EMMANUEL CÉPA

Équations différentielles stochastiques multivoques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 29 (1995), p. 86-107
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1995__29__86_0>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES MULTIVOQUES

Emmanuel CÉPA
Département de Mathématiques, Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans cedex 2, France

1 Introduction

On s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle stochastique associée à un opérateur maximal monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, formellement, du type :

$$\begin{cases} dX_t + A(X_t)dt \ni b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \in \overline{D(A)}. \end{cases} \tag{1.1}$$

La formulation précise de (1.1) que l'on utilisera est équivalente à celle donnée par A. Bensoussan et J.L. Lions dans [1] pour les processus de diffusion réfléchis où le problème est posé sous forme d'inéquations variationnelles stochastiques. Dans [6], P. Krée obtient l'existence d'une solution forte lorsque la composante brownienne et la composante multivoque agissent dans des directions séparées. Un cas très fréquent d'opérateur maximal monotone multivoque est constitué par le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. propre φ : en particulier quand cette fonction vaut 0 dans un convexe fermé et $+\infty$ en dehors, il s'agit simplement d'un problème de réflexion au bord d'un domaine convexe et le cas stochastique a déjà été abondamment traité, notamment par H. Tanaka [11] et J.L. Menaldi [9]. Dans le cas unidimensionnel ($d = 1$), on sait que tout opérateur maximal monotone multivoque A provient nécessairement de la sous-dérivée d'une fonction convexe s.c.i. propre φ et le problème d'existence et d'unicité a été résolu dans sa plus grande généralité par D. Lépingle-C. Marois [8] qui montrent que pour b, σ lipschitziens et tout opérateur maximal monotone multivoque $A = \partial\varphi$ de $\mathbb{R}$, le problème (1.1) admet une unique solution forte. Plus récemment, A. Bensoussan-A. Rascanu [2] ont montré l'existence et l'unicité d'une solution forte pour (1.1) dans le cas particulier où $A = \partial\varphi$, avec φ fonction convexe s.c.i. propre de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), et b, σ sont lipschitziens.

On se propose ici de montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte pour l'équation différentielle stochastique associée à un opérateur maximal monotone multivoque *quelconque* A de $\mathbb{R}^d$ *pour tout* $d \in \mathbb{N}^*$. L'unicité trajectorielle est obtenue sensiblement comme en dimension 1 en utilisant uniquement la monotonie de A. L'existence d'une solution forte est démontrée en considérant un problème approché (pénalisation) puis, en montrant un résultat de compacité au sens de la convergence en loi pour la pseudo-topologie de Meyer-Zheng [10], en prouvant ensuite que la convergence est en fait uniforme (sur les compacts) grâce à une technique de changement de temps inspirée de T. Kurtz [7], et enfin en passant à la limite dans le problème approché. On obtient ainsi une solution faible du problème et, finalement, on conclut qu'il y a existence forte grâce à l'unicité trajectorielle et au théorème de Yamada-Watanabe (étendu au cas multivoque). Cette démonstration vise à construire la loi de la solution de (1.1) : elle consiste à voir une équation différentielle stochastique multivoque comme une perturbation multivoque d'une équation différentielle stochastique classique (cas $A = 0$) et donc cherche à régulariser (en espace) le terme multivoque A. Une technique de changement de temps est nécessaire pour "ralentir" les approximants de la solution car le passage à la limite "voit les singularités" de A, ce qui explique la relative complexité de la méthode.

La principale motivation de cette étude est l'obtention d'un résultat d'existence et d'unicité fortes pour des équations différentielles stochastiques réfléchies possédant un coefficient de diffusion satisfaisant aux conditions habituelles de type Lipschitz (sans hypothèse supplémentaire de non-dégénérescence) et, surtout, un coefficient de dérive très singulier (ne vérifiant donc pas les hypothèses habituelles de type Lipschitz). En particulier, le résultat essentiel démontré dans ce document permet d'obtenir des diffusions réfléchies dans un domaine D de $\mathbb{R}^d$ qui possèdent un coefficient de diffusion dégénéré et un coefficient de dérive discontinu, explosant au bord du domaine D.

La formulation du problème telle qu'elle a été faite dans (1.1) est purement formelle et n'a pour seul but que de donner une idée du problème posé au lecteur : une formulation précise sera donnée en même temps que les hypothèses et les résultats obtenus. Tout d'abord, on rappelle quelques résultats généraux sur les opérateurs maximaux monotones multivoques.

2 Opérateurs maximaux monotones multivoques

Après avoir rappelé la définition d'un opérateur maximal monotone multivoque, on donne quelques exemples et les propriétés élémentaires d'un tel opérateur, puis on construit une suite d'approximants univoques. Les résultats énoncés dans cette partie sont tout à fait classiques : le lecteur pourra trouver dans l'ouvrage de H. Brézis [3] à la fois un développement plus complet sur ce sujet et aussi les démonstrations que l'on a omises ici. Dans toute cette section, d est un entier naturel non nul fixé.

2.1 Définitions

Définition 2.1 *On appelle opérateur multivoque de $\mathbb{R}^d$ toute application A de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, où $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$. Le domaine de A est l'ensemble*

$$D(A) = \{x \in \mathbb{R}^d : A(x) \neq \emptyset\}, \tag{2.2}$$

et l'image de A l'ensemble :

$$\mathrm{Im}\,(A) = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^d} A(x). \tag{2.3}$$

Si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A(x)$ contient au plus un élément, on dira que A est un opérateur univoque de $\mathbb{R}^d$ (on retombe alors sur la théorie classique des opérateurs). Un opérateur multivoque de $\mathbb{R}^d$ est complètement déterminé par la donnée de son graphe défini par :

$$\mathrm{Gr}\,(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2d} : x \in \mathbb{R}^d,\, y \in A(x)\}. \tag{2.4}$$

L'opérateur inverse de A, noté A^{-1}, est l'opérateur dont le graphe est symétrique de celui de A, c'est-à-dire :

$$y \in A^{-1}(x) \;\Leftrightarrow\; x \in A(y). \tag{2.5}$$

Définition 2.2 *Un opérateur multivoque A de $\mathbb{R}^d$ est dit monotone si et seulement si*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geqslant 0\,, \qquad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathrm{Gr}\,(A), \tag{2.6}$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 2.3 *Soit A un opérateur multivoque de $\mathbb{R}^d$. Alors A est monotone si et seulement si :*

$$|x_1 - x_2| \leqslant |(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)|, \qquad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Gr}(A), \forall \lambda > 0, \quad (2.7)$$

avec $|.|$ la norme euclidienne associée à $\langle ., . \rangle$.

