Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Françoise Truc-Bailly

Confinement d'une particule dans un champ magnétique symétrique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 63-65

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__63_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1990–1991 (63–65)

CONFINEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE SYMÉTRIQUE

par *Françoise TRUC–BAILLY*

La trajectoire d'un particule chargée soumise à un champ magnétique est décrite par l'équation de Lorentz : $m\ddot{q}$: $e\dot{q} \wedge B$. Quand B est un champ constant en temps et position, le système d'équations est intégrable, les trajectoires sont des hélices ayant pour axe une ligne de champ. Au cours du mouvement sont conservés, outre l'énergie, le rayon de Larmor $r = \frac{mv_\perp}{eB}$ et le moment magnétique $M = \frac{mv_\perp^2}{2B}$. Les notations m, e et $v_\perp$ désignent respectivement la masse, la charge et la vitesse orthogonale à la direction du champ.

Considérons un champ magnétique qui varie "lentement" dans l'espace de telle sorte qu'au cours d'une rotation de la particule le champ soit presque constant; la trajectoire coïncide approximativement avec un cercle dont le centre (le "guiding center") se déplace lentement le long d'une ligne de champ, la période de rotation étant très petite. On peut montrer qu'à ce mouvement de rotation rapide est associé un "invariant adiabatique", le moment magnétique. En effet, dans les conditions ci-dessus, le hamiltonien dépend lentement des variables de position, sauf d'une (notée q); on peut ainsi écrire $H = H(p, q, y, \varepsilon x)$ où (q, x) sont les coordonnées ($x \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^2$), et (p, y) les moments conjugués et ε un petit paramètre. Si le système non perturbé (c'est-à-dire le système à un degré de liberté obtenu en fixant εx et y) a dans son portrait de phase des trajectoires fermées (avec une fréquence qui ne s'annule pas) alors on peut introduire les variables action-angle (I, φ). La variable d'action $I(p, q, y, \varepsilon x)$ correspond au moment magnétique et on montre que c'est un invariant adiabatique c'est-à-dire :
$$\exists c > 0\ , \ \left| I\big(p(t), q(t), q(t), \varepsilon x(t)\big) - I\big(p(0), q(0), y(0), \varepsilon x(0)\big) \right| < c\varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$$
(voir [1] : cela résulte de la méthode de moyennisation).

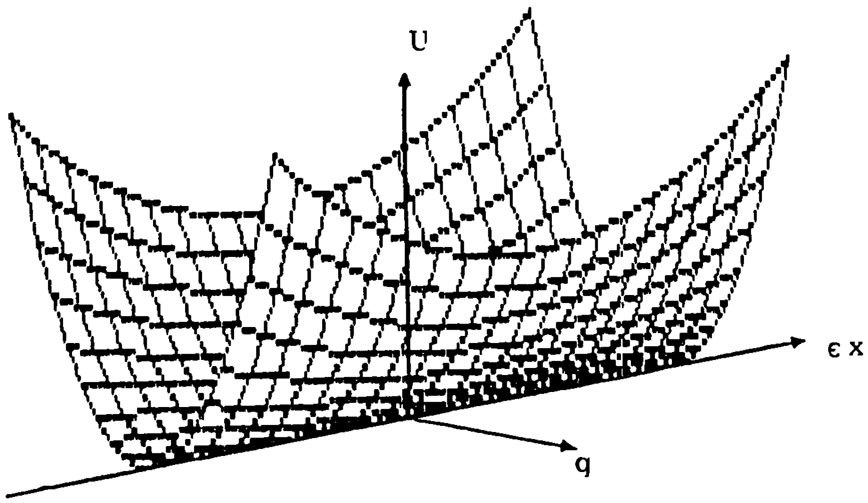
Kruskal [6] montre même l'invariance de cette quantité à un ordre quelconque : à l'aide de transformations symplectiques sur les coordonnées on peut "éliminer" la phase rapide φ de sorte que le hamiltonien exprimé dans les nouvelles coordonnées ne dépende de φ que par des termes d'ordre ε^n, n arbitrairement choisi. (Voir également Neihstadt pour une meilleure approximation [10]).

Dans le cas où le champ est une fonction convexe le long des lignes de champ (en tant que fonction de l'abscisse curviligne) il existe un autre invariant, "longitudinal". En effet la trajectoire est réfléchie aux points q_i vérifiant $MB(q_i) = H$ (M désigne de nouveau l'invariant "moment magnétique"), et l'invariant est donné par la formule $J = \frac{1}{2}\oint \frac{v_\parallel^2}{B} ds$ l'intégrale étant calculée sur une oscillation complète (voir Northrop [11]). ($v_\parallel$ désigne la vitesse parallèle à la direction de la ligne de champ).

