l'astre. Soient donc

$\delta$ , l'angle ESM, longitude du nœud ;

$\beta$ , l'angle MNL, inclinaison de l'orbite ;

$\iota$ , l'angle BSN que fait la ligne des nœuds avec celle des apsides ;

$b$ , le demi-grand axe de la planète ou comète ;

$\sin.\mu$ , le rapport de l'excentricité au demi-grand axe ; ce qui donne

$b \cos.\mu$ , pour le demi-petit axe ;

$b \sin.\mu$ , pour la distance du foyer au centre ;

$a$ , le demi-grand axe de la terre ;

$p$ , le temps périodique de la terre ;

$q$ , le temps périodique de l'astre ;

$p$  est connu et, quant à  $q$ , nous savons qu'on a

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{a^3}{b^3};$$

ainsi, les deux quantités désignées par  $b$  et  $q$  pourront toujours être remplacées l'une par l'autre.

43. A ces cinq éléments, savoir  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\iota$ ,  $\mu$ ,  $b$ , il faut en ajouter un sixième : c'est celui qui doit fixer le moment du passage de l'astre par son aphélie. Nous supposerons donc qu'à cet instant la terre était au point A de son orbite. Notre sixième élément sera donc l'angle ASN= $\nu$  que faisait alors la ligne des nœuds SN avec le rayon vecteur SA de la terre.

44. En continuant de désigner par  $\phi$  l'anomalie vraie de l'astre, nous emploirons la lettre  $\star$  pour exprimer l'anomalie excentrique qui lui appartient. La longitude de la terre, supposée au point T

de son orbite, ou l'angle EST, sera désignée par  $\ell$ , ce qui rend l'angle NST= $\ell-\delta$ , et l'angle AST= $\ell-\delta-\nu$ . Le temps employé par la terre à parcourir l'arc AT sera donc  $\frac{p(\ell-\delta-\nu)}{2\pi}$ ; et, comme l'astre emploira le même temps pour parcourir l'arc BM de la sienne (B étant le lieu de son aphélie), et pour décrire ainsi l'anomalie vraie BSM= $\varphi$ , à laquelle répond l'anomalie excentrique  $\kappa$ , et le rayon vecteur SM= $r$ , on aura les équations qui suivent :

$$r = \frac{b \cos^2 \mu}{1 - \sin \mu \cos \varphi}, \quad \sin \kappa = \frac{\cos \mu \sin \varphi}{1 - \sin \mu \cos \varphi}, \quad \cos \kappa = \frac{\cos \varphi - \sin \mu}{1 - \sin \mu \cos \varphi},$$

$$p(\ell-\delta-\nu) = q(\kappa + \sin \mu \sin \kappa).$$

45. Il paraît convenable de réduire toutes les formules aux anomalies excentriques et d'éliminer entièrement les anomalies vraies. Cette réduction est facile; nous aurons

$$r = b(1 + \sin \mu \cos \kappa)$$

$$\sin \varphi = \frac{\cos \mu \sin \kappa}{1 + \sin \mu \cos \kappa}, \quad \cos \varphi = \frac{\cos \kappa + \sin \mu}{1 + \sin \mu \cos \kappa},$$

$$r \sin \varphi = b \cos \mu \sin \kappa, \quad r \cos \varphi = b(\cos \kappa + \sin \mu).$$

46. En conséquence, si l'on désigne finalement  
par  $A$  la longitude géocentrique,  
par  $B$  la latitude géocentrique de l'astre au moment où la terre  
est parvenue au point T de son orbite; l'angle TLP=NSZ sera  
 $\delta-A$ ; l'angle NST, que fait le rayon vecteur ST avec la ligne  
des nœuds SN, sera  $\ell-\delta$ ; l'angle MSN que fait avec cette même  
ligne SN le rayon vecteur SM de l'astre sera  $\ell+\varphi$ ; l'angle MTL sera  $B$ , et l'angle MNL, qui exprimera l'inclinaison de l'orbite  
sera  $\beta$ . Les formules des n.<sup>o</sup>s 40 et 41, qui nous faisaient con-  
naître les tangentes des deux angles  $\delta-A$  et  $B$  deviendront ainsi

$$\text{Tang.}(\delta-A) = \frac{a \sin(\ell-\delta) - r \sin(\ell+\varphi) \cos \beta}{r \cos(\ell+\varphi) - a \cos(\ell-\delta)},$$

## PROBLÈMES

$$\text{Tang. } B = \frac{r \sin(\epsilon + \phi) \cos(\delta - A) \sin \beta}{r \cos(\epsilon + \phi) - a \cos(\delta - \delta)}.$$

46. Multipliant ces deux équations par le dénominateur commun des fractions qui forment leurs seconds membres , elles deviendront en réduisant

$$\begin{aligned} a \sin(\delta - A) &= r \cos(\epsilon + \phi) \sin(\delta - A) + r \sin(\epsilon + \phi) \cos(\delta - A) \cos \beta. \\ a \text{Tang. } B \cos(\delta - \delta) &= r \cos(\epsilon + \phi) \text{Tang. } B - r \sin(\epsilon + \phi) \cos(\delta - A) \sin \beta. \end{aligned}$$

47. Arrêtons-nous à ces deux produits  $r \cos(\epsilon + \phi)$  et  $r \sin(\epsilon + \phi)$ , qui font fonction de facteurs dans ces deux formules , et qui ne sont autre chose que les deux coordonnées rectangulaires SN, MN du point M de l'ellipse rapportées au foyer S comme origine , et à la ligne des nœuds SN comme axe. En les désignant respectivement par  $bP$  et  $bQ$ , et en employant les développemens donnés au n.<sup>o</sup> 45, nous aurons

$$P = (1 + \sin \mu \cos \alpha) \cos(\epsilon + \phi) ,$$

$$Q = (1 + \sin \mu \cos \alpha) \sin(\epsilon + \phi) ;$$

ou bien

$$P = \cos \epsilon \sin \mu + \cos \epsilon \cos \alpha - \sin \epsilon \sin \alpha \cos \mu ,$$

$$Q = \sin \epsilon \sin \mu + \sin \epsilon \cos \alpha + \cos \epsilon \sin \alpha \cos \mu .$$

En employant cette notation , on aura

$$a \sin(\delta - A) = b P \sin(\delta - A) + b Q \cos(\delta - A) \cos \beta ,$$

$$a \cos(\delta - \delta) \text{Tang. } B = b P \text{Tang. } B - b Q \cos(\delta - A) \sin \beta .$$

La ligne MT , distance de l'astre à la terre , égale à  $\frac{LM}{\sin B} = \frac{r \sin(\epsilon + \phi) \sin \beta}{\sin B}$ ,

deviendra , par cette même notation ,  $\frac{b Q \sin \beta}{\sin B}$ .

48. Si on multiplie la première de ces équations par  $\sin \beta$  , l'autre par  $\cos \beta$  , et qu'on les ajoute ensemble , on aura une nouvelle équation débarrassée de  $Q$  et ne renfermant que  $P$  seul. Multipliant de même la première par  $\text{Tang. } B$  , la seconde par  $\sin(\delta - A)$  et

les étant l'une de l'autre , en remarquant que  $(\theta - A) = (\theta - \delta) + (\delta - A)$ , ce qui rend  $\sin.(\theta - A) - \cos.(\theta - \delta)\sin.(\delta - A) = \sin.(\theta - \delta)\cos.(\delta - A)$ , on aura une nouvelle équation débarrassée de  $P$ , et ne renfermant plus que  $Q$ . Ces deux équations seront

$$\frac{bP}{a} = \frac{\cos.\beta \cos.(\theta - \delta) + \sin.\beta \sin.(\theta - A) \cot.B}{\cos.\beta + \sin.\beta \sin.(\delta - A) \cot.B},$$

$$\frac{bQ}{a} = \frac{\sin.(\theta - \delta)}{\cos.\beta + \sin.\beta \sin.(\delta - A) \cot.B}.$$

Leur forme nous met dans le cas de procéder par degrés à la solution du problème , en le partageant dans les trois qui suivent:

49. *PROBLÈME VI. La position du plan de l'orbite étant supposée connue , et connaissant de plus le grand axe de l'ellipse , et l'instant du passage par l'une des deux apsides ; on demande de déterminer , moyennant une seule observation , l'excentricité et la position de l'axe ?*

50. *Solution.* Les quantités connues du problème seront ainsi : l'angle  $\delta$  , longitude du nœud ; l'angle  $\beta$  inclinaison de l'orbite ; les angles  $A$  et  $B$  , ou la longitude et la latitude géocentriques , données par l'observation ; l'angle  $\theta$  , longitude de la terre dans ce même instant ; l'angle  $\pi$  que faisait la ligne des nœuds avec le rayon vecteur de la terre , au moment du passage de l'astre par son aphélie ; enfin le demi-grand axe  $b$  de l'orbite , et par conséquent la fraction  $\frac{b}{a}$ . Les deux inconnues sont l'excentricité  $\mu$  et l'angle  $\alpha$  que fait la ligne des nœuds avec celle des apsides.

51. Les deux équations données (48) nous mettent dans le cas de déterminer immédiatement les deux facteurs  $P$  et  $Q$ . De plus , l'angle  $\pi$  étant supposé connu , on aurait , pour déterminer l'anomalie excentrique  $\alpha$  , l'équation (44)

$$p(\theta - \delta - \pi) = q(\pi + \sin.\mu \sin.\alpha)$$

qui , outre cette anomalie , renferme encore l'excentricité  $\mu$  , inconnue comme elle. Heureusement elle y est réductible ; car ayant (47)

## P R O B L È M E S

$$P = (1 + \sin.\mu \cos.\varkappa) \cos.(\epsilon + \varphi) ;$$

$$Q = (1 + \sin.\mu \cos.\varkappa) \sin.(\epsilon + \varphi) ;$$

on en tire

$$1 + \sin.\mu \cos.\varkappa = \sqrt{P^2 + Q^2} ;$$

quantité entièrement connue. En la désignant donc par  $R$ , on obtient

$$\sin.\mu = \frac{R - 1}{\cos.\varkappa} ,$$

ce qui change notre dernière équation en

$$p(\delta - \epsilon - \nu) = q[x + (R - 1) \tan.\varkappa].$$

On en tirera l'anomalie  $\varkappa$  par une simple application de la règle de fausse position; et, après l'avoir trouvée, il ne restera plus que le seul angle  $\epsilon$  à déterminer. Or, des deux équations (47)

$$P = \cos.\epsilon \sin.\mu + \cos.\epsilon \cos.\varkappa - \sin.\epsilon \sin.\varkappa \cos.\mu ,$$

$$Q = \sin.\epsilon \sin.\mu + \sin.\epsilon \cos.\varkappa + \cos.\epsilon \sin.\varkappa \cos.\mu ;$$

on tire

$$P \cos.\epsilon + Q \sin.\epsilon = \sin.\mu + \cos.\varkappa ,$$

$$Q \cos.\epsilon - P \sin.\epsilon = \sin.\varkappa + \cos.\mu ;$$

ce qui donne

$$R \cos.\epsilon = P(\sin.\mu + \cos.\varkappa) + Q \sin.\varkappa \cos.\mu ,$$

$$R \sin.\epsilon = Q(\sin.\mu + \cos.\varkappa) - P \sin.\varkappa \cos.\mu ;$$

Le problème sera ainsi résolu. Il pourra servir à déterminer, dans les orbes planétaires, le lieu de l'aphélie et l'excentricité, les autres éléments étant supposés connus.

52. *PROBLÈME VII.* Connaissant la position du plan de l'orbite, on demande de déterminer, moyennant deux observations, les quatre éléments qui restent; savoir: l'instant du passage par l'aphélie, ou l'angle  $\nu$ ; la position de la ligne des apsides, ou l'angle  $\epsilon$ ; l'excentricité de l'orbite, ou l'angle  $\mu$ ; enfin le demi-grand

*grand axe b*, duquel prend le rapport des deux temps périodiques p et q au moyen de l'équation  $p^2 b^3 = q^2 a^3$ ?

53. *Solution.* En conservant, pour la première observation, les notations du problème précédent, on marquera par un accent celles qui se rapportent à la seconde. On désignera donc

- par A, A' les deux longitudes géocentriques;
- par B, B' les deux latitudes géocentriques;
- par x, x' les deux anomalies excentriques;
- par r, r' les deux rayons vecteurs.

On aura ainsi

$$r = b(1 + \sin.\mu \cos.x), \quad r' = b(1 + \sin.\mu \cos.x').$$

54. Les lettres P, P', Q, Q' désigneront encore les fonctions trigonométriques qui suivent

$$\begin{aligned} P &= \cos.\epsilon \sin.\mu + \cos.\epsilon \cos.x - \sin.\epsilon \sin.x \cos.\mu, \\ P' &= \cos.\epsilon \sin.\mu + \cos.\epsilon \cos.x' - \sin.\epsilon \sin.x' \cos.\mu, \\ Q &= \sin.\epsilon \sin.\mu + \sin.\epsilon \cos.x + \cos.\epsilon \sin.x \cos.\mu, \\ Q' &= \sin.\epsilon \sin.\mu + \sin.\epsilon \cos.x' + \cos.\epsilon \sin.x' \cos.\mu. \end{aligned}$$

55. On aura donc, en vertu de (48),

$$\begin{aligned} \frac{bP}{a} &= \frac{\cos.\beta \cos.(\theta - \delta) + \sin.\beta \sin.(\theta - A) \cot.B}{\cos.\beta + \sin.\beta \sin.(\delta - A) \cot.B}, \\ \frac{bP'}{a} &= \frac{\cos.\beta \cos.(\theta' - \delta) + \sin.\beta \sin.(\theta' - A') \cot.B'}{\cos.\beta + \sin.\beta \sin.(\delta - A') \cot.B'}, \\ \frac{bQ}{a} &= \frac{\sin.(\theta - \delta)}{\cos.\beta + \sin.\beta \sin.(\delta - A) \cot.B}, \\ \frac{bQ'}{a} &= \frac{\sin.(\theta' - \delta)}{\cos.\beta + \sin.\beta \sin.(\delta - A') \cot.B'}. \end{aligned}$$

56. Ainsi, la position du plan de l'orbite étant supposée connue, on pourra regarder comme connues les quatre fractions  $\frac{bP}{a}$ ,  $\frac{bP'}{a}$ ,  $\frac{bQ}{a}$ ,  $\frac{bQ'}{a}$ ; mais le rapport  $\frac{b}{a}$  est une des inconnues.

du problème ; ce qui porte à *cinq* le nombre de celles que renferment les quatre équations précédentes.

57. La *sixième* inconnue , c'est l'angle  $\nu$  , qui fixe l'instant du passage par l'aphélie. La théorie de l'ellipse fournit les deux équations (44)

$$p(\theta - \delta - \nu) = q(\alpha + \sin.\mu \sin.\alpha) , \quad p'(\theta' - \delta - \nu) = q'(\alpha' + \sin.\mu \sin.\alpha') ;$$

desquelles on tire , par une simple soustraction ,

$$p(\theta' - \theta) = q[(\alpha' - \alpha) + \sin.\mu (\sin.\alpha' - \sin.\alpha)].$$

L'angle  $\nu$  étant ainsi déterminé , le nombre des équations , de même que celui des inconnues , se trouvera de nouveau réduit à *cinq*.

58. Les *quatre* équations de (54) pourront être réduites à *trois* , par l'élimination de l'angle  $\epsilon$ . On a d'abord (51)

$$R = 1 + \sin.\mu \cos.\alpha , \quad R' = 1 + \sin.\mu \cos.\alpha' ;$$

d'où l'on tire

$$R - R' = \sin.\mu (\cos.\alpha - \cos.\alpha') ,$$

$$R + R' = 2 + \sin.\mu (\cos.\alpha + \cos.\alpha') ,$$

$$RR' = 1 + \sin.\mu (\cos.\alpha + \cos.\alpha') + \sin.^2 \mu \cos.\alpha \cos.\alpha' .$$

59. Il conviendra de remarquer les deux expressions littérales de  $PQ' - P'Q$  et de  $PP' + QQ'$  , que l'on obtiendra encore , entièrement débarrassées de l'angle  $\epsilon$  , à l'aide des formules données (47) ; savoir

$$P = (1 + \sin.\mu \cos.\alpha) \cos.(\epsilon + \phi) , \quad Q = (1 + \sin.\mu \cos.\alpha) \sin.(\epsilon + \phi) ,$$

$$P' = (1 + \sin.\mu \cos.\alpha') \cos.(\epsilon + \phi') , \quad Q' = (1 + \sin.\mu \cos.\alpha') \sin.(\epsilon + \phi') ;$$

il en résulte

$$PQ' - P'Q = RR' \sin.(\phi' - \phi) ,$$

$$PP' + QQ' = RR' \cos.(\phi' - \phi) ;$$

d'où l'on obtient la formule simple et remarquable

$$\text{Tang.}(\phi' - \phi) = \frac{PQ' - P'Q}{PP' + QQ'} .$$

Ainsi donc, ayant trouvé, à l'aide des formules (55), les quantités  $P, P', Q, Q'$ , multipliées par le facteur  $\frac{b}{a}$  qui, quoiqu'inconnu, est commun à toutes, et disparaît dans la division, on en tirera immédiatement l'angle  $\phi' - \phi$ ; c'est l'angle décrit par le rayon vecteur de la comète, dans l'intervalle de temps qui sépare les deux observations.

60. Si l'on développe les sinus et cosinus de  $\phi' - \phi$ , en réduisant tout aux anomalies excentriques, moyennant les formules (45), on en déduira les deux qui suivent :

$$PQ' - P'Q = [\sin(\alpha' - \alpha) + (\sin\alpha' - \sin\alpha)\cos\mu] \cos\mu, \\ RR' - PP' - QQ' = [1 - \cos(\alpha' - \alpha)] \cos^2\mu.$$

61. Pour donner à nos formules encore plus de simplicité, faisons

$$\alpha' + \alpha = 2x, \quad \alpha' - \alpha = 2z;$$

d'où

$$\alpha' = x + \psi, \quad \alpha = x - \psi;$$

il en résultera

$$\sin\alpha' + \sin\alpha = 2\sin x \cos\psi, \quad \sin\alpha' - \sin\alpha = 2\cos x \sin\psi, \\ \cos\alpha - \cos\alpha' = 2\sin x \sin\psi, \quad \cos\alpha + \cos\alpha' = 2\cos x \cos\psi;$$

et par conséquent

$$R - R' = 2\sin\mu \sin x \sin\psi, \\ R + R' - 2 = 2\sin\mu \cos x \cos\psi, \\ PQ' - P'Q = 2\cos\mu \sin\psi (\cos\psi + \sin\mu \cos x), \\ RR' - PP' - QQ' = 2\cos^2\mu \sin^2\psi;$$

la dernière des équations (57) prendra alors la forme

$$p(\theta' - \theta) = q(2\psi + 2\sin\mu \cos x \sin\psi),$$

et comme

$$R + R' - 2 = 2\sin\mu \cos x \cos\psi,$$

elle deviendra finalement

$$p'(\theta - \psi) = q[2\psi + (R+R'-2)\operatorname{Tang.} \psi]$$

62. Mais n'oublions pas que la fraction  $\frac{b}{a}$ , qui multiplie  $P, P'$ ;  $Q, Q'$ , dans les formules (55), est elle-même une de nos inconnues.

Faisons, pour abréger,  $\frac{a}{b} = n$ ; faisons de plus

$$P = nM, \quad Q = nN, \quad R = nO,$$

$$P' = nM', \quad Q' = nN', \quad R' = nO',$$

Les quantités  $M, N, O, M', N', O'$  seront alors celles qu'on aura pu immédiatement déduire des formules (55), et que, par conséquent, on pourra regarder comme connues, tandis qu'il faudra considérer comme inconnue la fraction  $\frac{a}{b} = n$ , de même que  $\frac{p'}{q} = \sqrt{n^3}$ .

Les équations du numéro précédent deviendront donc

$$n(O-O') = 2\operatorname{Sin.} \kappa \operatorname{Sin.} x \operatorname{Sin.} \psi, \quad (1)$$

$$n(O+O') - 2 = 2\operatorname{Sin.} \kappa \operatorname{Cos.} x \operatorname{Cos.} \psi,$$

$$n^2(MN' - M'N) = 2\operatorname{Cos.} \mu \operatorname{Sin.} \psi (\operatorname{Cos.} \psi + \operatorname{Sin.} \mu \operatorname{Cos.} x), \quad (2)$$

$$n^2(O'O - MM' - NN') = 2\operatorname{Cos.}^2 \mu \operatorname{Sin.}^2 \psi, \quad (3)$$

$$(\theta - \psi) \sqrt{n^3} = 2\psi + [n(O+O') - 2] \operatorname{Tang.} \psi. \quad (4)$$

63. Ce sont là les équations desquelles dépend la solution du problème. Il faut employer la règle de fausse position; et, pour éviter les équations au-dessus du second degré, il faut commencer par supposer une valeur numérique à l'angle  $x$ . A l'aide de cet angle, on déterminera l'excentricité  $\mu$ . Pour cela, on divisera le carré de l'équation (1) par l'équation (3), ce qui donnera

$$\operatorname{Tang.}^2 \mu = \frac{(O-O')^2}{2(OO' - MM' - NN') \operatorname{Sin.}^2 x}.$$

64. De là, on passera à l'angle  $\psi$ . Posant, pour abréger,

$$\frac{OO' - MM' - NN'}{MN' - M'N} = h,$$

et divisant la troisième équation par la seconde, il viendra

$$\cos.\mu \sin.\psi - h \cos.\psi = h \sin.\mu \cos.\chi ;$$

équation où l'on traitera l'angle  $\psi$  comme l'inconnue, et que l'on résoudra par les méthodes connues (\*). De plus, cet angle  $\psi$  étant la demi-différence des deux anomalies excentriques, pour peu que ces deux anomalies ne soient pas très-éloignées l'une de l'autre, il sera assez petit pour que son cosinus puisse être confondu avec l'unité, sans erreur sensible, sur-tout s'il faut vérifier le premier essai d'une règle de fausse position. On aura ainsi

$$\sin.\psi = \frac{h(1 + \sin.\mu \cos.\chi)}{\cos.\mu} .$$

65. A l'aide des trois angles  $\chi$ ,  $\mu$ ,  $\psi$ , on aura, par l'équation (1)

$$n = \frac{2 \sin.\mu \sin.\chi \sin.\psi}{O-O'} .$$

Substituant ensuite les valeurs numériques des quatre quantités dans l'équation (4), on s'assurera de la différence entre deux quantités qui, dans le cas d'une supposition exacte pour  $\chi$ , devraient être rigoureusement égales. Une seconde supposition donnera un nouveau résultat qui, comparé au premier, servira à diriger les suppositions ultérieures, et à conduire, par quelques essais, et par l'application des méthodes usitées en pareille rencontre, à une valeur suffisamment approchée de  $\chi$ ; et, par suite, à celles de  $\mu$ ,  $\psi$  et  $n$ .

66. Les deux anomalies excentriques  $\kappa$ ,  $\kappa'$  se trouveront ensuite par les formules (60); savoir:

$$\kappa = \chi - \psi , \quad \kappa' = \chi + \psi .$$

L'angle  $\kappa$  se déduira de l'une des deux équations (57)

$$(1-\delta-\eta) \sqrt{n^3} = \kappa + \sin.\mu \sin.\kappa ,$$

$$(1-\delta-\eta) \sqrt{n^3} = \kappa' + \sin.\mu \sin.\kappa' .$$

Il restera donc à connaître le seul angle  $\kappa$ ; et on aura pour le déterminer, l'une des quatre équations (54).

67. Telle est donc la solution du problème, dans le cas où la

(\*) Voir la page 84 du 2<sup>e</sup> volume de ce recueil.

position du plan de l'orbite peut être supposée connue. Il est très-possible de déterminer cette position à part, indépendamment des autres élémens de cette orbite ; les méthodes qui y conduisent sont assez connues ; et elles sont encore susceptibles d'être perfectionnées. Toutefois nous donnerons, dans un prochain mémoire, la solution générale et complète du problème.

---

## GÉOMÉTRIE PRATIQUE.

### *PROBLÈME.*

*Prolonger une droite accessible au-delà d'un obstacle qui borne la vue, en n'employant que l'équerre d'arpenteur, et sans faire aucun chainage ?*

*Solution ;*

Par M. SERVOIS, professeur aux écoles d'artillerie.



**S**OIENT A, B (fig. 2) deux des points de la direction d'une droite qu'il faut prolonger au-delà d'un obstacle O qu'elle vient rencontrer et qui borne la vue.

1.<sup>o</sup> Aux points A, B, pris pour sommets, soient formés, à volonté, les angles droits LAD, LBD, en déterminant les points L et D de manière que de L on puisse voir au-delà de l'obstacle O.

2.<sup>o</sup> Au point L, pris pour sommet, soit fait l'angle droit DLF ; F étant l'intersection de LF avec BD ou son prolongement.

3.<sup>o</sup> En cheminant dans la direction de AD, soit déterminé, sur cette droite, le sommet E de l'angle droit AEF.

4.<sup>o</sup> Enfin , en cheminant dans la direction EF , soit déterminé , sur cette droite , le sommet C de l'angle droit LCE , et ce point C sera un de ceux du prolongement de AB , au - delà de l'obstacle O .

On pourraitachever le prolongement , en déterminant , par une semblable opération , un autre point de la direction AB ; mais on trouvera peut-être plus commode de procéder comme il suit .

1.<sup>o</sup> Au point A , pris pour sommet , on formera l'angle droit BAH .

2.<sup>o</sup> En un point quelconque H de la direction AH , pris pour sommet , on formera l'angle droit AHG .

3.<sup>o</sup> Cheminant dans la direction de HG , on cherchera , sur cette droite , le sommet G de l'angle droit HGC .

4.<sup>o</sup> Enfin formant au point C l'angle droit GCK , la droite CK sera le prolongement cherché .

La méthode qui vient d'être indiquée plus haut pour déterminer le point C , repose sur le théorème suivant , qui est , je crois , de Simson .

*THÉORÈME. Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés d'un triangle , d'un même point quelconque de la circonférence du cercle qui lui est circonscrit , sont tous trois sur une même ligne droite . (\*)*

(\*) Ce théorème revient à celui-ci : si , sur trois cordes , partant d'un même point d'une circonférence , prises pour diamètres , on décrit trois cercles , les intersections de ces cercles deux à deux seront toutes trois sur une même ligne droite . Ce théorème se démontre assez simplement comme il suit .

Soit pris le diamètre qui passe par le point commun aux trois cordes pour axe des  $x$  , et la tangente au même point pour axe des  $y$  ; et soient respectivement

$$y=mx , \quad y=m'x , \quad y=m''x ,$$

les équations des trois cordes . Si  $r$  est le rayon du cercle , son équation sera

$$x^2+y^2=2rx .$$

On voit, en effet, qu'à cause des deux angles droits opposés **DEF**, **DLF**, le quadrilatère **DEFL** est inscrit à un cercle ; que par conséquent **L** est un point de la circonference du cercle circonscrit au triangle **DEF** ; d'où il suit que les pieds **A**, **B**, **C** des perpendiculaires **LA**, **LB**, **LC**, abaissées respectivement du point **L** sur les directions **ED**, **DF**, **FE** des côtés de ce triangle doivent être sur une même ligne droite.

*Remarque.* L'Équerre d'arpenteur est, en général, un instrument beaucoup moins estimé qu'il ne mérite de l'être. J'ai tâché de le relever de son discrédit, dans mes *Solutions peu connues de diffé-*

D'après cela on trouvera, pour les équations des extrémités non communes de ces trois cordes,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2r}{1+m^2}, \\ y = \frac{2mr}{1+m^2}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2r}{1+m'^2}, \\ y = \frac{2m'r}{1+m'^2}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2r}{1+m''^2}, \\ y = \frac{2m''r}{1+m''^2}. \end{array} \right.$$

D'où on conclura, pour les équations des cercles dont elles sont les diamètres,

$$(1+m^2)(x^2+y^2)=2r(x+my),$$

$$(1+m'^2)(x^2+y^2)=2r(x+m'y),$$

$$(1+m''^2)(x^2+y^2)=2r(x+m''y).$$

Les intersections de ces cercles, deux à deux, auront pour équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2(1-mm')r}{(1+m^2)(1+m'^2)}, \\ y = \frac{2(m+m')r}{(1+m^2)(1+m'^2)}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2(1-m'm'')r}{(1+m'^2)(1+m''^2)}, \\ y = \frac{2(m'+m'')r}{(1+m'^2)(1+m''^2)}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2(1-m''m)r}{(1+m''^2)(1+m^2)}, \\ y = \frac{2(m''+m)r}{(1+m''^2)(1+m^2)}. \end{array} \right.$$

Si l'on cherche quelle est la droite qui passe par deux quelconques de ces trois points, on trouvera, toutes réductions faites, que l'équation de cette droite est

$$(m+m'+m''-mm'm'')y=(mm'+m'm''+m''m-1)x+2r;$$

et, comme cette équation est symétrique en  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ , on en conclura que la droite qu'elle exprime contient à la fois les trois points.

J. D. G.

FENS

rense problèmes de géométrie pratique (\*). Mais, en particulier, l'équerre à miroir, exécute d'abord je crois par Adam, rappelé ensuite, avec distinction, par Fallon, dans la Correspondance de Zach, est, sans contredit, celui qui réunit le plus de propriétés. Il a sur-tout l'avantage précieux de donner, sans tâtonnement, le pied de la perpendiculaire abaissée sur une droite accessible, d'un point seulement visible et non accessible.

---

## QUESTIONS RÉSOLUES.

*Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 92 de ce volume;*

Par MM. BÉRARD, principal et professeur de mathématiques au collège de Briançon, et GOBERT, élève du lycée d'Angers.



**THÉORÈME.** *Les rectangles qui ont respectivement pour diagonales deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole, et dont les côtés sont parallèles aux deux axes de la courbe, sont équivalens. (\*\*)*

*Démonstrations.* Les démonstrations données par MM. Bérard et Gobert reviennent, en substance, à ce qui suit.

Soient  $2a$  et  $2b$  les deux axes de la courbe. Si  $x'$  et  $y'$  sont

(\*) In-8.<sup>o</sup> d'environ 100 pages (an XII); chez Madame veuve Courcier, à Paris.

(\*\*) L'énoncé de ce théorème a été indiqué par M. Bérard.

J. D. G.

les deux coordonnées, par rapport à ces axes, de l'une des extrémités d'un diamètre, ce diamètre fera avec l'axe  $z\alpha$  un angle dont la tangente tabulaire sera  $\frac{y'}{x'}$ ; désignant donc par  $x'', y''$  les coordonnées de l'une des extrémités du conjugué de ce diamètre, ce qui donnera  $\frac{y''}{x''}$  pour la tangente tabulaire de l'angle que formera sa direction avec le même axe, on aura les trois équations

$$b^2x'^2 \pm a^2y'^2 = a^2b^2, \quad (1)$$

$$b^2x''^2 \pm a^2y''^2 = a^2b^2, \quad (2)$$

$$b^2x'x'' \pm a^2y'y'' = 0; \quad (*) \quad (3)$$

les signes supérieurs répondant à l'ellipse, et les inférieurs à l'hyperbole.

Si, entre ces trois équations, on élimine  $a^2$  et  $b^2$ , comme deux inconnues au premier degré, l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$\left( \frac{y'}{x'} - \frac{y''}{x''} \right) (x'y' + x''y'') = 0.$$

Or, il est aisément de voir que, ni pour l'ellipse ni pour l'hyperbole, le premier des deux facteurs du premier membre de cette équation ne saurait être nul; d'où il résulte qu'on doit avoir, pour l'une et pour l'autre courbes,

(\*) La tangente à l'extrémité du premier des deux diamètres ayant pour équation

$$y - y' = \mp \frac{b^2x'}{a^2y'} (x - x'),$$

et l'équation du second diamètre étant  $y = \frac{y''}{x''} x$ , pour que ces diamètres soient conjugués l'un à l'autre, il faut que les deux droites soient parallèles; ce qui donne, en effet,

$$\mp \frac{b^2x'}{a^2y'} = \frac{y''}{x''}, \quad \text{ou} \quad b^2x'x'' \pm a^2y'y'' = 0.$$

J. D. G.

$$x'y' + x''y'' = 0, \quad (4) \quad \text{ou} \quad 2x'' \cdot 2y'' = -2x' \cdot 2y';$$

ce qui fait voir que les deux rectangles dont il s'agit ne diffèrent que par le signe et sont conséquemment équivalents.

M. Berard a remarqué qu'en transposant, dans les équations (3) et (4), et en les multipliant et les divisant ensuite l'une par l'autre, on en conclut les deux suivantes

$$\pm a^2 y'^2 = b^2 x'^2, \quad (5) \quad \pm a^2 y''^2 = b^2 x''^2; \quad (6)$$

équations en vertu desquelles les équations (1) et (2) deviennent

$$x'^2 + x''^2 = a^2, \quad (7) \quad y'^2 + y''^2 = \pm b^2. \quad (8)$$

Or, en ajoutant ensemble les équations (7) et (8), il vient

$$(x'^2 + y'^2) + (x''^2 + y''^2) = a^2 \pm b^2;$$

équation qui exprime la relation connue entre les longueurs des axes d'une ellipse ou d'une hyperbole et celles de deux diamètres conjugués.

Si, ensuite, du produit des deux mêmes équations (7) et (8), on retranche le carré de l'équation (4) on aura

$$(xy' - x'y)^2 = \pm a^2 b^2;$$

autre équation qui exprime la propriété connue des parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués. (\*)

Remarquant aussi que les équations (1), (2), (3), desquelles résulte l'équation (4), ont lieu également lorsque  $2a$  et  $2b$ , au lieu d'être les deux axes de la courbe, sont deux diamètres conjugués auxquels on la rapporte ; M. Bérard en conclut cet autre théorème, plus général que le premier :

*THÉORÈME.* *Les parallélogrammes qui ont respectivement pour diagonales deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole sont égaux.*

(\*) C'est là, bien certainement, le moyen le plus simple d'arriver à ces deux relations auxquelles la plupart des auteurs d'éléments ne parviennent qu'à travers des calculs assez compliqués.

*perbole , et dont les côtés sont parallèles à deux autres diamètres conjugués , sont équivalens.*

Nous observerons , à notre tour , que la vérité de ce théorème s'aperçoit sur-le-champ , pour l'ellipse , en considérant sa projection circulaire , dans laquelle les projections des deux parallelogrammes , dont les aires sont proportionnelles à celles de ces deux figures elles-mêmes , sont des rectangles , non seulement équivalens , mais même superposables. Et , comme on passe de l'ellipse à l'hyperbole en changeant respectivement  $y'$  et  $y''$  en  $y'\sqrt{-1}$  et  $y''\sqrt{-1}$  , ce qui ne change rien au théorème , il s'ensuit qu'il a également lieu pour cette dernière courbe.

---

*Solutions du problème d'architecture proposé à la page 92 de ce volume.*

**ENONCÉ.** La base et la montée d'une anse de panier , dont le nombre des centres est  $2n+1$  , étant données ; construire la demi-anse , dont par conséquent le nombre des centres sera  $n+1$  , avec la condition que tous les arcs de cette demi-anse soient semblables , et que leurs rayons forment une progression géométrique ?

Faire une application de la solution générale au cas particulier où  $n=2$  , et où , par conséquent , chacun des arcs de la demi-anse serait de  $30^\circ$  ?

