Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

# Théorème de Kirchhoff et théorie de Hodge

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 9 (1990-1991), p. 89-94
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__89_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1990–1991 (89–94)

# THÉORÈME DE KIRCHHOFF ET THÉORIE DE HODGE

par *Yves COLIN DE VERDIÈRE*

En 1847, le physicien allemand G.R. Kirchhoff prouve les résultats suivants sur les courants électriques dans un réseau connexe $\Gamma$:

si $S$ est l'ensemble des sommets du réseau, $A$ l'ensemble de ses arêtes, le nombre de cycles linéairement indépendants est égal à:

$$\mu_\Gamma = \#A - \#S + 1 \ ,$$

et il y a une dualité entre l'espace précédent et l'espace des courants électriques satisfaisant la *loi de Kirchhoff* en chaque sommet $s$ de $\Gamma$, donnée par:

$$(c|i) = \sum_{c=\sum\{\alpha\}} R_\alpha . i_\alpha = \text{“} \int_c i \text{ ”} \ ,$$

où les $R_\alpha$ sont les résistances ($> 0$) des conducteurs et la somme porte sur les arêtes du cycle $c$.

Il semble que le travail de Kirchhoff ait été en partie à la source de celui de Poincaré fondant la topologie algébrique (Analysis situs).

Nous nous proposons de montrer que le théorème de Kirchhoff s'inscrit naturellement dans le contexte de la théorie de Hodge, dont l'application la plus marquante est le théorème de Hodge-de Rham pour une variété riemannienne compacte.

Cette relation est surement connue de nombreuses personnes, mais j'ai été incapable de la localiser dans la littérature récente. Voir cependant l'article de Hermann Weyl ([WE]) et la conférence de Bott ([BO]), ainsi que l'excellent livre de Lefschetz (en particulier le chapitre VI de la première partie).

Il nous a paru intéressant de détailler cette relation, par exemple comme introduction à des théories plus sophistiquées!!

Nous avons inclus un petit rappel de théorie de Hodge *naïve*.

*Notations.*

Nous dirons que deux espaces vectoriels $E$ et $F$ de dimension finie sont *duaux* si on a explicité une forme bilinéaire $B : E \times F \to k$ non dégénérée. On a alors aussi la notion de transposée d'une application linéaire.

## 1. Théorie de Hodge naïve

On considère dans la suite uniquement des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des réels.

Un *complexe de chaînes* $(C)$ est la donnée d'une suite $C_0, C_1, ..., C_n$ d'espaces vectoriels (dimension $(C_i) = n_i$) et d'applications linéaires $b_i : C_{i+1} \to C_i$ (avec les conventions $C_{-1} = C_{n+1} = 0$) telles que pour tout $i$ on ait:

$$b_i \circ b_{i+1} = 0 .$$

On représente $(C)$ sous la forme:

$$(C) \ \ 0 \to C_n \to C_{n-1} \ldots \to C_0 \to 0 .$$

L'homologie en dimension $i$ est le quotient:

$$H_i(C) = \frac{\mathrm{Ker}(b_{i-1})}{\mathrm{Im}(b_i)} .$$

Dans le cas particulier où $n = 1$ et $b_0 : C_1 \to C_0$, on a :

$$H_0(C) = \mathrm{Coker}(b_0), \quad H_1(C) = \mathrm{Ker}(b_0) .$$

L'espace $\mathrm{Ker}(b_i)$ s'appelle espace des cycles de dimension $i$.

On définit aussi les nombres de Betti $\beta_i(C) = \dim(H_i(C))$.

*Un complexe de cochaines* est une donnée du même type où les flèches vont dans l'autre sens: si on note $C^i$ les espaces vectoriels et $d_i : C^i \to C^{i+1}$, on a $d_i \circ d_{i-1} = 0$ et la cohomologie $H^i = \mathrm{Ker}(d_i)/\mathrm{Im}(d_{i-1})$.

Un cas particulier est celui du dual d'un complexe de chaines où les $C^i$ sont les duaux des $C_i$ et les $d_i$ les transposées des $b_i$. Dans ce cas il est clair que cette dualité induit une dualité entre les $H_i$ et les $H^i$; en particulier les nombres de Betti sont les mêmes.