Gardner [4] montre que cette quantité est invariante à tous ordres. Cependant on rencontre des cas où ce second invariant adiabatique n'existe pas, la vitesse d'éloignement transversale par rapport aux lignes de champ étant du même ordre que la vitesse longitudinale : Weitzner a ainsi étudié des configurations expérimentales formées de cylindres beaucoup plus longs que larges, *cf.* [12].

Arnold s'est posé la question suivante : peut-on trouver des cas pour lesquels les particules qui sont "confinées adiabatiquement" le sont réellement? Il montre que l'action est un invariant adiabatique perpétuel sous de lentes variations périodiques d'un hamiltonien à un dégré de liberté [1], p. 210; ce résultat provient de la théorie de Kam et nécessite l'hypothèse que le système n'est pas linéaire au sens que la fréquen ce moyenne n'est pas constante. Considérant un champ magnétique à symétrie axiale il écrit le hamiltonien, à 2 degrés de libertés, comme une perturbation d'un hamiltonien intégrable pour lequel le mouvement dans l'espace des phases se situe sur un tore. Sous l'hypothèse que le rapport des fréquences du mouvement "varie" dans le temps, il montre alors que les tores invariants ne sont pas tous détruits et que l'action reste un invariant adiabatique perpétuel, par des considérations de dimension [2].

La difficulté est d'expliciter l'hypothèse car le rapport des fréquences est d'un ordre "petit". Arnold ne la vérifie que dans le cas où le hamiltonien s'écrit $H = \frac{p^2+y^2}{2} + U(x,q)$ où le "puits de potentiel" s'écrit $U(x,q) = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 x^2 + 1)q^2$



Une autre méthode consiste à utiliser un théorème de Moser [8] qui garantit l'existence de solutions périodiques des équations du mouvement, pour des systèmes proches d'un système intégrable. M. Braun a ainsi prouvé l'existence d'une région où les particules soumises au champ magnétique terrestres sont retenues indéfiniment [3].

Il généralise sa démarche à un champ à symétrie axiale mais sans expliciter la condition de "twist" qui permet d'utiliser le théorème de Moser; en effet celle-ci doit se vérifier pour chaque champ étudié.

Nous déterminerons une classe de conditions initiales qui permettent d'obtenir une trajectoire bornée, dans le cas d'une particule soumise à un champ magnétique symétrique et linéaire.

Nous écrivons le hamiltonien du système comme une perturbation d'un hamiltonien à deux fréquences, et nous bornerons uniformément le terme perturbateur sous certaines hypothèses sur les conditions initiales. Nous vérifions la condition technique du théorème de Moser qui permet alors d'affirmer que le moment magnétique de la particule est un invariant adiabatique perpétuel, nous montrons alors que les trajectoires sont bornées lorsque le rapport entre vitesse et positions est assez petit et que le moment magnétique initial n'est pas "trop petit".

Bibliographie

[1] ARNOLD V. I. — *Dynamical Systems, Springer Verlag*, Encyclopaedia of Math. Sciences **3**, 1988.

[2] ARNOLD V. I. — *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Russ Math. Survey, **18** 6 (1963), 85–190.

[3] BRAUN M. — *Particle motions in a magnetic Field*, Journal of Diff. Equ, **8** (1970), 294–332.

[4] GARDNER M. — *The adiabatic invariant of periodic classical systems*, Phys. Rev., **115** (1959), 791–794.

[5] HERMAN M.R. — *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Astérisque, Paris, **1** (1983), 103–104.

[6] KRUSKAL M. — *Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic*, Journal of Mathematical Physics, **3** (1962), 806–829.

[7] LOCHAK P., MEUNIER C. — *Multiphase averaging for classical systems with applications to Adiabatic theorems*, Applied Math. Sciences, Springer Verlag **72**, 1988.

[8] MOSER J. — *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus*, Nachr Acad. Wiss. II Göttingen, Math. Phys. Klasse, 1–20, 1962.

[9] MOSER J. — *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of Math. studies Princeton University Press, 1973.

[10] NEISTADT A.I. — *The separation of motions in systems with rapidly rotating phase*, J. Appl. Math. Mech, **48** 2 (1984), 133–139.

[11] NORTHROP T.G. — *The adiabatic motion of charged particles*, Wiley Interscience Publishers New-York, 1963.

[12] WEITZNER H. — *Motion of a charged particle in slowly varying electromagnetic Field*, Comm. in pure and applied Math., **36** (1983), 695–704.

Françoise TRUC-BAILLY
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)