*Première solution ;*

Par M. ARGAND.

Soient *M* la montée *Ue* de l'anse de panier (fig. 3) , *B* la demi-base *eP* , *n* le nombre des centres , *x* le premier rayon *AP* , *z* le

quotient  $\frac{BQ}{AP} = \frac{CR}{BQ} = \dots = \frac{EU}{DT}$ , & l'angle  $PAQ = QBR = \dots = TEU = \frac{\pi}{2n}$ . On aura d'abord les équations

$$\begin{aligned} AP = AQ = x, \quad AB = x(z-1), \quad bC = bB + BC, \\ BQ = BR = xz, \quad BC = xz(z-1), \quad cD = cC + CD, \\ \dots \dots \dots, \quad \dots \dots \dots, \quad \dots \dots \dots, \\ ET = EU = xz^{n-1}; \quad DE = xz^{n-1}(z-1); \quad dE = dD + DE. \end{aligned}$$

Tous les angles des triangles  $ABB$ ,  $bCc$ , ...,  $dEe$  sont connus; ainsi, en partant du côté  $AB$ , on déterminera successivement les côtés  $Ab$ ,  $bc$ , ...,  $de$ , et  $cE$ , au moyen des équations précédentes et de la proportionnalité entre les sinus et les côtés.

On aura ensuite

$$M = xz^{n-1} - cE, \quad B = x + Ab + bc + \dots + de.$$

En faisant, pour abréger,

$$\text{Sin.} n\alpha - \text{Sin.} (n-1)\alpha = P_n,$$

$$\text{Sin.} (n-1)\alpha - \text{Sin.} (n-2)\alpha = P_{n-1},$$

.....

$$\text{Sin.} \alpha - \text{Sin.} 0 = P_1,$$

on trouvera, réductions faites,

$$\begin{aligned} M &= x(P_n z^{n-1} + P_{n-1} z^{n-2} + \dots + P_1 z + P_0), \\ B &= x(P_1 z^{n-1} + P_2 z^{n-2} + \dots + P_{n-1} z + P_n). \end{aligned} \tag{1}$$

En éliminant  $x$ , entre ces deux équations, on a, pour la détermination de  $z$ , l'équation du  $(n-1)^{\text{me}}$  degré

$$\begin{aligned} (BP_n - MP_1)z^{n-1} + (BP_{n-1} - MP_2)z^{n-2} + \dots \\ + (BP_2 - MP^{n-1})z + (BP_1 - MP_0) = 0. \end{aligned}$$

Les équations (1) peuvent se mettre sous la forme définie

## QUESTIONS

$$M = \frac{2x[z^n(z+1)\sin.\frac{1}{n}\alpha - (z-1)\cos.\frac{1}{n}\alpha]\sin.\frac{1}{n}\alpha}{z^2 - 2z\cos.\frac{1}{n}\alpha + 1} ;$$

$$N = \frac{2x[z^n(z-1)\cos.\frac{1}{n}\alpha + (z+1)\sin.\frac{1}{n}\alpha]\sin.\frac{1}{n}\alpha}{z^2 - 2z\cos.\frac{1}{n}\alpha + 1} .$$

Lorsque  $n$  est un grand nombre, ces dernières formules sont plus commodes que les précédentes, pour appliquer la règle de fausse position à la détermination des inconnues.

Pour le cas de  $n=3$ , en posant, pour abréger

$$B+M=S, \quad B-M=D,$$

on trouve d'abord

$$z = \frac{D \pm \sqrt{S^2 - 2D^2}}{S - D\sqrt{3}},$$

et ensuite

$$x = \frac{zM}{(2 - \sqrt{3})z^2 + (\sqrt{3} - 1)z + 1};$$

Soient; par exemple,  $B=3$ ,  $M=2$ ; d'où  $S=5$ ,  $D=1$ ; il viendra

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{23}}{5 - \sqrt{3}}.$$

L'adoption des signes supérieur et inférieur donne respectivement

$$z=+1,78, \quad z=-1,16,$$

d'où on conclut

$$x=+1,27, \quad x=+7,81;$$

en trouve ensuite, pour les autres rayons

$$xz=+2,26, \quad xz=-9,08,$$

$$xz^2=+4,01; \quad xz^3=+10,55;$$

le tout, en se bornant aux centièmes. Le signe négatif qui affecte le deuxième rayon dans le second cas, indique que ce rayon doit

être pris en sens inverse des deux autres. Les figures 4 et 5 indiquent de quelle manière les arcs s'assemblent dans les deux cas.

Soient encore

$$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad M = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Il vient

$$z = \frac{i \pm i}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}.$$

En prenant les signes supérieurs,  $z$  devient infini. Alors  $x$  et  $xz$  sont nuls ; mais  $xz^2 = \frac{2Mz^2}{(2-\sqrt{3})z^2 + (\sqrt{3}-1)z + 1} = \frac{2M}{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$ . La demi-anse se réduit donc ainsi au troisième arc ; le premier et le second se confondant alors avec l'origine du troisième.

Le signe inférieur donne à  $z$  une valeur indéterminée ; mais on trouve par les règles connues que cette valeur est  $z = -\sqrt{3}$  ; d'où résulte une construction analogue à celle de la figure 5.

Si l'on supposait, au contraire,

$$B = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad M = \frac{\sqrt{3}+1}{2};$$

on trouverait pareillement que la demi-anse doit se réduire à un seul arc, lequel devrait alors être le premier, avec l'extrémité duquel se confondraient le second et le troisième, ainsi que cela doit être d'ailleurs ; car il est évident que les suppositions  $B=g$ ,  $M=h$  et  $B=h$ ,  $M=g$  conduisent à deux constructions qui ne diffèrent que par la situation de la courbe.

### *Deuxième solution ;*

Par M. BÉRARD, principal et professeur de mathématiques au collège de Briançon.

Ce problème n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général qui fait partie d'un petit traité sur les *anses de paniers* que

j'ai placé à la suite de ma *statique des voûtes* (page 149) (\*). Je pourrais donc me contenter de renvoyer à cet ouvrage ; mais, en faveur de ceux qui ne l'ont pas, je vais entrer dans quelques détails sur ce sujet.

Une *anse de panier* est l'assemblage de plusieurs arcs de cercles de rayons différens, qui se touchent consécutivement : autrement, c'est une des développantes d'un polygone ou d'une portion de polygone convexe.

Soient

$A$ , la demi-base de l'anse de panier ;

$B$ , sa montée ;

$n$ , le nombre des arcs ou centres de la demi-anse ;

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ , les rayons successifs, de la naissance à la claire ;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , le nombre des degrés des arcs, en allant toujours de la naissance à la claire ;

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , les côtés consécutifs du polygone formé par la rencontre successive des rayons  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  ;

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , les projections de ces côtés sur la demi-base  $A$  ;

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ , les projections des mêmes côtés sur la montée  $B$  ;

D'après quoi on aura  $a_1 = c_1 = r_1$ ,  $b_1 = 0$ .

Il est aisément de voir qu'alors on aura cette suite d'équations

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

$$r_1 - B = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\alpha_1 = c_1,$$

$$b_1 = 0,$$

$$a_2 = c_2 \cos \alpha_1;$$

$$b_2 = c_2 \sin \alpha_1;$$

$$a_3 = c_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_1),$$

$$b_3 = c_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_1);$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots,$$

$$a_n = c_n \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}); \quad b_n = c_n \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1});$$

(\*) In-4° de 160 pages ; chez Firmin Didot, Paris 1810.

$$\begin{aligned}r_1 &= c_1 \\r_2 &= r_1 + c_2 \\r_3 &= r_2 + c_3 \\\cdots \cdots \cdots \\r_n &= r_{n-1} + c_n.\end{aligned}$$

lesquelles seraient insuffisantes pour déterminer les inconnues du problème.

Mais, si l'on veut que les arcs soient égaux, et qu'on désigne l'un d'eux par  $\alpha = \frac{\pi}{2n}$ , et si l'on veut de plus que les rayons forment une progression géométrique dont le premier terme soit  $r$  et la raison  $\lambda$ , on aura en outre

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\pi}{2n}, & r_1 &= r, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{2\pi}{2n}, & r_2 &= \lambda r, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \frac{3\pi}{2n}, & r_3 &= \lambda^2 r, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots, & & \cdots \cdots, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n &= \frac{n\pi}{2n}, & r_n &= \lambda^{n-1} r;\end{aligned}$$

au moyen de quoi on aura d'abord

$$\begin{aligned}c_1 &= r, \\c_2 &= (\lambda - 1)r, \\c_3 &= \lambda(\lambda - 1)r, \\&\cdots \cdots \cdots \\c_n &= \lambda^{n-1}(\lambda - 1)r;\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}a_1 &= r, & b_1 &= 0, \\a_2 &= (\lambda - 1)r \cos \frac{\pi}{2n}, & b_2 &= (\lambda - 1)r \sin \frac{\pi}{2n}, \\a_3 &= \lambda(\lambda - 1)r \cos \frac{2\pi}{2n}, & b_3 &= \lambda(\lambda - 1)r \sin \frac{2\pi}{2n}, \\&\cdots \cdots \cdots, \cdots, & & \cdots \cdots \cdots, \cdots,\end{aligned}$$

$$a_n = \lambda^{n-1}(\lambda-1)r \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}; \quad b_n = \lambda^{n-2}(\lambda-1)r \cos \frac{(n-1)\pi}{2n};$$

d'où on conclura

$$A - r = r(\lambda-1) \left\{ \cos \frac{\pi}{2n} + \lambda \cos \frac{2\pi}{2n} + \lambda^2 \cos \frac{3\pi}{2n} + \dots + \lambda^{n-2} \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right\},$$

$$\lambda^{n-1}r - B = r(\lambda-1) \left\{ \sin \frac{\pi}{2n} + \lambda \sin \frac{2\pi}{2n} + \lambda^2 \sin \frac{3\pi}{2n} + \dots + \lambda^{n-2} \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \right\};$$

et telles sont les équations qui doivent déterminer les deux inconnues  $\lambda$  et  $r$  du problème.

Si l'on prend la somme de leurs produits respectifs par  $A$  et  $B$ , cette somme deviendra divisible par  $r$ , et en observant qu'en général  $\sin \frac{(n-k)\pi}{2n} = \cos \frac{k\pi}{2n}$  on aura

$$\lambda^{n-1} A - B = (\lambda-1) \left\{ A \left[ \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} + \lambda \cos \frac{(n-2)\pi}{2n} + \dots + \lambda^{n-2} \cos \frac{\pi}{2n} \right] + B \left[ \cos \frac{\pi}{2n} + \lambda \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \lambda^{n-2} \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right] \right\}$$

équation qui ne renferme plus que la seule inconnue  $\lambda$ .

Dans le cas de l'anse de panier à cinq centres, en posant, pour abréger

$$AC \cos \frac{1}{6}\pi + BC \cos \frac{1}{3}\pi = M,$$

$$AC \cos \frac{1}{3}\pi + BC \cos \frac{1}{6}\pi = N,$$

il viendra  $(A-M)\lambda^2 + (M-N)\lambda - (B-N) = 0$ ,

$$\text{d'où } \lambda = \frac{-(M-N) \pm \sqrt{(M-N)^2 + 4(A-M)(B-N)}}{A-M};$$

la première des deux équations en  $\lambda$  et  $r$  donnera ensuite

$$r = \frac{A}{1 + (\lambda-1)[\cos \frac{1}{6}\pi + \lambda \cos \frac{1}{3}\pi]}.$$

Si, par exemple on suppose  $A=200$ ,  $B=100$ , on trouvera  $\lambda=2,6$ ,  $r_1=44$ ,  $r_2=115$ ,  $r_3=300$ .

*Remarques.* L'auteur du problème proposé a eu raison de demander que les rayons forment une progression géométrique, parce qu'alors les changemens de courbure, d'un arc à l'autre, suivent le même rapport; mais il n'a pas été aussi bien fondé à exiger que les arcs soient semblables; en effet, dans ce cas, les longueurs des arcs

sont en progression géométrique, et ce système n'est pas celui qui présente le plus d'avantages ; il paraît plus convenable que tous les arcs soient de même longueur et que l'anse ait beaucoup de centres, à moins qu'on n'ait intérêt à augmenter l'espace renfermé par l'anse, ou le volume d'eau qu'elle doit laisser passer. On peut voir toutes ces questions dans l'ouvrage cité : on y trouve ( pag. 153, prob. 6 ), l'équation d'une courbe dans laquelle les changemens de courbure se font par des degrés égaux.

Par analogie, on peut demander l'équation d'une courbe telle que les rayons de courbure, infiniment proches et également inclinés entre eux, forment une progression géométrique.

Soient  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point quelconque de la courbe,  $r$  le rayon vecteur de ce point et  $s$  la longueur de l'arc comptée depuis un certain point fixe ; on voit que l'angle formé par l'axe des  $x$  avec la normale est le logarithme du rayon de courbure ; c'est-à-dire, qu'on a

$$\text{Arc.} \left( \text{Tang.} = \frac{dx}{dy} \right) = c \log r,$$

$c$  étant une constante. En différentiant, il vient

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{cdr}{r}.$$

Substituant pour  $r$  sa valeur  $\sqrt{\frac{ds^2}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ , il vient

$$ds = cdr, \quad \text{d'où } s + c' = cr; \quad (1)$$

$c'$  étant une nouvelle constante.

Pour intégrer de nouveau l'équation (1), j'y mets pour  $r$  sa valeur qui, en supposant  $ds$  constant, est  $\frac{ds}{\sqrt{\frac{ds^2}{dy^2} - 1}}$ , et j'ai

$$s + c' = -c \frac{dx ds}{dy} = -c \frac{ds \sqrt{ds^2 - dy^2}}{dy};$$

d'où, en faisant  $dy = pds$ , il vient

$$-\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{cds}{s+c'} ,$$

dont l'intégrale est

$$\text{Arc.}(\text{Cos.}=p)=c\text{Log.}(s+c')+\text{Log.}c'' ;$$

$$\text{ou } p=\text{Cos}\{\text{Log.}c''(s+c')^c\}. \quad (2)$$

Remettant dans (2) pour  $p$  sa valeur  $\frac{dy}{ds}$ , et intégrant de nouveau, il vient

$$y=c'''+f ds.\text{Cos.}\{\text{Log.}c''(s+c')^c\}. \quad (3)$$

Mettant enfin pour  $p$  cette même valeur dans  $dx=ds\sqrt{1-p^2}$  et intégrant, on aura

$$x=c'''+f ds.\text{Sin.}\{\text{Log.}c''(s+c')^c\}. \quad (4)$$

On déterminera les cinq constantes par les conditions suivantes : 1.<sup>o</sup> qu'à l'origine on a  $p=1$  et  $s=0$ ; 2.<sup>o</sup> qu'au sommet de la courbe on a  $p=0$ ,  $x=b$ ,  $y=a$ ; 3.<sup>o</sup> que, quand  $x=A$ , on doit avoir  $y=B$ ; 4.<sup>o</sup> que, quand  $s=0$ , on doit avoir  $x=0$ ; 5.<sup>o</sup> enfin que, quand  $s=0$ , on doit avoir  $y=0$ .

La courbe donnée par les équations (3) et (4) est celle dans laquelle ( suivant le langage de M. Français ) les rayons de courbure sont en progression de grandeur et de position. (\*)

(\*) La recherche de cette courbe se rattache bien simplement à la théorie développée à la page 42 de ce volume. On a ici  $a^\theta=R$ ,  $a$  étant une constante; d'où  $dR=ARd\theta$ ,  $A$  étant une nouvelle constante. D'un autre côté on a ( pag. 49 )  $dR=R'd\theta$ ; donc  $R'=AR$ , et par suite (pag. 51)

$$\frac{3py^2-r(1+p^2)}{q^2}=A.$$

En traitant cette équation comme son analogue de la page 53, il vient

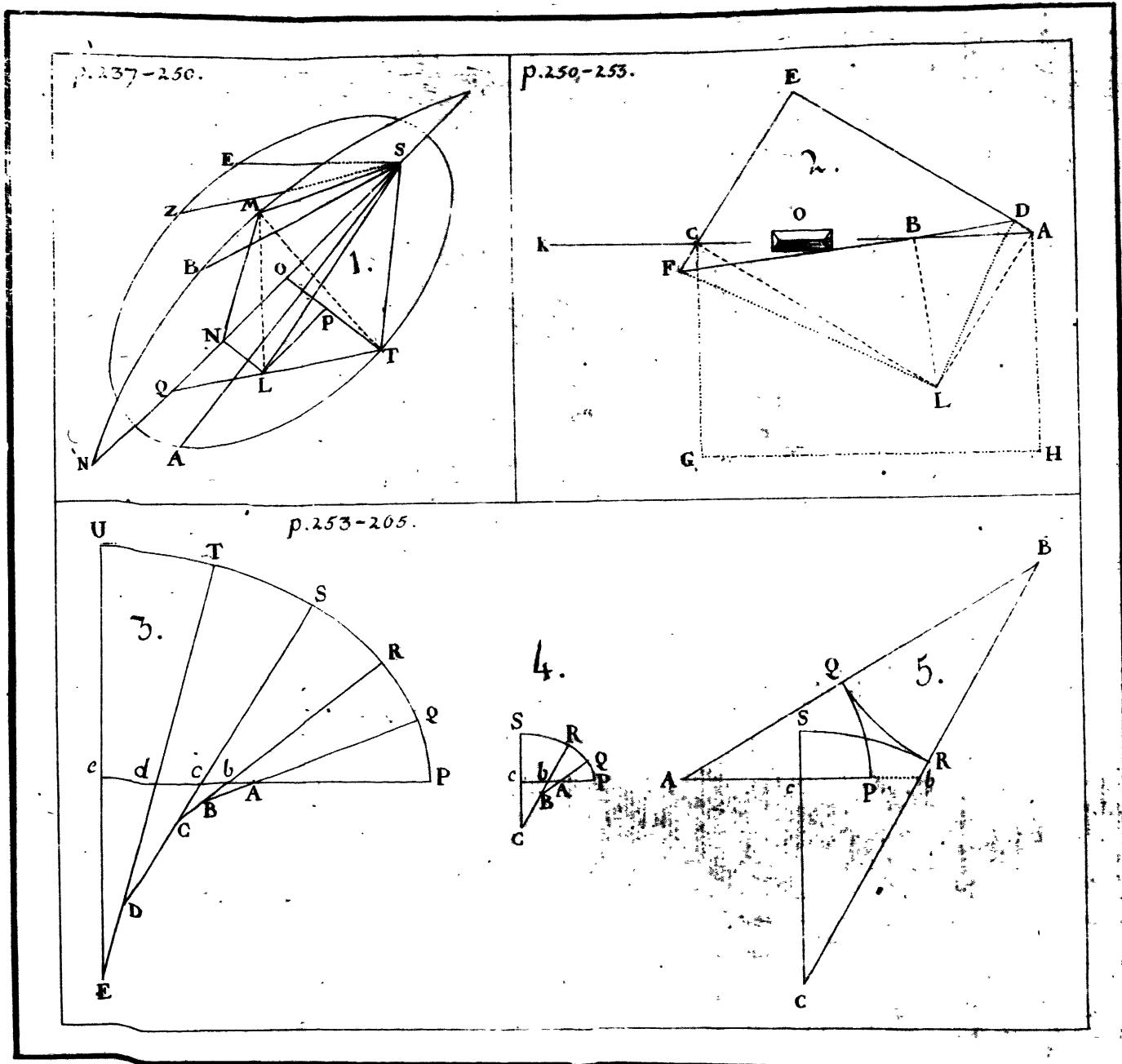
$$\frac{dy}{dx}=\frac{Ax+y}{Ax-y},$$

ce qui donne, en intégrant, et posant, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{(A-1)^2-4A^2}{4}}=C,$$

$$Bx\left\{\frac{y}{x}-\frac{A-1-C}{2}\right\}^{\frac{A+1+C}{2C}}=\left\{\frac{y}{x}-\frac{A-1+C}{2}\right\}^{\frac{A+1-C}{2C}}.$$

J. D. G.





## ARITHMÉTIQUE.

*Essai sur la transformation des fractions;*

Par M. PENJON, professeur de mathématiques au lycée  
d'Angers.



IL est connu, depuis long-temps, que, par un procédé analogue à celui qu'on emploie pour le développement d'une fraction en parties décimales, toute fraction peut être développée en une suite, finie ou infinie, d'autres fractions dont les dénominateurs sont les puissances successives d'un même nombre donné quelconque (\*). Je vais essayer de compléter ici la théorie de ces sortes de développemens.

1. Soit  $\frac{A}{B}$  une fraction proprement dite que nous supposerons essentiellement réduite à ses moindres termes; et soit  $b$  un nombre entier quelconque. Soient, de plus,  $q_1, q_2, q_3, \dots, r_1, r_2, r_3, \dots$  les quotiens et les restes que l'on obtient successivement, en divisant  $bA, br_1, br_2, \dots$  par  $B$ ; on aura

$$\left. \begin{array}{l} bA = Bq_1 + r_1, \\ br_1 = Bq_2 + r_2, \\ br_2 = Bq_3 + r_3, \\ br_3 = Bq_4 + r_4, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} (\alpha)$$

---

(\*) Voir, entre autres, le *Complément d'algèbre* de M. Lacroix.

Tom. IV, n.<sup>o</sup> IX, 1<sup>er</sup> mars 1844.

Dans ces équations, les restes  $r_1, r_2, r_3, \dots$  étant tous nécessairement moindres que  $B$ , et ne pouvant être conséquemment que quelques-uns des nombres  $1, 2, 3, \dots, (B-2), (B-1)$ ; il s'ensuit qu'à moins que quelqu'un des  $B$  premiers ne soit nul, auquel cas tous les suivants le seraient aussi, après un nombre de divisions tout au plus égal à  $B-1$ , on devra retomber sur quelqu'un des restes déjà obtenus. Or, l'inspection des équations ( $\alpha$ ) suffit pour faire voir que le procédé par lequel on déduit chacun des restes  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , ainsi que chacun des quotiens  $q_1, q_2, q_3, \dots$  de celui qui le précède immédiatement est uniforme; d'où il suit que si, par exemple, le reste  $r_k$  est égal au reste  $r_g$ , les reste et quotient  $r_{k+1}$  et  $q_{k+1}$  seront respectivement égaux aux reste et quotient  $r_{g+1}$  et  $q_{g+1}$ ; qu'il en sera de même des reste et quotient  $r_{k+2}$  et  $q_{k+2}$ , comparés aux reste et quotient  $r_{g+2}$  et  $q_{g+2}$ , et ainsi de suite; c'est-à-dire, que, si les deux suites  $r_1, r_2, r_3, \dots, q_1, q_2, q_3, \dots$  ne se terminent pas d'elles-mêmes, elles seront nécessairement périodiques, soit immédiatement, soit à partir d'un terme dont le rang ne surpassera pas  $B-1$ ; de manière que, dans tous les cas, le nombre des termes qui précéderont les périodes augmentées du nombre de ceux de l'une des périodes, sera toujours moindre que  $B$ . On peut même observer que le cas où les deux suites se termineraient d'elles-mêmes ne fait point exception à la règle, attendu que la suite  $0, 0, 0, \dots$  est elle-même périodique.

2. Si, après avoir mis les équations ( $\alpha$ ) sous cette forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{r_1}{bB}, \\ \frac{r_1}{bB} &= \frac{q_2}{b^2} + \frac{r_2}{b^2B}, \\ \frac{r_2}{b^2B} &= \frac{q_3}{b^3} + \frac{r_3}{b^3B}, \\ \frac{r_3}{b^3B} &= \frac{q_4}{b^4} + \frac{r_4}{b^4B}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} (\beta)$$

on prend successivement la première, puis la somme des deux premières, puis la somme des trois premières, et ainsi de suite, en supprimant les termes communs aux deux membres des équations résultantes, il viendra

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{r_1}{bB}, \\ \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{r_2}{b^2B}, \\ \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{q_3}{b^3} + \frac{r_3}{b^3B}, \\ \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{q_3}{b^3} + \frac{q_4}{b^4} + \frac{r_4}{b^4B}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} (z)$$

En observant que les derniers termes

$$\frac{r_1}{bB}, \frac{r_2}{b^2B}, \frac{r_3}{b^3B}, \frac{r_4}{b^4B}, \dots$$

de ces suites sont continuellement décroissants, on en conclura qu'on peut écrire, par approximation,

$$\frac{A}{B} = \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{q_3}{b^3} + \frac{q_4}{b^4} + \dots; \quad (s)$$

développement qui donnera une valeur d'autant plus approchée de la fraction  $\frac{A}{B}$  qu'on en prendra un plus grand nombre de termes, et qu'en même temps  $b$  sera plus grand. A l'avenir nous appellerons ce nombre arbitraire  $b$  la base du développement de  $\frac{A}{B}$ .

3. Il s'agit présentement, 1.<sup>o</sup> d'assigner les caractères auxquels on pourra reconnaître à l'avance si le développement se terminera ou si, au contraire, il se prolongera indéfiniment; 2.<sup>o</sup> de reconnaître quand ce développement devra être immédiatement périodique ou avoir ses périodes précédées de termes n'en faisant pas partie;

3° enfin de déterminer généralement tant le nombre des termes des périodes que celui des termes de la partie non périodique dont elles se trouvent précédées.

4. Pour y parvenir, soient désignés généralement par  $m$  le nombre des termes qui précèdent la première période, et par  $n$  le nombre des termes dont chaque période est composée ; auquel cas on devra avoir  $m+n < B$  ; il est clair qu'alors on pourra écrire

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} = & \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{q_3}{b^3} + \dots + \frac{q_m}{b^m} \\ & + \frac{q_{m+1}}{b^{m+1}} + \frac{q_{m+2}}{b^{m+2}} + \frac{q_{m+3}}{b^{m+3}} + \dots + \frac{q_{m+n}}{b^{m+n}} \\ & + \frac{q_{m+n+1}}{b^{m+n+1}} + \frac{q_{m+n+2}}{b^{m+n+2}} + \frac{q_{m+n+3}}{b^{m+n+3}} + \dots + \frac{q_{m+2n}}{b^{m+2n}} \\ & + \frac{q_{m+2n+1}}{b^{m+2n+1}} + \frac{q_{m+2n+2}}{b^{m+2n+2}} + \frac{q_{m+2n+3}}{b^{m+2n+3}} + \dots + \frac{q_{m+3n}}{b^{m+3n}} \\ & + \dots \end{aligned} \quad \left. \right\} (\epsilon)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} = & \frac{q_1 b^{m-1} + q_2 b^{m-2} + q_3 b^{m-3} + \dots + q_m}{b^m} \\ & + \frac{q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n}}{b^{m+n}} \\ & + \frac{q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n}}{b^{m+n}} \\ & + \frac{q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n}}{b^{m+n}} \\ & + \dots \end{aligned} \quad \left. \right\} (\xi)$$

posant donc, pour abréger

$$q_1 b^{m-1} + q_2 b^{m-2} + q_3 b^{m-3} + \dots + q_m = M, \quad (1)$$

$$q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n} = N; \quad (2)$$

il viendra enfin

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^{m+n}} + \frac{N}{b^{m+2n}} + \frac{N}{b^{m+3n}} + \dots \\&= \frac{M}{b^n} + \frac{N}{b^{m+n}} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{b^n} \right) + \left( \frac{1}{b^n} \right)^2 + \left( \frac{1}{b^n} \right)^3 + \dots \right\} \\&= \frac{M}{b^n} + \frac{N}{b^{m+n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{b^n}} = \frac{M}{b^n} + \frac{N}{b^{m+n}} \cdot \frac{b^n}{b^n - 1};\end{aligned}$$

c'est-à-dire ,

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{b^n} + \frac{N}{b^{m(b^n-1)}} = \frac{M(b^n-1)+N}{b^{m(b^n-1)}}. \quad (*)$$

5. Cela posé , soit mise l'équation (\*) sous cette forme

$$\frac{Ab^{m(b^n-1)}}{B} = M(b^n-1) + N. \quad (\lambda)$$

Il faut que le premier membre de cette équation soit un nombre entier ; et , comme  $B$  et  $A$  sont supposés premiers entre eux , il s'ensuit que  $b^m(b^n-1)$  doit être divisible par  $B$ . Soit donc fait  $B=CD$ :  $C$  étant le produit des facteurs premiers de  $B$  qui se trouvent dans  $b$  , et  $D$  le produit de ceux qui ne s'y trouvent pas. Attendu que  $b^m$  et  $b^n-1$  sont nécessairement premiers entre eux , il faudra que

$$\frac{b^m}{C} \quad \text{et} \quad \frac{b^n-1}{D},$$

soient séparément des nombres entiers. Ainsi , 1.<sup>o</sup> *le dénominateur de la fraction génératrice ne saurait renfermer aucun des facteurs premiers de la base de son développement à une puissance supérieure à celle dont l'exposant est le nombre de fois que ce facteur premier se trouve dans la base , multiplié par le nombre des termes qui précèdent la première période* ; 2.<sup>o</sup> *le produit des facteurs premiers du dénominateur de la fraction génératrice qui sont étrangers à la base de son développement , est toujours diviseur d'un nombre moindre d'une unité que la puissance de cette base dont le degré est marqué par le nombre des termes des périodes.*

6. Dans le cas où le développement se termine , et où conséquemment  $N=0$ , on a simplement

$$\frac{Ab^m}{B}=M;$$

d'où l'on voit qu'alors  $b^m$  doit être exactement divisible par  $B$ ; et dans le cas où ce développement est immédiatement périodique , et où conséquemment  $M=0$ , on a simplement

$$\frac{A(b^n-1)}{B}=N;$$

d'où l'on voit qu'alors  $b^n-1$  doit être exactement divisible par  $B$ . Ainsi, 1.<sup>o</sup> lorsque le développement de la fraction génératrice se termine, son dénominateur est diviseur exact de quelque puissance de la base de ce développement , c'est-à-dire , qu'il ne contient aucun facteur premier étranger à cette base ; 2.<sup>o</sup> lorsque ce développement est immédiatement périodique , le dénominateur de la fraction génératrice , premier à la base , est nécessairement diviseur exact de quelque nombre moindre d'une unité qu'une puissance de cette base. (\*)

7. Soit toujours  $B=CD$ ,  $C$  et  $D$  étant les mêmes que ci-dessus (5). Soit  $m$  la moindre des puissances  $b$  qui soit divisible par  $C$ , et soit  $n$  la moindre des puissances de ce même nombre  $b$  qui, diminuée d'une unité , devienne divisible par  $D$ ; il suit de ce qui a été dit ci-dessus , que le développement de  $\frac{A}{B}$  suivant la base  $b$  ne pourra avoir moins de  $m$  termes avant la première période , ni moins de  $n$  termes à chaque période. Nous allons prouver de

(\*) De là résulte ce théorème : a et b étant deux nombres entiers premiers entre eux , l'équation

$$b^x-1=ay$$

est toujours résoluble en nombres entiers.

plus que ce développement aura précisément  $m$  termes avant sa première période, et que ses périodes seront précisément de  $n$  termes; et nous donnerons en même temps un procédé différent du premier pour exécuter ce même développement.

8. Soient faits

$$CC' = b^m, \quad DD' = b^n - 1, \quad \text{d'où} \quad CDC'D' = BC'D' = b^m(b^n - 1),$$

on aura alors

$$\frac{A}{B} = \frac{AC'D'}{BC'D'} = \frac{AC'D'}{b^m(b^n - 1)}.$$

Soit divisé  $AC'D'$  par  $b^n - 1$ , et soient  $M$  le quotient et  $N$  le reste de cette division; nous aurons alors

$$\frac{A}{B} = \frac{M(b^n - 1) + N}{b^m(b^n - 1)} = \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^m(b^n - 1)},$$

ou encore

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^{m+n}} + \frac{N}{b^{m+2n}} + \frac{N}{b^{m+3n}} + \dots \dots \quad (\mu)$$

Soit divisé  $m-1$  fois consécutivement  $M$  par  $b$ , le quotient par  $b$ , le nouveau quotient par  $b$ , et ainsi de suite, en ne prenant que les quotients entiers; soient  $q_m, q_{m-1}, q_{m-2}, \dots, q_1$  les restes de ces divisions et  $Q_{m-1}, Q_{m-2}, Q_{m-3}, \dots, Q_1$  leurs quotiens, nous aurons

$$M = Q_{m-1}b + q_m,$$

$$Q_{m-1} = Q_{m-2}b + q_{m-1},$$

$$Q_{m-2} = Q_{m-3}b + q_{m-2},$$

.....,

$$Q_1 = q_1b + q_2,$$

$$q_1 = 0 + q_1,$$

en prenant la somme des produits respectifs de ces équations par  $1, b, b^2, b^3, \dots, b^{m-1}$ , et réduisant, il viendra

$$M = q_1 b^{m-1} + q_2 b^{m-2} + q_3 b^{m-3} + \dots + q_m. \quad (\nu)$$

En opérant de la même manière sur  $N$ , faisant  $n-1$  divisions seulement, désignant par  $q_{m+n}$ ,  $q_{m+n-1}$ ,  $q_{m+n-2}$ , ...,  $q_{m+2}$  les restes successifs et par  $q_{m+1}$  le dernier quotient, on aura pareillement

$$N = q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n}; \quad (\xi)$$

Substituant enfin ces valeurs de  $M$  et  $N$  dans l'équation ( $\mu$ ), elle prendra d'abord la forme ( $\xi$ ) et ensuite la forme ( $\epsilon$ ); c'est-à-dire, que le développement de la fraction  $\frac{A}{B}$  suivant la base  $b$  se trouvera être exactement conditionné comme nous l'avons annoncé.

9. Il convient au surplus d'observer que la recherche des nombres  $C$ ,  $D$ ,  $m$ ,  $n$  n'exige nullement la décomposition de  $B$  en facteurs premiers. En cherchant successivement le plus grand commun diviseur entre  $B$  et  $b$ ,  $b^2$ ,  $b^3$ , ..., jusqu'à ce qu'on rencontre deux puissances consécutives pour lesquelles ce diviseur soit le même; l'exposant de la moins élevée sera  $m$ , et le diviseur sera  $C$ . En divisant  $B$  par  $C$ , le quotient sera  $D$ ; enfin, en divisant successivement par  $D$  les binômes  $b-1$ ,  $b^2-1$ ,  $b^3-1$ , ..., jusqu'à ce qu'on en rencontre un pour lequel la division réussisse, l'exposant de  $b$  dans ce binôme sera la valeur de  $n$ .

10. Pour donner un exemple de ce procédé, proposons-nous de développer la fraction  $\frac{7}{27}$  suivant la base 3. Nous aurons ici  $m=2$ ,  $C=9$ ,  $n=2$ ,  $D=8$ ; d'où  $C'=1$ ,  $D'=1$ ,  $AC'D'=7$ ; donc  $q_1=0$ ,  $q_2=0$ ,  $q_3=2$ ,  $q_4=1$ ,  $q_5=2$ ,  $q_6=1$ , ..., et partant

$$\frac{7}{27} = \frac{0}{9} + \frac{0}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{81} + \frac{2}{147} + \frac{1}{2916} + \dots$$

11. L'application de tout ce qui précède au développement des fractions en parties décimales est trop facile pour que nous croyons nécessaire de nous y arrêter.

CHRONOLOGIE.