Par conséquent, la condition de monotonie exprime que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction univoque de $\mathrm{Im}(I + \lambda A)$ dans $\mathbb{R}^d$. Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, l'équation $z \in x + \lambda A(x)$ admet au plus une solution, et si x_1, x_2 sont les solutions correspondant à z_1, z_2, on a : $|x_1 - x_2| \leqslant |z_1 - z_2|$. Les opérateurs que nous allons considérer dans la suite sont ceux pour lesquels l'équation $z \in x + \lambda A(x)$ possède exactement une solution pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda > 0$.

L'ensemble des opérateurs multivoques de $\mathbb{R}^d$ est ordonné pour l'inclusion des graphes :

$$A \subset B \Leftrightarrow \{D(A) \subset D(B) \text{ et, pour tout } x \in D(A),\ A(x) \subset B(x)\}, \qquad (2.8)$$

et il est inductif pour cette relation d'ordre, d'où la

Définition 2.4 *Un opérateur monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$ est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones mutivoques, c'est-à-dire A est maximal monotone si et seulement si*

$$(x, y) \in \mathrm{Gr}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \Big\{ \langle y - v, x - u \rangle \geqslant 0, \quad \forall (u, v) \in \mathrm{Gr}(A) \Big\}. \qquad (2.9)$$

Remarque. Insistons sur le fait que A est maximal dans l'ensemble des graphes monotones. Un opérateur qui est seulement maximal dans l'ensemble des opérateurs univoques monotones n'est pas nécessairement maximal monotone au sens de la définition 2.4.

La caractérisation suivante est fondamentale dans l'étude des opérateurs maximaux monotones multivoques.

Proposition 2.5 *Soit A opérateur multivoque de $\mathbb{R}^d$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) A est maximal monotone ;

(ii) A est monotone et $\mathrm{Im}(I + A) = \mathbb{R}^d$*;*

(iii) pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction univoque définie sur $\mathbb{R}^d$ tout entier.

2.2 Exemple fondamental d'opérateur maximal monotone multivoque : $\partial\varphi$

Définition 2.6 *Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire une application $\varphi : \mathbb{R}^d \to]-\infty; +\infty]$ telle que :*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0; 1]. \quad (2.10)$$

On appelle domaine effectif de φ l'ensemble $\mathrm{dom}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) < +\infty\}$ *et on dit que φ est propre si* $\mathrm{dom}(\varphi)$ *est non vide.*

Définition 2.7 *Soit φ fonction convexe propre de $\mathbb{R}^d$. On appelle sous-différentiel de φ, noté $\partial\varphi$, l'opérateur multivoque de $\mathbb{R}^d$ défini par son graphe de la façon suivante*

$$(x,y) \in \mathrm{Gr}(\partial\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(z) + \langle y, x-z \rangle, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^d. \tag{2.11}$$

Proposition 2.8 *Le sous-différentiel d'une fonction convexe, semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé), propre de $\mathbb{R}^d$ est un opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$.*

Cas particulier : sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un convexe fermé.
Soit D un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction indicatrice de D, notée I_D, la fonction définie par :

$$I_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in D \\ +\infty & \text{si } x \notin D. \end{cases} \tag{2.12}$$

On vérifie facilement que I_D est une fonction convexe, s.c.i., propre avec dom(I_D)=D. On a alors pour tout x dans D :

$$\partial I_D(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, x-z \rangle \geqslant 0, \forall z \in D\}, \tag{2.13}$$

c'est-à-dire :

$$\partial I_D(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin D \\ \{0\} & \text{si } x \in \mathrm{Int}(D) \\ \Pi_x & \text{si } x \in \partial D, \end{cases} \tag{2.14}$$

où l'on a noté Int(D) l'intérieur de D et Π_x le cône normal extérieur à D en x.

Remarques.

(i) En dimension $d = 1$, tous les opérateurs maximaux monotones multivoques A sont de la forme décrite précédemment c'est-à-dire $A = \partial\varphi$ avec φ fonction convexe, s.c.i., propre de $\mathbb{R}$. Par contre dans le cas multidimensionnel ($d \geqslant 2$), il existe des opérateurs maximaux monotones multivoques qui ne sont pas des sous-différentiels de fonction convexe.

(ii) Soit A opérateur linéaire, univoque, monotone de $\mathbb{R}^d$. Alors A est maximal monotone multivoque si et seulement si $D(A)$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ et A maximal dans l'ensemble des opérateurs univoques linéaires monotones.

(iii) Soit A opérateur univoque, monotone de $\mathbb{R}^d$ tel que $D(A) = \mathbb{R}^d$. Si A est hémicontinu (i.e. pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $A((1-t)x + ty) \to A(x)$ lorsque $t \to 0$) alors A est maximal monotone multivoque.

2.3 Propriétés élémentaires

Proposition 2.9 *Soit A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. Alors on a les propriétés :*

(i) Int$(D(A))$ *et* $\overline{D(A)}$ *(où* $\overline{D(A)}$ *désigne l'adhérence de* $D(A)$*) sont des convexes de* $\mathbb{R}^d$*, de plus* Int$(D(A))$ = Int$(\overline{D(A)})$ *;*

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A(x)$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^d$.

Notations. La proposition 2.9 (ii) permet de définir l'opérateur univoque :

$$A^\circ(x) = \mathrm{proj}_{A(x)}(0), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.15}$$

où pour tout convexe fermé D de $\mathbb{R}^d$, proj_D désigne la projection sur D et :

$$\mathrm{proj}_\emptyset(0) = \delta, \tag{2.16}$$

avec δ un point à l'infini de $\mathbb{R}^d$, fixé, et pour lequel on prendra $|\delta| = +\infty$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A^\circ(x)$ est l'élément de norme minimale de $A(x)$; on aura donc l'équivalence :

$$x \in D(A) \quad \Leftrightarrow \quad |A^\circ(x)| < +\infty. \tag{2.17}$$

Définition 2.10 *On appelle section principale d'un opérateur multivoque A de $\mathbb{R}^d$ tout opérateur univoque A' de $\mathbb{R}^d$ avec $D(A) \subset D(A')$ et tel que pour tout $(x,y) \in \overline{D(A)} \times \mathbb{R}^d$, l'inégalité*

$$\langle A'(z) - y, z - x\rangle \geqslant 0, \qquad \forall z \in D(A), \tag{2.18}$$

implique $y \in A(x)$.