Si on munit maintenant chaque $C^i$ d'une structure euclidienne notée

$$< \omega | \omega' >_i$$

(qu'on prendra garde à ne pas confondre avec le crochet de la dualité entre $C_i$ et $C^i$, notée $(.|.)_i$), on peut choisir dans chaque classe de cohomologie un représentant canonique, celui de norme minimale.

Plus précisément si $\omega_1 \in \mathrm{Ker}(d_i)$ et $[\omega_1]$ est sa classe de cohomologie, on s'intéresse à $\omega_0 \in [\omega_1]$ telle que:

$$||\omega_0||_i = \inf\{||\omega_1 + d_{i-1}\alpha||_i \ \ | \alpha \in C^{i-1}\} .$$

On a évidemment alors, pour tout $\alpha \in C^{i-1}$ :

$$< \omega_0 | d_{i-1}\alpha >_i = 0 ,$$

ou encore $d^*_{i-1}\omega_0 = 0$. Si on note $\mathcal{H}^i$ l'espace des cochaines $\omega$ de degré $i$ qui vérifient:

$$d_i\omega = d^*_{i-1}\omega = 0 ,$$

et qu'on désigne par *harmoniques de degré $i$*, on voit que:

(i) $\mathcal{H}^i$ est isomorphe à $H^i$

(ii) La dualité entre $C_i$ et $C^i$ induit une dualité entre $H_i$ et $\mathcal{H}^i$.

De plus si on introduit le laplacien de Hodge $\Delta_i = d^*_i \circ d_i + d_{i-1} \circ d^*_{i-1}$ alors $\mathcal{H}^i = \mathrm{Ker}(\Delta_i)$ et on a la décomposition orthogonale dite de Hodge:

$$C^i = \mathcal{H}^i \oplus \mathrm{Im}\, d_{i-1} \oplus \mathrm{Im}(d^*_i) ,$$

où la somme des 2 premiers facteurs est $\mathrm{Ker}(d_i)$.

$d_i$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(d^*_i)$ sur $\mathrm{Im}(d_i)$. On en déduit en particulier la relation définissant la caractéristique d'Euler de $(C)$:

$$\chi(C) := n_0 - n_1 + \ldots + (-1)^n.n_n = \beta_0 - \beta_1 + \ldots + (-1)^n\beta_n .$$

## 2. Lois de Kirchhoff

On considère maintenant un graphe fini connexe $\Gamma$ (sans boucles, ni arêtes multiples). On suppose qu'on a orienté une fois pour toutes chaque arête. On note $S$ l'ensemble des sommets de $\Gamma$, $A$ l'ensemble de ses arêtes.

On définit un complexe de chaines de longueur 2:

$$0 \to C_1(\Gamma) \to C_0(\Gamma) \to 0 ,$$

où $C_0(\Gamma)$ est l'espace vectoriel réel de base $S$, $C_1(\Gamma)$ est l'espace vectoriel de base $A$ et $b_1 = b$ est l'application linéaire qui sur l'arête orientée $\alpha$ d'extrémité $\alpha_+$ et d'origine $\alpha_-$ vaut:

$$b(\alpha) := \{\alpha_+\} - \{\alpha_-\} .$$

On a donc les espaces $H_0(\Gamma) = \mathrm{Coker}(b)$ et $H_1(\Gamma) = \mathrm{Ker}(b)$ ("espaces des cycles" en un sens géométrique qui sera précisé plus loin).

Si on note $\beta_0(\Gamma)$, $\beta_1(\Gamma)$ les nombres de Betti de ce complexe, on a la relation:

$$\chi(\Gamma) = \beta_0(\Gamma) - \beta_1(\Gamma) = \#S - \#A .$$

On a aussi le complexe de cochaines dual de différentielle $d = d_1 = {}^t b$:

$$0 \to \mathbf{R}^S \to \mathbf{R}^A \to 0 ,$$

où les éléments de $\mathbf{R}^S$ doivent être pensés comme les potentiels électriques et ceux de $\mathbf{R}^A$ comme les courants électriques. Les dualités sont données par:

$$\int_s V = (V|\{s\})_0 = V(s) , \quad s \in S ,$$

et
$$\int_c i = (i|c)_1 = \sum R_\alpha . x_\alpha . i_\alpha \ ,$$
où les $R_\alpha$ (les résistances) sont des nombres $> 0$ donnés, et $c = \sum x_\alpha\{\alpha\}$.