## CHRONOLOGIE.

*Solution directe des principaux problèmes du calendrier :*

Par M. J. F. FRANÇAIS , professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.



L'EXAMEN de l'ingénieuse table à triple entrée donnée dans ce volume ( pag. 84 ) par M. Servois, m'a engagé à revoir, dans la *Correspondance astronomique et géographique* de M. le baron de Zach ( août 1800 ), l'article de M. Gauss qui lui en a fourni l'idée , et où cet illustre géomètre enseigne à trouver , sans épacte , nombre d'or ni lettre dominicale , le jour de la fête de pâque , pour une année quelconque , et présente ainsi , en deux pages , toute la théorie du calendrier , tant Julien que Grégorien. Cette belle solution d'un problème d'analyse indéterminée assez compliqué mériterait d'être mieux connue en France (\*). J'ai cru cependant nécessaire , pour la rendre vraiment perpétuelle , de lui faire subir une petite correction , au défaut de laquelle elle cesserait d'être exacte dès l'année 4200. La nécessité de cette correction tient à ce que l'équation lunaire , qui a lieu sept fois consécutivement au bout de trois siècles , n'a lieu , la huitième fois , qu'au bout de quatre siècles seulement ; de sorte que la période , qui a commencé en 1800 , est réellement de vingt-cinq siècles. Je vais d'abord donner la mè-

---

(\*) C'est sans doute dans cette vue que M. Delambre vient d'en donner un extrait à la fin de son *Abrégé d'astronomie*.

thode pour la détermination de la fête de pâque ainsi corrigée ; je chercherai ensuite à déterminer le jour de la semaine qui répond à une date donnée dans une année quelconque.

*PROBLÈME I.* Assigner la date de la fête de pâque, pour une année quelconque, soit dans le calendrier Julien, soit dans le calendrier Grégorien ?

*Solution.* Pour le calendrier Julien faites  $m=15$ ,  $n=6$ .

Pour le calendrier Grégorien, soient

$s$ , le quantième séculaire;

$r$ , le quotient entier de  $s-17$  par 25 ; } abstraction

$p$ , le quotient entier de  $s-r$  par 3 ; } faite des restes.

$q$ , le quotient entier de  $s$  par 4 ; }

$m$ , le reste de la division de  $15+s-p-q$  par 30 ;

$n$ , le reste de la division de  $4+s-q$  par 7.

Soient alors (pour les deux calendriers)

$A$ , le quantième d'année;

$a$ ,  $b$ ,  $c$ , les restes respectifs de la division de  $A$  par 19, 4, 7 ;

$d$ , le reste de la division de  $19a+m$  par 30 ;

$e$ , le reste de la division de  $2b+4c+6d+n$  par 7 ;

la date de pâque sera

le  $(22+d+e)$  de mars, ou le  $(d+e-9)$  d'avril.

*Exception I.* Si l'on a  $d=29$ ,  $e=6$ , on substituera le 19 d'avril au 26.

*Exception II.* Si l'on a  $d=28$ ,  $e=6$ , et si  $11m+11$ , divisé par 30, donne un reste plus petit que 19, on substituera le 18 d'avril au 25.

*Exemple.* On demande le jour de pâque pour l'année 7453 ?

Dans le calendrier Grégorien, on a successivement  $s=74$ ,  $r=2$ ,  $p=24$ ,  $q=18$ ,  $m=17$ ,  $n=4$ ,  $A=7453$ ,  $a=5$ ,  $b=1$ ,  $c=5$ ,  $d=22$ ,  $e=4$ ; d'où il suit que, cette année-là, pâque tombera le 17 d'avril.

Dans le calendrier Julien, on a  $m=15$ ,  $n=6$ ,  $A=7453$ ,  $a=5$ ,  $b=1$ ,  $c=5$ ,  $d=20$ ,  $e=1$ ; ce qui donne pâque le 12 d'avril.

*PROBLÈME II.* Déterminer le jour de la semaine qui répond à une date donnée d'une année quelconque, tant dans le calendrier Julien que dans le calendrier Grégorien?

*Solution.* Soient  $s$ , le quantième séculaire;

$a$ , l'année dans le siècle, en sorte qu'on ait  $A=100s+a$ ;

$d$ , la date du jour donné, compté du 1<sup>er</sup> janvier;

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ , les restes respectifs de la division de  $s$ ,  $a$ ,  $a$ ,  $d$ ,  $6s+5$ , par 4, 4, 7, 7, 7;

$g$ , le reste de la division de  $5\alpha+5\beta+3\gamma+\delta$  par 7;

$h$ , le reste de la division de  $5\beta+3\gamma+\delta+\epsilon$  par 7;

Alors  $g$  et  $h$  seront respectivement, dans les calendriers Grégorien et Julien, le rang du jour dans la semaine, le dimanche étant compté pour le premier.

*Remarques.* I. En calculant  $d$ , dans les années bissextiles, il ne faudra tenir aucun compte du jour intercalaire, et ne compter conséquemment février que pour 28 jours seulement.

II. Si alors la date  $d$  ne passe pas le mois de février, il faudra diminuer d'une unité chacun des nombres  $g$  et  $h$ .

III. On peut obtenir immédiatement  $\delta$ , en ajoutant à la date du mois, le nombre correspondant de la table suivante

| janv. | fév. | mars. | avrيل. | mai. | juin. | juil. | août. | sept. | oct. | nov. | déc. |
|-------|------|-------|--------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| 0     | 3    | 3     | -1     | 1    | 4     | -1    | 2     | 5     | 0    | 3    | 5    |

*Exemple I.* On demande le jour de la semaine qui répond au 17 d'avril 7453, dans le calendrier Grégorien?

On a ici  $s=74$ ,  $a=53$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=4$ ,  $\delta=17-1=16$ ,  $\epsilon=1$ ,  $g=1$ ; ainsi le 17 d'avril 7453 sera un dimanche.

*Exemple II.* On demande le jour de la semaine qui répond au 12 d'avril 7453, dans le calendrier Julien?

On a ici  $s=74$ ,  $a=53$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=4$ ;  $\delta=12-1=11$ ,  $\epsilon=1$ ,  $g=1$ ; ainsi le 12 d'avril 7453 sera un dimanche.

---

## RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

*Recherches sur un tour de cartes;*

Par M. GERGONNE.



ON trouve, dans les *Récréations physiques et mathématiques de GUYOT* (dernière édition, tome III, page 267), un tour de cartes assez curieux, fondé uniquement sur la théorie des combinaisons. Ce tour a pour objet de faire trouver une carte pensée, parmi vingt-sept, à un rang désigné. Pour cela on prend vingt-sept cartes, toutes différentes les unes des autres, que l'on étale aux yeux d'une personne à qui l'on dit d'en penser une et d'en conserver le souvenir dans sa mémoire; on mèle ensuite les cartes, et on les fait meler à une ou plusieurs personnes de la compagnie.

On forme alors trois paquets de neuf cartes chacun; en posant d'abord, de gauche à droite, la première carte de chaque paquet, la couleur en dessous, puis la seconde par dessus la première, toujours de gauche à droite, puis la troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé les vingt-sept cartes, dont la dernière devra conséquemment se trouver au-dessus du troisième paquet, à droite. Il faut, durant cette opération, que celui qui fait le tour soit placé vis-à-vis de la personne qui a tiré la carte qu'il s'agit de

deviner. Il a soin , avant de poser chaque carte sur le paquet dont elle doit faire partie , de la lui montrer , de manière qu'il ne puisse la voir lui-même. Il fera bien de ne point regarder cette personne , afin qu'on ne croie pas que , lorsque la carte qu'il lui montre est celle même qu'elle a tirée , il s'en aperçoit au jeu de sa phisonomie. Il convient aussi qu'il ne se place pas en face d'une fenêtre ou d'une lumière , afin de ne pas donner à penser que la transparence des cartes peut lui être de quelque secours.

Cela fait , il prie cette personne de lui indiquer quel est le paquet qui renferme la carte pensée ; il pose ensuite les paquets les uns sur les autres , sans les mêler , ayant soin de remarquer le rang qu'il assigne à celui qu'on lui a désigné : ce rang étant compté du dessus au-dessous , la couleur étant toujours en dessous , comme nous le supposons. Ces cartes étant ainsi rassemblées , celui qui les tient recommence à faire des paquets , exactement comme la première fois , et avec les mêmes attentions , en faisant encore la même question , lorsque les paquets sont terminés. Il rassemble de nouveau ces paquets , ayant encore l'attention de remarquer et de retenir le rang qu'il assigne à celui qui contient la carte pensée.

Il recommence enfin une troisième fois les mêmes opérations et la même question , et relève de nouveau les paquets avec la même précaution , et dès-lors le rang de la carte pensée dans le jeu se trouve absolument déterminé.

Si donc on a sous les yeux un tableau qui présente la correspondance entre les vingt-sept manières dont on a pu relever les paquets trois fois consécutivement , et le rang que chaque système de relèvement assigne à la carte pensée , rien ne sera plus facile que de trouver cette carte.

L'ouvrage cité prescrit de faire construire une lunette mystérieuse , telle qu'en y regardant on n'y aperçoive que ce tableau , qui s'y trouvera caché intérieurement. A chaque opération , on feindra de regarder les paquets avec cette lunette , comme pour tâcher de discerner la carte pensée ; et on en prendra occasion de contempler

le tableau , et d'y lire ce qu'on a à faire , pour que cette carte se trouve à la fin dans le jeu à la place qu'on lui aura assignée à l'avance.

Mais , outre qu'il n'est pas très-commode de cacher , dans l'intérieur d'une lunette , un tableau assez étendu ; outre la gène d'avoir toujours cette lunette avec soi , on conçoit que , soit qu'on la livre aux spectateurs , soit qu'on la leur dérobe , ce ne pourra être sans ôter beaucoup au jeu de ce qu'il peut avoir de merveilleux à leurs yeux.

Je me propose , à la fois , ici de généraliser cette petite récréation , et d'indiquer un moyen simple de se passer de l'usage de la lunette , de manière qu'on puisse l'exécuter partout où l'on rencontrera des cartes.

Soit , en général , un jeu composé de  $m^m$  cartes , toutes différentes les unes des autres , et parmi lesquelles une personne en ait choisi une secrètement.

Soient faits  $m$  fois conséutivement , avec ce jeu ,  $m$  paquets , de  $m^{m-1}$  cartes chacun , avec toutes les attentions indiquées ci-dessus.

Soient  $n_1$  ,  $n_2$  ,  $n_3$  , .....  $n_m$  les rangs assignés successivement au paquet indiqué comme contenant la carte choisie.

On va voir que les nombres  $n_1$  ,  $n_2$  ,  $n_3$  , .....  $n_m$  sont suffisants pour déterminer , après les  $m$  opérations , le rang  $x$  qu'occupe dans le jeu la carte pensée.

En effet , 1.<sup>o</sup> à la première opération la carte pensée ne peut occuper dans son paquet que le rang 1 au moins et au plus le rang  $m^{m-1}$ .

Mais , puisqu'on n'assigne à ce paquet que le rang  $n_1$  , on met donc au-dessus de lui  $(n_1 - 1)$  autres paquets de  $m^{m-1}$  cartes chacun ; il s'ensuit qu'après les cartes relevées , la carte pensée se trouvera occuper dans le jeu au moins le rang  $(n_1 - 1)m^{m-1} + 1 = n_1 m^{m-1} - (m^{m-1})$  et au plus le rang  $(n_1 - 1)m^{m-1} + m^{m-1} = n_1 m^{m-1}$ .

2.<sup>o</sup> En réformant de nouveau les paquets, on posera d'abord au moins  $(n_1 - 1)m^{m-1}$ , distribuées en  $m$  paquets de  $(n_1 - 1)m^{m-2}$  cartes chacun, dont aucune ne sera la carte pensée, laquelle conséquemment en aura au moins  $(n_1 - 1)m^{m-2}$  sous elle dans son paquet; tandis qu'on n'en pourra pas poser  $n_1 m^{m-1}$ , et conséquemment  $n_1 n_1^{m-2}$  dans chaque paquet, sans faire passer la carte pensée qui, en conséquence, en aura au plus  $n_1 m^{m-2} - 1$  au-dessous d'elle dans son paquet; puis donc que chaque paquet est en tout de  $m^{m-1}$  cartes; il s'ensuit que cette carte occupera au moins, dans son paquet, le rang  $m^{m-1} - (n_1 m^{m-2} - 1) = -n_1 m^{m-2} + m^{m-1} + 1$  et au plus le rang  $n_1^{m-1} - (n_1 - 1)m^{m-2} = -n_1 m^{m-2} + m^{m-1} + m^{m-2}$ .

Mais, puisqu'on assigne à ce paquet le rang  $n_2$ , on met donc au-dessus de lui  $(n_2 - 1)$  autres paquets de  $m^{m-1}$  cartes chacun; d'où il suit qu'après la seconde opération, la carte pensée occupera dans le jeu au moins le rang  $(n_2 - 1)m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + m^{m-1} + 1 = n_2 m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + 1$ , et au plus le rang  $(n_2 - 1)m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + m^{m-1} + m^{m-2} = n_2 m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + m^{m-2}$ .

3.<sup>o</sup> Il suit de là qu'en réformant les paquets, on posera au moins dans chacun  $n_2 m^{m-2} - n_1 m^{m-3}$  cartes, sans avoir employé la carte pensée, mais qu'on ne pourra en poser dans chacun  $n_2 m^{m-2} - n_1 m^{m-3} + m^{m-3}$  sans avoir employé cette carte; elle aura donc, dans son paquet, au moins  $n_2 m^{m-2} - n_1 m^{m-3}$ , et au plus  $n_2 m^{m-2} - n_1 m^{m-3} + m^{m-3} - 1$  cartes au-dessous d'elle; elle y occupera donc au moins le rang  $m^{m-1} - n_2 m^{m-2} + n_1 m^{m-3} - m^{m-3} + 1$ , et au plus le rang  $m^{m-1} - n_2 m^{m-2} + n_1 m^{m-3}$ .

Mais, puisqu'on assigne à ce paquet le rang  $n_3$ , on place donc au-dessus de lui  $(n_3 - 1)$  autres paquets de  $m^{m-1}$  cartes chacun; d'où il suit qu'après la troisième opération, la carte pensée occupera dans le jeu au moins le rang  $(n_3 - 1)m^{m-1} + m^{m-1} - n_2 m^{m-2} + n_1 m^{m-3} - m^{m-3} + 1 = n_3 m^{m-1} - n_2 m^{m-2} + n_1 m^{m-3} - (m^{m-3} - 1)$ , et au plus le rang  $(n_3 - 1)m^{m-1} + m^{m-1} - n_2 m^{m-2} + n_1 m^{m-3} = n_3 m^{m-1} - n_2 m^{m-2} + n_1 m^{m-3}$ .

En poursuivant le même raisonnement, et appliquant, si l'on ne

ne veut point se contenter de l'induction, un tour de démonstration très-familier aux analistes, on trouvera qu'en général après un nombre d'opérations désigné par  $2k$ , le rang de la carte pensée dans le jeu sera au moins

$$n_{2k}m^{m-1}-n_{2k-1}m^{m-2}+n_{2k-2}m^{m-3}-\dots+n_2m^{m-2k+1}-n_1m^{m-2k+1},$$

et au plus

$$\begin{aligned} & n_{2k}m^{m-1}-n_{2k-1}m^{m-2}+n_{2k-2}m^{m-3}-\dots \\ & +n_2m^{m-2k+1}-n_1m^{m-2k}+m^{m-2k}; \end{aligned}$$

et qu'après un nombre d'opérations désigné par  $2k+1$ , le rang de la carte pensée, dans le jeu, sera au moins,

$$\begin{aligned} & n_{2k+1}m^{m-1}-n_{2k}m^{m-2}+n_{2k-1}m^{m-3}-\dots \\ & -n_2m^{m-2k}+n_1m^{m-2k-1}-(m^{m-2k-1}-1), \end{aligned}$$

et au plus

$$n_{2k+1}m^{m-1}-n_{2k}m^{m-2}+n_{2k-1}m^{m-3}-\dots-n_2m^{m-2k}+n_1m^{m-2k-1}.$$

Or, 1.<sup>o</sup> si  $m$  est pair et  $=2k$ , les deux premières limites se confondront en un seul nombre, et l'on aura

$$x=n_mm^{m-1}-n_{m-1}m^{m-2}+n_{m-2}m^{m-3}-\dots-n_2m^2+n_1m-n_1+1;$$

et 2.<sup>o</sup> si  $m$  est impair et  $=2k+1$ , les deux dernières limites se confondront aussi en un seul nombre, et l'on aura

$$x=n_mm^{m-1}-n_{m-1}m^{m-2}+n_{m-2}m^{m-3}-\dots+n_2m^2-n_1m+n_1;$$

ainsi, dans l'un et dans l'autre cas, les nombres  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$  étant donnés, on pourra en conclure  $x$ .

Ainsi, par exemple, si  $m=4$ , c'est-à-dire, si le nombre total des cartes est 256, et qu'on ait successivement assigné au paquet qui contient la carte pensée, les rangs 3, 4, 1, 2, on aura

$$x=2 \cdot 64 - 1 \cdot 16 + 4 \cdot 4 - 3 + 1 = 126.$$

Si au contraire  $m=3$ , c'est-à-dire, si le nombre total des cartes est 27, et si, en outre, les rangs assignés au paquet contenant la carte pensée, sont 1, 3, 2, on aura

$$x=2 \cdot 9 - 3 \cdot 3 + 1 = 10.$$

Le

Le problème inverse , c'est-à-dire , celui où l'on demanderait quels rangs  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , ...,  $n_m$  il faut assigner , à chaque opération , au paquet qui contient la carte pensée , pour qu'à la fin cette carte se trouve à un rang  $x$  , assigné dans le jeu , n'est guère plus difficile à résoudre ; en voici la solution .

Divisez  $x-1$  ou  $x$  par  $m$  , suivant que  $m$  sera pair ou impair , en faisant la division *en dehors* , dans le premier cas , et *en dedans* , dans le second , et prenant le quotient de manière que le reste ne soit ni nul ni  $>m$  , abstraction faite de son signe . Ce reste sera la valeur de  $n_1$  .

Divisez le quotient par  $m$  en faisant la division *en dedans* dans le premier cas , et *en dehors* dans le second , et prenant encore le quotient de manière que le reste ne soit ni nul ni  $>m$  , abstraction faite de son signe .

Continuez à diviser ainsi successivement les quotiens par  $m$  , en faisant alternativement les divisions *en dedans* et *en dehors* , et prenant les quotiens tels que les restes alternativement *positifs* et *négatifs* ne soient jamais nuls ni  $>m$  ; opérez ainsi jusqu'à ce que vous ayez obtenu un dernier quotient qui n'excède pas  $m$  ; alors la suite des restes pris positivement et le dernier quotient seront les valeurs de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , ...,  $n_m$  .

Si , par exemple ,  $m=4$  et  $x=126$  ; en divisant *en dehors* 125 par 4 , on aura pour quotient 32 et pour reste *négatif*  $3=n_1$  ; divisant *en dedans* 32 par 4 , on aura pour quotient 7 et pour reste *positif*  $4=n_2$  ; divisant *en dehors* 7 par 4 , on aura pour quotient 2 et pour reste *négatif*  $1=n_3$  ; divisant enfin 2 *en dedans* par 4 , on aura pour quotient 0 et pour reste *positif*  $2=n_4$  ; en sorte qu'on aura , comme ci-dessus ,

$$n_1=3, n_2=4, n_3=1, n_4=2.$$

Si , au contraire , on a  $m=3$  et  $x=10$  ; en divisant *en dedans* 10 par 3 , on aura pour quotient 3 et pour reste *positif*  $1=n_1$  ; divisant *en dehors* 3 par 3 , on aura pour quotient 2 et pour reste

*négatif*  $3=n_1$ ; divisant enfin *en dedans* 2 par 3, on aura pour quotient 0 et pour reste *positif*  $2=n_2$ ; en sorte qu'on aura, comme ci-dessus,

$$n_1=1, n_2=3, n_3=2.$$

La plus petite valeur que l'on puisse donner à  $m$  est 2, et alors le jeu se joue avec quatre cartes seulement. Si l'on fait  $m=4$ , le jeu devra avoir 256 cartes; on ne pourra donc le jouer avec un jeu de cartes ordinaire, et il faudra avoir des cartes où soient peintes des figures d'hommes ou d'animaux, des fleurs ou des fruits. On ne rencontre pas cette difficulté en prenant  $m=3$ ; ce qui porte le nombre des cartes à 27 seulement, et on a de plus cet avantage qu'alors les calculs peuvent être exécutés de tête avec facilité et promptitude; car on trouve

$$x=n_1-3n_2+9n_3.$$

Il convient pourtant de remarquer qu'à mesure que  $m$  devient plus grand, le tour doit paraître de plus en plus merveilleux; attendu que le nombre des cartes parmi lesquelles il en faut deviner une, croît dans un rapport incomparablement plus grand que le nombre des opérations et interrogations nécessaires pour la découvrir. Si, par exemple, on employait dix billons de cartes, lesquelles tiendraient à peine dans un espace cubique de 23 mètres en tout sens, il suffirait de dix questions seulement pour découvrir la carte pensée. C'est à peu près de la même manière que dix questions suffisent pour discerner un nombre parmi tous ceux qui sont moindres que dix billions.

Lorsqu'on veut exécuter ce tour plusieurs fois de suite, il convient d'en masquer l'artifice en variant son déroulement de plusieurs manières. Ainsi, par exemple, on peut, une première fois, chercher la carte pensée dans le jeu, les mains derrière, et la poser ensuite

sur la table. On peut , une seconde fois , annoncer à l'avance , et avant même que la carte soit pensée , le rang qu'elle occupera dans le jeu ; ou bien on peut demander à l'un des spectateurs de désigner lui-même le rang qu'il veut qu'elle y occupe , et ainsi du reste.

Rien n'empêche , au surplus , que , pour mieux fasciner les yeux des spectateurs , on ne fasse le semblant de s'aider d'une lunette ; mais elle doit être construite de manière qu'on ne puisse rien voir à travers , ou qu'on n'y voie que des caractères ou figures magiques , ou , mieux encore , des objets ou devises propres à punir l'indiscrétion des curieux , à qui , au surplus , il conviendra de se défendre d'abord beaucoup de la livrer.

Ce petit tour peut très-bien être exécuté par un homme privé de la vue , ou qui s'est fait bander les yeux , et il n'en devient ainsi que plus merveilleux.

On peut aussi ne point toucher les cartes ; faire former successivement les paquets par un ou plusieurs des spectateurs , en ayant seulement chaque fois l'attention de remarquer le rang qu'on assigne au paquet que l'on dit contenir la carte pensée.

On pourrait enfin faire penser à la fois des cartes à plusieurs personnes , en tenant note et des paquets qui les contiendraient et du rang qu'on aurait assigné chaque fois à chacun d'eux. (\*)

---

(\*) Dans le tome VII des *Mémoires présentés à l'académie des sciences* , on trouve un mémoire de M. Monge sur un tour de cartes qui a quelque analogie avec celui-ci.

---

## QUESTIONS RÉSOLUES.

*Solution de deux problèmes de géométrie, proposés à la page 132 de ce volume ;*

Par M. BÉRARD, principal et professeur de mathématiques au collège de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.



**P**ROBLÈME I. *Déterminer l'ellipse de plus grande surface inscriptible à un triangle donné ?*

*Solution.* Soient  $a$ ,  $b$  deux des côtés du triangle donné et  $\gamma$  l'angle compris. Soient pris le sommet de cet angle pour origine, le côté  $a$  pour axe des  $x$  et le côté  $b$  pour axe des  $y$ ; si alors on désigne par  $x'$ ,  $y'$  les coordonnées inconnues du centre de l'ellipse cherchée, son équation sera de la forme

$$A(x-x')^2 + B(y-y')^2 + 2C(x-x')(y-y') + 1 = 0;$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  étant des coefficients qu'il s'agit de déterminer et qui, avec  $x'$  et  $y'$ , forment les inconnues du problème.

Il faut d'abord exprimer que cette ellipse touche chacun des côtés du triangle. Pour cela, soit d'abord fait dans son équation  $y=0$ ; en exprimant que les valeurs qui en résultent pour  $x$  sont égales, on trouvera, pour l'abscisse du point de contact avec le côté  $a$ ,

$$x = x' + \frac{C}{A} y' ,$$

avec la condition

$$A+y'^2(AB-C^2)=0. \quad (1)$$

Si, dans la même équation, on fait  $x=0$ ; en exprimant que les valeurs qui en résultent pour  $y$  sont égales, on trouvera, pour l'ordonnée du point de contact avec le côté  $b$ ,

$$y=y'+\frac{C}{B}x',$$

avec la condition

$$B+x'^2(AB-C^2)=0. \quad (2)$$

Combinant enfin la même équation avec l'équation  $bx+ay-ab=0$  du troisième côté, mise, pour plus de commodité, sous cette forme  $b(x-x') + a(y-y') + (bx'+ay'-ab) = 0$ , et exprimant que les deux systèmes de valeurs qui en résultent pour  $x$  et  $y$  se réduisent à un seul; on trouvera, pour les coordonnées du point de contact avec ce troisième côté,

$$x=x'+\frac{(aC-bB)(bx'+ay'-ab)}{a^2A+b^2B-2abC},$$

$$y=y'+\frac{(bC-aA)(bx'+ay'-ab)}{a^2A+b^2B-2abC};$$

avec la condition

$$a^2A+b^2B-2abC+(bx'+ay'-ab)^2(AB-C^2)=0,$$

laquelle, si on en retranche les produits respectifs des équations (1), (2) par  $a^2$ ,  $b^2$ , se réduit simplement à

$$2C+(2bx'+2ay'-2x'y'-ab)(AB-C^2)=0. \quad (3)$$

Si donc  $x'$  et  $y'$  étaient connus, c'est-à-dire, si le centre de l'ellipse était donné, les seules inconnues  $A$ ,  $B$ ,  $C$  du problème seraient données par les équations (1), (2), (3), desquelles on tire, en négligeant les valeurs zéro, qui ne peuvent être admises,

$$A=\frac{4y'^2}{(2bx'+2ay'-2x'y'-ab)^2-4x'^2y'^2};$$

## QUESTIONS

$$B = \frac{4x'^2}{(2bx' + 2ay' - 2x'y' - ab)^2 - 4x'^2y'^2},$$

$$C = \frac{2(2bx' + 2ay' - 2x'y' - ab)}{(2bx' + 2ay' - 2x'y' - ab)^2 - 4x'^2y'^2}.$$

Nous avons donc résolu le problème où l'on proposerait de décrire une ellipse d'un centre donné, qui touchât les trois côtés d'un triangle donné.

Rendons actuellement à  $x'$  et  $y'$  leur indétermination, et assujettissons l'ellipse à être la plus grande possible. On sait que l'aire d'une ellipse n'est autre chose que le nombre  $\pi$  multiplié par le produit de ses deux demi-diamètres principaux ; d'où il suit que, pour remplir la condition exigée, il faut que ce produit, ou son carré, soit un *maximum* ; or, d'après les résultats obtenus dans le troisième volume des *Annales* [ pag. 106, équat. (4) ], ce carré est

$$\frac{\sin^2 \gamma}{AB - C^2},$$

ce qui donne pour la condition du *maximum*

$$d(AB - C^2) = 0, \quad (\text{M})$$

ou en développant

$$BdA + AdB - 2CdC = 0. \quad (p)$$

Différenciant pareillement les équations (1), (2), (3), en ayant égard à l'équation (M) et faisant varier  $x'$  et  $y'$ , il viendra

$$dA + 2y'(AB - C^2)dy' = 0, \quad (q)$$

$$dB + 2x'(AB - C^2)dx' = 0, \quad (r)$$

$$dC - (AB - C^2)\{(x' - a)dy' + (y' - b)dx'\} = 0. \quad (s)$$

Si, entre les quatre équations (*p*, *q*, *r*, *s*), on élimine  $dA$ ,  $dB$ ,  $dC$ , on trouvera, toutes réductions faites,

$$\{x'A + (y' - b)C\}dx' + \{y'B + (x' - a)C\}dy' = 0;$$

et, comme les variables  $x'$ ,  $y'$  sont indépendantes, on en conclura

$$x'A + (y' - b)C = 0, \quad (4) \quad y'B + (x' - a)C = 0; \quad (5)$$

équations qui, jointes aux équations (1), (2), (3) résolvent le problème.

En mettant dans ces derniers pour  $A$  et  $B$  leurs valeurs données par les équations (4) et (5), et divisant par  $C$ , on obtiendra pour  $C$  trois valeurs au premier degré, et en égalant chacune des deux premières à la troisième, les deux équations en  $x'$ ,  $y'$  qui en résulteront, pourront être mises sous cette forme

$$(2x' - a)(bx' + 2ay' - ab) = 0,$$

$$(2y' - b)(ay' + 2bx' - ab) = 0.$$

Comme il suffit, pour satisfaire à ces équations d'égaler à zéro un quelconque des deux facteurs du premier membre de chacune d'elles, il s'ensuit qu'elles doivent donner, pour les inconnues  $x'$ ,  $y'$ , quatre systèmes de valeurs. De ces quatre systèmes trois doivent être rejetés, parce qu'ils appartiennent aux milieux des côtés du triangle donné, lesquels ne sauraient être des centres d'ellipses inscrites ; quant au quatrième système qui résulte de l'égalité des derniers facteurs à zéro, il donne

$$x' = \frac{1}{2}a, \quad y' = \frac{1}{2}b;$$

on en conclut ensuite

$$C = -\frac{6}{ab}, \quad A = -\frac{12}{a^2}, \quad B = -\frac{12}{b^2};$$

$$AB - C^2 = \frac{108}{a^2 b^2}$$

d'où

$$\frac{\pi \sin \gamma}{\sqrt{AB - C^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$$

et les points de contact seront les milieux des côtés.

Ainsi, la plus grande ellipse inscriptible à un triangle a son centre au centre de gravité de l'aire de ce triangle, et touche ses trois côtés à leurs milieux ; d'où il suit que le triangle dont les

sommets sont aux points de contact à ses côtés respectivement parallèles à ceux du triangle donné. L'aire de cette ellipse est à celle du triangle donné ::  $\pi : 3\sqrt{3}$ . Son équation est

$$12b^2(x - \frac{1}{3}a)^2 + 12a^2(y - \frac{1}{3}b)^2 + 12ab(x - \frac{1}{3}a)(y - \frac{1}{3}b) = a^2b^2.$$

*PROBLÈME II. Déterminer l'ellipse de moindre surface circonscriptible à un triangle donné ?*

*Solution.* En conservant les mêmes conventions et notations que dans le problème précédent, l'équation de l'ellipse sera encore

$$A(x-x')^2 + B(y-y')^2 + 2C(x-x')(y-y') + 1 = 0.$$

Cette ellipse devant passer par l'origine, on aura d'abord

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'y' + 1 = 0; \quad (c)$$

et l'équation de sa tangente en ce point sera

$$(Ax' + Cy')x + (By' + Cx')y = 0. \quad (p)$$

Cette ellipse devant ensuite passer par le point dont les coordonnées sont  $a$  et  $0$ , on aura

$$A(x'-a)^2 + By'^2 + 2Cy'(x'-a) + 1 = 0;$$

équation qui, en retranchant l'équation (c), se réduit à

$$2y'C + (2x'-a)A = 0; \quad (1)$$

et l'équation de la tangente en ce point est

$$\{By' + C(x'-a)\}x + \{Cy' + A(x'-a)\}(x-a) = 0. \quad (q)$$

Cette ellipse devant enfin passer par le point dont les coordonnées sont  $0$  et  $b$ , on aura encore

$$B(y'-b)^2 + Ax'^2 + 2Cx'(y'-b) + 1 = 0,$$

équation qui, en retranchant l'équation (c), se réduit à

$$2x'C + (2y'-b)B = 0; \quad (2)$$

et l'équation de la tangente en ce point est

$$\{Ax' + C(y'-b)\}x + \{Cx' + B(y'-b)\}(y-b) = 0. \quad (r)$$

Si ensuite on retranche le double de l'équation (c) de la somme des

des produits respectifs des équations (1) et (2) par  $x'$  et par  $y'$ , il viendra

$$ax'A + ly'B + z = 0. \quad (3)$$

Et, au moyen des équations (1), (2), (3) celles des tangentes aux trois sommets deviendront respectivement

$$aAx + bBy = 0, \quad (P)$$

$$(bB - 2aC)y - aA(x - a) = 0, \quad (Q)$$

$$(aA - 2bC)x - bB(y - b) = 0. \quad (R)$$

Les mêmes équations (1), (2), (3) donnent

$$A = -\frac{2y' - b}{x'(bx' + ay' - ab)}, \quad B = -\frac{2x' - a}{y'(bx' + ay' - ab)},$$

$$C = \frac{(2x' - a)(2y' - b)}{2x'y'(bx' + ay' - ab)};$$

et telles seraient les valeurs des inconnues, si les coordonnées  $x'$ ,  $y'$  étaient données, c'est-à-dire, si l'on proposait de décrire une ellipse d'un centre donné, qui passât par les trois sommets d'un triangle donné.

Rendons présentement à  $x'$  et  $y'$  leur indétermination, et assujettissons l'ellipse à être la plus petite possible. Pour cela il faudra encore que la différentielle de  $AB - C^2$  soit nulle; or, d'après les valeurs qui viennent d'être assignées à  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , on a

## QUESTIONS

$$4(AB-C^2) = \frac{(2x'-a)(2y'-b)(2bx'+2ay'-ab)}{\{x'y'(bx'+ay'-ab)\}}$$

prenant donc la différentielle de cette fraction, par rapport à  $x'$  et  $y'$ , et égalant séparément à zéro les multiplicateurs de  $dx'$  et de  $dy'$ , il viendra, toutes réductions faites,

$$y'(2y'-b)(2bx'+ay'-ab)\{2(x'-a)(bx'+ay')+a^2b\}=0,$$

$$x'(2x'-a)(2ay'+bx'-ab)\{2(y'-b)(ay'+bx')+b^2a\}=0.$$

La combinaison de ces facteurs semblerait devoir fournir seize solutions du problème ; mais, en discutant ces solutions, on voit que la seule qui puisse être admise est celle qui est donnée par les deux équations

$$2bx'+ay'-ab=0, \quad 2ay'+bx'-ab=0,$$

desquelles on tire

$$x'=\frac{1}{2}a, \quad y'=\frac{1}{2}b,$$

et ensuite

$$A=-\frac{3}{a^2}, \quad B=-\frac{3}{b^2}, \quad C=-\frac{3}{2ab},$$

$$AB-C^2=\frac{27}{4a^2b^2}.$$

d'où

$$\frac{\pi \sin \gamma}{\sqrt{AB-C^2}} = \frac{\beta \pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

d'après ces valeurs de  $x'$ ,  $y'$  les équations (P), (Q), (R) des tangentes menées à l'ellipse par les sommets du triangle deviendront simplement

$$ay+bx=0, \quad x-a=0, \quad y-b=0.$$

Ainsi, la plus petite ellipse circonscriptible à un triangle donné a son centre au centre de gravité de l'aire de ce triangle, et ses tangentes par les trois sommets sont respectivement parallèles aux côtés opposés ; d'où il suit que le triangle donné a ses sommets aux milieux des côtés de celui que forment les trois tangentes. L'aire de cette ellipse est à celle du triangle ::  $4\pi : 3\sqrt{3}$ . Son équation est

$$3b^2(x-\frac{1}{3}a)^2 + 3a^2(y-\frac{1}{3}b)^2 + 3ab(x-\frac{1}{3}a)(y-\frac{1}{3}b) = a^2b^2.$$

On voit donc que, si deux triangles sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre, de manière que leurs côtés soient parallèles chacun à chacun, une même ellipse sera, en même temps, la plus grande ellipse inscrite au plus grand et la plus petite ellipse circonscrite au plus petit.