Proposition 2.11 *Pour tout opérateur maximal monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$, l'opérateur A° est une section principale de A.*

Les opérateurs maximaux monotones multivoques de $\mathbb{R}^d$ sont localement bornés sur l'intérieur de leur domaine :

Proposition 2.12 *Soit A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. Alors A est borné au voisinage de tout point intérieur à $D(A)$, c'est-à-dire : pour tout x dans $\mathrm{Int}(D(A))$, il existe un voisinage V de x tel que*

$$\bigcup_{x' \in V} A(x') \tag{2.19}$$

soit une partie bornée de $\mathbb{R}^d$. En particulier, A est borné sur tout compact inclus dans $\mathrm{Int}\,(D(A))$.

2.4 Approximation Yosida "multivoque"

Proposition 2.13 *Soit A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. On pose*

$$J_n = \left(I + \frac{1}{n}A\right)^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.20}$$

Alors J_n est une contraction univoque définie sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, à valeurs dans $D(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus :

$$J_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.21}$$

L'application J_n est appelée n^{ieme} résolvante de A.

Proposition 2.14 *Soit A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. On pose*

$$A_n = n(I - J_n), \qquad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.22}$$

Alors :

(i) A_n opérateur maximal monotone, univoque, défini sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, lipschitzien de rapport n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) pour tout $x \in D(A)$,

$$A_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} A^\circ(x), \tag{2.23}$$

avec $|A_n(x)| \uparrow |A^\circ(x)|$ quand $n \uparrow \infty$ et

$$|A_n(x) - A^\circ(x)|^2 \leqslant |A^\circ(x)|^2 - |A_n(x)|^2; \tag{2.24}$$

(iii) pour tout $x \notin D(A)$,

$$|A_n(x)| \uparrow +\infty \quad \textit{quand} \quad n \uparrow \infty; \tag{2.25}$$

(iv) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A_n(x) \in A(J_n(x))$.

L'application A_n est appelée n^{ieme} approximée Yosida de A.

Remarque. On vérifie facilement que lorsque $A = \partial I_D$ avec D convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^d$, on a pour tous $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_n(x) = \mathrm{proj}_D(x) \quad \text{et} \quad A_n(x) = n(x - \mathrm{proj}_D(x)). \tag{2.26}$$

3 Position du problème

3.1 Données

- $d \in \mathbb{N}^*$;

- A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$ tel que :

$$\mathrm{Int}(D(A)) \neq \emptyset; \tag{3.27}$$

- $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles ;

- $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leqslant t < \infty\}$ mouvement brownien d-dimensionnel standard défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $W_0 = 0$;

- $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ applications mesurables ;

- $x_0 \in \overline{D(A)}$.

3.2 Énoncé du problème

On cherche un couple de processus (X, K) vérifiant :

$\boxed{1}$ $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leqslant t < \infty\}$ processus continu, adapté, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\overline{D(A)}$ avec $X_0 = x_0$ $\mathbb{P}$-p.s. ;

$\boxed{2}$ $K = \{K_t, \mathcal{F}_t; 0 \leqslant t < \infty\}$ processus continu, adapté, à variation finie, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $K_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. ;

$\boxed{3}$ $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t - dK_t; \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad \mathbb{P}$-p.s. ;

$\boxed{4}$ pour tout couple de processus (α, β), $\alpha = \{\alpha_t, \mathcal{F}_t; 0 \leqslant t < \infty\}$ et $\beta = \{\beta_t, \mathcal{F}_t; 0 \leqslant t < \infty\}$ continus, adaptés, définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant :

$$(\alpha_u, \beta_u) \in \mathrm{Gr}(A), \qquad \forall u \in [0; +\infty[, \tag{3.28}$$

la mesure

$$\langle X_u - \alpha_u, \, dK_u - \beta_u du \rangle \tag{3.29}$$

est $\mathbb{P}$-p.s. positive sur $\mathbb{R}^+$.

Le problème précédent $\left(\boxed{1}; \boxed{2}; \boxed{3}; \boxed{4}\right)$ sera noté $EDSM^d(A; b; \sigma; x_0)$ dans la suite.

Remarque. Lorsque $A = \partial I_D$ avec D convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^d$, le problème $EDSM^d(A; b; \sigma; x_0)$ est équivalent au problème de diffusion (de coefficient de dérive b et de coefficient de diffusion σ) réfléchie (normalement) dans D.

3.3 Résultats

On sera amené à utiliser l'hypothèse suivante : il existe $0 < C < \infty$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant C|x - y| \, . \tag{3.30}$$

On peut maintenant énoncer le résultat fondamental d'existence et d'unicité pour l'équation différentielle stochastique associée à un opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on a :

Théorème 3.1 *($EDSM^d$) : Pour tout opérateur maximal monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$ vérifiant (3.27), tout $x_0 \in \overline{D(A)}$, toutes applications b, σ satisfaisant à (3.30), il existe une unique solution du problème $EDSM^d(A; b; \sigma; x_0)$.*

Remarques.

(*i*) On obtient le même résultat d'existence et d'unicité pour une condition initiale aléatoire η $\mathcal{F}_0$-mesurable, à valeurs dans $\overline{D(A)}$ et des coefficients $b(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ dépendant du temps vérifiant alors au lieu de (3.30) : pour tout $T > 0$, il existe $0 < C(T) < \infty$ telle que pour tous $0 \leqslant t \leqslant T$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant C(T)|x - y| \, , \tag{3.31}$$

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leqslant C(T)(1 + |x|) \, . \tag{3.32}$$

(*ii*) Il est intéressant de noter que puisque l'on peut considérer en particulier A sous la forme $\partial\varphi$ avec φ seulement convexe, s.c.i., propre, le théorème 3.1 donne un résultat d'existence et d'unicité fortes pour des équations différentielles stochastiques réfléchies possédant un coefficient de dérive éventuellement très singulier. Le théorème 3.1 permet en particulier d'obtenir des diffusions réfléchies dans un domaine D de $\mathbb{R}^d$ qui possèdent un coefficient de diffusion dégénéré et un coefficient de dérive discontinu, explosant au bord du domaine D.

Conventions. On adopte la notation classique f^{-1} pour désigner l'application réciproque d'une bijection f. Dans les calculs, toutes les constantes, dont la valeur n'a pas lieu d'être précisée, seront notées indifféremment C.

4 Démonstration de l'unicité

On se propose de montrer dans cette section qu'il y a unicité trajectorielle pour l'équation différentielle stochastique associée à un opérateur maximal monotone multivoque A quelconque et des coefficients b, σ vérifiant les hypothèses Lipschitz habituelles.