Avec cette dualité, il est clair que $d = {}^t b$ est donnée par:
$$dV(\alpha) = \frac{V(\alpha_+) - V(\alpha_-)}{R_\alpha} \ ,$$
et qu'on a (Stokes):
$$\int_{b(c)} V = \int_c dV \ .$$

En particulier $H^0(\Gamma) = \mathrm{Ker}(d)$ est formé des potentiels constants et donc
$$\beta_0(\Gamma) = 1$$
et par suite:
$$\mu := \beta_1(\Gamma) = \#A - \#S + 1 \ .$$

*Interprétation de $H_1(\Gamma)$ comme espace des cycles de $\Gamma$.*

Appelons *cycle géométrique* de longueur $n$ une application $\gamma$ de $\mathbf{Z}/n.\mathbf{Z}$ dans $S$ telle que $\forall i$ , $\gamma(i+1)$ et $\gamma(i)$ soient les 2 extrémités d'une même arête de $\Gamma$.

A tout cycle géométrique $\gamma$, on associe une chaine $c_\gamma$ de $C_1(\Gamma)$: $c_\gamma = \sum n_\alpha.\{\alpha\}$ où $n_\alpha$ est le nombre algébrique de fois où $\gamma$ suit l'arête orientée $\alpha$. Il est clair que $c_\gamma$ est un cycle, donc un élément de $H_1(\Gamma)$. Montrons que les $c_\gamma$ engendrent cet espace.

Pour un cycle $c$ notons $l(c)$ le nombre de coefficients $x_\alpha$ non nuls. Montrons qu'on peut diminuer $l(c)$ en ajoutant à $c$ un multiple convenable d'un $c_\gamma$.

Soit $c = x_{\alpha_0}.\{\alpha_0\} + \sum x_\alpha.\{\alpha\}$, où la somme porte sur les $\alpha \neq \alpha_0$ tels que $x_\alpha \neq 0$.

Soit $\Gamma_0$ le graphe dont les arêtes sont ces $\alpha$. Si la composante connexe $\Gamma_{0,+}$ de $\Gamma_0$ contenant $(\alpha_0)_+$ contient aussi $(\alpha_0)_-$, on peut refermer $\alpha_0$ en 1 cycle géométrique de $\Gamma_0$. Sinon, écrivant que $b(c) = 0$ pour les sommets de $\Gamma_{0,+}$, on en déduit que $\{(\alpha_0)_+\}$ est un bord, ce qui est impossible, car l'intégrale de 1 sur un bord est nulle (Stokes).

Il suffit maintenant de considérer $c' = c - x_{\alpha_0}.c_\gamma$, où $\gamma$ est le cycle de $\Gamma_0$ contenant $\alpha_0$ (avec multiplicité 1) dont on vient de montrer l'existence.

*Théorie de Hodge.*

On munit maintenant $\mathbf{R}^S$ du produit euclidien canonique et $\mathbf{R}^A$ du produit défini par:
$$< i|i' >_1 = \sum R_\alpha i_\alpha i'_\alpha \ .$$
Cette norme a une interprétation physique évidente : c'est l'énergie dissipée par le courant $I$ dans le circuit par effet Joule.

Calculons alors $d^\star$:
$$< d^\star i|v_s >_0 = < i|\sum_+ \frac{u_\alpha}{R_\alpha} - \sum_- \frac{u_\alpha}{R_\alpha} >_1 \ ,$$

où $v_s$ est le potentiel qui vaut 1 en $s$ et 0 ailleurs, $u_\alpha$ est le courant qui vaut 1 dans $\alpha$ et 0 ailleurs, $\sum_+$ (resp. $\sum_-$ ) est la somme sur les $\alpha$ d'extrémité (resp. d'origine) $s$.

On en déduit:

$$(d^* i)(s) = \sum_+ i_\alpha - \sum_- i_\alpha \ .$$

En particulier, *un courant est harmonique s'il satisfait la loi de Kirchhoff en tout sommet.*

On en déduit le *théorème de Kirchhhoff:*

$$\dim(\mathcal{H}^1(\Gamma)) = \mu \ ,$$

et la dualité entre $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ et l'espace des cycles donnée par intégration (variation du potentiel associé au courant le long de chaque cycle).