*PROBLÈME III. Déterminer l'ellipsoïde de plus grand volume inscriptible à un tétraèdre donné ?*

En désignant par  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les trois arêtes d'un même angle du tétraèdre dont il s'agit, prenant ces arêtes pour axes des coordonnées et denotant par  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  les coordonnées du centre de l'ellipsoïde cherché, l'équation de cet ellipsoïde sera de la forme

$$\left. \begin{aligned} & A(x-x')^2 + 2A'(y-y')(z-z') \\ & + B(y-y')^2 + 2B'(z-z')(x-x') \\ & + C(z-z')^2 + 2C'(x-x')(y-y') \end{aligned} \right\} + 1 = 0,$$

et les inconnues du problème, au nombre de neuf, seront  $A, B, C,$   
 $A', B', C', x', y', z'.$

Il faudra d'abord exprimer qu'en faisant successivement chacune des coordonnées nulle, l'équation résultante entre les deux autres exprime un point unique. La condition d'où dépend cette circonstance est facile à déduire de l'équation (4) de la page 106 du 3.<sup>e</sup> volume des *Annales*. On aura donc ainsi trois équations de condition au moyen desquelles l'ellipsoïde se trouvera tangent aux trois plans coordonnés, en des points qu'il sera facile d'assigner.

Il faudra exprimer, en outre, que cet ellipsoïde est tangent à la quatrième face du tétraèdre dont l'équation est

$$bcx+cay+abz=abc;$$

et pour cela il suffira d'exprimer que l'une quelconque des trois projections de leur intersection se réduit à un point.

On n'aura ainsi que quatre équations de relation entre les six coefficients  $A, B, C, A', B', C'$ ; d'où l'on voit qu'une infinité d'ellipsoïdes de même centre peuvent être inscrits à la fois à un même tétraèdre.

Supposant donc, en premier lieu, pour plus de simplicité, que le centre est donné, on cherchera, entre tous les ellipsoïdes à qui ce centre appartient, quel est celui de plus grand volume. Pour y parvenir, il suffira d'exprimer que le produit des trois demi-diamètres principaux, produit dont j'ai donné l'expression, page 110 du mémoire déjà cité, est un *maximum*. Différenciant ensuite les quatre équations de condition, en y traitant  $x', y', z'$  comme des constantes, on aura en tout cinq équations différentielles entre lesquelles on éliminera quatre des six différentielles  $dA, dB, dC, dA', dB', dC'$ ; égalant donc séparément à zéro les multiplicateurs des deux différentielles restantes, on obtiendra deux nouvelles équations finies qui, jointes aux quatre premières, détermineront les valeurs

des six coefficients qui répondent aux *maximum*, du moins lorsque le centre est donné.

On substituera ensuite ces valeurs dans l'expression du produit des trois demi-diamètres principaux, et exprimant de nouveau que ce produit est un *maximum*, mais en faisant, pour cette fois, varier  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Egant ensuite séparément à zéro les multiplicateurs de  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$ , il en résultera trois équations qui donneront les coordonnées du centre.

On parviendra ainsi à cette conclusion remarquable : *Le plus grand ellipsoïde inscriptible à un tétraèdre donné a son centre au centre de gravité du volume de ce tétraèdre et touche ses faces aux centres de gravité de leurs aires respectives*; d'où il suit que le tétraèdre qui a ses sommets aux points de contact, a ses faces respectivement parallèles à celles du tétraèdre donné.

*PROBLÈME IV. Déterminer l'ellipsoïde du plus petit volume circonscriptible à un tétraèdre donné ?*

Ce problème se traite exactement comme le précédent, avec cette seule différence que les quatre équations qui expriment que l'ellipsoïde touche les faces du tétraèdre, y sont remplacées par celles qui expriment qu'il passe par ses sommets.

On parvient ainsi à ce résultat non moins remarquable que celui qui vient d'être énoncé : *le plus petit ellipsoïde circonscriptible à un tétraèdre donné, a son centre au centre de gravité du volume du tétraèdre, et ses plans tangens par les quatre sommets sont respectivement parallèles à ceux des faces opposées*; d'où il suit que le tétraèdre donné a ses sommets aux centres de gravité des aires des faces de celui que forment les quatre plans tangents.

On voit donc que, si deux tétraèdres sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre, de manière que leurs faces soient parallèles chacune à chacune, un même ellipsoïde sera, en même temps, le plus grand ellipsoïde inscrit au plus grand et le plus petit ellipsoïde circonscrit au plus petit.

Ceux qui désireront plus de détail sur ces quatre problèmes pourront consulter un ouvrage que je viens de faire paraître sous le titre *d'Application du calcul différentiel à la discussion et à la construction des lignes et surfaces du second ordre rapportées à des coordonnées quelconques avec plusieurs problèmes et théorèmes nouveaux* (\*); ouvrage dans lequel ces problèmes, ainsi que beaucoup d'autres du même genre, se trouvent traités avec tous les développemens convenables.

---

*Démonstration du théorème énoncé à la page 160 de ce volume ;*

Par M. ENCONTRE, fils.



*ÉNONCÉ.* CA et CB sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole. On a mené la droite AB; et, par un point quelconque M de la courbe, on a mené à cette droite une parallèle coupant respectivement CA et CB en A' et B'. On propose de démontrer que, quelle que soit la situation du point M sur la courbe, la quantité  $\overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2$  est constante.

*Démonstration* (\*\*). Soit menée MP, ordonnée au diamètre CA,

---

(\*) A Paris, chez F. Didot; et à Turin, chez Pic.

(\*\*) On sous-entend la figure qu'il est très-facile de suppléer.

et conséquemment parallèle à CB ; et soient CP=x, PM=y, CA=a, CB=b, AB=c.

Les triangles semblables BCA, MPA' donnent

$$b:a::y:PA' = \frac{ay}{b}, \quad b:c::y:MA' = c \cdot \frac{y}{b},$$

donc

$$CA' = CP + PA' = x + \frac{ay}{b} = \frac{bx + ay}{b}.$$

D'un autre côté, les triangles semblables CAB, CA'B' donnent

$$a:c::\frac{ay+bx}{b}:A'B' = \frac{c(ay+bx)}{ab};$$

d'où il suit que

$$MB' = A'B' - MA' = \frac{c(ay+bx)}{ab} - \frac{cy}{b} = c \cdot \frac{x}{a},$$

donc

$$\overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2 = c^2 \left\{ \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \right\};$$

mais, dans l'ellipse et dans l'hyperbole, on a respectivement

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1;$$

donc, dans les deux courbes, on doit avoir respectivement

$$\overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2 = c^2 = \overline{AB}^2. (*)$$

(\*) Si l'on désigne par N l'autre point d'intersection de A'B' avec la courbe, on aura pareillement

$\overline{NB'}^2 \pm \overline{NA'}^2 = \overline{AB}^2$ ; d'où  $\overline{MA'}^2 \pm \overline{MB'}^2 = \overline{NB}^2 \pm \overline{NA}^2$ , d'où, en développant, on conclura,

$$MA' = NB'.$$

Cette dernière proposition, et conséquemment la première qui peut en être aisément déduite, se démontre facilement pour l'ellipse, en recourant à sa projection circulaire, dans laquelle les projections des deux diamètres conjugués sont deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre. Ceci peut donc former un petit supplément au mémoire de M. Ferriot, inséré à la page 240 du 2<sup>e</sup> volume de ce recueil.

J. D. C.

## QUESTIONS PROPOSÉES.

*Problèmes de Géométrie.*

**I.** INSCRIRE ou circonscire à une ellipse le plus grand ou le plus petit triangle semblable à un triangle donné ?

**II.** Inscire ou circonscire à un ellipsoïde le plus grand ou le plus petit tétraèdre semblable à un tétraèdre donné ?

**III.** Assigner l'ellipsoïde du plus grand volume entre tous ceux qui ont pour tangentes les six arêtes d'un tétraèdre donné ?

*Theorèmes de Géométrie.*

**I.** Dans toute surface du second ordre qui a un centre , les parallelipèdes qui ont respectivement pour diagonales trois diamètres conjugués quelconques , et dont les arêtes sont respectivement parallèles à trois autres diamètres conjugués , aussi quelconques , sont tous trois équivalens.

**II.** Si , à une même ellipse , on mène deux tangentes parallèles sous un angle déterminé quelconque , le produit des parties de ces tangentes comprises depuis leurs points de contact jusqu'à leur rencontre avec une troisième tangente , aussi quelconque , mais variable , sera une quantité constante.

## ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

*Démonstration générale et rigoureuse des procédés connus, pour la division et l'extraction des racines des polynômes ;*

Par M. GERGONNE.



DANS tous les traités d'algèbre, on se contente, pour établir les règles de la division et de l'extraction des racines des polynômes, d'exécuter ces opérations sur un petit nombre d'exemples, et de conclure ensuite, par induction, du particulier au général. Cette manière de procéder convient peut-être pour des commençans qu'on pourrait craindre de rebuter par des raisonnemens trop généraux et trop abstraits ; mais elle ne saurait dispenser, ce me semble, de revenir ensuite, de nouveau, sur le même sujet, pour le traiter d'une manière plus large et plus rigoureuse, dès que ceux qu'on enseigne ont acquis un peu d'habitude des méthodes algébriques. Voici de quelle manière je conçois que la division et l'extraction des racines des polynômes doivent alors leur être présentées.

Dans tout ce qui va suivre, je supposerai constamment que tous les polynômes que je considérerai sont ordonnés par rapport à une même lettre, et je désignerai leurs termes par le rang qu'ils occuperont en allant du plus élevé à celui qui l'est le moins ; je supposerai d'ailleurs les polynômes complets, ce qui est toujours permis.

*Tom. IV, n.<sup>o</sup> X, 1.<sup>er</sup> avril 1814.*

40

## §. I.

*Division des polynômes.*

*LEMME I.* *Le produit du premier terme d'un polynôme par le premier terme d'un autre polynôme est , sans réductions ni modifications quelconques , le premier terme du produit de ces deux polynômes.*

*Démonstration.* Il est évident en effet que tout autre produit de deux termes , pris , comme on le voudra , dans les deux polynômes , étant moins élevé que celui-là , ne pourra ni passer avant lui ni se réduire avec lui.

*Remarque.* On prouverait , de la même manière , que le produit des derniers termes des deux polynômes est , sans réductions ni modifications quelconques , le dernier terme du produit de ces polynômes. Quant aux termes intermédiaires de ce même produit , ils sont , généralement , des résultats de réductions opérées entre des monômes semblables.

*LEMME II.* *Si du produit de deux polynômes on retranche le produit du premier par les r premiers termes du second , le premier terme du reste sera , sans réductions ou modifications quelconques , le produit du premier terme du premier polynôme par le (r+1)<sup>me</sup> terme du second.*

*Démonstration.* Soient les deux polynômes

$$Ax^p + \dots + V ,$$

$$A'x^q + \dots + G'x^{q-r+1} + H'x^{q-r} + \dots + V' ;$$

il s'agit de prouver que le premier terme de

$$(Ax^p + \dots + V)(A'x^q + \dots + G'x^{q-r+1} + H'x^{q-r} + \dots + V')$$

$$-(Ax^p + \dots + V)(A'x^q + \dots + G'x^{q-r+1})$$

est

$$Ax^p \times H'x^{q-r}.$$

Or, cela est évident, puisque cette différence est la même chose que

$$(Ax^p + \dots + V) \times (H'x^{q-r} + \dots + V') ;$$

dont le premier terme est, en effet, (*Lemme I*),

$$Ax^p \times H'x^{q-r}.$$

*Remarque.* On prouverait, de la même manière, que, si du produit de deux polynômes on retranche le produit du premier par les  $r$  derniers termes du second, le dernier terme du reste sera, sans réductions ou modifications quelconques, le produit du dernier terme du premier polynôme par le terme qui, dans le second, occupe le  $(r+1)^{\text{me}}$  rang, à partir du dernier.

*PROBLÈME.* Déterminer le quotient de la division de deux polynômes ?

*Solution.* En divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, on obtient (*Lemme I*) le premier terme du quotient. D'un autre côté, les  $r$  premiers termes du quotient étant trouvés, si, après avoir multiplié le diviseur par l'ensemble de ces termes, et retranché le produit du dividende, on divise le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, on obtiendra pour résultat (*Lemme II*) le  $(r+1)^{\text{me}}$  terme du quotient. Ainsi on a, à la fois, par ce qui précède, 1.<sup>o</sup> le moyen d'obtenir le premier terme du quotient; 2.<sup>o</sup> le moyen d'obtenir un terme quelconque de ce quotient, lorsque tous ceux qui doivent le précéder sont déjà obtenus; ce qui renferme implicitement la solution complète du problème, et conduit immédiatement aux méthodes connues.

*Remarque I.* D'après les deux remarques précédentes, on voit qu'on a aussi 1.<sup>o</sup> le moyen d'obtenir le dernier terme du quotient ; 2.<sup>o</sup> le moyen d'obtenir un terme quelconque de ce quotient, lorsque tous ceux qui doivent le suivre sont déjà obtenus ; ce qui peut fournir une seconde solution du problème (\*).

---

(\*) C'est à peu près sur les mêmes principes qu'est fondé le procédé que l'on prescrit dans les traités d'arithmétique pour la division numérique ; mais ces principes se trouvent alors modifiés par des circonstances qui en rendent l'application incomparablement plus difficile.

Comme c'est principalement la nécessité d'exécuter la division numérique, en procédant de gauche à droite, que les commengans ont peine à bien sentir, je crois devoir, en leur faveur, placer ici les considérations suivantes.

I. Lorsqu'on multiplie un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, chaque produit partiel, avant d'être écrit, subit, en général, deux sortes de modifications, savoir, 1.<sup>o</sup> une augmentation de quelques unités, provenant des dixaines enlevées au produit précédent ; 2.<sup>o</sup> une diminution de toutes ses dixaines, qui doivent être ajoutées comme unités au produit suivant. Les deux produits extrêmes seuls ne subissent, avant d'être écrits, que l'une de ces modifications, savoir, le plus à droite une simple soustraction de dixaines, et le plus à gauche une simple addition d'unités ; d'où l'on voit, en dernière analyse, que c'est ce dernier qui, de tous, est le moins altéré. Donc, la comparaison de ce produit avec le chiffre le plus à gauche du multiplicande sera le moyen le plus propre à faire retrouver ce multiplicateur s'il est perdu ; et si, au contraire, c'est le multiplicande que l'on cherche, il conviendra de chercher d'abord son chiffre le plus à gauche, en comparant le multiplicateur à la partie gauche du produit.

II. Pareillement, dans la multiplication de deux facteurs de plusieurs chiffres, chaque produit partiel n'entre dans le produit total qu'après avoir été augmenté à droite par les produits d'ordres inférieurs, et à gauche par les produits d'ordres supérieurs. Les deux produits partiels extrêmes font pourtant exception à cette loi, puisque le plus à droite ne subit aucune altération vers sa droite, et que le plus à gauche n'en subit aucune vers sa gauche ; d'où l'on voit qu'encore, ici, c'est ce dernier produit qui subit la moindre altération, avant de venir se placer dans le produit total. Si donc il s'agit de déterminer le multiplicateur, à l'aide du multiplicande et du produit, ce qu'il y aura de mieux à faire sera de chercher

*Remarque II.* Lorsque le quotient ne doit avoir que deux termes, on les obtient immédiatement, en divisant les termes extrêmes du dividende par les termes extrêmes du diviseur, respectivement; sauf ensuite à s'assurer, par la multiplication, si le quotient obtenu est exact.

## §. II.

### *Extraction des racines des polynômes.*

*LEMME I.* *Le premier terme de la m.<sup>me</sup> puissance d'un polynôme est, sans réductions ni modifications quelconques, la m.<sup>me</sup> puissance du premier terme de ce polynôme.*

*Démonstration.* Il est aisément de voir (§. I. Lemme I) que le premier terme du produit de  $m$  polynômes est, sans réductions ni modifications quelconques, le produit des premiers termes de ces polynômes. Or, si les polynômes sont tous égaux, leur produit devient la  $m.^{me}$  puissance de l'un d'eux, et le premier terme de ce produit devient, en même temps, la  $m.^{me}$  puissance du premier terme du polynôme, ce qui démontre la proposition annoncée.

*Remarque.* On prouverait, de la même manière, que le dernier terme de la  $m.^{me}$  puissance du polynôme est, sans réductions ni modifications quelconques, la  $m.^{me}$  puissance du dernier terme de ce polynôme.

*LEMME II.* *Si de la m.<sup>me</sup> puissance d'un polynôme on retranche la m.<sup>me</sup> puissance de l'ensemble de ses r premiers termes; le premier terme du reste sera, sans réductions ou modifications quelconques, m fois la  $(m-1)^{me}$  puissance du premier terme du polynôme, multiplié par son  $(r+1)^{me}$  terme.*

*Démonstration.* Soit

---

d'abord le chiffre le plus à gauche de ce multiplicateur, par la comparaison du multiplicande avec la partie gauche du produit.

Au surplus, ceux qui s'étonnent que la division numérique commence par la gauche devraient bien plutôt s'étonner de voir commencer la soustraction par la droite; car c'est vraiment là où est l'exception;

## D I V I S I O N

$$Ax^p + \dots + Gx^{p-r+1} + Hx^{p-r} + \dots + V$$

le polynôme dont il s'agit ; il faut prouver que le premier terme du développement de

$$(Ax^p + \dots + Gx^{p-r+1} + Hx^{p-r} + \dots + V)^m - (Ax^p + \dots + Gx^{p-r+1})^m$$

est

$$m(Ax^p)^{m-1} \times Hx^{p-r}.$$

Or , en traitant la première partie comme un binôme , développant , par la formule de Newton , et réduisant , il vient

$$\begin{aligned} & m(Ax^p + \dots + Gx^{p-r+1})^{m-1} (Hx^{p-r} + \dots + V) \\ & + m \cdot \frac{m-1}{2} (Ax^p + \dots + Gx^{p-r+1})^{m-2} (Hx^{p-r} + \dots + V)^2 \\ & + \dots + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdots \frac{m-n+1}{n} (Ax^p + \dots \\ & + Gx^{p-r+n})^{m-n} (Hx^{p-r} + \dots + V)^n + \dots \end{aligned} \quad (\Delta)$$

sur quoi on doit remarquer qu'à cause du premier terme qui manque , la plus petite valeur de  $n$  doit être l'unité .

Considérons présentement à part le terme général

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdots \frac{m-n+1}{n} (Ax^p + \dots + Gx^{p-r+1})^{m-n} (Hx^{p-r} + \dots + V)^n$$

et cherchons quel est le terme le plus élevé de son développement . D'abord ( §. II. *Lemme I* ) le terme le plus élevé du développement de

$$(Ax^p + \dots + Gx^{p-r+1})^{m-n}$$

est

$$A^{m-n}x^{p_m-p_n};$$

et le terme le plus élevé du développement de

$$(Hx^{p-r} + \dots + V)^n$$

est

$$H^n x^{p_n-r_n};$$

donc (*§. I. Lemme I*) le terme le plus élevé du développement du terme général sera

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdots \frac{m-n+1}{n} \cdot A^{m-n} x^{p_m-p_n} \times H^n x^{p_n-r_n}$$

ou

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdots \frac{m-n+1}{n} \cdot A^{m-n} H^n x^{p_m-r_n}.$$

On aura donc le premier terme de la fonction ( $\Delta$ ), en donnant ici à  $n$  une valeur qui rende l'exposant de  $x$  le plus grand possible, c'est-à-dire, en donnant à  $n$  la plus petite valeur qu'elle puisse avoir, c'est-à-dire, en posant  $n=1$ , ce qui donne

$$mA^{m-1}Hx^{p_m-r}=m(Ax^p)^{m-1} \times Hx^{p-r};$$

comme nous l'avions annoncé.

*Remarque.* On prouverait de la même manière que, si de la  $m^{\text{me}}$  puissance d'un polynôme on retranche la  $m^{\text{me}}$  puissance de l'ensemble de ses  $r$  derniers termes, le dernier terme du reste sera, sans réductions ou modifications quelconques,  $m$  fois la  $(m-1)^{\text{me}}$  puissance du dernier terme du polynôme, multipliée par le terme qui, dans ce polynôme, occupe le  $(r+1)^{\text{me}}$  rang, à partir du dernier.

*PROBLÈME.* Déterminer la racine  $m^{\text{me}}$  d'un polynôme?

*Solution.* En extrayant la racine  $m^{\text{me}}$  du premier terme du polynôme proposé, on obtiendra (*§. II. Lemme I*) le premier terme

### 304 DIVISION ET EXTRACTION DES RACINES.

de la racine cherchée. D'un autre côté, les  $r$  premiers termes de cette racine étant trouvés, si, après avoir retranché la  $m^{\text{me}}$  puissance de l'ensemble de ces termes du polynôme proposé, on divise le premier terme du reste par  $m$  fois la  $(m-1)^{\text{me}}$  puissance du premier terme de cette racine, on obtiendra pour résultat (§. II. *Lemme II*) le  $(r+1)^{\text{me}}$  terme de cette même racine. Ainsi on a, à la fois, par ce qui précède, 1.<sup>o</sup> le moyen d'obtenir le premier terme de la racine; 2.<sup>o</sup> le moyen d'obtenir un terme quelconque de cette racine; lorsque tous ceux qui doivent le précéder sont déjà obtenus; ce qui renferme implicitement la solution complète du problème, et conduit immédiatement aux méthodes connues.

*Remarque I.* D'après les deux remarques précédentes, on voit qu'on a aussi 1.<sup>o</sup> le moyen d'obtenir le dernier terme de la racine; 2.<sup>o</sup> le moyen d'obtenir un terme quelconque de cette racine, lorsque tous ceux qui doivent le suivre sont déjà obtenus; ce qui peut fournir une seconde solution du problème.

*Remarque II.* Lorsque la racine ne doit pas avoir plus de quatre termes, on peut l'obtenir assez simplement par le procédé que voici, et qui n'exige que des opérations sur des monômes: en extrayant les racines  $m^{\text{mes}}$  des deux termes extrêmes du polynôme proposé, on obtient les deux termes extrêmes de la racine; divisant ensuite le second et l'avant-dernier terme de ce polynôme, respectivement, par  $m$  fois la  $(m-1)^{\text{me}}$  puissance du premier et du dernier terme de la racine, on obtiendra pour quotiens le second et l'avant-dernier terme de cette racine; il ne sera donc plus question alors que de vérifier si la racine obtenue est exacte.

*Observation générale.* On voit, par tout ce qui précède, que dans la division et l'extraction des racines des polynômes, ce n'est que pour plus de commodité qu'on ordonne ces polynômes; mais on voit en même temps qu'il est essentiel d'opérer, dans tous les cas, de la même manière qu'on le ferait, si les polynômes étaient ordonnés.

DYNAMIQUE

## DYNAMIQUE.

*Véritable solution du problème de la tractoire ;*

Par feu FRANÇAIS , professeur aux écoles d'artillerie. (\*)



**P**ROBLÈME. Sur un plan horizontal, on a pratiqué une rainure rectiligne , dans laquelle un corps  $P$  est assujetti à se mouvoir uniformément. Ce corps est lié , par une verge inflexible et inextensible , avec le corps  $M$ , qui pose sur le plan , et qui est supposé avoir reçu une impulsion primitive quelconque , dans le sens de ce plan. On demande la nature de la courbe décrite par le corps  $M$  , et les autres circonstances du mouvement , en faisant d'ailleurs abstraction du frottement ?

*Solution.* Soit prise pour axe des  $x$  la droite que le corps  $P$  est assujetti à parcourir , et pour axe des  $y$  une perpendiculaire quelconque à cette droite.

Soient à l'époque  $t$  ,  $x$  et  $y$  les coordonnées du point  $M$  , et  $x'$  l'abscisse du point  $P$  ; le mouvement rectiligne de ce dernier point ne pourra être que l'effet d'une force accélératrice , dirigée suivant l'axe des  $x$  et troublée par la réaction de  $M$  sur  $P$ . Soit  $p$  cette force accélératrice.

L'équation générale du mouvement sera donc , en supposant  $t$  la variable indépendante ,

---

(\*) Cette solution a été communiquée au Rédacteur des *Annales* par M. J. F. Français , professeur à l'école impériale de l'artillerie et du g'nie , frère de l'auteur.

## P R O B L E M E

$$M \frac{d^2x}{dt^2} dx + M \frac{d^2y}{dt^2} dy + P \left\{ \frac{d^2x'}{dt^2} - p \right\} dx' = 0 ; \quad (*)$$

ou simplement, à cause de  $\frac{dx'}{dt}$  constant,

$$M \frac{d^2x}{dt^2} dx + M \frac{d^2y}{dt^2} dy - Pp dx' = 0. \quad (1)$$

En désignant par  $a$  la longueur de la verge, la liaison des parties du système sera exprimée par l'équation unique

$$(x-x')^2 + y^2 = a^2 , \quad (2)$$

laquelle donnera

$$(x-x')(dx-dx') + \gamma dy = 0 ;$$

d'où

$$dx' = dx + \frac{\gamma}{x-x'} dy ; \quad (3)$$

substituant donc cette valeur dans l'équation (1), elle deviendra

$$\left\{ M \frac{d^2x}{dt^2} - Pp \right\} dx + \left\{ M \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{Ppy}{x-x'} \right\} dy = 0 ; \quad (4)$$

$dx$  et  $dy$  devant alors être indépendants, on aura séparément

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Pp , \quad M \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Ppy}{x-x'} , \quad (5)$$

d'où, l'élimination de  $p$ , on conclura

$$\gamma d^2x = (x-x')d^2y. \quad (6)$$

Puisque  $dx'$  est constant, cherchons à obtenir une équation en  $x'$  et  $\gamma$ . Pour cela, différentions deux fois conséutivement l'équation (2); il viendra ainsi

$$dx = dx' - \frac{\gamma dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} ,$$

(\*) Voyez la *Mécanique céleste*, tome 1<sup>er</sup>, page 51.

$$d^2x = -\frac{y d^2y}{\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{a^2 dy^2}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

or, l'équation (6) donne

$$d^2x = \frac{d^2y \sqrt{a^2-y^2}}{y} ;$$

égalant donc ces deux valeurs, il viendra, toutes réductions faites,

$$\frac{d^2y}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{y dy^2}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (7)$$

équation qui a pour intégrale

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} + C dx' = 0. \quad (8)$$

Cette dernière équation, intégrée de nouveau, donne

$$\text{Arc.} \left( \text{Cos.} = \frac{y}{a} \right) = Cx' + C' ;$$

ou bien, en remettant pour  $x'$  sa valeur donnée par l'équation (2)

$$\text{Arc.} \left( \text{Cos.} = \frac{y}{a} \right) = C(x - \sqrt{a^2-y^2}) - C'. \quad (9)$$

Pour déterminer les constantes  $C$  et  $C'$ , supposons d'abord que la vitesse constante de  $P$  soit  $b$ ; de manière qu'on ait  $\frac{dx'}{dt} = b$ . En mettant cette valeur dans l'équation (8), elle deviendra

$$\frac{dy}{dt} + bC \sqrt{a^2-y^2} = 0. \quad (10)$$

Supposons ensuite qu'à l'origine des temps le point  $P$  soit à l'origine des coordonnées, et que la verge  $a$  forme alors un angle  $\alpha$  avec l'axe des  $x$ . Supposons de plus que la vitesse initiale de  $M$  parallèlement à l'axe des  $y$  soit  $c$ , en sorte que pour  $t=0$  et  $y=a \sin \alpha$  on ait  $\frac{dy}{dt} = c$ ; l'équation (10) deviendra ainsi

## P R O B L È M E

$$c + abCCos.\alpha = 0, \quad \text{d'où} \quad C = -\frac{c}{abCos.\alpha}.$$

L'intégrale seconde (9), rapportée au même état initial, devient

$$\text{Arc.}(Cos.=\text{Sin.}\alpha)=C', \quad \text{d'où} \quad C'=\frac{1}{2}\pi-\alpha.$$

On a ainsi

$$x = \sqrt{a^2-y^2} + \frac{abCos.\alpha}{c} \left\{ \text{Arc.} \left( \text{Sin.} = \frac{y}{a} \right) - \alpha \right\}. \quad (11)$$

C'est l'équation demandée de la courbe décrite par les corps  $M$ . On voit que cette courbe est une cycloïde générale, rapportée à la droite parcourue par le centre du cercle génératrice ; ce cercle a pour rayon la longueur  $a$  de la verge ; son centre est l'extrémité  $P$  de cette verge ; et le rapport des vitesses de translation du centre et de rotation des points de la circonférence autour de ce centre est celui de  $bCos.\alpha$  à  $c$  ; de manière que la cycloïde sera allongée ordinaire ou raccourcie, suivant qu'on aura  $bCos.\alpha > c$ ,  $bCos.\alpha = c$  ou  $bCos.\alpha < c$ .

L'équation (11) contient, comme une des données, la vitesse initiale de  $M$  dans le sens des  $y$ ; on aurait pu y introduire sa vitesse dans le sens des  $x$ . Si, en effet, l'on met dans l'intégrale première (8) pour  $\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$ , sa valeur  $\frac{dx'-dx}{y}$ , on aura

$$\frac{dx'}{dt} + Cy \frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0.$$

Soit ensuite  $c'$  la vitesse initiale de  $M$  dans le sens de  $x$ , en sorte qu'on ait  $\frac{dx}{dt} = c'$ , cette équation deviendra  $b + abCSin.\alpha - c' = 0$ , d'où

$$C = \frac{c' - b}{abSin.\alpha};$$

introduisant donc cette valeur dans l'équation de la courbe, elle deviendra

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{ab \sin \alpha}{c - b} \left\{ \text{Arc.} \left( \sin. = \frac{y}{a} \right) - \alpha \right\}; \quad (12)$$

de sorte qu'il y a entre les vitesses initiales  $c$  et  $c'$  la relation  $c' \cos \alpha + c \sin \alpha = b \cos \alpha$ .

L'équation (11) est en défaut, lorsqu'on a  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ; mais alors on emploie l'équation (12) qui devient

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - \frac{ab}{c - b} \text{Arc.} \left( \cos. = \frac{y}{a} \right).$$

De même, si  $\alpha = 0$ , l'équation (12) est en défaut; mais alors l'équation (11) devient

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{ab}{c} \text{Arc.} \left( \sin. = \frac{y}{a} \right).$$

Pour déterminer la vitesse de  $M$ , en un point quelconque de la courbe, nous avons les équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ab \cos \alpha - cy}{a \cos \alpha}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{c \sqrt{a^2 - y^2}}{a \cos \alpha};$$

donc

$$v^2 = \frac{ac^2 - 2bcy \cos \alpha + ab^2 \cos^2 \alpha}{a \cos^2 \alpha}.$$

Ainsi, suivant qu'on aura  $y = a$  ou  $y = -a$ ; on aura aussi

$$v = b - \frac{c}{\cos \alpha}, \quad \text{ou} \quad v = b + \frac{c}{\cos \alpha}.$$

Il est aisé de voir que ce sont là la plus petite et la plus grande vitesses du point  $M$ ; la première a lieu au point le plus haut et la seconde au point le plus bas de chaque cycloïde. donc, dans la cycloïde ordinaire, pour laquelle on a  $c = b \cos \alpha$ , la vitesse du point  $M$  est nulle, chaque fois qu'il parvient à son *maximum* d'élé-

## P R O B L È M E

vation, et elle est double de celle du point  $P$ , chaque fois qu'il parvient à son *maximum* d'abaissement. (\*)

Le temps se trouve par la formule  $\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{cdt}{a\cos.\alpha}$ , laquelle donne

$$\text{Arc.}\left(\sin.=\frac{y}{a}\right) = \frac{ct}{a\cos.\alpha} + C'' ;$$

et, comme on a en même temps  $y=a\sin.\alpha$  et  $t=0$ , il s'ensuit que  $C''=\alpha$ , ce qui donne

$$t = \frac{a\cos.\alpha}{c} \left\{ \text{Arc.}\left(\sin.=\frac{y}{a}\right) - \alpha \right\}. \quad (13)$$

Ainsi, lorsque  $y=\alpha$ , on a

$$t = \frac{a\cos.\alpha}{c} \left\{ \frac{2n+1}{2} \pi - \alpha \right\},$$

$n$  étant un nombre entier positif quelconque; d'où il suit que le temps employé à parcourir une cycloïde entière est  $= \frac{\pi a\cos.\alpha}{c}$ .

La force accélératrice  $p = \frac{M}{P} \frac{d^2x}{dt^2}$ ; mais

$$\frac{dx}{dt} = b - \frac{cy}{a\cos.\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{cdy}{adt\cos.\alpha};$$

et, comme on a d'ailleurs

$$\frac{dy}{dt} = \frac{c\sqrt{a^2-y^2}}{a\cos.\alpha};$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$p = - \frac{M}{P} \cdot \frac{c^2 \sqrt{a^2-y^2}}{a^2 \cos.^2 \alpha},$$

ce qui donne, pour la valeur initiale de  $p$ ,  $p = - \frac{M}{P} \cdot \frac{c^2}{a\cos.\alpha}$ :

(\*) Voyez la page 98 du deuxième volume de ce recueil.

---

*Reflexions et recherches sur le même problème;*

Par M. GERGONNE.

Ce problème se trouve traité par Clairaut, ainsi que plusieurs autres problèmes analogues, dans le volume de l'*Académie des sciences de Paris* pour 1736. Ce géomètre prouve très-bien, par des considérations purement synthétiques, que l'espace élémentaire parcouru par le point  $P$  dans un instant quelconque, divisé par l'angle que forment entre elles les deux directions de la verge  $\alpha$ , au commencement et à la fin de cet instant, est une quantité constante; d'où il suit que le point  $M$  décrit une circonference autour du point  $P$ , d'un mouvement uniforme, pendant que ce dernier se meut uniformément sur une droite, et qu'ainsi la *Tractoire* est une cycloïde.

Clairaut s'était occupé de ce problème à l'occasion d'une discussion qu'il avait eue avec Fontaine, lequel prétendait que, dans le mouvement, la direction de la verge devait constamment être tangente à la courbe; d'où il concluait que la *Tractoire* n'était autre que la courbe aux tangentes égales; ce qui réduisait le problème à un simple problème de géométrie.

Malgré la solution de Clairaut, beaucoup de géomètres ont continué jusqu'ici, avec Fontaine, à ne pas distinguer la *Tractoire* de la *Courbe aux tangentes égales*. Ils en ont même conclu, et ont dû en conclure, en effet, que, ni la vitesse constante ou variable du point  $P$ , ni le frottement ni la résistance du milieu, qui agissent toujours dans la direction du mouvement, laquelle est ici la même que celle de la verge  $\alpha$ , ne pouvaient aucunement modifier la nature de la courbe. Quant à Clairaut, il accordait bien à Fontaine, ce qui, ce me semble, était beaucoup trop, que lorsque

## P R O B L E M E

le corps  $M$  frottait sur le plan horizontal et qu'il n'y avait aucune vitesse imprimée, la *Tractoire* pouvait être une courbe aux tangentes égales, et son dessein était seulement de démontrer que ce devait être une cycloïde, dans le cas où le frottement et les autres obstacles étaient nuls.