Le lemme suivant étend un résultat analogue de D. Lépingle-C. Marois [8] en dimension 1. Ces derniers utilisent dans leur démonstration les propriétés particulières des convexes de $\mathbb{R}$: dans le cas multidimensionnel, il faut généraliser quelque peu leur preuve en faisant appel à l'approximation Yosida des opérateurs maximaux monotones multivoques.

Lemme 4.1 *(Lemme de monotonie) On suppose donné A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. Soient (x,k), (x',k') des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telles que :*

(i) k, k' à variation finie ;

(ii) x, x' à valeurs dans $\overline{D(A)}$;

(iii) les mesures :

$$\langle x(u)-\alpha(u), dk(u)-\beta(u)du\rangle, \tag{4.33}$$

$$\langle x'(u)-\alpha(u), dk'(u)-\beta(u)du\rangle, \tag{4.34}$$

sont positives sur $\mathbb{R}^+$ pour tout couple de fonctions (α,β) continues vérifiant :

$$(\alpha(u),\beta(u)) \in \mathrm{Gr}\,(A), \qquad \forall u \in \mathbb{R}^+. \tag{4.35}$$

Alors la mesure

$$\langle x(u)-x'(u),\ dk(u)-dk'(u)\rangle \tag{4.36}$$

est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration. Soient (x,k), (x',k') vérifiant les hypothèses du lemme 4.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prenons :

$$\alpha^{(n)}(u) = J_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big), \tag{4.37}$$

$$\beta^{(n)}(u) = A_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big), \tag{4.38}$$

alors $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$ continues et $(\alpha^{(n)}(u), \beta^{(n)}(u)) \in \mathrm{Gr}\,(A)$ car $A_n(x) \in A(J_n(x))$ pour tout x dans $\mathbb{R}^d$ d'après la proposition 2.14 (*iv*).
En utilisant la positivité des mesures (4.33) et (4.34) pour $(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$0 \leqslant \Big\langle x(u) - J_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big), dk(u) - A_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big)du\Big\rangle, \tag{4.39}$$

$$0 \leqslant \Big\langle x'(u) - J_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big), dk'(u) - A_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big)du\Big\rangle, \tag{4.40}$$

d'où en ajoutant et retranchant $(x(u)+x'(u))/2$ dans le premier membre de chacun des produits scalaires :

$$0 \leqslant \Big\langle \frac{x(u)-x'(u)}{2} + \frac{1}{n}A_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big), dk(u) - A_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big)du\Big\rangle, \tag{4.41}$$

$$0 \leqslant \Big\langle \frac{x'(u)-x(u)}{2} + \frac{1}{n}A_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big), dk'(u) - A_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big)du\Big\rangle, \tag{4.42}$$

puis en sommant les équations (4.41) et (4.42) ainsi obtenues :

$$\begin{aligned} 0 \ \leqslant\ & \frac{1}{2}\Big\langle x(u) - x'(u)\,,\ dk(u) - dk'(u)\Big\rangle - \frac{2}{n}\Big|A_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big)\Big|^2 du \\ & + \Big\langle \frac{x(u)+x'(u)}{2} - J_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big),\ dk(u) + dk'(u)\Big\rangle, \end{aligned}$$

par conséquent :
$\langle x(u)-x'(u),\ dk(u)-dk'(u)\rangle \geqslant -2\Big\langle \frac{x(u)+x'(u)}{2} - J_n\Big(\frac{x(u)+x'(u)}{2}\Big), dk(u)+dk'(u)\Big\rangle$,
puis en passant à la limite quand $n \to \infty$ d'après la convergence

$$J_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}}(x) \tag{4.43}$$

rappelée dans la proposition 2.13, et, grâce à la convexité de $\overline{D(A)}$ donnée par la proposition 2.9 :

$$\frac{x(u)+x'(u)}{2} \in \overline{D(A)}, \tag{4.44}$$

on obtient le résultat voulu. ■

En vertu du lemme de monotonie précédent, la démonstration de l'unicité trajectorielle pour l'équation (1.1) est rapidement ramenée au cas des équations différentielles stochastiques classiques et ne pose donc aucun problème.

Théorème 4.2 *(Théorème d'unicité) : Pour tout opérateur maximal monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$, tout $x_0 \in \overline{D(A)}$, toutes applications b, σ satisfaisant à (3.30), l'équation différentielle stochastique multivoque (1.1) possède la propriété d'unicité trajectorielle.*

Démonstration. Soient (X, K) et (X', K') deux solutions faibles de l'équation différentielle stochastique multivoque (1.1) sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$, par rapport au même mouvement brownien $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0\leqslant t < \infty\}$ et de même condition initiale. On pose :

$$S_p = \inf\{t\geqslant 0 : |X_t| + |X'_t| \geqslant p\}, \qquad p \in \mathbb{N}^*. \tag{4.45}$$

Alors S_p est un $\{\mathcal{F}_t\}$-temps d'arrêt pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $S_p \uparrow \infty$ quand $p \uparrow \infty$ $\mathbb{P}$-p.s.. D'après la formule d'Itô, on a :

$$\begin{aligned}
|X_{t\wedge S_p} - X'_{t\wedge S_p}|^2 &= 2\int_0^{t\wedge S_p} \langle b(X_s) - b(X'_s), X_s - X'_s\rangle ds \\
&\quad + 2\int_0^{t\wedge S_p} \langle \sigma(X_s) - \sigma(X'_s), X_s - X'_s\rangle dW_s \\
&\quad - 2\int_0^{t\wedge S_p} \langle X_s - X'_s, dK_s - dK'_s\rangle \\
&\quad + \int_0^{t\wedge S_p} \mathrm{tr}\left[\{\sigma(X_s) - \sigma(X'_s)\}\{\sigma(X_s) - \sigma(X'_s)\}^*\right] ds .
\end{aligned}$$

Grâce au lemme de monotonie (lemme 4.1), la mesure :

$$< X_u - X'_u,\ dK_u - dK'_u > \tag{4.46}$$

est $\mathbb{P}$-p.s. positive sur $\mathbb{R}^+$, d'où :

$$\begin{aligned}
|X_{t\wedge S_p} - X'_{t\wedge S_p}|^2 &\leqslant 2\int_0^{t\wedge S_p} \langle b(X_s) - b(X'_s), X_s - X'_s\rangle ds \\
&\quad + 2\int_0^{t\wedge S_p} \langle \sigma(X_s) - \sigma(X'_s), X_s - X'_s\rangle dW_s \\
&\quad + \int_0^{t\wedge S_p} \mathrm{tr}\left[\{\sigma(X_s) - \sigma(X'_s)\}\{\sigma(X_s) - \sigma(X'_s)\}^*\right] ds ,
\end{aligned}$$

puis, en utilisant l'hypothèse (3.30) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_{t\wedge S_p} - X'_{t\wedge S_p}|^2 &\leqslant C\,\mathbb{E}\int_0^{t\wedge S_p} |X_s - X'_s|^2 ds \\
&\leqslant C\int_0^t \mathbb{E}|X_{s\wedge S_p} - X'_{s\wedge S_p}|^2 ds ,
\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}|X_{t\wedge S_p} - X'_{t\wedge S_p}|^2 = 0$ par le lemme de Gronwall puis, par le lemme de Fatou, $\mathbb{E}|X_t - X'_t|^2 = 0$ donc $X = X'$, $K = K'$. ■

5 Démonstration de l'existence

On se propose de démontrer l'existence d'une solution forte pour (1.1) en construisant la loi de la solution comme limite au sens de la convergence étroite d'une suite de lois approchées.