Plus précisément si $\gamma_1, ..., \gamma_\mu$ est une famille de cycles dont les images dans $C_1(\Gamma)$ forment une base, l'application de $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ dans $\mathbf{R}^\mu$ donnée par

$$i \rightarrow (\int_{\gamma_1} i, ..., \int_{\gamma_\mu} i)$$

est un isomorphisme.

## 3. Extensions

La théorie précédente s'étend sans problème au cas d'une surface munie d'une décomposition cellulaire. Les 1-formes harmoniques seront alors des courants (fonctions sur les arêtes orientées) satisfaisant un condition de fermeture (intégrale nulle sur les bords des cellules de dimension 2) et de co-fermeture (lois de Kirchhoff). L'espace de ces courants a alors une dimension égale au nombre de Betti $\beta_1$ de la cohomologie usuelle à coefficients réels de la surface.

L'extension la plus classique est la théorie de Hodge-de Rham d'une variété riemannienne compacte, où le complexe de cochaines est le complexe des formes différentielles sur la variété. Les structures euclidiennes sur les espaces $\Omega^i$ des formes différentielles de degré i sont construites à partir de la métrique riemannienne:

$$||\omega||_i^2 = \int_X |\omega(x)|_i^2 . d\mu_g(x) \ ,$$

où l'on prend l'intégrale par rapport à la mesure riemannienne canonique de la norme ponctuelle de $\omega$. Les opérateurs $\Delta_i$ sont alors elliptiques ce qui permet de faire une théorie raisonnable des formes harmoniques (en particulier elles sont lisses et forment un espace de dimension finie). Formellement c'est la même théorie que plus haut ([WA]).

On peut aussi faire varier la structure euclidienne, c'est ce que propose E. Witten; si $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de Morse, on prend:

$$||\omega||_{t,i}^2 = \int_X |\omega(x)|_i^2 e^{-2tf(x)} d\mu_g(x) \ ,$$

et l'on obtient des *Laplaciens de Witten* :

$$\Delta_{i,t} = \Delta_i + t^2.||grad(f)||^2 + O(t) .$$

Lorsque $t \longrightarrow +\infty$, les valeurs propres des $\Delta_{i,t}$ tendent vers l'infini sauf pour un nombre fini d'entre elles qui correspondent à des formes harmoniques localisées près des points critiques de $f$ (minimas de $||grad(f)||$).

Cela permet de casser le complexe de de Rham en deux morceaux dont l'un $C^i$ de dimension finie contient la cohomologie. La dimension de $C^i$ pour $t$ assez grand est égal au nombre de points critiques d'indice $i$ de $f$: cela donne une nouvelle preuve des inégalités de Morse et même la construction explicite par analyse de l'effet tunnel (*instantons*) d'un complexe associé à $f$ ayant la cohomologie de de Rham de $X$ (pour ceci voir par exemple l'exposé [HE]).

## 4. Références

[B-L-W] BIGGS N.L., LLOYD E.K. et WILSON R.J. — *Graph theory*, Clarendon Oxford, 1976.

[BO] BOTT R. — *On induced representations*, Proc. Symp. in pure Maths, **48** (1988), 1-3.

[D-S] DOYLE P.G., SNELL J.L. — *Random walks and electric networks*, Carus mathematical monograph 22, 1984.

[G-O] GAVEAU B., OKADA M. — *Differential forms and heat diffusion on one dimensional singular varietes*, Bull. Soc. Math., **115** (1991), 61-80.

[HE] HENNIART G. — *Les inégalités de Morse (d'après E. Witten)*, Séminaire Bourbaki, **617** (83–84), 01-17.

[KI] KIRCHHOFF G.R. — *Ueber den Durchgang eines electrischen Stromes durch eine Ebene unbesondere durch Kreisformige*, Annalen der Physik und Chemie, **72** (1847), 497-508.

[LE] LEFSCHETZ S. — *Applications of algebraic topology*, Springer, 1975.

[WA] WARNER F. — *Foundations of differentiable manifols and Lie groups*, Scott-Foresman, 1971.

[WE] WEYL H. — *Reparticion de corriente en una red conductora*, Revista Mat. Hispano-Americana, **5** (1923), 153-164.

Yves COLIN DE VERDIÈRE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)