Dans un mémoire que j'ai lu, il y a quelques mois, à l'académie du Gard, j'ai ébauché la solution du problème général des tractoires dans les milieux résistans, en supposant que le point  $P$  décrit, dans l'espace, une courbe donnée quelconque, à double courbure, et qu'il la décrit d'un mouvement varié aussi quelconque; on voit qu'il suffirait de supposer la verge pesante et flexible, et d'avoir égard à son poids et à sa courbure, pour obtenir la théorie complète du *Cerf-volant*.

En particularisant mes résultats pour les rendre propres au cas présent, je suis parvenu, en général, à des conclusions semblables à celles de M. Français. Cependant, comme ma marche diffère un peu de la sienne, je pense qu'on ne sera pas fâché de trouver ici un rapprochement des deux méthodes.

Pour me débarrasser de la rainure et de la considération des masses, je me suis proposé ce cas particulier du problème, ainsi qu'il suit:

*PROBLÈME.* Un point  $P$  parcourant l'axe des  $x$  d'un mouvement uniforme, avec une vitesse connue égale à  $b$ , exerce une force attractive ou répulsive inconnue, constante ou variable, sur un autre point  $M$ , absolument libre d'ailleurs, posé sur le plan des coordonnées que l'on suppose rectangulaires. L'action de  $P$  sur  $M$  est telle que ces deux points sont toujours maintenus à une distance constante à l'une de l'autre. On demande, d'après cela, la nature de la courbe décrite par le point  $M$ , ainsi que les autres circonstances du mouvement?

*Solution.* Soient, à une époque quelconque,  $x$  et  $y$  les coordonnées de  $M$ ,  $x'$  l'abscisse de  $P$ , et  $p$  l'action de  $P$  sur  $M$ ; cette action s'exerçant suivant la droite qui joint ces deux points, il s'en suit

suit que ses composantes parallèles aux axes des  $x$  et des  $y$  sont respectivement  $\frac{x-x'}{a}p$ ,  $\frac{y}{a}p$ , d'où il résulte que les équations du mouvement du point  $M$  doivent être,  $t$  étant la variable indépendante,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x-x'}{a}p, \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{a}p; \quad (2)$$

à quoi il faut joindre

$$(x-x')^2 + y^2 = a^2, \quad (3) \quad \frac{dx'}{dt} = b; \quad (4)$$

Cela posé, si l'on différencie deux fois l'équation (3), en ayant égard à l'équation (4), il viendra

$$(x-x')\left\{\frac{dx}{dt} - b\right\} + y\frac{dy}{dt} = 0, \quad (5)$$

$$(x-x')\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \left\{\frac{dx}{dt} - b\right\}^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0. \quad (6)$$

Mais, d'un autre côté, en éliminant  $p$  entre les équations (1) et (2), on obtient

$$(x-x')\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0. \quad (7)$$

En éliminant  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$  entre les équations (3), (5), (6), (7)

on aura

$$(a^2 - y^2)\frac{dy}{dt} + y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0; \quad (8)$$

équation dont l'intégrale première est

$$\frac{dy}{dt} = C\sqrt{a^2 - y^2} = C(x-x'); \quad (9)$$

valeur qui, substituée dans l'équation (5), donne

$$\frac{dx}{dt} = b - Cy = -C\sqrt{a^2 - (x-x')^2}. \quad (10)$$

*Tom. IV.*

## P R O B L E M E

Éliminant donc  $t$  entre les équations (9) et (10), on aura pour équation différentielle de la trajectoire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c\sqrt{a^2 - y^2}}{b - Cy}; \quad (11)$$

équation que l'on reconnaît déjà pour être celle d'une cycloïde, laquelle sera allongée, ordinaire ou raccourcie, suivant les diverses valeurs qu'on attribuera à la constante  $C$ .

Pour déterminer cette constante  $C$ , M. Français considère successivement les deux composantes, parallèles aux axes, de l'impulsion initiale qu'il suppose avoir été imprimée originairement à  $M$ , ce qui le conduit à une équation de relation entre ses composantes ; équation qui entraîne cette conséquence paradoxale que l'une de ces composantes est donnée lorsqu'on donne l'autre, et qu'ainsi on n'a pas la liberté d'imprimer à  $M$  une vitesse initiale qui soit à la fois arbitraire d'intensité et de direction.

Il m'a semblé qu'on ne pouvait guère expliquer cette sorte de paradoxe qu'en considérant qu'il n'entre point dans l'esprit des procédés analytiques d'admettre que le point  $P$  commence brusquement à se mouvoir avec la vitesse finie et constante  $b$ , et que les formules ci-dessus doivent supposer tacitement que ce point était déjà en mouvement avant d'être parvenu au lieu où on le suppose arrivé à l'instant par lequel on compte  $t=0$ . Ce qu'on appelle ici vitesse initiale ne doit donc être autre chose que celle qu'il faudrait imprimer à  $M$ , à cette époque, afin de suppléer au défaut effectif du mouvement de ce point, antérieurement à cette même époque ; et voilà sans doute pourquoi cette vitesse initiale n'est point à la fois arbitraire de grandeur et de direction. Je ne propose ceci, au surplus, que comme une simple conjecture, qui a besoin d'être mûrie par la réflexion.

Afin donc de déterminer la constante  $C$ , je supposerai qu'à l'époque pour laquelle on compte  $t=0$ , le point  $M$  se trouve avoir une vitesse  $c$ , soit imprimée, soit antérieurement acquise, dans une di-

rection formant un angle  $\beta$  avec l'axe des  $x$ , et dont les composantes, respectivement parallèles aux axes des  $x$  et des  $y$ , seront conséquemment  $c\cos.\beta$  et  $c\sin.\beta$ ; je supposerai d'ailleurs, avec M. Français, qu'à la même époque le point  $P$  est à l'origine et que la verge  $a$  fait un angle  $\alpha$  avec l'axe des  $x$ ; c'est-à-dire, que je supposerai qu'on a en même temps

$$t=0, \frac{dx}{dt}=c\cos.\beta, \frac{dy}{dt}=\sin.\beta, x=a\cos.\alpha, y=a\sin.\alpha.$$

A l'aide de ces diverses suppositions, les équations (9) et (10) deviendront

$$\begin{aligned} c\sin.\beta &= Ca\cos.\alpha, \\ c\cos.\beta &= b - Ca\sin.\alpha; \end{aligned}$$

d'où

$$C = \frac{c\sin.\beta}{a\cos.\alpha} = \frac{b - c\cos.\beta}{a\sin.\alpha}, \quad (12)$$

ce qui donne l'équation de relation

$$c\cos.(\beta - \alpha) = b\cos.\alpha. \quad (13)$$

Si présentement on intègre l'équation (11) on trouvera

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{ab}{C} \operatorname{Arc.} \left( \sin. = \frac{y}{a} \right) + C';$$

les circonstances initiales du mouvement donnent, en réduisant

$$0 = \frac{ab}{C} \alpha + C',$$

en sorte qu'on a définitivement

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{ab}{C} \left\{ \operatorname{Arc.} \left( \sin. = \frac{y}{a} \right) - \alpha \right\}. \quad (14)$$

équation dans laquelle, en vertu de la relation (13), on pourra substituer pour  $C$  l'une quelconque des deux valeurs données par les équations (12). On aura ensuite

$$v^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = C^2 a^2 + 2Cby - b^2.$$

Mais l'équation (9) donne , en intégrant et ayant égard aux circonstances initiales du mouvement ,

$$Ct - \alpha = \text{Arc.} \left( \text{Sin.} = \frac{y}{a} \right) ;$$

d'où

$$y = a \text{Sin.}(Ct - \alpha) ;$$

donc

$$v^2 = C^2 a^2 + 2abC \text{Sin.}(Ct - \alpha) - b^2. \quad (15)$$

Il paraît bien établi , par tout ce qui précède , que , tant qu'on fera abstraction du frottement et de la résistance du milieu , et qu'on supposera le mouvement du point *P* rectiligne et uniforme , la trajectoire plane sera une cycloïde. Supposons présentement , s'il est possible , qu'en ayant égard soit au frottement , soit à la résistance du milieu , soit à tout autre obstacle agissant dans un sens directement opposé à celui du mouvement du point *M* , la trajectoire pût devenir la courbe aux tangentes égales ; la suppression de tous ces obstacles revenant à l'introduction d'une force égale et contraire à leur somme , dirigée dans le sens du mouvement , ne devrait altérer en aucune sorte la nature de la courbe , et n'aurait d'autre effet que d'augmenter ou diminuer plus ou moins la tension ou compression de la verge  $\alpha$  , et de faire varier l'intensité et la direction de la puissance variable à appliquer au point *P* pour lui faire décrire une ligne droite d'un mouvement uniforme , avec la vitesse  $b$  ; la trajectoire devrait donc dans ce cas , comme dans le premier , être une courbe aux tangentes égales ; or , nous venons de voir qu'alors elle est une cycloïde ; donc dans le premier cas elle ne saurait être une courbe aux tangentes égales. Ainsi , loin que jamais , par l'effet du frottement et de la résistance du milieu , la trajectoire puisse devenir une courbe aux tangentes égales , cette courbe est peut-être la seule au contraire que le point *M* ne puisse jamais décrire , du moins tant que ce point ne sera soumis à l'action d'aucune force étrangère au système.

Pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet, je vais finalement chercher quelle est la force accélératrice qui devrait agir sur le point  $M$  pour lui faire décrire la courbe aux tangentes égales ; c'est-à-dire, que je vais résoudre le problème suivant :

*PROBLÈME.* Pendant qu'un point  $P$  parcourt l'axe des  $x$ , d'un mouvement uniforme, avec la vitesse  $b$ , un autre point  $M$  se meut d'un mouvement varié et curviligne sur le plan des  $xy$ . Le mouvement de ce dernier point est tel que toujours il se trouve à une même distance constante  $a$  du point  $P$  et qu'en outre la droite mobile qui joint ces deux points est perpétuellement tangente à la courbe décrite par le point  $M$ . On demande d'après cela quelle est la nature de cette courbe, et quelle est la force accélératrice qui agit sur  $M$  ?

*Solution.* Soient conservées les notations et conventions du problème précédent. L'invariabilité de la distance entre les points  $M$  et  $P$  sera exprimée par l'équation

$$(x-x')^2+y^2=a^2; \quad (1)$$

et la propriété dont jouit la droite qui les joint, d'être perpétuellement tangente à la courbe décrite par  $M$ , sera exprimée par cette autre équation

$$\frac{y}{x-x'}=\frac{dy}{dx}, \quad \text{ou} \quad y=(x-x')\frac{dy}{dx}. \quad (2)$$

Éliminant  $x-x'$  entre elles, il viendra

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}};$$

équation dont l'intégrale est

$$x=\sqrt{a^2-y^2}-a\text{Log.}\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}+C.$$

Si, pour déterminer la constante, on suppose, comme ci-dessus, qu'on ait en même temps

$$x=a\cos.\alpha, \quad y=a\sin.\alpha$$

il viendra

$$C=a\log.\frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\alpha}=a\log.\cot.\frac{1}{2}\alpha=-a\log.\tan.\frac{1}{2}\alpha;$$

ce qui donne, enfin, pour l'équation de la courbe aux tangentes égales,

$$x=\sqrt{a^2-y^2}-a\log.\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y\tan.\frac{1}{2}\alpha}. \quad (3)$$

Présentement, en considérant  $t$  comme la variable indépendante, nous pouvons mettre l'équation (2) sous la forme

$$y\frac{dx}{dt}-\sqrt{a^2-y^2}\cdot\frac{dy}{dt}=0. \quad (4)$$

d'un autre côté, en différenciant l'équation (1), il vient, à cause de  $\frac{dx'}{dt}=b$ ,

$$\sqrt{a^2-y^2}\cdot\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=b\sqrt{a^2-y^2}. \quad (5)$$

De ces deux équations on tire

$$\frac{dx}{dt}=\frac{b(a^2-y^2)}{a^2}, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{by\sqrt{a^2-y^2}}{a^2}. \quad (7)$$

On trouve ensuite, par une nouvelle différentiation,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2b^2y^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^4}, \quad (8)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = + \frac{b^2y(a^2 - 2y^2)}{a^4}. \quad (9)$$

En désignant donc par  $X$ ,  $Y$ , respectivement, les composantes de la force accélératrice, parallèlement aux axes, on aura

$$X = - \frac{2b^2y^2\sqrt{a^2 - y^2}}{a^4}, \quad Y = + \frac{b^2y(a^2 - 2y^2)}{a^4};$$

et, conséquemment, si l'on désigne cette force par  $\phi$ , on aura

$$\phi = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{b^2y}{a^2};$$

et elle fera, avec l'axe des  $x$ , un angle dont la tangente tabulaire sera

$$\frac{Y}{X} = - \frac{a^2 - 2y^2}{2y\sqrt{a^2 - y^2}};$$

d'où il est facile de conclure que ses composantes, suivant la tangente et suivant la normale, seront respectivement

$$\frac{b^2y^2}{a^4}, \quad \frac{b^2y\sqrt{a^2 - y^2}}{a^3}.$$

On voit donc que la puissance  $\phi$  n'est point dirigée suivant  $MP$ .

Rien ne serait plus facile maintenant que d'obtenir  $x$ ,  $y$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $v$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$  et  $\phi$  en fonction de  $t$ ; mais nous croyons superflu de nous arrêter à la recherche de ces diverses expressions.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Problème de dynamique.*

LE point de suspension d'un pendule simple , à l'état de repos, étant subitement entraîné d'un mouvement rectiligne et uniforme , avec une vitesse connue , le long d'une droite horizontale , on propose d'assigner la nature de la courbe décrite par l'extrémité inférieure de ce pendule , ainsi que toutes les autres circonstances de son mouvement ?

On fait abstraction ici de la résistance du milieu.

### *Théorème de Géométrie.*

Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les plans des faces d'un tétraèdre , de l'un quelconque des points de la surface de la sphère circonscrite , sont tous quatre situés dans un même plan.

---

## ASTRONOMIE PRATIQUE.

*Mémoire sur l'usage du réticule rhombe, pour les observations des taches du soleil et de la lune;*

Par M. H. FLAUGERGUES, astronome, correspondant de la première classe de l'institut.



IL ne paraît pas que les astronomes aient, jusqu'à présent, employé le *Réticule rhomboïde* (\*) pour observer les taches du soleil (\*\*) et de la lune. Toutes les observations de ce genre qui me sont connues, et pour lesquelles on s'est servi de réticules, ont été faites

(\*) C'est ainsi qu'on doit nommer le réticule dont Bradley passe pour être l'inventeur, et non pas *Réticule rhomboïde*, puisque le parallélogramme formé par les côtés de ce réticule est équilatéral, ce qui caractérise le rhombus et le différencie du rhomboïde, suivant la définition d'Euclide : Πόμβος, ὁ ἰσόστρατευός.... Πομβοιδής, δι, ὁ ἰσόστρατευός. (*Euclidis. Elem. lib. I, definit. 32 et 33.*) Il est inconcevable que, depuis plus de soixante ans, les astronomes se soient tous accordés à se servir d'une expression aussi impropre.

(\*\*) L'observation assidue des taches du soleil, outre son utilité générale pour déterminer les éléments de la rotation de cet astre, et pour décider la question fameuse si ses taches appartiennent aux mêmes points physiques du globe du soleil, ou si elles naissent spontanément dans la zone qui leur est affectée, peut encore conduire à la découverte des petites planètes qui peuvent exister dans l'espace, entre Mercure et le soleil, ainsi qu'à celle des comètes dont le périhélie était très-près de cet astre passent par ce point de leur orbite aux environs de leur conjonction inférieure, avec peu de latitude, et ne peuvent ainsi être aperçues que dans leur passage sur le disque du soleil. C'est sans doute un phénomène de ce genre que vit M. Dangos, le 18 janvier 1798, et qu'il avait déjà aperçu en 1784.

au moyen des passages des taches et des bords du soleil et de la lune , ou des cornes de ce dernier astre , lorsqu'il était en croissant , aux fils horizontal et vertical de la lunette d'un quart de cercle , ou par le fil horaire et les obliques d'en reticule de  $45^\circ$ . Un célèbre astronome (\*) pensait même que le reticule rhombe ne pouvait servir pour l'observation des astres qui ont un diamètre considérable , comme le soleil et la lune ; et , pour le rendre propre à cet usage , il avait fait appliquer au reticule de sa lunette parallactique deux fils parallèles à la grande diagonale et passant par le sommet de chaque angle obtus ; mais cette addition , qui complique l'observation , est fort inutile , et l'on peut très-facilement et très-exactement déterminer la position d'une tache à l'égard du centre du soleil ou de la lune avec le reticule rhombe , tel qu'il est décrit dans l'astronomie de M. de Lalande (\*\*) en s'y prenant de la manière suivante.

Soit VYXZ (fig. 1) un réticule rhombe , dont la petite diagonale ZY est parallèle à l'équateur. Représentons par le cercle S l'image du soleil , qui est supposée se mouvoir en rasant par son bord le fil parallèle passant sur la diagonale ZY , et dont le centre décrit par conséquent la ligne AA''' , parallèle à cette même diagonale et à l'équateur. Supposons que , ce centre étant en A , le bord précédent de l'image du soleil touche en B le côté ZX du réticule ; cette image continuant d'avancer , et son centre étant parvenu au point A' , le même bord touchera le côté XY du réticule au point B'. Ce centre parvenu au point A'' , le bord suivant touchera le

(*Clef des cabinets des Souverains* , n.<sup>o</sup> 386 , du 21 pluviôse an 6 , pag. 3485). J'espère que la méthode facile de déterminer la position de ces taches que l'on trouvera dans ce mémoire ramènera l'attention des astronomes sur ce sujet important. Au reste , il est possible que cette méthode ait été déjà trouvée par des astronomes dont les écrits ne me sont pas connus. Il serait à propos de consulter là-dessus le tome 4.<sup>e</sup> des Œuvres du P. Boscovich , où il est beaucoup parlé du réticule de Bradley ; je n'ai pu me procurer cet ouvrage.

(\*) M. Darquier , *Lettres sur l'astronomie pratique* ; Paris 1786 , page 57.

(\*\*) *Astronomie* de M. de Lalande , 3.<sup>e</sup> édit. , tom. 2 , pag. 569 et suiv.

côté ZX du réticule au point  $B''$ ; et enfin, le centre de l'image du soleil parvenu au point  $A'''$ , le même bord touchera le côté XY du réticule au point  $B'''$ . Je nomme *contacts extérieurs* les contacts qui ont lieu aux points B et  $B''$ , et *contacts intérieurs* ceux qui ont lieu aux points  $B'$  et  $B'''$ . Puisque la ligne  $AA'''$  est la ligne décrite par le centre de l'image du soleil, dans son trajet par le réticule, la ligne EF sera la corde décrite par ce centre, en dedans du réticule. Si on tire la diagonale XV, cette ligne sera perpendiculaire à EF qu'elle divisera en deux parties égales au point D. Cette diagonale divisera pareillement l'angle YXZ du réticule en deux angles égaux EXD, FXD. Nommons  $b$  un de ces angles et menons enfin du centre de l'image du soleil, dans ces quatre positions A, A', A'', A''' aux points de contact correspondants, les rayons AB, A'B', A''B'', A'''B''' , dont le second et le troisième se coupent en H sur XV.

Cela posé, les triangles rectangles BAE, DXE, ayant les angles en E opposés au sommet, sont semblables; et, par la même raison, les triangles rectangles  $B'''A'''F$  et DXF, qui ont les angles en F opposés au sommet, sont aussi semblables.

Les triangles rectangles DA'H, B'XH, qui ont les angles en H opposés au sommet, sont semblables; et pareillement les triangles rectangles DA''H, B''XH, qui ont les angles opposés au sommet au même point H, sont aussi semblables.

Par conséquent les angles BAE,  $B''A''E$  sont égaux chacun à l'angle DXE; et les angles  $B'''A'''F$ ,  $B'A'F$  sont égaux chacun à l'angle DXF; c'est-à-dire, que les quatre angles BAE,  $B'A'F$ ,  $B''A''E$ ,  $B'''A'''F$  sont égaux chacun à la moitié de l'angle du réticule ou à  $b$ ; et puisque les côtés AB, A'B', A''B'', A'''B''' sont égaux, les triangles ABE, A'B'F, A''B''E, A'''B'''F sont égaux en tout.

Il est évident qu'au moment du premier contact extérieur, le centre de l'image du soleil étant au point A, sa distance au milieu D de la corde EF est  $AD = AE + \frac{1}{2}EF$ , et qu'au moment du premier contact intérieur, le centre de l'image du soleil étant parvenu au

point  $A'$ , sa distance au même point  $D$  est  $A'D = A'F - \frac{1}{2}EF$ . Si on retranche cette dernière équation de la première (en faisant attention que  $A'F = AE$ ), on aura  $AD - A'D = AA' = AE + \frac{1}{2}EF - A'F + \frac{1}{2}EF = EF$ . On prouvera tout de même (puisque  $A'''F = A''E$ ), que  $A'''D - A''D = A'''A'' = A'''F + \frac{1}{2}EF - A''E + \frac{1}{2}EF = EF$ , d'où l'on tire ce théorème général : *La ligne parcourue par le centre de l'image du soleil, dans l'intervalle de temps entre le premier contact extérieur et le premier contact intérieur, est égale à la ligne que parcourt le même centre dans l'intervalle entre le second contact intérieur et le second contact extérieur ; et ces deux lignes sont chacune égale à la ligne que décrit le centre de l'image du soleil en dedans du réticule.*

D'après ce théorème, qui a lieu dans toute espèce de réticule rhombe, on peut, avec la plus grande facilité, trouver la valeur de la corde que décrit le centre de l'image solaire en dedans du réticule, puisqu'il ne faut pour cela que reduire en degrés l'intervalle de temps entre le premier contact extérieur et le premier contact intérieur, ou l'intervalle de temps entre le second contact intérieur et le second contact extérieur. On comparera ensuite, suivant la méthode qu'exige la nature du rhombe formé par les côtés de ce réticule, cette valeur avec la valeur de la corde décrite par la tache en dedans du réticule, déterminée au moyen du temps que cette tache a employé à le traverser réduit en degrés, et l'on aura la différence de déclinaison entre la tache et le centre du soleil.

Par exemple, dans le réticule de Bradley, où la moitié de la grande diagonale est égale à la petite diagonale, si l'on nomme  $T$  le temps écoulé entre les deux premiers et les deux seconds contacts,  $\theta$  le temps que la tache a employé pour traverser le réticule, et  $D$  la différence de déclinaison, on aura

$$D = (T \curvearrowleft \theta) \cdot (15 \cos. \text{Décl.} \odot),$$

(en supposant que la pendule est réglée sur le moyen mouvement). Le signe  $\curvearrowleft$  indique que l'on doit retrancher  $\theta$  de  $T$  ou  $T$  de  $\theta$ ,

suivant que  $T > b$ . La tache sera au nord du centre du soleil si, la déclinaison du soleil étant boréale, cet astre a passé dans la partie supérieure du réticule, et que le temps que cette tache a employé pour traverser ce réticule soit plus long que le temps que le centre du soleil a employé à le traverser. Si une de ces conditions vient à changer, ou toutes les trois ensemble, la tache sera au sud du centre du soleil.

On doit observer les quatre contacts autant qu'il est possible, parce que l'observation des deux derniers sert à vérifier celle des deux premiers. Cependant, si le champ de la moitié du réticule n'était pas assez grand pour qu'on pût y observer les contacts intérieurs, ce qui arrive lorsque le diamètre de l'image solaire est à la moitié de la grande diagonale du réticule dans un rapport plus grand que celui du rayon à la moitié de la somme du rayon et du sinus de la moitié de l'angle aigu du réticule, on déterminera la corde décrite par le centre du soleil, en dedans du réticule, au moyen seulement des deux contacts extérieurs ; car, dans le triangle rectangle ABE, on a (en supposant le rayon des tables = 1)

$$AE : AB :: 1 : \cos.b ; \text{ donc } AE = \frac{AB}{\cos.b} ; \text{ par la même raison } A'''F$$

$$= \frac{A'''B'''}{\cos.b} = \frac{AB}{\cos.b} ; \text{ et, puisque } AA''' = EF + AE + A'''F, \text{ on a}$$

$$EF = AA''' - \frac{2AB}{\cos.b} ;$$

c'est-à-dire, que *la corde décrite par le centre du soleil en dedans du réticule est égale à la ligne décrite par ce centre dans l'intervalle de temps écoulé entre les deux contacts extérieurs, diminuée du quotient de la division du diamètre du soleil par le cosinus de la moitié de l'angle aigu du réticule.*

Si, à raison de l'interposition des nuages, ou par quelque autre accident, on ne pouvait observer que les deux contacts intérieurs,

on déterminerait de même la valeur de la corde décrite par le centre du soleil, en dedans du réticule; car il est évident que, lors du premier contact intérieur, la distance du centre du soleil au milieu  $D$  de la corde  $EF$  est  $A'D = AF - DF = \frac{A'B'}{\cos.b} - \frac{1}{2}EF$ , et qu'à l'instant du second contact intérieur cette distance est  $A''D = A''E - DE = \frac{A''B''}{\cos.b} - \frac{1}{2}EF$ ; ajoutant ces deux équations, en faisant attention que  $A'B' = A''B'' = AB$ , on aura

$$A'A'' = A'D + A''D = A'A'' = \frac{2AB}{\cos.b} - EF,$$

d'où l'on tire

$$EF = \frac{2AB}{\cos.b} - A'A'' ;$$

c'est-à-dire, que *la corde décrite par le centre du soleil en dedans du réticule est égale au quotient de la division du diamètre du soleil par le cosinus de la moitié de l'angle aigu du réticule, moins la ligne décrite par le centre du soleil dans l'intervalle de temps écoulé entre les deux contacts intérieurs.*

Lorsque le réticule est si petit ou l'amplification de la lunette si grande que le rapport du demi-diámètre de l'image du soleil à la moitié de la grande diagonale du réticule est plus grand que celui du rayon au cosinus vers de la moitié de l'angle aigu du réticule, les contacts de l'image solaire ne peuvent plus avoir lieu, ni en dedans ni en dehors du réticule, et cet instrument devient alors inutile pour l'usage que nous proposons ici.

Ainsi, par exemple, dans le réticule de Bradley, où la moitié  $b$  de l'un des angles aigus est de  $26.^{\circ} 33' 54''$ , si le rapport du demi-diamètre de l'image solaire à la moitié de la grande diagonale du réticule est plus grand que celui de  $1$  à  $0,7236$ , ou que cette demi-diagonale sous-tende dans le ciel un angle plus petit que  $22' 49''$  (le diamètre du soleil apogée étant de  $31' 31''$ ), on ne pourra

observer, dans ce reticule, les contacts intérieurs; et si ce rapport est plus grand que celui de 1 à 0,5528, ou que cette moitié de la grande diagonale sous-tende dans le ciel un angle moindre  $8' 31''$ , ce reticule ne pourra être d'aucun usage pour l'observation des taches du soleil. Hors ce dernier cas, si on a observé seulement les deux contacts extérieurs, et qu'on reduise en degrés le temps écoulé entre ces deux contacts, c'est-à-dire, entre le commencement de l'entrée et la sortie totale du soleil hors du réticule; on retranchera de cet arc le diamètre du soleil divisé par le cosinus de  $26^\circ 33' 54''$ , ou, ce qui revient au même, multiplié par la sécante de cet arc, qui est égale à 1,11803; le reste sera l'arc que l'on peut prendre pour une ligne droite décrite par le centre du soleil en dedans du réticule. On retranchera, au contraire, du diamètre du soleil multiplié par 1,11803, le temps écoulé entre les deux contacts intérieurs réduits en degrés, si on n'a observé que les deux contacts intérieurs, et on aura également la corde décrite par le centre du soleil en dedans du réticule, dans ce dernier cas.

Pour déterminer la différence d'ascensions droites on additionnera les temps des deux contacts extérieurs ou les temps des deux contacts intérieurs, et l'on prendra la moitié de la somme, ce qui donnera le temps du passage du centre du soleil par la diagonale XV ou par le cercle horaire qui passe par le milieu du réticule. On additionnera de même les temps de l'entrée et de la sortie de la tache du réticule, et la moitié de la somme donnera le temps du passage de la tache au même cercle horaire. La différence des temps de ces deux passages sera la différence en ascension droite dont la tache sera plus avancée que le centre du soleil, si le passage de ce centre au cercle horaire a précédé le passage de la tache, et au contraire moins avancée, si le passage de cette tache a suivi le passage du centre du soleil.

Si on observe le premier contact extérieur et le premier contact intérieur ou bien le second contact intérieur et le second contact extérieur, on pourra également déterminer le temps du passage du

centre du soleil par le cercle horaire qui passe par le milieu du réticule. Pour cela , on remarquera que la distance du centre de l'image solaire à la grande diagonale du réticule à l'instant du premier contact extérieur est égale à  $\frac{AB}{\cos.b} + \frac{1}{2}EF$ , et que cette distance , à l'instant du premier contact intérieur , est égale à  $\frac{AB}{\cos.b} - \frac{1}{2}EF$ ; donc , au milieu du temps écoulé entre le premier contact extérieur et le premier contact intérieur , la distance de l'image solaire à cette diagonale à droite est égale à  $\frac{AB}{\cos.b}$  ; par la même raison , le centre de l'image solaire , au milieu du temps écoulé entre le second contact intérieur et le second contact extérieur est éloigné de la même diagonale à gauche de la même quantité  $\frac{AB}{\cos.b}$  ; par conséquent , pour avoir le temps du passage du centre du soleil au cercle horaire qui passe par le milieu du réticule , on additionnera le temps du premier contact extérieur avec le temps du premier contact intérieur , on prendra la moitié de la somme à laquelle on ajoutera la quantité  $\frac{AB}{\cos.b}$  réduite en temps , c'est-à-dire , le demi-diamètre du soleil divisé par  $15\cos.\Theta\cos.b$  ; on retranchera au contraire cette même quantité de la moitié de la somme des temps du second contact intérieur et du second contact extérieur ; et , dans les deux cas , on aura le temps du passage du centre du soleil au cercle horaire qui passe par le milieu du réticule ; et , en comparant ces temps avec le temps du passage de la tache par le même cercle , on aura la différence d'ascension droite de cette tache avec le centre du soleil.

Le réticule rhombe peut , comme on voit , servir pour déterminer la position des taches d'un astre dont on ne peut voir qu'un seul bord : comme cela a lieu pour la lune ( le jour de l'opposition excepté ) ; puisqu'il suffit , pour avoir la corde décrite par le centre de la lune , d'observer le premier contact extérieur et le premier contact

contact intérieur du bord précédent, lorsque la lune est en croissant, ou le second contact interieur et le second contact extérieur, lorsque la lune est en décours. On prendra la différence entre le temps écoulé entre ces deux contacts, respectivement dans chaque cas, et le temps que la tache a mis pour traverser le reticule, en retranchant le plus petit du plus grand; et on multipliera cette différence de temps, pour la réduire en arc ( si le reticule employé est celui de Bradley ) par

$$\frac{360.^{\circ}(\text{Cos.Décl.App.})}{\Theta},$$

(  $\Theta$  étant le temps écoulé entre le passage de la lune au méridien qui a précédé et celui qui a suivi l'observation ) le produit sera la différence de déclinaison entre la tache et le centre de la lune. La tache sera au nord du centre de la lune si , la lune étant au nord de l'équateur et passant par la partie supérieure du réticule, le temps employé par la tache pour traverser ce réticule est plus long que le temps écoulé entre les deux contacts. La tache sera , au contraire , au sud du centre de la lune , si une de ces conditions vient à changer , ou toutes les trois ensemble.

Pour déterminer le passage du centre de la lune par le cercle horaire qui passe par le milieu du réticule , on remarquera , comme nous l'avons déjà fait , que la distance de ce centre à ce cercle horaire , à l'instant du premier contact extérieur est égale à  $\frac{AB}{\text{Cos.}b} + \frac{1}{2}EF$  , et que cette distance , à l'instant du premier contact intérieur est égale à  $\frac{AB}{\text{Cos.}b} - \frac{1}{2}EF$  ; donc , au milieu du temps écoulé entre le premier contact extérieur et le premier contact intérieur , la distance du centre de la lune au cercle horaire est égale à  $\frac{AB}{\text{Cos.}b}$  ; par conséquent , pour avoir le passage de ce centre à ce cercle , on additionnera le temps du premier contact extérieur avec le temps du premier contact intérieur , et on prendra la moitié de la somme à laquelle on ajoutera

*Tom. IV.*

la quantité  $\frac{AB}{\cos.b}$  réduite en temps , c'est-à-dire , le demi-diamètre horizontal de la lune multiplié par

$$\frac{\Theta}{360^\circ \cos.\text{Décl. App.} \cdot \cos.b};$$

on retranchera au contraire cette même quantité de la moitié de la somme des temps du second contact intérieur et du second contact extérieur , et on aura , dans les deux cas , le passage du centre de la lune par le cercle horaire qui passe par le milieu du réticule ; et , en comparant ce temps avec le temps du passage de la tache par le même cercle , on conclura la différence d'ascension droite entre la tache et le centre de la lune.

On corrigera ensuite les différences d'ascension droite et de déclinaison trouvées par les méthodes précédentes des effets du changement de la réfraction et de la parallaxe en déclinaison pendant le temps du passage par le réticule , suivant les formes connues (\*).

Le calcul de la différence des déclinaisons est un peu plus simple , en se servant du réticule de Bradley ; mais ce petit avantage ne compense pas la difficulté qu'il y a de construire exactement ce réticule. Je propose aux astronomes de substituer au rhombe choisi par Bradley un rhombe composé de deux triangles équilatéraux opposés , et décrits sur une même ligne servant de base qui devient la petite diagonale de ce rhombe représenté dans la figure. La description du triangle équilatéral qui fait le sujet de la première proposition des éléments d'Euclide , est la plus simple et la plus facile de toutes les opérations géométriques. On pourra donc cons-

(\*) Voyez l'*Astronomie* de M. de Lalande , 3.<sup>e</sup> édit. , tom. 2 , pag. 679 et suiv. , ou le *Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique* par M. Cagnoli , 2.<sup>e</sup> édit. , pag. 476 et suiv.

truire , avec la plus grande exactitude , le réticule que je propose ; et , pour réduire les observations que l'on fera avec ce nouvel instrument , il suffit de remarquer que la moitié CX de la grande diagonale est à la petite diagonale YZ ( égale au côté du rhombe ) comme  $\sqrt{3}$  est à 2. Il faut donc multiplier par  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  la différence des cordes décrites dans ce réticule par les astres que l'on compare ; c'est-à-dire ( en conservant les dénominations précédentes ) , qu'on a , pour les observations faites à ce réticule ,

$$D = (T \infty \theta) \cdot \left( \frac{15\sqrt{3}}{2} \cdot \text{Cos.Décl.}\Theta \right)$$

$$= (T \infty \theta) \cdot (12,9904 \cdot \text{Cos.Décl.}\Theta).$$

On pourrait même , sans craindre d'erreur sensible , multiplier simplement la différence des temps des passages par 13 fois le cosinus de la déclinaison du soleil ; et le calcul des observations , faites au nouveau réticule sera aussi simple que celui des observations faites au réticule de Bradley.