5.1 Topologie de Meyer-Zheng et changement de temps

5.1.1 Topologie de Meyer-Zheng

Dans [10], P.A. Meyer et W.A. Zheng munissent l'espace des trajectoires càdlàg de la topologie de la convergence en mesure (beaucoup plus faible que la topologie de Skorohod) afin d'obtenir des critères de compacité en loi pour les processus plus commodes que les critères usuels (Aldous, ...). On utilisera ici les résultats de P.A. Meyer et W.A. Zheng uniquement dans le cas particulier des processus croissants. Pour les résultats donnés sans démonstration, on renvoie systématiquement le lecteur à [10].

Notation. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des trajectoires càdlàg sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.1 *On appelle pseudo-topologie sur $\mathcal{D}$ la topologie de la convergence en mesure pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$.*

Convention. On supposera systématiquement dans toute la suite que l'espace $\mathcal{D}$ est muni de la pseudo-topologie.

Le théorème suivant donne un critère de compacité en loi pour une suite de processus càdlàg croissants lorsque l'on munit l'espace des trajectoires càdlàg de la pseudo-topologie.

Théorème 5.2 *Soit $(\theta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de processus croissants, càdlàg, $\theta_0^{(n)} = 0$, définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $t \in [0;+\infty[$ il existe une constante $C(t)$ finie telle que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\Big(\theta_t^{(n)}\Big) \leqslant C(t). \tag{5.47}$$

Alors $(\theta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue sur $\mathcal{D}$.

5.1.2 Convergence uniforme et changement de temps : un résultat déterministe

Dans [7], T. Kurtz montre que pour les processus, la convergence en loi pour la topologie de Meyer-Zheng implique à un changement de temps près la convergence en loi pour la topologie uniforme. De plus, T. Kurtz donne des conditions suffisantes pour que la convergence au sens Meyer-Zheng implique la convergence uniforme. On utilisera plus loin cette idée de changement de temps pour "tranformer" une convergence au sens Meyer-Zheng en une convergence uniforme (voir le changement de temps effectué à la section suivante) ; pour l'instant, on reprend de façon déterministe l'une des conditions suffisantes de T. Kurtz mentionnées précédemment. Plus précisément, on donne une condition (nécessaire et) suffisante pour avoir la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues d-dimensionnelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le cas où il existe une suite de changements de temps $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant p.p. (pour la mesure de Lebesgue) telle que la suite des "changées de temps" $(y_n(.) = x_n(\theta_n(.)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

Théorème 5.3 *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On se donne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^d)$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $C([0;+\infty[;\mathbb{R})$ avec θ_n strictement croissant, $\theta_n(0) = 0$, $\theta_n(\infty) = \infty$ pour tout*

$n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\tau_n = (\theta_n)^{-1}$ et $y_n(t) = x_n(\tau_n(t))$. On suppose qu'il existe $y \in C([0;+\infty[;\mathbb{R}^d)$, $\tau \in C([0;+\infty[;\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathcal{D}$ telles que :

$$(y_n, \tau_n, \theta_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (y, \tau, \theta) \qquad \text{dans } C([0;+\infty[;\mathbb{R}^{d+1}) \times \mathcal{D}. \tag{5.48}$$

On peut alors définir $x(t) = y(\theta(t))$. Une condition (nécessaire et) suffisante pour avoir la continuité de x et la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers x dans $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^d)$ est :

$$\{(s,t) \in [0;+\infty[\times[0;+\infty[: \tau(s) = \tau(t)\} \subset \{(s,t) \in [0;+\infty[\times[0;+\infty[: y(s) = y(t)\}. \tag{5.49}$$

5.2 Approximation

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation différentielle stochastique classique (univoque) :

$$\begin{cases} dX_t^{(n)} = b(X_t^{(n)})dt - A_n(X_t^{(n)})dt + \sigma(X_t^{(n)})dW_t \\ X_0^{(n)} = x_0 \end{cases} \tag{5.50}$$

qui possède une unique solution continue adaptée $X^{(n)}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ d'après le caractère Lipschitz des A_n (voir proposition 2.14) et l'hypothèse (3.30) faite sur b et σ.

Notations. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les processus suivants sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\theta_t^{(n)} = \int_0^t |A_n(X_u^{(n)})|du + t \; ; \; \tau^{(n)} = (\theta^{(n)})^{-1} \; ; \tag{5.51}$$

$$K_t^{(n)} = \int_0^t A_n(X_u^{(n)})du \; ; \; M_t^{(n)} = \int_0^t \sigma(X_u^{(n)})dW_u \; ; \tag{5.52}$$

$$Y_t^{(n)} = X_{\tau_t^{(n)}}^{(n)} \; ; \; H_t^{(n)} = K_{\tau_t^{(n)}}^{(n)} \, . \tag{5.53}$$

5.3 Tension

Dans le cas où A est le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un convexe fermé d'intérieur non vide D, J.L. Menaldi [9] montre qu'il existe $a \in \mathbb{R}^d$, $\gamma > 0$ (ne dépendant que de D) tels que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle (\partial I_D)_n(x), x - a \rangle \geqslant \gamma |(\partial I_D)_n(x)| \, . \tag{5.54}$$

On va maintenant montrer une inégalité qui généralise celle obtenue par J.L. Menaldi dans le cas de la fonction indicatrice d'un convexe fermé et qui sera fondamentale pour obtenir la tension au sens Meyer-Zheng de la suite des processus $X^{(n)}$ associés aux A_n.