A l'égard des formules que nous avons données pour les observations des taches de la lune , on les réduira à ce nouveau réticule , en les multipliant par  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ou par 0,866 ; et comme , dans ce nouveau réticule , l'angle  $b$  est de 30. $^{\circ}$  , il faudra diviser le diamètre du soleil par le cosinus de 30. $^{\circ}$  , ou , ce qui revient au même , le multiplier par la sécante qui est égale à 1,1547 , dans toutes les formules où entre l'expression du diamètre du soleil , divisé par le cosinus de la moitié de l'angle aigu du réticule. Dans ce réticule la moitié de la grande diagonale doit sous-tendre dans le ciel un angle de plus de 23' 39'' pour que les contacts intérieurs puissent avoir lieu , et de plus de 7' 53'' pour les contacts extérieurs.

## DYNAMIQUE.

*Solution nouvelle du problème de la Tractoire plane, et  
éclaircissements sur ce problème ;*

Par M. DUBUAT, professeur à l'école de l'artillerie et du  
génie.



Lettre de M. FRANÇAIS, professeur à l'école de l'artillerie  
et du génie,

*Au Rédacteur des Annales ;*

MONSIEUR ,

**S**i j'avais prévu que vous dussiez publier aussi prochainement la solution donnée par feu mon frère du problème de la *Tractoire* (\*), je n'aurais pas omis la phrase suivante , qui vient immédiatement après l'équation  $c' \cos.\alpha + c \sin.\alpha = b \cos.\alpha$ .

« Il faut faire attention que ces vitesses initiales ne sont pas celles qu'on a pu imprimer au mobile M par quelque impulsion ; ce sont les résultats et de l'impulsion imprimée à M et de l'action de P sur M ; de sorte que , s'il n'y a point d'impulsion , elles

---

(\*) Voyez la page 305 de ce volume.

- sont dues uniquement à l'action de P. La vitesse  $b$  n'est pas non plus due à la seule action de la force accélératrice  $p$ , mais à cette action modifiée par l'effet de l'impulsion donnée à M. »

Cette phrase aurait servi à éclaircir l'espèce de paradoxe que vous trouvez dans cette équation de condition. Mais voici une note, sur le même objet, qui m'a été remise par mon collègue M. Dubuat; elle explique complètement la signification de cette équation, et offre un très-bel exemple de la manière de déterminer les vitesses initiales dans les problèmes de mécanique. Vous penserez sans doute comme moi, Monsieur, qu'elle ne sera pas déplacée dans les *Annales*.

1. L'équation  $c'\cos.\alpha + c\sin.\alpha = b\cos.\alpha$  n'est autre chose que l'équation générale de condition  $(x-x')(dx-dx') + ydy = 0$ , dans laquelle on a mis pour les variables  $dx'$ ,  $dx$ ,  $dy$ ,  $x-x'$ ,  $y$  les valeurs  $bdt$ ,  $c'dt$ ,  $cdt$ ,  $a\cos.\alpha$ ,  $a\sin.\alpha$ , qu'elles ont à l'origine du mouvement.

2. Or, l'équation générale  $(x-x')(dx-dx') + ydy = 0$  signifie que les vitesses variables  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  du point M, dans la direction des axes des coordonnées, sont telles que, si de la vitesse  $\frac{dx}{dt}$ , suivant l'axe des  $x$ , on retranche la vitesse  $\frac{dx'}{dt}$  du point P, la vitesse restante  $\frac{dx-dy}{dt}$  forme, avec la vitesse  $\frac{dy}{dt}$  suivant l'axe des  $y$ , une résultante perpendiculaire au rayon vecteur PM; d'où il suit que la vitesse du point M, considérée soit au commencement soit dans la suite du mouvement, peut toujours être décomposée en deux vitesses, l'une parallèle à l'axe des  $x$  constante et égale à  $b$ , l'autre perpendiculaire au rayon vecteur, et dont la valeur peut être quelconque.

3. Donc, si la vitesse imprimée au point M, à l'origine du mouvement, n'est pas décomposable en deux vitesses suivant la même

loi, cette vitesse n'est pas la vitesse initiale d'après laquelle il faut déterminer les constantes d'intégration.

4. Soit, à l'origine du mouvement,  $V$  la vitesse imprimée au point  $M$ , et  $\beta$  l'angle que fait sa direction avec l'axe des  $x$ : ses composantes sont  $VCos.\beta$ , dans le sens des  $x$ , et  $VSin.\beta$ , dans le sens des  $y$ .

La première composante  $VCos.\beta$  est équivalente aux deux vitesses  $b$  et  $VCos.\beta - b$ , dont la première  $b$  subsiste seule, en vertu de l'équation de condition; mais la vitesse  $VCos.\beta - b$  n'est pas détruite en totalité: en la décomposant en deux vitesses, l'une suivant le rayon vecteur, et l'autre perpendiculaire à ce rayon; celle-ci, dont l'expression est  $(VCos.\beta - b)Sin.\alpha$ , subsiste, tandis que l'autre est détruite.

La vitesse  $VSin.\beta$ , imprimée dans le sens des  $y$ , étant aussi décomposée en deux vitesses, l'une suivant le rayon vecteur, et l'autre perpendiculaire à ce rayon; la seconde subsiste seule, et son expression est  $VSin.\beta Cos.\alpha$ .

5. La vitesse initiale, résultant de la vitesse imprimée  $V$ , est donc composée d'une vitesse  $b$ , parallèle à l'axe des  $x$ , et d'une vitesse  $(VCos.\beta - b)Sin.\alpha + VSin.\beta Cos.\alpha$ , perpendiculaire au rayon vecteur; ce qui donne pour la composante  $c'$  de la vitesse initiale, suivant l'axe des  $x$

$$c' = b \pm \{ VSin.(\alpha + \beta) - bSin.\alpha \} Sin.\alpha ;$$

et pour la composante  $c$  de la vitesse initiale suivant l'axe des  $y$

$$c = \pm \{ VSin.(\alpha + \beta) - bSin.\alpha \} Cos.\alpha .$$

6. Mais voici une autre difficulté que présentent les équations (11) et (12).

Si l'on fait, dans la première  $c=0$ , ou  $c'-b=0$  dans la se-

conde, on a  $x = \sqrt{a^2 - y^2} + \infty$ ; ce qui n'a pas de signification. Pour lever cette difficulté, je remarque qu'en vertu de l'équation de condition  $(c'-b)\cos.\alpha + c\sin.\alpha = 0$ , l'hypothèse  $c=0$  donne  $(c'-b)\cos.\alpha = 0$ , et par conséquent  $c'=b$  ou  $\cos.\alpha = 0$ .

Soient d'abord  $c=0$ ,  $c'=b$ . Ces deux équations signifient que la vitesse initiale du point M, parallèle à l'axe des  $y$  est nulle, et que sa vitesse initiale parallèle à l'axe des  $y$  est  $b$ , et égale par conséquent à la vitesse du point P dans le même sens; les deux points M et P sont donc animés, à l'origine du mouvement, de vitesses égales et parallèles; l'équation de condition laisse subsister ces deux vitesses dans le premier instant et dans toute la suite du mouvement. Le point M décrit donc une droite parallèle à l'axe des  $x$ , avec une vitesse constante et égale à  $b$ ; ce qui donne  $y = Const.$  et  $x = bt + Const.$

Soit, en second lieu,  $c=0$  et  $\cos.\alpha = 0$ . Ces deux équations signifient que la vitesse initiale du point M parallèlement aux  $y$ , est nulle, et que l'ordonnée du même point est aussi nulle, à l'origine du mouvement, sans rien déterminer sur la vitesse initiale parallèle aux  $x$ . Les deux points M, P, à l'origine du mouvement, sont donc sur l'axe des  $x$ , et le point P a une vitesse  $b$  qui, en vertu de l'équation de condition, ne peut ni augmenter ni diminuer. Il est aisément de conclure de là que le système des deux points se mouvra, dans le premier instant et pendant toute la durée du mouvement, sur l'axe des  $x$ , avec une vitesse commune  $b$ ; c'est-à-dire, qu'on aura  $y=0$ ,  $x=bt + Const.$

Au surplus, le problème peut être résolu de la manière suivante:

7. Les équations de condition sont, en faisant le rayon vecteur = 1,

$$(x-x')^2 + y^2 = 1, \quad x' = bt;$$

celles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu(x-x') , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mu y ;$$

$\mu$  étant une indéterminée. Soient  $y = \text{Sin.}\phi$  et  $x-x' = \text{Cos.}\phi$ ; en substituant ces valeurs dans les équations du mouvement, on trouve

$$-\frac{d^2\phi}{dt^2} \text{Sin.}\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2} \text{Cos.}\phi = \mu \text{Cos.}\phi ,$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \text{Cos.}\phi - \frac{d^2\phi}{dt^2} \text{Sin.}\phi = \mu \text{Sin.}\phi ;$$

et, en éliminant  $\mu$ ,

$$d^2\phi = 0 , \text{ donc } \phi = At + A' , \text{ et}$$

$$x = bt + \text{Cos.}(At + A') , \quad y = \text{Sin.}(At + A').$$

En déterminant les constantes d'après la vitesse initiale  $V$ , faisant avec l'axe des  $x$  un angle  $\beta$ , on a

$$x = bt + \text{Cos.}\{[V\text{Sin.}(\alpha+\beta) - b\text{Sin.}\alpha]t + \alpha\} ,$$

$$y = \text{Sin.}\{[V\text{Sin.}(\alpha+\beta) - b\text{Sin.}\alpha]t + \alpha\} .$$

Ces formules expriment que le point M se meut autour du point P d'un mouvement uniforme et continu, avec une vitesse  $V\text{Sin.}(\alpha+\beta) - b\text{Sin.}\alpha$ .

8. Si l'on suppose, comme ci-dessus, que la vitesse initiale du point M, parallèle à l'axe des  $y$  est nulle, et que celle parallèle à l'axe des  $x$  est  $b$ ; on trouve, en faisant  $V=b$  et  $\beta=0$ ,  $y=\text{Sin.}\alpha$ ,  $x=bt + \text{Cos.}\alpha$ ; résultat conforme à celui du n.<sup>o</sup> 6. Si l'on suppose encore que la vitesse initiale du point M, parallèlement aux  $y$  est nulle, et que l'ordonnée du même point est aussi nulle, à l'origine du mouvement; on trouvera, en faisant  $\alpha=0$ ,  $\beta=0$ , conformément à ces hypothèses,  $y=0$ ,  $x=bt+1$ , comme ci-dessus.

Metz, le 25 avril 1814.

CHRONOLOGIE.

## CHRONOLOGIE.

*Supplément à l'article sur le calendrier inséré à la page 273 de ce volume ;*

Par M. J. F. FRANÇAIS, professeur à l'école de l'artillerie et du génie.



**PROBLÈME III.** Trouver l'âge moyen de la lune, pour une date donnée d'une année quelconque, tant dans le calendrier Julien que dans le calendrier Grégorien ?

*Solution.* En conservant les notations du problème 1.<sup>er</sup> et représentant de plus par  $i$  le reste de la division de la date du jour donné, comptée depuis le 1.<sup>er</sup> janvier, par 59, et par  $L$  l'âge cherché de la lune, on aura

$$L = 53 + i - d = 53 + i - d - 30 = 53 + i - d - 59 = 53 + i - d - 89.$$

on choisit, entre ces quatre valeurs, celle qui donne  $L < 30$ .

*Remarque.* On peut obtenir immédiatement  $i$ , en ajoutant à la date du mois le nombre correspondant de la table suivante.

| janv. | fév. | mars. | avril. | mai. | juin. | juil. | août. | sept. | oct. | nov. | déc. |
|-------|------|-------|--------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| 0     | 31   | 0     | 31     | 2    | 33    | 4     | 35    | 7     | 37   | 9    | 39   |

*Exemple.* On demande l'âge de la lune au 17 d'avril 1453, dans le calendrier Grégorien ?

On a ici  $d=22$ ,  $i=48$ ; donc

*Tom. IV.*

$$L=53+48-22-59=20,$$

ainsi la lune aura 20 jours.

S'il s'agissait du 12 d'avril de la même année, dans le calendrier Julien, on aurait  $d=20$ ,  $i=43$ ; d'où

$$L=53+43-20-59=17,$$

ainsi la lune aura 17 jours.

Je ne pense pas que l'âge moyen de la lune, donné par cette méthode, diffère jamais d'un jour entier de son âge vrai.

Ce problème joint aux deux autres me paraît présenter un calendrier perpétuel aussi complet qu'il soit possible, du moins pour l'usage civil, qui est l'objet principal d'un calendrier.

Metz, le 25 d'avril 1814.

## GÉOMÉTRIE.

*Recherche de la surface plane de moindre contour, entre toutes celles de même étendue, et du corps de moindre surface, entre tous ceux de même volume;*

Par un A B O N N É.

GERGONNE



DANS ce qui va suivre, j'admettrai, comme propositions faciles à établir, les deux lemmes suivans :

*LEMME I. Entre tous les trapèzes qui ont les deux mêmes côtés parallèles et la même section perpendiculaire à ces côtés, celui dans lequel la somme des côtés non parallèles est un mi-*

nimum, est le trapèze dans lequel la droite qui joint les milieux des côtés parallèles est perpendiculaire à la direction commune de ces côtés.

**LEMME II.** Entre tous les troncs de parallélipipèdes qui ont les quatre mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes, celui dans lequel la somme des aires des faces non parallèles est un minimum, est le tronc de parallélipipède dans lequel les milieux des arêtes latérales se trouvent situés dans un même plan perpendiculaire à la direction commune de ces arêtes. (\*)

**PROBLÈME I.** Entre toutes les surfaces planes d'une même étendue donnée, quelle est celle qui a le moindre périmètre?

**Solution.** Le caractère de la surface cherchée est qu'en conservant la même étendue, elle ne puisse changer de figure, sans augmenter de contour.

Concevons qu'on nous donne une surface plane comme étant celle de moindre contour, parmi toutes celles d'une étendue égale à la sienne.

Menons, dans cette surface, une corde quelconque  $C$ , et une perpendiculaire  $P$  sur le milieu de cette corde. Concevons ensuite une infinité d'autres cordes infiniment voisines les unes des autres, et toutes parallèles à  $C$ ; elles diviseront la surface donnée en éléments que l'on pourra considérer comme des trapèzes, dont les côtés non parallèles formeront, par leur réunion, le périmètre de la surface dont il s'agit.

Supposons que quelques-uns de ces trapèzes n'aient pas les milieux de leurs côtés parallèles sur la droite  $P$ , nous pourrons, dans l'un quelconque de ceux-ci, faire glisser les côtés parallèles perpendiculairement à  $P$ , jusqu'à ce qu'ils soient parvenus à cette situation; nous pourrons en faire ensuite de même pour les deux trapèzes élémentaires entre lesquels celui-là se trouve situé, et continuer ainsi, de proche en proche, jusqu'à ce que nous ayons amené toutes les cordes parallèles à  $C$  à avoir leur milieu sur  $P$ .

---

(\*) Voyez, pour la démonstration de ces propositions, l'article des *Questions résolues*, qui suit immédiatement celui-ci.

Par cette transformation , nous n'aurons rien changé à l'étendue de la surface proposée , et nous aurons ( *Lemme I* ) diminué son contour ; d'où nous devrons conclure que ce contour n'était pas d'abord un *minimum*.

Le caractère de la surface de moindre contour est donc que toutes les cordes perpendiculaires à  $P$  aient leur milieu sur cette droite ou , en d'autres termes , que  $P$  en soit un diamètre principal ; et , puisque la direction de  $P$  est arbitraire , il en faut conclure que tous les diamètres de la surface de moindre contour doivent être des diamètres principaux : propriété qui appartient exclusivement au cercle.

*Corollaire I.* Il résulte de là que , de toutes les surfaces planes de même contour , le cercle est celle qui a le plus d'étendue.

Soient en effet  $C$  un cercle et  $S$  une autre surface plane quelconque de même périmètre  $p$ . Concevons un cercle  $C'$  équivalent à  $S$  , et soit  $p'$  son périmètre. D'après ce qui précède , on aura  $p' < p$  , d'où on devra conclure  $C' < C$  ; puis donc qu'on a  $C' = S$  , on aura aussi  $S < C$ .

*Corollaire II.* De toutes les surfaces planes de même étendue , terminées par une droite donnée  $\alpha$  et par une ligne se terminant aux extrémités de cette droite , celle de moindre contour est le segment de cercle dont  $\alpha$  est la corde.

Soient en effet  $S$  le segment et  $T$  une autre surface équivalente construite aussi sur  $\alpha$  , et soient respectivement  $s$  et  $t$  les longueurs des deux lignes qui , avec  $\alpha$  , terminent ces surfaces. Soit achevée la circonférence dont  $s$  fait partie ; soient  $s'$  l'arc et  $S'$  le segment supplémentaires ; on aura , par l'hypothèse  $S + S' = T + t$  ; si donc on pouvait avoir  $s > t$  , on aurait aussi  $s' + s > s' + t$  , d'où il résulterait cette conséquence absurde que le cercle n'est point la surface du moindre contour , parmi toutes celles de même étendue.

*Corollaire III.* De toutes les surfaces planes de même contour , terminées par une droite donnée  $\alpha$  , et par une ligne se terminant aux deux extrémités de cette droite , celle de plus grande étendue est le segment de cercle dont  $\alpha$  est la corde.

Soient en effet  $S$  ce segment et  $T$  une autre surface construite également sur  $\alpha$ , et ayant même périmètre  $p$  que  $S$ . Soit construit sur  $\alpha$  un segment  $S'$  équivalent à  $T$  et dont le périmètre soit  $p'$ ; nous aurons (Coroll. II)  $p' < p$ , d'où nous conclurons  $S' < S$ ; puis donc que nous avons  $S' = T$ , nous aurons aussi  $T < S$ .

*PROBLÈME II. Entre tous les corps d'un même volume donné, quel est celui qui est terminé par la moindre surface?*

*Solution.* Le caractère du corps cherché est qu'en conservant le même volume, il ne puisse changer de figure sans augmenter de surface.

Concevons qu'on nous donne un corps comme étant celui de moindre surface, entre tous ceux d'un volume égal au sien.

Menons, dans l'intérieur de ce corps, une corde quelconque  $C$ , et, par le milieu de cette corde, conduisons un plan  $P$  qui lui soit perpendiculaire. Par l'intersection de  $C$  et  $P$ , faisons passer arbitrairement, dans le plan  $P$ , deux droites  $M$ ,  $N$  perpendiculaires entre elles. Menons, dans le même plan, une infinité de parallèles à  $M$  et une infinité de parallèles à  $N$ , et enfin par les unes et les autres conduisons des plans perpendiculaires à  $P$ . Ces plans diviseront le corps proposé en une infinité d'élémens, lesquels pourront être considérés comme des troncs de parallélipipèdes dont les faces non parallèles formeront, par leur réunion, la surface du corps dont il s'agit.

Supposons que quelques-uns de ces troncs de parallélipipèdes n'aient pas les milieux de leurs arêtes latérales sur le plan  $P$ ; nous pourrons, dans l'un quelconque de ceux-ci, faire glisser les arêtes latérales, perpendiculairement au plan  $P$ , jusqu'à ce qu'elles soient parvenues à cette situation; nous pourrons ensuite en faire de même pour les huit troncs de parallélipipèdes élémentaires entre lesquels celui-là se trouve situé, et continuer ainsi, de proche en proche, jusqu'à ce que nous ayons amené toutes les cordes parallèles à  $C$  à avoir leur milieu sur le plan  $P$ .

Par cette transformation , nous n'aurons rien changé au volume du corps proposé , et nous aurons (*Lemme II*) diminué sa surface ; d'où nous devrons conclure que cette surface n'était pas d'abord un *minimum*.

Le caractère du corps de moindre surface est donc que toutes les cordes perpendiculaires au plan P aient leur milieu sur ce plan ou , en d'autres termes , que le plan P soit un plan-diamètre principal ; et , puisque la direction de P est arbitraire , il en faut conclure que tous les plans-diamètres du corps de moindre surface doivent être des plans principaux : propriété qui appartient exclusivement à la sphère.

Par un raisonnement tout à fait semblable à celui qui a été employé ci-dessus , on conclura facilement de ce résultat les trois corolaires suivans :

*Corollaire I.* Entre tous les corps de même surface , la sphère est celui qui a le plus grand volume.

*Corollaire II.* De tous les corps de même volume , terminés d'une part par un cercle donné et de l'autre par une surface se terminant à la circonférence de ce cercle , celui de moindre surface est le segment sphérique dont ce cercle est la base.

*Corollaire III.* De tous les corps de même surface , terminés d'une part par un cercle donné et de l'autre par une surface se terminant à la circonférence de ce cercle , celui du plus grand volume est le segment sphérique qui a ce même cercle pour base.

*Remarque.* J'ai cru d'autant plus utile de ramener la démonstration des propriétés de *minimum* dont jouissent le cercle et la sphère à des notions élémentaires que ces propriétés ne sont pas moins remarquables qu'elles sont importantes , et que les démonstrations qu'on en a données par la méthode des variations , outre qu'elles reposent sur des considérations trop élevées pour être à la portée du vulgaire des géomètres , ne me paraissent point assez développées pour ne laisser aucun nuage dans l'esprit.

Par exemple, Bossut, à la page 474 du second volume de son *Calcul intégral*, ramène le problème à l'intégration des équations

$$dz = pdx + qdy ,$$

$$Pdy + Qdx = 0 ,$$

$$\alpha \left\{ \left( \frac{dp}{dx} \right) + \left( \frac{dQ}{dy} \right) \right\} = 1 ;$$

dans lesquelles on a

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} ;$$

mais, au lieu d'intégrer ces équations, il se contente de faire voir qu'elles sont satisfaites par l'équation de la sphère, ce qui paraît prouver seulement que la sphère est un cas particulier de la surface plus générale qui résout le problème, et n'exclut pas conséquemment toute autre surface qui pourrait également, comme cas particulier, être déduite de celle-là.

L'élimination de P et Q donne l'équation du second ordre

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = C(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$$

et c'est sous cette forme que la présente M. Lacroix à la page (717) de la première édition de son *Traité de calcul intégral*; mais M. Lacroix observe lui-même que cette équation n'est pas seulement satisfait par l'équation d'une sphère, mais encore par celle d'un cylindre. Voilà donc une difficulté qui me paraîtrait digne d'occuper les analystes, et dont l'éclaircissement semblerait propre à jeter quelque lumière sur les applications de la méthode des variations; applications communément trop peu développées dans les traités relatifs à cette branche d'analyse.

## QUESTIONS RÉSOLUES.

*Solutions des quatre problèmes de géométrie proposés  
à la page 236 de ce volume.*



*'Solution du premier problème ;*

Par M. C. CASTELNAU, élève du lycée de Nismes.

**T**HÉORÈME. *De tous les trapèzes qui ont les deux mêmes côtés parallèles , et la même section perpendiculaire à ces côtés , celui de moindre contour est le trapèze isocèle , c'est-à-dire , celui dans lequel la droite qui joint les milieux des côtés parallèles est perpendiculaire à leur direction commune.*

**Démonstration.** Soit le trapèze isocèle ABCD ( fig. 2 ) et un autre trapèze A'B'CD de même hauteur , et dans lequel on ait  $A'B'=AB$  ; et conséquemment  $AA'=BB'$  ; il s'agit de prouver que le contour de ce dernier surpassé celui du premier.

La question se réduit évidemment à prouver que  $DA'+CB'$  est plus grand que  $DA+CB$ .

Pour y parvenir , soit prolongé DA , au - delà de A , de manière qu'on ait  $AE=AD$  et soit menée A'E.

Par cette construction , les triangles AEA' , BCD' sont égaux ; car on a  $AA'=BB'$  ,  $AE=AD=BC$  , et  $\text{Ang. } A'AE = \text{Ang. } DAB = \text{Ang. } CBB'$  ; donc  $EA'=CB'$ .

Mais , dans le triangle DA'E , on a

$DA'$

$$DA' + AE > DE = DA + AE ;$$

on aura donc aussi

$$DA' + CB' > DA + CB. \quad (*)$$

*Solutions des trois autres problèmes ;*

Par un A B O N N É.

**LEMME.** *De tous les troncs de prisme triangulaires dans lesquels une face latérale , l'arête opposée et la section perpendiculaire aux arêtes latérales sont les mêmes , celui dans lequel la somme des aires des bases est la plus petite , est celui où les plans de ces bases sont également inclinés sur celui de la face latérale donnée.*

*Démonstration.* Soient (fig. 3) AGHB la face latérale donnée , MN l'arête opposée et CKF la section perpendiculaire aux arêtes , aussi données.

Soient P , Q les projections respectives de M , N sur AGHB ; menons MP , NQ et PQ , rencontrant respectivement GA , FC , HB en S , L , T ; soit menée KL=MP=NQ ; des points P , Q soient abaissées respectivement sur AG , BH les perpendiculaires PD ,

(\*) La même démonstration prouve très- simplement , 1.<sup>o</sup> que , de tous les triangles de même base et de même hauteur , le triangle isocèle est celui de moindre contour ; 2.<sup>o</sup> que , dans tout triangle , la droite qui va d'un sommet au milieu du côté opposé est moindre que la demi-somme des deux autres côtés.

Par un raisonnement tout à fait semblable à celui de M. Castelnau , on parviendra aisément à démontrer que , de tous les troncs de parallélépipèdes dans lesquels les arêtes latérales et la section qui leur est perpendiculaire sont les mêmes , et où deux faces latérales opposées sont des trapèzes isocèles , celui dont la somme des aires des bases , et conséquemment la surface totale est la plus petite est celui dans lequel les deux autres faces latérales sont aussi des trapèzes isocèles.

J. D. G.

*Tom. IV.*

QE, et soient menées MD, NE, lesquelles seront aussi respectivement perpendiculaires sur GA, HB.

Faisons

$$\begin{aligned} AG = a, \quad \text{Ang. GAC} = \alpha, \quad PS = x, \\ BH = b, \quad \text{Ang. HBC} = \beta, \quad QT = y, \\ KL = MP = NQ = k. \end{aligned}$$

Nous aurons,

$$\text{AireAMG} = \frac{1}{2} AG \cdot MD = \frac{1}{2} AG \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PD}^2} = \frac{1}{2} a \sqrt{k^2 + x^2 \sin^2 \alpha},$$

$$\text{AireBNH} = \frac{1}{2} BH \cdot NE = \frac{1}{2} BH \sqrt{\overline{NQ}^2 + \overline{QE}^2} = \frac{1}{2} b \sqrt{k^2 + y^2 \sin^2 \beta};$$

si donc on a

$$\text{AireAMG} + \text{AireBNH} = \text{minimum} ;$$

on devra avoir

$$a \sqrt{k^2 + x^2 \sin^2 \alpha} + b \sqrt{k^2 + y^2 \sin^2 \beta} = \text{minimum},$$

et par conséquent

$$\frac{ax \delta x \sin^2 \alpha}{\sqrt{k^2 + x^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{by \delta y \sin^2 \beta}{\sqrt{k^2 + y^2 \sin^2 \beta}} = 0; \quad (1)$$

mais, d'un autre côté, on a

$$x + y = SP + QT = ST - PQ = ST - MN = \text{Constante} ;$$

d'où

$$\delta x + \delta y = 0. \quad (2)$$

Par la combinaison de ces deux équations, on aura

$$\frac{ax \sin^2 \alpha}{\sqrt{k^2 + x^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{by \sin^2 \beta}{\sqrt{k^2 + y^2 \sin^2 \beta}}; \quad (3)$$

mais, CF pouvant être également exprimé par  $a \sin \alpha$  et par  $b \sin \beta$ , on doit avoir

$$b \sin \beta = a \sin \alpha; \quad (4)$$

équation qui, multipliant la précédente, donne

$$\frac{x \sin \alpha}{\sqrt{k^2 + x^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{y \sin \beta}{\sqrt{k^2 + y^2 \sin^2 \beta}}; \quad (5)$$

ou

$$\frac{PD}{MD} = \frac{QE}{NE},$$

ou encore  $\cos.MDP = \cos.NEQ$ , d'où  $\text{Ang}.MDP = \text{Ang}.NEQ$ , comme nous l'avions annoncée.

**THÉORÈME.** *De tous les troncs de prismes triangulaires qui ont les trois mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes, celui de moindre surface est le tronc de prisme triangulaire dans lequel les milieux des arêtes latérales sont dans un plan perpendiculaire à leur direction commune.*

*Démonstration.* Ceci revient évidemment à dire qu'il faut que l'inclinaison du plan de l'une des bases sur celui de chacune des faces latérales soit égale à l'inclinaison du plan de l'autre base sur celui de la même face.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi et qu'il y ait au moins une des faces latérales sur laquelle les deux bases soient inégalement inclinées ; en faisant mouvoir l'arête latérale opposée suivant sa propre direction, on pourrait toujours amener les inclinaisons à être égales ; et comme, par cette transformation la surface du tronc se trouverait diminuée (*Lemme*), on devrait en conclure qu'elle n'était pas d'abord un *minimum*.

*Corollaire.* Et, comme tous les troncs de prismes triangulaires qui ont les mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes ont aussi la même surface latérale, il en faut conclure que celui dans lequel le plan qui contient les milieux des arêtes latérales est perpendiculaire à leur direction commune, est aussi celui dont la somme des aires des deux bases est la moindre possible.

**THÉORÈME.** *De tous les troncs de parallélépipèdes qui ont les mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes, celui de moindre surface est le tronc de parallélépipède dans lequel le plan qui contient les milieux des arêtes latérales, est perpendiculaire à leur direction commune.*

*Démonstration.* En effet, tous les parallélépipèdes formés avec

les mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes ayant la même surface latérale , il suffit , pour remplir la condition prescrite , que la somme des aires des bases ou , ce qui revient au même , la somme de leurs moitiés soit la moindre possible ; ce qui ramène la question au précédent corollaire , et prouve la vérité de la proposition.

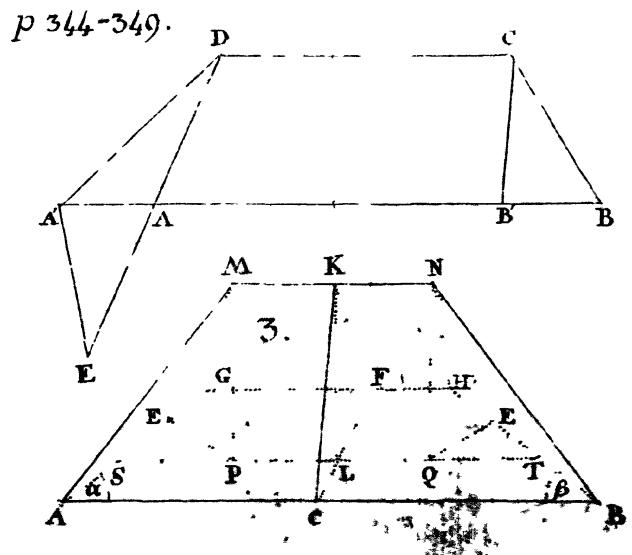
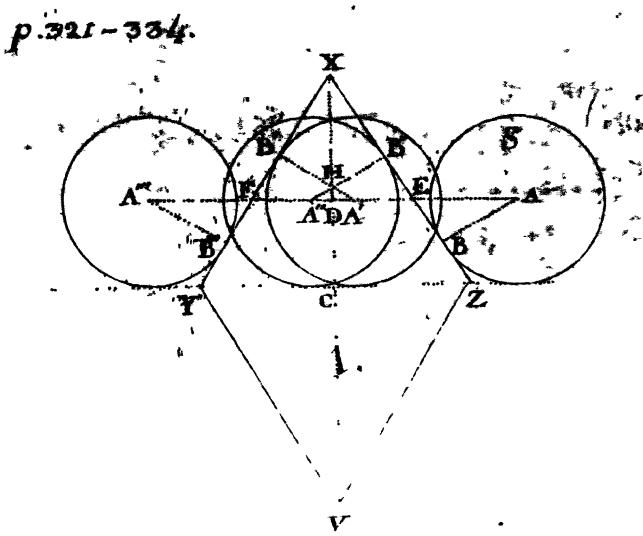
*Corollaire.* Donc aussi de tous les troncs de parallélépipèdes qui ont les mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes , celui dans lequel la somme des aires des bases est la plus petite , est le tronc de parallélépipède dans lequel le plan qui contient les milieux des arêtes latérales , est perpendiculaire à leur direction commune.

*THÉORÈME.* *De tous les troncs de parallélépipèdes qui ont les deux mêmes faces latérales opposées et la même section perpendiculaire aux arêtes latérales , celui de moindre surface est le tronc de parallélépipède dans lequel les plans des deux bases ont des inclinaisons égales sur les faces latérales données.*

*Démonstration.* En effet , dans tous les troncs de parallélépipèdes de cette nature , la surface latérale étant constante ; pour que la surface totale soit un *minimum* , il est nécessaire et il suffit que la somme des aires des bases ou , ce qui revient au même , la somme des moitiés de ces aires soit la moindre possible , ce qui ramène la question au cas du lemme ci-dessus , et démontre conséquemment la vérité de la proposition.

*Corollaire.* Il est facile de conclure de là que , si les deux faces latérales opposées que l'on suppose être données sont des trapèzes isocèles , les deux autres faces latérales opposées devront être aussi des trapèzes isocèles. (\*)

(\*) La théorie développée dans le précédent article étant très-claire , il serait à désirer , afin de rendre cette théorie tout à fait élémentaire , qu'on pût trouver , pour les trois derniers problèmes , ou tout au moins pour le second , quelque solution aussi simple que celle que M. Castelnau a donnée du premier.



J.D.G: fecit.



## GÉOMÉTRIE.

*Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère ;*

Par M. GERGONNE.



DANS un mémoire adressé il y a quelques temps à l'académie de Turin, j'ai déduit d'une analyse très-courte et très-simple les deux propositions suivantes :

1.<sup>o</sup> Trois cercles  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  étant donnés d'une manière quelconque sur un même plan, soient menées les tangentes extérieures communes à  $C$  et  $C'$ , à  $C$  et  $C''$ ; ces tangentes détermineront sur  $C$  deux cordes de contact, se coupant en quelque point  $M$ ; elles détermineront aussi sur les cercles  $C'$  et  $C''$  deux autres cordes de contact lesquelles, prolongées s'il est nécessaire, se couperont en un autre point  $N$ ; or, si l'on joint ces points  $M$  et  $N$  par une droite, les intersections  $P$ ,  $Q$  de cette droite avec  $C$  seront les points où ce cercle sera touché par deux cercles touchant à la fois les trois cercles  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$ , et les touchant tous trois de la même manière; c'est-à-dire, les enveloppant tous trois, ou les touchant tous trois extérieurement.

2.<sup>o</sup> Quatre sphères  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  étant données d'une manière

*Tom. IV, n.<sup>o</sup> XII, 1.<sup>er</sup> juin 1814.*

quelconque dans l'espace , soient circonscrits extérieurement des cônes aux sphères  $S$  et  $S'$ ,  $S$  et  $S''$ ,  $S$  et  $S'''$ ; ces cônes détermineront sur la sphère  $S$  trois lignes de contact dont les plans se couperont en un certain point  $M$ ; ces mêmes cônes détermineront aussi sur  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  trois autres lignes de contact dont les plans , prolongés s'il est nécessaire , se couperont en un autre point  $N$ ; or , si l'on joint ces points  $M$  et  $N$  par une droite , les intersections  $P$ ,  $Q$  de cette droite avec la sphère  $S$  seront les points où cette sphère sera touchée par deux sphères touchant à la fois les quatre sphères  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  et les touchant toutes quatre de la même manière ; c'est-à-dire , les enveloppant toutes quatre ou les touchant toutes quatre extérieurement.

Il est clair que ces propositions donnent la solution directe des problèmes où il s'agit de décrire un cercle qui touche trois cercles donnés , ou de décrire une sphère qui touche quatre sphères données , du moins lorsqu'on exige que les trois cercles ou les quatre sphères donnés soient touchés de la même manière par le cercle ou par la sphère cherchés ; mais j'ai fait voir , dans le mémoire cité , qu'en faisant une combinaison convenable des angles et cônes circonscrits intérieurement avec les angles et cônes circonscrits extérieurement , on pouvait obtenir , par un semblable procédé , les huit cercles qui peuvent toucher à la fois trois cercles donnés et les seize sphères qui peuvent toucher à la fois quatre sphères données. J'ai cherché en outre ce que devenaient les cordes de contact et les plans de lignes de contact , lorsque les rayons de quelques-uns des cercles ou de quelques-unes des sphères données devenaient nuls ou infinis , et j'ai ainsi établi le moyen de ramener à des procédés uniformes , et faciles à retenir , tous les problèmes de Viète sur le contact des cercles , et ceux de Fermat sur le contact des sphères.

L'élegant simplicité de ces solutions , indiquées tout naturellement par l'analyse , m'avait fait désirer que celles qui sont relatives à trois cercles donnés sur un plan s'appliquassent également à trois

cercles donnés sur une sphère (\*); l'analogie m'avait même fait soupçonner fortement qu'il devait en être ainsi. Le calcul m'a montré que j'étais dans l'erreur à cet égard; mais en revanche, il m'a fourni, pour trois cercles donnés sur une sphère, des constructions qui peuvent facilement être transportées à trois cercles donnés sur un plan, et même à quatre sphères données dans l'espace, et qui ne sont pas plus compliquées que celles que je viens d'indiquer sommairement; de manière que j'ai enfin obtenu pour les problèmes de l'une et de l'autre sorte cette parfaite uniformité à laquelle j'avais principalement aspiré.

Avant d'entrer dans le détail des modifications que j'ai fait subir à mes premières constructions, pour les rendre applicables à trois cercles donnés sur une sphère, je dois présenter d'abord quelques remarques propres à en faciliter l'intelligence.

On sait que rien n'est plus facile que d'obtenir l'équation de la corde commune à deux cercles dont les équations sont données: cette équation étant rationnelle, il s'ensuit que la droite à laquelle elle appartient est réelle, lors même que les deux points qui doivent en déterminer la situation sont imaginaires; c'est-à-dire, que deux cercles tracés sur un même plan ont encore une corde commune, lors même qu'ils ne se coupent pas; c'est cette corde que M. Gaultier de Tours a dénommée *l'Axe radical* des deux cercles (\*\*)

On démontre aussi bien facilement, par l'analyse, et presque sans calcul, que, trois cercles étant tracés sur un même plan, soit qu'ils se coupent ou qu'ils ne se coupent pas, leurs axes radicaux ou cordes communes deux à deux concourent en un même point que M. Gaultier a nommé leur *Centre radical*. (\*\*\*)

(\*) M. Carnot, à la page 415 de sa *Géométrie de position*, a donné l'ébauche d'une solution analytique de ce problème. On peut aussi consulter la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome III.<sup>e</sup>, n.<sup>o</sup> 1, janvier 1814, pag. 10.

(\*\*) Voyez le XVI.<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'école polytechnique*.

(\*\*\*) Même ouvrage.

Rien n'est plus aisé, comme on le voit, que de déterminer l'axe radical ou corde commune de deux cercles qui se coupent. Lorsqu'au contraire les deux cercles ne se coupent pas, la chose n'est guère plus difficile. Si en effet on décrit arbitrairement un troisième cercle qui coupe à la fois ces deux-là, il aura avec eux deux cordes communes, et il résulte de ce que nous venons de dire sur le centre radical, que le point de concours de ces deux cordes est un point de l'axe radical des deux cercles donnés; et, comme on sait d'ailleurs que cet axe doit être perpendiculaire à la droite qui joint les centres, il se trouvera entièrement déterminé. Au surplus, on trouvera peut-être plus commode, dans la pratique, de chercher un second point de cet axe, par un procédé pareil à celui qui aura fait trouver le premier.

Sachant ainsi trouver l'axe radical de deux cercles, lors même qu'ils ne se coupent pas, la recherche du centre radical de trois cercles, dans le cas même où ils ne se couperont pas, ne présentera plus aucune difficulté.

Tout ceci peut facilement être étendu à des sphères dans l'espace. Ainsi le plan du cercle commun à deux sphères, lequel plan existe encore lorsque ces sphères ne se coupent pas, est leur *Plan radical*.

On détermine une droite appartenant à ce plan, en construisant une sphère qui coupe à la fois les deux sphères données et prolongeant les plans des intersections jusqu'à ce qu'ils se coupent. Pour déterminer entièrement ce plan, on peut indifféremment, ou déterminer une nouvelle droite qui y soit située, ou conduire par l'un quelconque des points de la première un plan perpendiculaire à la droite qui joint les centres.

Si trois sphères coexistent dans l'espace, elles donneront, en les considérant deux à deux, trois plans radicaux lesquels se couperont suivant une même droite qu'on appellera leur *Axe radical*, et dont la construction n'offrira point de difficulté, d'après ce qui vient d'être dit.

Si , enfin , quatre sphères coexistent dans l'espace , elles donneront , étant prises trois à trois , quatre axes radicaux , lesquels concourront en un même point qui sera le *Centre radical* de ces quatre sphères. Ce centre pourra donc être déterminé par ce qui précède.

Cela posé , soient 1.<sup>o</sup>  $C$  ,  $C'$  ,  $C''$  trois cercles donnés sur un plan ; et soit  $O$  leur centre radical. Soient menées à ces cercles , pris deux à deux , des tangentes communes extérieures ; ces tangentes détermineront sur chaque cercle deux cordes de contact se coupant en un point ; soient , pour les trois cercles respectivement ,  $P$  ,  $P'$  ,  $P''$  ces points d'intersection. Si alors on mène les droites  $OP$  ,  $OP'$  ,  $OP''$  , elles détermineront sur  $C$  ,  $C'$  ,  $C''$  respectivement les points où ils devront être touchés par deux cercles les touchant tous trois et les touchant tous de la même manière.

2.<sup>o</sup> Soient  $S$  ,  $S'$  ,  $S''$  ,  $S'''$  quatre sphères données dans l'espace ; et soit  $O$  leur centre radical. Soient menés à ces sphères , prises deux à deux , des cônes circonscrits extérieurs ; ces cônes détermineront sur chaque sphère trois lignes de contact dont les plans se couperont en un point ; soient , pour les quatre sphères respectivement  $P$  ,  $P'$  ,  $P''$  ,  $P'''$  ces points d'intersection. Si alors on mène les droites  $OP$  ,  $OP'$  ,  $OP''$  ,  $OP'''$  , elles détermineront sur  $S$  ,  $S'$  ,  $S''$  ,  $S'''$  respectivement les points où elles devront être touchées par deux sphères qui les toucheront toutes quatre , et les toucheront toutes de la même manière.

En faisant encore ici une convenable combinaison des angles et cônes circonscrits intérieurement avec les angles et cônes circonscrits extérieurement , on déduit de ces constructions , comme de celles qui ont été précédemment indiquées , la détermination des huit cercles qui peuvent toucher à la fois trois cercles donnés et celle des seize sphères qui peuvent toucher à la fois quatre sphères données. De plus , en faisant à ces constructions les modifications qui conviennent au cas où les rayons de quelques-uns des cercles ou de quelques-uns des sphères donnés deviennent nuls ou infinis , on ramène encore , comme dans le premier cas , à des procédés

uniformes la solution de tous les problèmes de Viète sur le contact des cercles et de ceux de Fermat sur le contact des sphères.

Je ne prétends pas décider si ces procédés ont en eux-mêmes quelque avantage sur les premiers que j'inclinerais même à regarder comme plus simples ; mais c'est sous cette forme seulement que la construction qui fait trouver les cercles qui touchent à la fois trois cercles donnés sur un plan , donne aussi , sans aucune modification , les cercles qui touchent à la fois trois cercles donnés sur une sphère.

C'est à prouver cette assertion que je consacre principalement cet article. Le problème revient évidemment à celui-ci : *Trois cônes de même sommet étant donnés ; construire un quatrième cône , de même sommet qu'eux , qui les touche tous trois?* et c'est sous ce point de vue que je vais l'envisager.

Soient  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  trois cônes donnés , de même sommet , dont les angles génératrices soient respectivement  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ . Soit pris leur sommet commun pour origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires ; et supposons que l'axe du dernier soit l'axe des  $z$ . Représentons en outre par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  respectivement les cosinus des angles que forment les axes du premier et du second avec les axes des coordonnées ; ce qui , comme l'on sait , donnera lieu aux relations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 , \quad (1)$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 . \quad (2)$$

Désignons ensuite par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  les cosinus des angles que forme l'axe du cône cherché avec les axes des coordonnées , ce qui donnera pareillement

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 ; \quad (3)$$

et soit  $R$  son angle génératrice. Si l'on veut que ce cône touche extérieurement les trois cônes donnés, il faudra que l'angle que fera son axe avec l'axe de chacun d'eux soit égal à la somme de leurs angles génératrices; ce qui donnera

$$aA+bB+cC=\cos.(R+r) \ , \quad (4)$$

$$a'A+b'B+c'C=\cos.(R+r') \ , \quad (5)$$

$$C=\cos.(R+r'') \ . \quad (6)$$

Telles sont les équations qu'il faudrait combiner avec l'équation (3), pour obtenir l'angle génératrice  $R$  du cône cherché, et les cosinus  $A, B, C$  des angles que forme son axe avec les axes des coordonnées; et l'on voit évidemment que le problème aurait deux solutions.

Il y a donc deux cônes cherchés dont chacun a une ligne de contact avec l'un quelconque des cônes donnés, avec  $C''$  par exemple; et il est clair, d'après cela, que la recherche du plan qui contient ces deux droites doit être un problème du premier degré seulement.

Soient donc  $x, y, z$  les coordonnées de la ligne de contact de  $C'$  avec le cône cherché; nous connaissons déjà un lieu de cette ligne, et c'est le cône  $C''$  lui-même, dont l'équation est

$$(x^2+y^2)\cos.^2r''=z^2\sin.^2r'' \ ; \quad (7)$$

il n'est donc plus question que d'en chercher un second.

Or, cette ligne devant être dans un même plan avec les axes des deux cônes, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$Ay=Bx \ ; \quad (8)$$

et conséquemment, en éliminant  $A, B, C, R$  entre les cinq équa-

tions (3), (4), (5), (6), (8), l'équation résultante, en  $x$ ;  $y$ ,  $z$  sera celle du second lieu demandé.

Mais on sait qu'une ligne donnée par l'intersection de deux surfaces est aussi sur toute surface dont l'équation serait une combinaison des équations de ces deux-là; d'où il suit que, dans l'élimination, nous pouvons nous aider de l'équation (7) pour simplifier nos résultats. Nous ne ferons ainsi que substituer au lieu cherché quelque autre lieu plus simple, coupant le cône  $C''$  suivant la même droite.

A l'aide de cette attention, l'élimination devient très-facile. On tire des équations (3), (6), (8), en ayant égard à l'équation (7),

$$A = \frac{x \cos r'' \sin(R+r'')}{z \sin r''},$$

$$B = \frac{y \cos r'' \sin(R+r'')}{z \sin r''},$$

$$C = \frac{z \sin r'' \cos(R+r'')}{z \sin r''},$$

ces valeurs étant substituées dans les équations (4) et (5), elles deviendront

$$(ax+by)\cos r'' \sin(R+r'') + cz \sin r'' \cos(R+r'') = z \sin r'' \cos(R+r),$$

$$(a'x+b'y)\cos r'' \sin(R+r'') + c'z \sin r'' \cos(R+r'') = z \sin r'' \cos(R+r').$$

Mais on peut remarquer que

$$\cos(R+r) = \cos\{(R+r'')-(r''-r)\} = \cos(r''-r) \cos(R+r'') + \sin(r''-r) \sin(R+r''),$$

$$\cos(R+r') = \cos\{(R+r'')-(r''-r')\} = \cos(r''-r') \cos(R+r'') + \sin(r''-r') \sin(R+r'').$$

on aura donc, en substituant et divisant par  $\cos(R+r'')$ ;

$$\{(ax+by)\cos r'' - z \sin r'' \sin(r''-r)\} \tan(R+r'') + z \sin r'' \{c - \cos(r''-r)\} = 0,$$

$$\{(a'x+b'y)\cos r'' - z \sin r'' \sin(r''-r')\} \tan(R+r'') + z \sin r'' \{c' - \cos(r''-r')\} = 0;$$

d'où

d'où l'on conclura, par l'élimination de Tang.( $R+r''$ )

$$\frac{(ax+by)\cos.r''-z\sin.r''\sin.(r''-r)}{c-\cos.(r''-r)} = \frac{(a'x+b'y)\cos.r''-z\sin.r''\sin.(r''-r')}{c'-\cos.(r''-r')} ; \quad (9)$$

équation d'un plan dont l'intersection avec C'' doit déterminer sur ce cône la droite suivant laquelle il doit être touché par le cône cherché. Cette équation restant la même lorsqu'on y change simultanément les signes de  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ , il s'ensuit que, pour les huit combinaisons dont les signes de ces angles sont susceptibles, c'est-à-dire, pour les huit solutions du problème, cette équation ne prend que quatre formes distinctes, à chacune desquelles répondent conséquemment deux de ces solutions.

Pour construire le plan exprimé par l'équation (9), il est nécessaire et il suffit de connaître deux droites qui y soient contenues; c'est-à-dire, de trouver deux systèmes de deux équations en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  qui jouissent de la propriété de rendre l'équation (9) identique. Et réciproquement deux manières distinctes quelconques de rendre l'équation (9) identique, sans établir entre  $x$ ,  $y$ ,  $z$  des relations qui excèdent le premier degré, conduiront à la connaissance de deux droites qui détermineront le plan cherché.

Entre les diverses manières de rendre cette équation identique, lesquelles sont en nombre infini, nous choisirons les deux suivantes : 1.<sup>o</sup> nous poserons séparément les deux membres de l'équation (9) égaux à  $\frac{z\sin.^2 r''}{\cos.r''}$ ; 2.<sup>o</sup> nous poserons les mêmes membres égaux à  $-y\cos.r''$ . Cela donnera, toutes réductions faites, les deux systèmes d'équations

$$\left. \begin{array}{l} (ax+by)\cos.^2 r''=z(c\sin.r''-\sin.r)\sin.r'' , \\ (a'x+b'y)\cos.^2 r''=z(c'\sin.r''-\sin.r')\sin.r'' ; \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} (ax+by)\cos.r''=z(\cos.r-c'\cos.r''), \\ (a'x+b'y)\cos.r''=z(\cos.r'-c'\cos.r'') . \end{array} \right\} \quad (11)$$

*Tom. IV.*

Ainsi, en construisant la droite exprimée par les équations (10), puis la droite exprimée par les équations (11), le plan conduit par ces deux droites sera celui qu'exprime l'équation (9).

Ce qu'il y a de mieux à faire, pour construire les droites (10) et (11), c'est de construire les plans dont ces droites sont les intersections. Or, avec un peu d'attention, on reconnaît les plans (10) pour ceux des lignes de contact du cône  $C''$  avec les plans tangents communs extérieurs tant à ce cône et au cône  $C$  qu'au même cône et au cône  $C'$ , et on reconnaît les plans (11) pour ceux suivant lesquels les cônes  $C$ ,  $C'$  coupent respectivement le cône  $C''$ , ou, en d'autres termes, pour les plans radicaux tant à  $C$  et  $C''$  qu'à  $C'$  et  $C''$  (\*); ce qui indique pour le cône cherché une construction

(\*) Supposons, en effet, que l'équation du plan tangent commun aux cônes  $C$  et  $C''$  soit

$$Dx+Ey+Fz=0, \quad (12)$$

avec la condition

$$D^2+E^2+F^2=1; \quad (13)$$

si l'on veut que ce plan tangent soit extérieur, c'est-à-dire, si l'on veut que ce plan laisse les deux cônes d'un même côté,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  seront déterminés par l'équation (13) jointe aux équations

$$aD+bE+cF=\sin r, \quad (14)$$

$$F=\sin r''; \quad (15)$$

et l'on voit que le problème est du second degré, de manière qu'il y a deux plans tangents.

Or, si l'on suppose que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  désignent les coordonnées de l'une ou de l'autre ligne de contact avec  $C''$ , les équations (12), (13), (14), (15) devant avoir lieu en même temps pour ces droites, le résultat de l'élimination de  $D$ ,  $E$ ,  $F$  entre elles sera l'équation d'une surface contenant ces mêmes droites.

Ce résultat est facile à obtenir. On tire des équations (12), (14), (15)

qui , appliquée ensuite à la recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère , revient à celle qui a été enseignée plus haut.

Celle-ci se trouve même établie par ce qui précède , puisqu'un plan n'est autre chose qu'une sphère dont le rayon est infini.

$$A = \frac{(\sin r - c \sin r'') y + bz \sin r''}{ay - bx},$$

$$B = - \frac{(\sin r - c \sin r'') x + az \sin r''}{ay - bx}.$$

$$C = \sin r'';$$

valeurs qui substituées dans l'équation (13) donnent

$$\{( \sin r - c \sin r'') y + bz \sin r''\}^2 + \{ \sin r - c \sin r'' \} x + az \sin r'' \}^2 = (ay - bx)^2 \cos^2 r'';$$

telle est donc l'équation d'une surface dont les intersections avec le cône  $C''$  détermineront ses lignes de contact avec les deux plans qui touchent à la fois extérieurement les cônes  $C''$  et  $C$ .

Or en développant cette équation , la multipliant par  $\cos^2 r''$  , et ayant égard à la relation (1) , elle peut être mise sous cette forme

$$\begin{aligned} & \{ (ax + bx) \cos^2 r'' - z(c \sin r'' - \sin r) \sin r'' \}^2 \\ & = \{ (c - \sin r'' \sin r)^2 - \cos^2 r'' \cos^2 r \} \{ z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 r'' \}; \end{aligned}$$

or en la combinant avec celle de  $C''$  qui est

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 r'';$$

elle se réduit simplement à

$$(ax + by) \cos^2 r'' = z(c \sin r'' - \sin r) \sin r'' ,$$

qui n'est , en effet , autre chose que la première des équations (10).

## TRIGONOMÉTRIE.

*Essai sur diverses expressions approchées de la circonference du cercle.*

Par M. TH. BARROIS.



Soient  $m$  et  $n$  deux nombres entiers positifs quelconques, et soient  $p$  et  $P$  respectivement les périmètres des polygones réguliers de  $2^m n$  côtés inscrit et circonscrit au cercle dont le rayon est l'unité, et dont conséquemment la circonference est  $2\pi$ ; on aura évidemment.

$$p = 2 \cdot 2^{m+1} n \sin \frac{\pi}{2^m n}, \quad P = 2 \cdot 2^{m+1} n \operatorname{Tang} \frac{\pi}{2^m n} = 2 \cdot 2^{m+1} n \frac{\sin \frac{\pi}{2^m n}}{\cos \frac{\pi}{2^m n}};$$

---

En second lieu, les équations des deux cônes  $C$ ,  $C''$  étant respectivement

$$(ax+by)+cz^2 = (x^2+y^2+z^2) \cos^2 r,$$

$$z^2 = (x^2+y^2+z^2) \cos^2 r'';$$

en les multipliant en croix et extrayant la racine quarrée de l'équation-produit, l'équation résultante du premier degré, ayant lieu en même temps que ces deux-là, sera celle d'un plan contenant les droites suivant lesquelles ces deux cônes se coupent; or cette équation est

$$(ax+by) \cos r'' = z (\cos r - c \cos r''),$$

c'est-à-dire la première des équations (11).

$$P-p=2^{m+1}n \left\{ \operatorname{Tang.} \frac{\pi}{2^m n} - \operatorname{Sin.} \frac{\pi}{2^m n} \right\}.$$

Mais on sait que,  $x$  étant un arc quelconque, on a

$$\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$$

$$= 4 \cos. \frac{x}{3} \cos. \frac{x}{4} \sin. \frac{x}{4}$$

$$= 8 \cos. \frac{x}{2} \cos. \frac{x}{4} \cos. \frac{x}{8} \sin. \frac{x}{8}$$

— 1 —

$$= {}_{2^m} \text{Cos. } \frac{x}{2} \text{ Cos. } \frac{x}{4} \text{ Cos. } \frac{x}{8} \text{ Cos. } \frac{x}{16} \dots \dots \text{Cos. } \frac{x}{2^m} \text{ Sin. } \frac{x}{2^m};$$

D'où

$$2^m \sin \frac{x}{2^m} = \frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^m}};$$

En faisant dans cette formule  $x = \frac{\pi}{n}$ , elle deviendra

$$2^m \cdot \sin \frac{\pi}{2^m n} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{8n} \dots \cos \frac{\pi}{2^m n}} ;$$

valeur qui, substituée dans celles de  $p$  et  $P$ , les change en celles-ci

$$p = \frac{2n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{8n} \dots \cos \frac{\pi}{2^m n}}, \quad (1)$$

$$P = \frac{2n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{8n} \dots \cos^2 \frac{\pi}{2^m n}}. \quad (2)$$

Et tels sont les périmètres des deux polygones dont il s'agit ; on voit que leurs expressions ne diffèrent que par le facteur  $\cos \frac{\pi}{2^m n}$  qui n'est qu'à la première puissance dans le dénominateur de la première, tandis qu'il se trouve au carré dans le dénominateur de la seconde.

On a évidemment  $2\pi > p$  et  $2\pi < P$  ; on aura donc aussi

$$\pi > \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{8n} \dots \cos \frac{\pi}{2^m n}}, \quad (3)$$

$$\pi < \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{8n} \dots \cos^2 \frac{\pi}{2^m n}}. \quad (4)$$

Voilà donc deux limites de la valeur du nombre  $\pi$  ; limites d'autant plus resserrées, toutes choses égales d'ailleurs, que  $m$  sera plus grand. En prenant l'une ou l'autre pour valeur approchée de  $\pi$ , la limite de l'erreur sera

$$2^m n \left\{ \tan \frac{\pi}{2^m n} - \sin \frac{\pi}{2^m n} \right\}.$$

Si donc on suppose  $m=\infty$ , on aura exactement, quel que soit  $n$

$$\pi = \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{8n} \cos \frac{\pi}{16n} \dots 1}, \quad (5)$$

le nombre des facteurs du dénominateur devant être infini, et conséquemment le dernier étant l'unité.

On sait que,  $x$  étant un arc quelconque, on a

$$\cos \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos x},$$

$$\cos \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}},$$

$$\cos \frac{1}{8}x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}},$$

.....;

d'où il résulte, pour l'équation (5), cette autre forme

$$\pi = \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos \frac{\pi}{n}}}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos \frac{\pi}{n}}}} \dots 1; \quad (6)$$

Ainsi, toutes les fois que  $n$  sera l'un des nombres dans lesquels la circonference peut être géométriquement divisée, c'est-à-dire, quelque un des nombres de la suite 2, 3, 5, 17, 257, ..., l'expression de  $\pi$  sera entièrement algébrique.

Si, par exemple, on suppose  $n=2$ , d'où  $\sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ , et  $\cos \frac{\pi}{n} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ , il viendra

$$\pi = \frac{2}{\frac{1}{i}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{i}\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{i}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{i}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}}}$$

Si, ensuite, on suppose  $n=3$ , d'où  $\sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{i}{i}\sqrt{3}$ , et  
 $\cos \frac{\pi}{n} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{i}{i}$ , il viendra

$$\pi = \frac{\frac{1}{i}\sqrt{3}}{\frac{1}{i}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{i}\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{i}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{i}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3+\dots}}}}}}$$

et ainsi de suite.

Ces diverses expressions semblent propres à mettre en évidence l'incommensurabilité du nombre  $\pi$  et de toutes les puissances de ce nombre.

## PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

*Sur la théorie des imaginaires.*



*Extrait d'une lettre adressée au Rédacteur des Annales ;*

Par M. J. F. FRANÇAIS, professeur à l'école de l'artillerie et du génie.

J'E vous remercie, Monsieur, de la réponse que vous avez faite à l'objection principale de M. Servois, contre la nouvelle théorie des

des imaginaires (\*). M. Servois n'a pas été le premier à m'opposer cette difficulté, et ma réponse a toujours été exactement conforme à la vôtre. Les objections de cette nature me paraissent toutes avoir leur source dans une méprise qui peut aisément échapper par l'effet de l'habitude, et qui consiste à confondre des droites données de grandeur et de position avec leur grandeur absolue.

Voici, Monsieur, quelques exemples de la manière de passer de mes notations aux notations ordinaires et aux résultats connus.

L'équation d'un triangle dont la base coïncide avec l'axe des abscisses est

$$\alpha + b - \beta = c,$$

d'où on tire

$$a \cos. \alpha + b \cos. \beta = c,$$

$$a \sin. \alpha - b \sin. \beta = 0.$$

et par conséquent, en prenant la somme et la différence des quarrés

$$a^2 + b^2 + 2ab \cos.(\alpha + \beta) = c^2,$$

$$a^2 \cos. 2\alpha + b^2 \cos. 2\beta + 2ab \cos.(\alpha - \beta) = c^2.$$

L'équation d'un cercle rapporté au centre est

$$\alpha_\phi = x + y \sqrt{-1},$$

d'où on tire

(\*) Voyez la page 228 de ce volume.

$$a \cos.\varphi = x, \quad a \sin.\varphi = y;$$

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

L'équation d'un cercle rapporté au diamètre est

$$r_\varphi + r_{\frac{\pi}{2} - \varphi} = 2a,$$

d'où on tire

$$r \cos.\varphi + r \sin.\varphi = 2a,$$

$$r \sin.\varphi - r \cos.\varphi = 0,$$

$$r^2 = 2ar \cos.\varphi, \quad x^2 + y^2 = 2ax.$$

L'équation d'une ellipse rapportée au foyer est

$$r_\varphi + (2a - r)_\psi = 2e,$$

d'où on tire

$$r \cos.\varphi + (2a - r) \cos.\psi = 2e;$$

$$r \sin.\varphi + (2a - r) \sin.\psi = 0.$$

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos.\varphi}.$$

Vous voyez, Monsieur, avec quelle facilité on arrive aux résultats connus.

Metz, le 19 d'avril 1814.

*Note transmise par M. LACROIX à M. VECTEN, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes.*

Dans la première partie des *Transactions philosophiques* de 1806, page 23, je trouve un mémoire écrit en français par M. Buée, communiqué à la Société Royale de Londres, par M. William Morgan, et dont le sujet est le même que celui des mémoires de MM. Français et Argand (*Annales de mathématiques*, tom. IV). L'auteur prétend « que  $\sqrt{-1}$  n'est pas le signe d'une opération arithmétique ou d'une opération purement géométrique : c'est un signe de perpendicularité. C'est un signe *purement descriptif*, un signe qui indique la direction d'une ligne, abstraction faite de sa longueur » (ce sont les expressions mêmes de l'auteur) (\*).

---

(\*) En publiant cette note, il est bien loin de notre pensée à chercher à enlever à M. Argand la propriété de ses idées. Son idée principale, je veux dire celle qui consiste à considérer  $\sqrt{-1}$  comme un signe de perpendicularité, est d'ailleurs si simple et si naturelle que, loin d'être surpris qu'elle se soit présentée aussi à M. Buée, on a lieu de s'étonner, au contraire, qu'elle ait tant tardé à éclore, et qu'elle ne se soit pas offerte à la pensée d'un plus grand nombre de géomètres.

Ceux de nos lecteurs qui ont sous la main les *Recueils de la Société royale* s'empresseront sans doute de faire une comparaison plus étendue entre les idées de M. Buée et celles de MM. Argand et Français.

J. D. G.

---

---

## GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

*Démonstration des principaux Théorèmes de M. DUPIN  
sur la courbure des surfaces ;*

Par M. GERGONNE.



**M.** Dupin , capitaine du génie maritime , ancien élève de l'école polytechnique , a publié , vers la fin de 1813 , sous le titre modeste de *Développemens de Géométrie* (\*) , un de ces ouvrages dont nous ne croyons pas pouvoir nous dispenser de faire mention dans ce recueil , et sur lesquels nous aimerais même à arrêter long-temps nos lecteurs , si d'autres objets ne réclamaient l'espace dont il nous est permis de disposer.

Nous avions d'abord songé à donner une simple analyse de l'ouvrage de M. Dupin ; mais , cette tâche ayant déjà été remplie par plusieurs journaux , nous avons pensé faire une chose plus convenable et plus utile à la fois , en présentant ici les principaux points de la doctrine de l'auteur dans un cadre assez resserré pour qu'il soit permis de l'introduire dans les traités élémentaires , où son importance doit désormais lui faire trouver place.

Nous nous assujettirons , dans cet exposé , à écarter toute notion d'infinitiment petits , et à n'employer que le développement en série , suivant les principes de la *Théorie des fonctions analitiques* , persuadés que cette attention , qui d'ailleurs n'entrainera guère plus de longueur , ne pourra qu'être agréable à ceux de nos lecteurs qui attachent encore quelque prix à la rigueur des procédés.

---

(\*) In-4.<sup>o</sup> d'environ 400 pages ; chez madame veuve Courcier , à Paris.

Dans tout ce qui va suivre , nous ferons , pour abréger , et suivant l'usage

$$\frac{dz}{dx} = p , \quad \frac{dz}{dy} = q ,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = r , \quad \frac{d^2z}{dx\cdot dy} = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s , \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{dq}{dy} = t ;$$

$X$ ,  $Y$ ,  $Z$  seront les coordonnées courantes dans l'espace , et nous les supposerons constamment rectangulaires.

### §. I.

#### *Théorie des TANGENTES CONJUGUÉES.*

Concevons que , par deux points pris arbitrairement sur une surface courbe , on mène une sécante à cette surface ; et imaginons , en outre , les plans tangens en ces deux points , lesquels se couperont suivant une droite extérieure à la surface dont il s'agit.

Concevons qu'ensuite l'un des points pris sur la surface courbe se rapproche peu à peu de l'autre , en suivant une courbe tracée arbitrairement sur cette surface , et passant par ces deux points ; il est facile d'apercevoir qu'alors la sécante et la commune section des deux plans tangens tendront sans cesse à devenir deux tangentes se coupant en celui des deux points qui sera demeuré immobile , et qu'elles le deviendront en effet , lorsqu'enfin l'autre point coïncidera avec celui-là ; ce sont ces deux tangentes que M. Dupin a nommées *Tangentes conjuguées*. Nous allons chercher la loi analitique qui les lie l'une à l'autre , et justifier ainsi leur dénomination.

Soient  $M$ ,  $M'$  deux points d'une surface courbe dont l'équation soit

$$F(x, y, z) = 0 , \quad (1)$$

et soient les coordonnées de ces points ainsi qu'il suit :

$$\text{pour } M \left\{ \begin{array}{l} X=x, \\ Y=y, \\ Z=z; \end{array} \right. \quad \text{pour } M' \left\{ \begin{array}{l} X=x+g; \\ Y=y+h, \\ Z=z+k; \end{array} \right.$$

d'où résultera, en vertu de la série de Taylor,

$$k=pg+qh+\frac{1}{2}(rg^2+2sgh+th^2)+\dots \quad (2)$$

Les équations de la sécante  $MM'$  seront

$$X-x=\frac{g}{k}(Z-z), \quad Y-y=\frac{h}{k}(Z-z). \quad (3)$$

Le plan tangent par le point  $M$  ayant pour équation

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y); \quad (4)$$

l'équation du plan tangent par le point  $M'$  sera

$$Z-z-k=(p+rg+sh+\dots)(X-x-g)+(q+sg+th+\dots)(Y-y-h). \quad (5)$$

Dans la recherche de l'intersection de ces deux plans, on pourra, à cette dernière équation, substituer sa différence avec la première, laquelle est, toutes réductions faites, et ayant égard à l'équation (2),

$$2(rg+sh+\dots)(X-x)+2(sg+th+\dots)(Y-y)=(rg^2+2sgh+th^2)+\dots \quad (6)$$

On aura, d'un autre côté, pour l'équation de la projection de  $MM'$  sur le plan des  $XY$

$$Y-y=\frac{h}{g}(X-x). \quad (7)$$

Si présentement on pose

$$h=g\tan g. \quad (8)$$

d'où

$$k = (p + q \operatorname{Tang.} \alpha) g + \frac{1}{r} (r + s \operatorname{Tang.} \alpha + t \operatorname{Tang.} \beta) g^2 + \dots; \quad (9)$$

les équations (6) et (7) deviendront respectivement, en réduisant

$$\left. \begin{aligned} & 2(r+s \operatorname{Tang.} \alpha + \dots)(X-x) \\ & + 2(s+t \operatorname{Tang.} \alpha + \dots)(Y-y) \end{aligned} \right\} = (r+2s \operatorname{Tang.} \alpha + t \operatorname{Tang.} \beta) g + \dots \quad (10)$$

$$Y-y = (X-x) \operatorname{Tang.} \alpha. \quad (11)$$

Si enfin on suppose  $g=0$ , auquel cas ces équations deviendront celles des projections sur le plan des  $XY$  de deux tangentes conjuguées menées à la surface (1) par le point M; on aura, pour les équations des projections de ces deux tangentes,

$$(r+s \operatorname{Tang.} \alpha)(X-x) + (s+t \operatorname{Tang.} \alpha)(Y-y) = 0, \quad (12)$$

$$Y-y = (X-x) \operatorname{Tang.} \alpha. \quad (11)$$

Si, en place de la première de ces deux équations, on écrit simplement

$$Y-y = (X-x) \operatorname{Tang.} \beta, \quad (13)$$

on aura

$$\operatorname{Tang.} \beta = -\frac{r+s \operatorname{Tang.} \alpha}{s+t \operatorname{Tang.} \alpha};$$

ou

$$r+s(\operatorname{Tang.} \alpha + \operatorname{Tang.} \beta) + t \operatorname{Tang.} \alpha \operatorname{Tang.} \beta = 0; \quad (14)$$

d'où l'on voit que ces deux tangentes sont parfaitement réciproques, et que la première peut être déduite de la seconde comme celle-ci peut l'être de l'autre.

Si présentement nous supposons que le point M ait été pris pour

origine des coordonnées , et le plan tangent en ce point pour plan des  $XY$ , auquel cas l'axe des  $Z$  sera dirigé suivant la normale ; nous aurons

$$x=0, y=0, z=0, p=0, q=0;$$

et conséquemment les équations (11) et (13), lesquelles deviendront alors celles des tangentes conjuguées elles-mêmes , se réduiront à

$$Y=XTang.\alpha, \quad Y=XTang.\beta; \quad (15)$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant toujours liés par la relation (14).