Lemme 5.4 *Il existe $a \in \mathbb{R}^d$, $\gamma > 0$, $\mu \geqslant 0$ (ne dépendant que de A) tels que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$\langle A_n(x), x - a \rangle \geqslant \gamma |A_n(x)| - \mu |x - a| - \gamma\mu \, . \tag{5.55}$$

Démonstration. D'après l'hypothèse 3.27, il existe $a \in \operatorname{Int}(D(A))$. Soit $\gamma > 0$ tel que $\bar{B}(a,\gamma) \subset \operatorname{Int}(D(A))$. On pose :

$$\mu = \max\{|y| : y \in A(x),\, x \in \bar{B}(a,\gamma)\}. \tag{5.56}$$

D'après la proposition 2.12, on a $0 \leqslant \mu < \infty$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^d$. L'inégalité (5.55) est triviale si $A_n(x) = 0$; supposons donc $A_n(x) \neq 0$. D'après la monotonie de A_n, on a pour tout $z \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle A_n(x) - A_n(z),\, x - z\rangle \geqslant 0. \tag{5.57}$$

En appliquant (5.57) avec $z = a + \gamma \dfrac{A_n(x)}{|A_n(x)|}$, on obtient en utilisant la proposition 2.14 et (5.56):

$$\begin{aligned}\langle A_n(x),\, x - a\rangle &\geqslant \gamma|A_n(x)| + \langle A_n(z),\, x - z\rangle \\ &\geqslant \gamma|A_n(x)| - \mu|x - z| \\ &\geqslant \gamma|A_n(x)| - \mu|x - a| - \mu\gamma.\end{aligned}$$

■

Afin d'obtenir la convergence en loi de la suite $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, on va maintenant montrer un résultat de tension.

Proposition 5.5 *La suite* $(\tau^{(n)}, H^{(n)}, M^{(n)}, W, Y^{(n)}, \theta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est tendue sur l'espace* $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^{4d+1}) \times \mathcal{D}$.

Démonstration. La tension de $(\tau^{(n)}, H^{(n)}, M^{(n)}, W, Y^{(n)})$ s'obtient facilement en utilisant le critère d'Aldous (voir [5]) et en remarquant que pour $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'on a :

$$|\tau_t^{(n)} - \tau_s^{(n)}| \leqslant |t - s|, \tag{5.58}$$

et (en effectuant le changement de variable $u = \tau_v^{(n)}$)

$$\begin{aligned}|H_t^{(n)} - H_s^{(n)}| &= \left|\int_{\tau_s^{(n)}}^{\tau_t^{(n)}} A_n(X_u^{(n)})\, du\right| \\ &= \left|\int_s^t \frac{A_n(Y_v^{(n)})}{|A_n(Y_v^{(n)})| + 1}\, dv\right| \\ &\leqslant \int_{s\wedge t}^{s\vee t} \frac{|A_n(Y_v^{(n)})|}{|A_n(Y_v^{(n)})| + 1}\, dv \\ &\leqslant |t - s|,\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$|H_t^{(n)} - H_s^{(n)}| \leqslant |t - s|. \tag{5.59}$$

Montrons la tension de $(\theta^{(n)})$ grâce au critère du théorème 5.2. On pose :

$$S_p^{(n)} = \inf\{t \geqslant 0 : |X_t^{(n)}| \geqslant p\}; \qquad p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*. \tag{5.60}$$

Alors $S_p^{(n)}$ est un $\{\mathcal{F}_t\}$−temps d'arrêt pour tous $p \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*$ et $S_p^{(n)} \uparrow \infty$ quand $p \uparrow \infty$. D'après la formule d'Itô appliquée à $X_{t\wedge S_p^{(n)}}^{(n)} - a$ (où a est donné par le lemme

5.4) et $x \to \frac{1}{2}|x|^2$, on a pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}|X^{(n)}_{s\wedge S^{(n)}_p} - a|^2 &= \tfrac{1}{2}|x_0 - a|^2 \\
&+ \int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} \langle b(X^{(n)}_u), X^{(n)}_u - a\rangle du \\
&+ \int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} \langle \sigma(X^{(n)}_u), X^{(n)}_u - a\rangle dW_u \\
&- \int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} \langle A_n(X^{(n)}_u), X^{(n)}_u - a\rangle du \\
&+ \tfrac{1}{2}\int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} \mathrm{tr}(\sigma\sigma^*(X^{(n)}_u))du,
\end{aligned}$$

puis en utilisant l'inégalité élémentaire

$$x.y \leqslant \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{5.61}$$

l'hypothèse (3.30) et le lemme 5.4 :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}|X^{(n)}_{s\wedge S^{(n)}_p} - a|^2 &\leqslant \tfrac{1}{2}|x_0 - a|^2 + Ct + C\int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} |X^{(n)}_u - a|^2 du \\
&+ \int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} \langle \sigma(X^{(n)}_u), X^{(n)}_u - a\rangle dW_u + \mu\gamma t \\
&- \gamma\int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} |A_n(X^{(n)}_u)| du + \mu\int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} |X^{(n)}_u - a| du.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (3.30), l'inégalité de Davis et l'inégalité (5.61), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\int_0^{s\wedge S^{(n)}_p} \langle \sigma(X^{(n)}_u), X^{(n)}_u - a\rangle dW_u\right] &\leqslant C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge S^{(n)}_p} |X^{(n)}_u - a|^4 du\right)^{\frac{1}{2}}\right] + Ct^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X^{(n)}_{s\wedge S^{(n)}_p} - a|^2\right] + Ct^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C\mathbb{E}\int_0^{t\wedge S^{(n)}_p} |X^{(n)}_u - a|^2 du,
\end{aligned}$$

d'où, en revenant à l'équation précédente :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X^{(n)}_{s\wedge S^{(n)}_p} - a|^2\right] \leqslant C(t+1) + C\int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant v\leqslant u} |X^{(n)}_{v\wedge S^{(n)}_p} - a|^2\right) du. \tag{5.62}$$

En particulier par le lemme de Gronwall :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X^{(n)}_{s\wedge S^{(n)}_p} - a|^2\right] \leqslant C(t+1)e^{Ct}, \tag{5.63}$$

puis par le lemme de Beppo-Levi :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X^{(n)}_s - a|^2\right] \leqslant C, \tag{5.64}$$

et en revenant à l'inégalité de départ, utilisant (5.63) :

$$\mathbb{E}\int_0^{t\wedge S_p^{(n)}} |A_n(X_u^{(n)})|du \leqslant C(t)\,, \tag{5.65}$$

puis appliquant de nouveau le lemme de Beppo-Levi :

$$\mathbb{E}\int_0^{t} |A_n(X_u^{(n)})|du \leqslant C(t)\,, \tag{5.66}$$

et a fortiori :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}(\theta_t^{(n)}) \leqslant C(t) \ < \ \infty, \qquad\qquad 0\leqslant t < \infty. \tag{5.67}$$

L'estimation uniforme (5.67) et le théorème 5.2 permettent d'affirmer que la suite $(\theta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue sur $\mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est muni de la pseudo-topologie. ∎

5.4 Convergence et réalisation

On note $\mathbb{L}_n, n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $(\tau^{(n)}, H^{(n)}, M^{(n)}, W, Y^{(n)}, \theta^{(n)})$ sur $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^{4d+1})\times\mathcal{D}$. Puisque $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^{4d+1})\times\mathcal{D}$ est un espace métrique séparable, d'après le théorème de Prokhorov et la proposition 5.5, il existe une sous-suite (n_k) et une probabilité $\mathbb{L}$ sur l'espace $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^{4d+1})\times\mathcal{D}$ telles que :

$$\mathbb{L}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbb{L}\,. \tag{5.68}$$

Pour alléger la présentation, on supposera que toute la suite $(\mathbb{L}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathbb{L}$ quand $n \uparrow \infty$. D'après le théorème de réalisation de Skorohod, il existe un espace probabilisé $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$ sur lequel sont définies des variables aléatoires $(\hat{\tau}^{(n)}, \hat{H}^{(n)}, \hat{M}^{(n)}, \hat{W}^{(n)}, \hat{Y}^{(n)}, \hat{\theta}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\hat{\tau}, \hat{H}, \hat{M}, \hat{W}, \hat{Y}, \hat{\theta})$ à valeurs dans $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^{4d+1})\times\mathcal{D}$ telles que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$(\hat{\tau}^{(n)}, \hat{H}^{(n)}, \hat{M}^{(n)}, \hat{W}^{(n)}, \hat{Y}^{(n)}, \hat{\theta}^{(n)}) \sim (\tau^{(n)}, H^{(n)}, M^{(n)}, W, Y^{(n)}, \theta^{(n)})\,, \tag{5.69}$$

$$\hat{\mathbb{P}}^{(\hat{\tau}, \hat{H}, \hat{M}, \hat{W}, \hat{Y}, \hat{\theta})} = \mathbb{L}\,, \tag{5.70}$$

et on a la convergence $\hat{\mathbb{P}}$–p.s. sur $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^{4d+1})\times\mathcal{D}$:

$$(\hat{\tau}^{(n)}, \hat{H}^{(n)}, \hat{M}^{(n)}, \hat{W}^{(n)}, \hat{Y}^{(n)}, \hat{\theta}^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\hat{\tau}, \hat{H}, \hat{M}, \hat{W}, \hat{Y}, \hat{\theta})\,. \tag{5.71}$$

Notations. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les processus suivants sur $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$:

$$\hat{X}_t^{(n)} = \hat{Y}^{(n)}_{\hat{\theta}_t^{(n)}}\ ;\ \hat{X}_t = \hat{Y}_{\hat{\theta}_t}\ ;\ \hat{K}_t^{(n)} = \hat{H}^{(n)}_{\hat{\theta}_t^{(n)}}\ ;\ \hat{K}_t = \hat{H}_{\hat{\theta}_t}\,. \tag{5.72}$$

5.5 Convergence uniforme de la suite des approximants

On va appliquer les résultats du théorème 5.3 pour obtenir la convergence de la suite $(\hat{X}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\hat{X}$ $\hat{\mathbb{P}}$-p.s. dans $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^d)$; on devra donc montrer le résultat suivant

Théorème 5.6 *Il existe $\hat{\Omega}_0 \in \hat{\mathcal{F}}$, $\hat{\mathbb{P}}(\hat{\Omega}_0) = 1$ tel que pour tout $\hat{\omega}\in\hat{\Omega}_0$, s'il existe $0\leqslant s\leqslant t<\infty$ vérifiant $\hat{\tau}_s(\hat{\omega}) = \hat{\tau}_t(\hat{\omega})$ alors $\hat{Y}_s(\hat{\omega}) = \hat{Y}_t(\hat{\omega})$.*

Démonstration. Ce théorème va être démontré en plusieurs propositions.

Proposition 5.7 $\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}_t \in \overline{D(A)}\,;\, 0\leqslant t < \infty\right) = 1$.

Démonstration. Puisque $\hat{X}$ est un processus càdlàg, il suffit de prouver que $\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{X}_t \in \overline{D(A)}\right) = 1$ pour tout $0\leqslant t < \infty$. Supposons au contraire qu'il existe $0 < t_0 < \infty$, $\hat{B}_0 \in \hat{\mathcal{F}}$ tels que $\hat{\mathbb{P}}(\hat{B}_0) > 0$ et $\hat{X}_{t_0}(\hat{\omega}) \notin \overline{D(A)}$ pour tout $\hat{\omega} \in \hat{B}_0$.
Comme $\hat{X}$ est continu à droite, il existe $\delta > 0$, $\hat{B}_1 \in \hat{\mathcal{F}}$ tels que $\hat{\mathbb{P}}(\hat{B}_1) > 0$ et $\hat{X}_t(\hat{\omega}) \notin \overline{D(A)}$ pour tout $\hat{\omega} \in \hat{B}_1$, $t \in [t_0; t_0+\delta]$. D'après (5.66) et l'égalité en loi (5.69), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\int_{t_0}^{t_0+\delta} |A_n(\hat{X}_u^{(n)})|du \leqslant C\,, \tag{5.73}$$

et, a fortiori par le lemme de Fatou :

$$\int_{\hat{B}_1}\int_{t_0}^{t_0+\delta} \underline{\lim}|A_n(\hat{X}_u^{(n)})|du d\hat{\mathbb{P}} \leqslant C\,, \tag{5.74}$$

ce qui est impossible car $\underline{\lim}|A_n(\hat{X}_u^{(n)})| = +\infty$ sur $\hat{B}_1\times[t_0;t_0+\delta]$ d'après la proposition 2.14. ∎

On aura besoin dans la suite du lemme déterministe suivant :

Lemme 5.8 *Soient :*
• $(k^{(n)})_n$ *une suite de fonctions* $k^{(n)} : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, *continues, à variation finie, telles que :*
(i) $\sup\limits_n |k^{(n)}|_t \leqslant c(t) < \infty, \quad 0\leqslant t < \infty$;
(ii) $k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} k$ *dans* $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^d)$;
• $(f^{(n)})_n$ *une suite de fonctions* $f^{(n)} : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^d$ *continues telles que :*
(iii) $f^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ *dans* $C([0;+\infty[;\mathbb{R}^d)$;
Alors k *à variation finie et, pour tous* $0\leqslant s\leqslant t < \infty$, *on a :*

$$\int_s^t \langle f^{(n)}(u), dk^{(n)}(u)\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_s^t \langle f(u), dk(u)\rangle\,. \tag{5.75}$$