Si l'on veut que les tangentes conjuguées soient rectangulaires , on aura , en outre ,

$$1+Tang.\alpha Tang.\beta=0, \quad (16)$$

équation qui , étant combinée avec l'équation (14) , donne

$$Tang.\alpha + Tang.\beta = -\frac{r-t}{s}, \quad Tang.\alpha Tang.\beta = -1;$$

de manière que les valeurs particulières de  $Tang.\alpha$  et  $Tang.\beta$  qui répondent à ce cas seront données par l'équation

$$sTang.^2\alpha - (r-t)Tang.\alpha - s = 0. \quad (17)$$

nous appellerons à l'avenir *Tangentes conjuguées principales* , ou simplement *Tangentes principales* , celles qui sont déterminées par cette équation.

La direction des axes des  $x$  et des  $y$  ne se trouvant pas fixée par ce qui précède , profitons de leur indétermination pour les faire coïncider avec les tangentes principales ; il faudra , pour cela que , des deux racines de l'équation (17) , l'une soit nulle et l'autre infinie. Ces deux conditions concourent à donner  $s=0$  , en sorte que l'équation de relation (14) entre les directions des deux tangentes conjuguées quelconques se réduit simplement à

$$r+t$$

$$r + \tau \text{Tang.} \alpha \text{Tang.} \beta = 0 ; \quad (18)$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les angles que forment ces deux tangentes avec l'une des tangentes principales.

On voit par là que deux tangentes conjuguées quelconques passent dans les quatre angles formés par les tangentes principales, ou dans deux seulement, suivant que  $r$  et  $\tau$  sont de mènes signes ou de signes contraires.

## §. II.

### *Théorie des INDICATRICES.*

Pour déterminer le cercle osculateur et conséquemment le rayon de courbure d'une courbe plane, en un quelconque de ses points, on peut, entre autres moyens, employer le suivant, qui se prête assez commodément au calcul.

On mène la normale au point dont il s'agit, et on mène une perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint ce point à un autre point quelconque de la courbe ; l'intersection de cette perpendiculaire avec la normale est évidemment le centre du cercle qui, touchant la courbe au premier de ces deux points, passerait en même temps par l'autre.

Si l'on suppose ensuite que le dernier de ces deux points, sans quitter la courbe, vienne coïncider avec le premier, le cercle deviendra osculateur de la courbe au point donné ; son centre et son rayon seront donc le centre et le rayon de courbure de la courbe en ce point.

Un procédé analogue peut aussi être employé à déterminer le rayon de courbure d'une section normale quelconque faite à une surface courbe. Retournons donc à nos points  $M$ ,  $M'$  du §. précédent. Concevons une section par un plan passant par le dernier de ces

*Tom. IV.*

points et par la normale au premier ; concevons un autre plan perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint ces deux points ; ce dernier plan coupera la normale en un point qui deviendra le centre de courbure de la section normale pour le point M de cette section , lorsque le point M' viendra coïncider avec lui.

Traduisons ce procédé en analyse ; les équations de la normale en M sont

$$X-x=-p(Z-z) , \quad Y-y=-q(Z-z) ; \quad (19)$$

celle du plan passant par cette droite et par le point M' sera

$$(h+qk)(X-x)-(g+ph)(Y-y)+(ph-qg)(Z-z)=0 , \quad (20)$$

enfin on trouvera , pour celle du plan perpendiculaire sur le milieu de MM' ,

$$2g(X-x)+2h(Y-y)+2k(Z-z)=g^2+h^2+k^2 . \quad (21)$$

Si l'on combine cette dernière équation avec celles de la normale , on trouvera pour les équations du centre du cercle tangent à la section normale en M et passant par M' , en ayant égard à l'équation (2) ,

$$\left. \begin{aligned} X-x &= -p \cdot \frac{g^2+h^2+k^2}{(rg^2+2sgh+th^2)+\dots} , \\ Y-y &= -q \cdot \frac{g^2+h^2+k^2}{(rg^2+2sgh+th^2)+\dots} , \\ Z-z &= + \cdot \frac{g^2+h^2+k^2}{(rg^2+2sgh+th^2)+\dots} ; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

le rayon de ce cercle sera donc

$$\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2} = \frac{g^2+h^2+k^2}{(rg^2+2sgh+th^2)+\dots} \sqrt{1+p^2+q^2} . \quad (23)$$

Soit fait présentement, comme dans le §. précédent,  $h = g \operatorname{Tang.} \alpha$ , l'équation de la projection de  $MM'$  sur le plan des  $XY$  sera comme alors

$$Y-y=(X-x)\operatorname{Tang.} \alpha; \quad (11)$$

et le rayon du cercle aura pour expression

$$\frac{(1+\operatorname{Tang.}^2 \alpha) \{ (p+q\operatorname{Tang.} \alpha) + \frac{1}{r}(r+2s\operatorname{Tang.} \alpha+t\operatorname{Tang.}^2 \alpha)g + \dots \}^2}{(r+2s\operatorname{Tang.} \alpha+t\operatorname{Tang.}^2 \alpha)+\dots} \sqrt{1+p^2+q^2}. \quad (30)$$

Si finalement on suppose  $g=0$ , cette expression deviendra celle du rayon de courbure de la section normale, de manière qu'en désignant par  $R$  ce rayon de courbure, on aura

$$R = \frac{(1+p^2)+2pq\operatorname{Tang.} \alpha+(1+q^2)\operatorname{Tang.}^2 \alpha}{r+2s\operatorname{Tang.} \alpha+t\operatorname{Tang.}^2 \alpha} \sqrt{1+p^2+q^2}. \quad (31)$$

Supposons encore, comme dans le §. précédent, qu'on ait transporté l'origine en  $M$ , qu'on ait pris les tangentes principales pour axes des  $X$  et des  $Y$  et la normale pour axe des  $Z$ ; on aura, comme alors

$$x=0, y=0, z=0, p=0, q=0, s=0,$$

et conséquemment

$$R = \frac{1+\operatorname{Tang.}^2 \alpha}{r+t\operatorname{Tang.}^2 \alpha}. \quad (32)$$

Désignons respectivement par  $A$  et  $B$  les valeurs de  $R$  qui répondent à  $\operatorname{Tang.} \alpha=0$  et  $\operatorname{Tang.} \alpha=\infty$ , c'est-à-dire, les rayons de courbure des sections suivant les plans des  $XZ$  et des  $YZ$ ; rayon que, pour les distinguer des autres, nous appellerons *Rayons de courbure principaux*, ou simplement *Rayons principaux*; tout comme nous appellerons *Sections principales* les sections faites suivant les mêmes plans; nous aurons ainsi

$$A = \frac{1}{r}, \quad B = \frac{1}{t}. \quad (33)$$

Soit présentement  $C$  une longueur constante arbitraire quelconque, et concevons que, sur la tangente dont l'équation est

$$Y = XTang.\alpha$$

on porte, à partir de l'origine, une longueur égale à  $\sqrt{CR}$ ; on déterminera ainsi sur le plan des  $XY$  un certain point dont la situation variera avec l'angle  $\alpha$ ; voyons donc à quelle courbe ce point appartient.

Nommons  $x, y$  les coordonnées de ce point variable; nous aurons

$$Tang.\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = CR;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (32), elle deviendra

$$rx^2 + ty^2 = C,$$

ou, en mettant pour  $r$  et  $t$  leurs valeurs, données par les équations (33), et divisant ensuite par  $C$ ,

$$\frac{x^2}{CA} + \frac{y^2}{CB} = 1;$$

posant donc

$$\sqrt{CA} = a, \quad \sqrt{CB} = b,$$

on aura finalement

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ou .

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \quad (34)$$

équation d'une ellipse ou d'une hyperbole, suivant que  $A$  et  $B$  sont de mêmes signes ou de signes contraires. C'est cette courbe que M. Dupin appelle l'*Indicatrice*.

Si, dans l'équation (18), on met pour  $r$  et  $t$  leurs valeurs données par les équations (33), elle deviendra

$$B + ATang.\alpha Tang.\beta = 0,$$

ou, en multipliant par  $C$  et substituant

$$b^2 + a^2 \operatorname{Tang}.\alpha \operatorname{Tang}.\beta = 0 ;$$

équation qui exprime , comme l'on sait , la relation entre les angles  $\alpha$  ,  $\beta$  que deux diamètres conjugués quelconques de la courbe (34) doivent faire avec l'axe des  $x$ .

Voici présentement les plus importantes des conséquences qui peuvent être déduites de ces divers résultats. On voit d'abord que , si ayant mené le plan tangent en un point quelconque d'une surface courbe , et tracé des droites sur ce plan par le point de contact , on imagine des sections planes faites suivant ces droites et la normale , et qu'on porte sur ces mêmes droites , à partir du point de contact , et de part et d'autre de ce point , des longueurs proportionnelles aux racines quarrées des rayons de courbure des sections normales qui leur répondent respectivement ; l'ensemble des points déterminés par ce procédé formera une ligne du second ordre ayant le point de contact pour centre , et dont les diamètres conjugués seront des tangentes conjuguées de la surface dont il s'agit.

Donc 1.<sup>o</sup> de toutes les sections normales qui peuvent être faites en un même point quelconque d'une surface quelconque , celles de plus grande et de moindre courbure se occupent toujours à angles droits. On peut appeler *Rayons principaux* les rayons de courbure de ces deux sections.

2.<sup>o</sup> En appelant *Rayons conjugués* les rayons de courbure des sections normales dirigées suivant deux tangentes conjuguées , on peut dire que la somme de deux rayons conjugués quelconques pris avec leurs signes est constante et égale à la somme des rayons principaux , pris aussi avec leurs signes.

3.<sup>o</sup> On peut dire encore que le produit de deux rayons conjugués quelconques et du quarré de l'angle des plans des sections normales auxquelles ils appartiennent , est également une quantité constante et égale au produit des rayons principaux.

### 378 COURBURE DES SURFACES.

4.<sup>o</sup> On voit aussi que, connaissant seulement deux rayons conjugués, et l'angle que forment entre eux les plans des sections normales auxquelles ils répondent, on a tout ce qu'il faut pour assigner les directions des sections principales et la grandeur des rayons principaux, et pour en conclure par suite la grandeur du rayon de courbure d'une section normale donnée de direction, ou la direction de la section normale à laquelle répond un rayon de courbure donné.

5.<sup>o</sup> En général, chaque théorème relatif aux diamètres conjugués d'une ligne du second ordre doit avoir son analogue dans la théorie de la courbure des surfaces; et l'examen des diverses circonstances que peut présenter cette courbure en différens points d'une même surface, ou sur diverses surfaces, se réduit uniquement à la discussion des variétés que peuvent présenter les lignes du second ordre pourvues de centre. Ainsi, par exemple, on voit que, si en un point d'une surface courbe, deux courbures rectangulaires sont égales et de même signe, toutes les autres courbures en ce point seront égales entre elles et à celles-là. Si toutes les courbures en un même point d'une surface ne sont pas de mêmes signes, cette surface aura, en ce point, des courbures infinies suivant deux directions telles que les sections normales qui diviseront en deux parties égales les quatre angles formés par ces deux directions, seront les sections principales.

Nous renvoyons, pour le surplus, à l'ouvrage même de M. Dupin, qui renferme un grand nombre d'autres recherches importantes, et qu'on ne peut lire qu'avec beaucoup de fruit.

---

---

## QUESTIONS RÉSOLUES.

*Démonstration du premier des deux théorèmes énoncés à la page 196 de ce volume ;*

Par M. B.\*\*\*, abonné.



**THÉORÈME.** *Deux hexagones étant tracés arbitrairement sur le plan d'une section conique ;*

*1.<sup>o</sup> Si les sommets de l'un sont respectivement les pôles des côtés de l'autre , les sommets de ce dernier seront réciproquement les pôles des côtés du premier.*

*2.<sup>o</sup> Si, en outre , les points de concours des prolongemens des côtés opposés de l'un des deux sont tous trois situés sur une même ligne droite , les diagonales joignant les sommets opposés de l'autre se couperont toutes trois au même point, qui sera le pôle de cette droite et réciproquement.*

*Démonstration.* Soient ABCDEF , abedef les deux hexagones proposés.

*1.<sup>o</sup> Supposons que a soit le pôle de AB et b le pôle de BC , il s'ensuivra que tous les angles circonscrits à la courbe dans lesquels la corde de contact passera par a , auront le sommet sur AB , et que tous les angles circonscrits à la même courbe , dont la corde de contact passera par b , auront leur sommet sur BC ; donc l'angle circonscrit dont la corde de contact passera à la fois par a et b , aura à la fois son sommet sur AB et sur BC ; ce sommet sera donc en B ; le sommet B sera donc le pôle du côté ab.*

*On démontrera de la même manière que , si les sommets c , d , e , f*

sont respectivement les pôles de CD , DE , EF , FA , les sommets C , D , E , F , A seront respectivement les pôles de  $bc$  ,  $cd$  ,  $de$  ,  $ef$  ,  $fa$  , ce qui établit la vérité de la première partie du théorème.

2.<sup>o</sup> Soient G le point de concours de AB et DE , H le point de concours de BC et EF , K le point de concours de CD et FA ; supposons que les trois points G , H , K soient situés sur une même ligne droite , et soit o le pôle de cette droite.

G étant le point de concours de AB et DE , dont les pôles respectifs sont  $a$  et  $d$  , on prouvera , comme ci-dessus , que G est le pôle de la diagonale  $ad$  ; puis donc que G est sur GHK , dont le pôle est o , il s'ensuit que la diagonale  $ad$  passe par le point o . On prouvera de la même manière que les deux autres diagonales  $be$  ,  $cf$  doivent passer par ce point o .

Réciproquement si les diagonales  $ad$  ,  $be$  ,  $cf$  se coupent en un même point o , et que leurs pôles respectifs soient G , H , K , ces trois points devront être situés sur la droite dont o est le pôle ; mais G , comme pôle de  $ad$  , dont les extrémités  $a$  et  $d$  sont les pôles respectifs de AB et DE , devra être le point de concours de ces deux dernières droites . Par une raison semblable , H et K doivent être les points de concours respectifs de BC et EF , CD et FA ; ainsi ces trois points de concours sont sur la droite dont le pôle est o .

*Corollaire.* Si le polygone ABCDEF est inscrit à la section conique , il est aisément de voir que le polygone abcdef lui serait circonscrit et la toucherait aux sommets du premier , et que , réciproquement , si le polygone abcdef est circonscrit à la section conique , le polygone ABCDEF lui sera inscrit et aura ses sommets aux points de contact des côtés du premier avec la courbe .

Si donc il était seulement démontré que , dans tout hexagone inscrit à une section conique , les points de concours des prolongemens des côtés opposés sont tous trois sur une même ligne droite , il se trouverait établi , par ce qui précède , que , dans tout hexagone circonscrit à une section conique , les diagonales qui joignent les sommets opposés , se coupent toutes trois en un même point .

Et

Et réciproquement, s'il était seulement démontré que, dans tout hexagone circonscrit à une section conique, les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent toutes trois au même point, il se trouverait établi, par ce qui précède, que, dans tout hexagone inscrit à une section conique, les points de concours des prolongemens des côtés opposés sont tous trois sur une même ligne droite.

*Démonstration de la propriété des hexagones inscrits et circonscrits à une section conique ;*

Par M. GERGONNE.

*THÉORÈME I. Dans tout hexagone inscrit à une section conique, les points de concours des directions des côtés opposés sont tous trois sur une même ligne droite.*

*Démonstration.* Soient A, B, C, D, E, F les sommets consécutifs de l'hexagone dont il s'agit, G le point de concours de AB et DE, H et K les points de concours de CB et CD, respectivement, avec une droite menée arbitrairement par G; soit enfin Z le point de concours de EH et AK. Supposons que l'arbitraire HK tourne autour du point G, et cherchons quelle est la courbe que décrira le point variable Z? (\*)

Soient C l'origine, CB l'axe des  $x$ , CD l'axe des  $y$ ; et soient les équations des points donnés ainsi qu'il suit

$$A \left\{ \begin{array}{l} x=a, \\ y=e, \end{array} \right. \quad B \left\{ \begin{array}{l} x=g, \\ y=0, \end{array} \right. \quad C \left\{ \begin{array}{l} x=0, \\ y=0, \end{array} \right. \quad D \left\{ \begin{array}{l} x=0, \\ y=h, \end{array} \right. \quad E \left\{ \begin{array}{l} x=d, \\ y=b, \end{array} \right.$$

Les équations de AB et DE seront respectivement

(\*) C'est à dessein que je sous-entends la figure. Un des principaux titres de supériorité de l'analyse sur la géométrie est que, cette dernière raisonnant sur des figures construites d'une manière déterminée, on est souvent en droit de craindre que les résultats auxquels elle conduit ne dépendent de la nature individuelle de ces figures. Les solutions purement analytiques ne présentent point un pareil inconvénient.

## QUESTIONS

$$(a-g)y = e(x-g), \quad (b-h)x = d(y-h);$$

d'après quoi, et en posant pour abréger

$$dh+g(b-h)=p, \quad eg+h(a-g)=q, \quad de-(a-g)(b-h)=r,$$

on trouvera, pour les équations du point G,

$$x = d \frac{q}{r}, \quad y = e \frac{p}{r};$$

l'équation de l'arbitraire HK sera donc de la forme

$$y - e \frac{p}{r} = \lambda \left( x - d \frac{q}{r} \right);$$

d'après quoi on trouvera

$$CH = \frac{\lambda dq - ep}{\lambda r}, \quad CK = \frac{\lambda ep - dq}{\lambda r};$$

les équations de EH et AK seront donc respectivement

$$\begin{aligned} \lambda \{ r(dy - bx) - dq(y - b) \} + ep(y - b) &= 0, \\ \{ r(ex - ay) - ep(x - a) \} + \lambda dq(x - a) &= 0; \end{aligned}$$

éliminant donc entre elles l'arbitraire  $\lambda$ , réduisant et divisant par  $r$ , on trouvera, pour la courbe décrite par le point Z, l'équation du second degré

$$r(dy - bx)(ex - ay) - dq(ex - ay)(y - b) - ep(dy - bx)(x - a) = 0;$$

laquelle montre déjà évidemment que la courbe passe par les trois points A, C, E. En la développant, remettant pour  $p$ ,  $q$ ,  $r$  leurs valeurs et réduisant, on parvient très-aisément à lui donner cette nouvelle forme

$$\left. \begin{aligned} &be[a(b-h) - d(e-h)](x-g)x \\ &+ [de(d-g)(e-h) - ab(a-g)(b-h)]xy \\ &+ ad[b(a-g) - c(d-g)](y-h)y \end{aligned} \right\} = 0;$$

et l'on voit alors que la courbe passe, en outre, par les points B, D; puis donc que deux sections coniques distinctes ne sauraient passer par les cinq mêmes points, il en faut conclure que la courbe décrite par le point variable Z est la section conique donnée elle-

même ; il y aura donc une situation de l'arbitraire HK qui fera coïncider le point Z avec le sixième sommet F ; et , comme les trois points G , H , K ne cessent jamais d'être en ligne droite , la proposition se trouve ainsi établie.

*THÉORÈME II.* *Dans tout hexagone circonscrit à une section conique , les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent toutes trois au même point.*

*Démonstration.* Concevons que l'on ait joint les points de contact consécutifs par des cordes ; ces cordes formeront un hexagone inscrit dont les cotés auront respectivement pour pôles les sommets du premier.

Par le précédent théorème , les points de concours des directions des côtés opposés de l'hexagone inscrit seront tous trois situés sur une même ligne droite.

Donc , en vertu du théorème démontré par M. B.\*\*\* , les diagonales joignant les sommets opposés de l'hexagone circonscrit se coupent toutes trois au même point.

*Remarque.* A la page 78 de ce volume , j'ai démontré ces deux théorèmes indépendamment l'un de l'autre , par des considérations géométriques et sans aucune sorte de calcul.

Les démonstrations de ce genre ne laissent sans doute rien à désirer du côté de l'élegance et de la brièveté ; mais malheureusement il est rare qu'elles ne soient pas sujettes à quelques exceptions ou limitations.

On connaît , par exemple , la manière dont M. Monge démontre le concours en un même point des cordes communes à trois cercles pris deux à deux ; mais on a pu remarquer que sa démonstration est en défaut , lorsque les trois cercles , laissant un vide entre eux , n'ont point une portion qui leur soit commune à tous. La démonstration que ce géomètre a donnée de la propriété des pôles , se trouve pareillement en défaut , lorsque le pôle d'une section conique est extérieur à la courbe. On en peut encore dire autant de sa démonstration de la propriété des tangentes extérieures à trois cercles pris deux à deux , lorsque l'un de ces cercles se trouve compris entre les tangentes communes aux deux autres.

Par ces motifs , j'inclinerais à préférer à la démonstration de la page 78 la démonstration précédente qui n'est d'ailleurs ni longue ni compliquée.

---



---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

### *Problèmes de Géométrie.*

I. **T**ROIS points du périmètre d'une ellipse étant donnés de position , et ses diamètres principaux étant donnés de grandeur , construire l'ellipse ?

II. Six points de la surface d'un ellipsoïde étant donnés de position , et ses diamètres principaux étant donnés de grandeur , construire l'ellipsoïde ?

### *Théorèmes de Géométrie.*

I. Si deux ellipses , tellement situées sur un plan que deux diamètres conjugués de l'une soient parallèles à deux diamètres conjugués de l'autre , se coupent en quatre points , ces quatre points seront sur une troisième ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux seront respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose être déjà parallèles dans les deux premières.

II. Si trois ellipsoïdes , tellement situés dans l'espace que trois diamètres conjugués de l'un quelconque soient respectivement parallèles à trois diamètres conjugués de chacun des deux autres , se coupent en huit points ; ces huit points seront sur un quatrième ellipsoïde dans lequel les diamètres conjugués égaux seront respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose être déjà parallèles dans les trois premiers.

FIN DU TOME QUATRIÈME.

## T A B L E

*Des matières contenues dans le IV.<sup>e</sup> volume des Annales.*

## A L G È B R E É L É M E N T A I R E.

|                                                                                                                                                    |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>E</b> SSAI de démonstration de la règle des signes dans le calcul algébrique ; par M. <i>Cach.</i>                                              | Pag. 1—6. |
| Démonstration élémentaire du théorème de <i>d'Alembert</i> sur la forme des imaginaires ; par M. <i>Du Bourguet.</i>                               | 20—23.    |
| Réflexions sur le même sujet ; par M. <i>Gergonne.</i>                                                                                             | 23—25.    |
| Démonstration du théorème de <i>Newton</i> sur les fonctions symétriques, et de la formule du binôme ; par M. <i>Bret.</i>                         | 25—28.    |
| Recherche du nombre des termes d'un polynôme complet d'un degré quelconque, fonction d'un nombre quelconque de quantités ; par M. <i>Gergonne.</i> | 115—118.  |
| Démonstration générale et rigoureuse des procédés connus pour la division et l'extraction des racines des polynômes ; par M. <i>Gergonne.</i>      | 297—305.  |

## A N A L I S E É L É M E N T A I R E.

|                                                                                                                                                         |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Sur la démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie générale des équations algébriques ; par M. <i>Du Bourguet.</i>                     | 56—58.   |
| Sur le même sujet ; par M. <i>Bret.</i>                                                                                                                 | 90—92.   |
| Recherche du nombre des termes d'une équation complète d'un degré quelconque, entre un nombre quelconque de variables ; par M. <i>Gergonne.</i>         | 115—118. |
| Démonstration du principe qui sert de fondement à la méthode de M. <i>Budan</i> , pour la résolution des équations numériques ; par M. <i>Gergonne.</i> | 120—123. |
| Développement de la théorie donnée par M. <i>Laplace</i> pour l'élimination au 1 <sup>er</sup> degré ; par M. <i>Gergonne.</i>                          | 148—156. |
| Mémoire sur les principes fondamentaux de la théorie générale des équations algébriques ; par M. <i>D. Encontre.</i>                                    | 201—222. |
| <i>Tome IV.</i>                                                                                                                                         | 52       |

## A N A L I S E   T R A N S C E N D A N T E.

|                                                                                                             |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Réflexions sur la forme des imaginaires ; par M. Gergonne.                                                  | 23—25. |
| Intégration , sous forme finie , de quelques fonctions différentielles circulaires ;<br>par M. Du Bourguet. | 72—78. |

## A R I T H M É T I Q U E.

|                                                                                                                                                                           |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Recherche des principales formules de la théorie des nombres figurés ; par M.<br>Gergonne.                                                                                | 118—120. |
| Solution de ce problème : <i>connaissant le produit d'un nombre de plusieurs<br/>chiffres par ce même nombre renversé , trouver les deux facteurs</i> ; par un<br>Abonné. | 123—132. |
| Essai sur la transformation des fractions ; par M. Penjon.                                                                                                                | 265—273. |

## A S T R O N O M I E.

|                                                                                                                                    |          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ; par M.<br>Kramp. ( Premier mémoire. )                        | 161—180. |
| Recherche des élémens d'une orbite elliptique dont trois rayons vecteurs sont<br>donnés de grandeur et de position ; par M. Kramp. | 197—201. |
| Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ; par M.<br>Kramp. ( deuxième mémoire. )                       | 237—250. |

## A S T R O N O M I E   P R A T I Q U E.

|                                                                                                                                |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Mémoire sur l'usage du <i>Réticul Rhombe</i> pour les observations des taches du<br>soleil et de la lune ; par M. Flaugergues. | 321—332. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

## C H R O N O L O G I E.

|                                                                                     |          |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Calendrier perpétuel ; par M. Servois.                                              | 84—90.   |
| Solution directe des principaux problèmes du calendrier ; par M. J. F.<br>Français. | 273—276. |
| Supplément sur le même sujet ; par le même.                                         | 337—338. |

## CORRESPONDANCE.

|                                                                                                               |        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Lettre de M. <i>Du Bourguet</i> au rédacteur des <i>Annales</i> , en réponse à une lettre de M. <i>Bret</i> . | 56—58. |
| Lettre de M. <i>Bérard</i> au rédacteur des <i>Annales</i> , en réponse à une lettre de M. <i>Bret</i> .      | 58—59. |
| Lettre de M. <i>Bret</i> au rédacteur des <i>Annales</i> , en réponse aux deux précédentes.                   | 90—92. |

## DYNAMIQUE.

|                                                                                                                        |          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Véritable solution du problème de la <i>tractoire plane</i> ; par feu <i>François</i> .                                | 305—311. |
| Réflexions et recherches sur le même problème; par M. <i>Gergonne</i> .                                                | 311—320. |
| Solution nouvelle du problème de la <i>tractoire plane</i> et éclaircissements sur ce problème; par M. <i>Dubuat</i> . | 332—337. |

## GÉOMÉTRIE.

|                                                                                                                                                                            |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Solutions d'un problème sur les <i>anses de paniers</i> ; par MM. <i>Argand</i> et <i>Bérard</i> .                                                                         | 256—265. |
| Recherche de la surface plane de moindre contour entre toutes celles de même aire, et du corps de moindre surface entre tous ceux de même volume; par un <i>Abonné</i> .   | 338—344. |
| Solutions de quatre problèmes de géométrie, relatifs aux <i>Maxima</i> et aux <i>Minima</i> ; par M. <i>Castelnau</i> et un <i>Abonné</i> .                                | 344—349. |
| Recherche du cercle qui en touche trois autres, soit sur un plan, soit sur une sphère, et de la sphère qui en touche quatre autres dans l'espace; par M. <i>Gergonne</i> . | 349—360. |

## GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

|                                                                                                                                                                                                        |         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Mémoire sur les surfaces du second ordre, précédé de la recherche des formules fondamentales de la géométrie analytique à trois dimensions, dans le cas des coordonnées obliques; par M. <i>Bret</i> . | 93—115. |
| Recherche de l'ellipse de plus grande surface inscriptible à un triangle donné, de l'ellipse de moindre surface circonscriptible à un triangle donné, de l'ellipsoïde                                  |         |

## T A B L E

de plus grand volume inscriptible à un tétraèdre donné et de l'ellipsoïde de moins volume circonscriptible à un tétraèdre donné ; par M. Bérard. 284—294.

Recherche du cône tangent à trois cônes donnés, de même sommet que lui ; par M. Gergonne. 349—360.

Démonstration analytique des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques ; par M. Gergonne. 381—384.

## G É O M É T R I E D E S C O U R B E S.

Essai sur l'expression analytique des courbes, indépendamment de leur situation sur un plan ; par M. Gergonne. 4—56.

Solution d'un problème de géométrie, relatif à la théorie des *solutions particulières* ; par M. Servois. 151—160.

Démonstrations d'une propriété de la parabole ; par MM. Massabieau, Guillaume, Gobert, et Bérard. 183—187.

Solution de ce problème : *le foyer et trois points du périmètre d'une ellipse étant donnés, construire l'ellipse* ; par M. Kramp. 197—201.

Démonstrations de ce théorème : *les rectangles qui, ayant respectivement pour diagonales deux diamètres conjugués quelconques d'une section conique, ont leurs côtés parallèles à ses axes, sont équivalens* ; par MM. Bérard et Gobert. 253—256.

Démonstration d'une propriété des sections coniques ; par M. Encontre fils. 294—296.

Démonstration d'un théorème relatif à la géométrie de la règle ; par M. B. Servois. 379—381.

Démonstration analytique de la propriété des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques ; par M. Gergonne. 381—384.

## G É O M É T R I E P R A T I Q U E.

Solution de ce problème : *prolonger la direction d'une droite au-delà d'un obstacle, avec l'équerre d'arpenteur seulement, et sans employer aucun chainage* ; par M. Servois. 250—253.

## G É O M É T R I E D E LA R È G L E.

Application de la doctrine des projections à la démonstration géométrique des

## DES MATIÈRES.

389.

propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques ; par M.  
*Gergonne.* 78—84.

## GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

- Essai sur l'expression analytique des courbes, indépendamment de leur situation  
sur un plan ; par M. *Gergonne.* +2—56.
- Recherche sur le lieu géométrique des sommets des cônes de même base,  
dont l'angle au sommet a même capacité ; par M. *Kramp.* 187—196.
- Recherche de la surface de moindre contour entre toutes celles de même  
aire et du corps de moindre surface entre tous ceux de même volume ; par un  
*Abonné.* 338—344.
- Démonstration des principaux théorèmes de M. *Dupin* sur la courbure des  
surfaces ; par M. *Gergonne.* 368—379.

## MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

- Recherches analitiques sur la construction des thermomètres métalliques en  
forme de montre ; par M. *Argand.* 29—42.
- Recherches sur le tracé des voûtes en anses de paniers ; par MM. *Argand*  
et *Bérard.* 256—265.

## OPTIQUE PRATIQUE.

- Recherches sur la construction des miroirs concaves de grandes dimensions ;  
par M. *A.* 180—183.

## PHILOSOPHIE MATHEMATIQUE.

- Réflexions sur la théorie des quantités négatives ; par M. *Gergonne.* 6—20.
- Nouveaux principes de *géométrie de position*, et interprétation géométrique  
des symboles imaginaires ; par M. J. F. *Français.* 61—72.
- Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les cons-  
tructions géométriques ; par M. *Argand.* 133—148.
- Lettres de MM. *Français* et *Servois* au rédacteur des *Annales* sur la nouvelle  
théorie des imaginaires. 222—236,
- Autre lettre de M. *Français* au rédacteur des *Annales* sur le même sujet. 364—367.

390

T A B L E

Note de M. *Lacroix* sur le même sujet.

367—368.

RÉCRÉATIONS MATHEMATIQUES.

Recherches sur un tour de cartes ; par M. *Gergonne*.

276—284.

TRIGONOMETRIE.

Essai sur diverses expressions approchées de la circonférence du cercle ; par  
M. *Th. Barrois*.

360—364.

---

DES MATIERES.

---

CORRESPONDANCE

*Extraire les questions proposées et leurs solutions.*

---

|                                                                          |                                                              |                                              |
|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Tome III, page 251<br>Problème I.<br>Problème II.                        | Tome IV, pages<br>Problème I.<br>Problème II.                | 187—193.<br>23—24.                           |
| Page 324<br>Problème.                                                    |                                                              | 170—171.                                     |
| Page 325<br>Problème.                                                    |                                                              | 187—193.                                     |
| Page 326<br>Problème.                                                    |                                                              | 23—24.                                       |
| Tome IV, page 252<br>Problème I.<br>Problème II.                         | Problème I.<br>Problème II.                                  | 170—171.                                     |
| Page 327<br>Problème I.<br>Problème II.<br>Problème III.<br>Théorème.    | Problème I.<br>Problème II.<br>Problème III.<br>Théorème.    | 170—171.<br>23—24.                           |
| Page 328<br>Problème.                                                    |                                                              | 170—171.<br>23—24.                           |
| Page 329<br>Problème I.<br>Problème II.<br>Problème III.                 | Problème I.<br>Problème II.<br>Problème III.                 | 23—24.<br>23—24.                             |
| Page 330<br>Théorème.                                                    |                                                              | 170—171.                                     |
| Page 336<br>Théorème I.<br>Théorème II.                                  |                                                              | 170—171.<br>170—171.                         |
| Page 337<br>Problème I.<br>Problème II.<br>Problème III.<br>Problème IV. | Problème I.<br>Problème II.<br>Problème III.<br>Problème IV. | 170—171.<br>170—171.<br>170—171.<br>170—171. |

## CORRECTIONS ET ADDITIONS

*Pour le tome quatrième des Annales.*



**P**AGE 91, mettez au bas de la note *J. D. G.*

Page 92, ligne 7 — en remontant ; *mettez une virgule après 2n+1.*

Page 260, lignes 13 et 15 — claire *lisez : clé*

Ligne 17 —  $r^n$  ; *lisez :*  $r_n$ .

Ligne 23 —  $r$  ; *lisez :*  $r_n$ .

Ligne 27 —  $\alpha$  ; *lisez :*  $\alpha_1$ .

Page 262, au dénominateur de la valeur de  $\lambda$  — , au lieu de  $A-M$  ; *lisez :*  $2(A-M)$ .

Page 264, ligne 13 —  $x=b$ ,  $y=a$  ; *lisez :*  $x=A$ ,  $y=B$ .

Page 338, ligne 6, *ajoutez* : dans le cas des années bissextiles, il faudra appliquer ici les remarques qui suivent le problème II (page 275.)

Page 367, ligne 5 — *je* ; *lisez : on*.

*Supplément à l'Errata du Tome II.<sup>e</sup>*

Page 11, équation 31 —  $p'x''-q'x''$  ; *lisez :*  $p'y''-q'x''$ .

Ligne 4, en remontant —  $(x^2-y^2)^3$  ; *lisez :*  $(x^2+y^2)^3$ .

Page 13, à la note — (32, 33) ; *lisez :* (33, 34).

Page 207, ligne 5, en remontant —  $\frac{m-n+1}{n+1}$  *lisez :*  $\frac{m-n-1}{n+1}$ .

Ligne 2, en remontant —  $\frac{m-n}{n}$  *lisez :*  $\frac{m-n}{n+1}$ .

*Supplément à l'Errata du Tome III.<sup>e</sup>*

Page 107, ligne 8 — *2c* ; *lisez : 2C*.