Proposition 5.9 *Il existe* $\hat{\Omega}_1 \in \hat{\mathcal{F}}$, $\hat{\mathbb{P}}(\hat{\Omega}_1) = 1$ *tel que pour tout* $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}_1$, *s'il existe* $0\leqslant s\leqslant t < \infty$ *tels que* $\hat{\tau}_s = \hat{\tau}_t$ *alors pour tout* $x \in \overline{D(A)}$:

$$\int_s^t \langle \hat{Y}_u - x, d\hat{H}_u\rangle \geqslant 0\,. \tag{5.76}$$

Démonstration. Soit $\hat{\Omega}_1$ le sous-ensemble de $\hat{\Omega}$ de $\hat{\mathbb{P}}$-probabilité 1 sur lequel a lieu la convergence p.s. (5.71). Il suffit de prouver (5.76) pour $x \in D(A)$. D'après la monotonie de A_n, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{\hat{\tau}_t^{(n)}} \langle \hat{X}_u^{(n)} - x,\, d\hat{K}_u^{(n)} - A_n(x)du\rangle \geqslant 0, \tag{5.77}$$

puis en faisant le changement de variable $u = \hat{\tau}_v^{(n)}$, en utilisant (5.72) et $\hat{\theta}^{(n)} = (\hat{\tau}^{(n)})^{-1}$

$$\int_s^t \langle \hat{Y}_u^{(n)} - x,\, d\hat{H}_u^{(n)}\rangle \geqslant \int_s^t \langle \hat{Y}_u^{(n)} - x,\, A_n(x)\rangle d\hat{\tau}_u^{(n)}. \tag{5.78}$$

Il suffit alors de passer à la limite quand n tend vers l'infini dans (5.78) en utilisant la convergence (5.71), le lemme 5.8, l'estimation (5.59) pour le membre de gauche et en ce qui concerne le membre de droite :

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t \langle \hat{Y}_u^{(n)} - x,\ A_n(x)\rangle d\hat{\tau}_u^{(n)}\right| &\leqslant C.\Big(\sup_{0\leqslant u\leqslant t} |\hat{Y}_u^{(n)}| + |x|\Big).|A^{\circ}(x)|.|\hat{\tau}_t^{(n)} - \hat{\tau}_s^{(n)}| \\ &\leqslant C.|\hat{\tau}_t^{(n)} - \hat{\tau}_s^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

si $\hat{\tau}_s = \hat{\tau}_t$, grâce à la convergence (5.71). ■

Proposition 5.10 *Il existe* $\hat{\Omega}_2 \in \hat{\mathcal{F}}$, $\hat{\mathbb{P}}(\hat{\Omega}_2) = 1$ *tel que pour tout* $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}_2$*, s'il existe* $0\leqslant s\leqslant t < \infty$ *vérifiant* $\hat{\tau}_s(\hat{\omega}) = \hat{\tau}_t(\hat{\omega})$ *alors* $\hat{Y}_t(\hat{\omega}) - \hat{Y}_s(\hat{\omega}) = \hat{H}_s(\hat{\omega}) - \hat{H}_t(\hat{\omega})$.

Démonstration. On note $\hat{\Omega}^{(n)}$ le sous-ensemble de $\hat{\Omega}$ de $\hat{\mathbb{P}}$-probabilité 1 sur lequel est vérifiée l'équation différentielle stochastique

$$d\hat{X}_t^{(n)} = b(\hat{X}_t^{(n)})dt + \sigma(\hat{X}_t^{(n)})d\hat{W}_t^{(n)} - d\hat{K}_t^{(n)}, \tag{5.79}$$

et on pose

$$\hat{\Omega}_2 = \hat{\Omega}_1 \cap \big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \hat{\Omega}^{(n)}\big). \tag{5.80}$$

Alors $\hat{\mathbb{P}}(\hat{\Omega}_2) = 1$ et sur $\hat{\Omega}_2$, on a pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $0\leqslant s < t < \infty$:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t^{(n)} - \hat{Y}_s^{(n)} &= \int_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{\hat{\tau}_t^{(n)}} b(\hat{X}_u^{(n)})du + \int_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{\hat{\tau}_t^{(n)}} \sigma(\hat{X}_u^{(n)})d\hat{W}_u^{(n)} - (\hat{H}_t^{(n)} - \hat{H}_s^{(n)}) \\ &= \int_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{\hat{\tau}_t^{(n)}} b(\hat{X}_u^{(n)})du + (\hat{M}_{\hat{\tau}_t^{(n)}}^{(n)} - \hat{M}_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{(n)}) - (\hat{H}_t^{(n)} - \hat{H}_s^{(n)}).\end{aligned}$$

En utilisant la convergence (5.71) et l'hypothèse (3.30), on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{\hat{\tau}_t^{(n)}} b(\hat{X}_u^{(n)})du\right| &\leqslant \int_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{\hat{\tau}_t^{(n)}} |b(\hat{X}_u^{(n)})|du \\ &\leqslant C(\hat{\tau}_t^{(n)} - \hat{\tau}_s^{(n)}).\sup_{0\leqslant u\leqslant \hat{\tau}_t^{(n)}} (1 + |\hat{X}_u^{(n)}|) \\ &\leqslant C(\hat{\tau}_t^{(n)} - \hat{\tau}_s^{(n)}).\sup_{0\leqslant u\leqslant t} (1 + |\hat{Y}_u^{(n)}|) \\ &\leqslant C(\hat{\tau}_t^{(n)} - \hat{\tau}_s^{(n)}),\end{aligned}$$

donc si $\hat{\tau}_t = \hat{\tau}_s$ alors on a la convergence

$$\int_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{\hat{\tau}_t^{(n)}} b(\hat{X}_u^{(n)})du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{5.81}$$

D'après la convergence (5.71), on a clairement

$$\hat{M}_{\hat{\tau}_t^{(n)}}^{(n)} - \hat{M}_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{M}_{\hat{\tau}_t} - \hat{M}_{\hat{\tau}_s}, \tag{5.82}$$

d'où, si $\hat{\tau}_s = \hat{\tau}_t$, alors

$$\hat{M}_{\hat{\tau}_t^{(n)}}^{(n)} - \hat{M}_{\hat{\tau}_s^{(n)}}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{5.83}$$

Finalement, grâce aux convergences (5.71), (5.81), (5.83), on peut conclure en passant à la limite quand n tend vers l'infini dans l'équation vérifiée par $\hat{Y}^{(n)}$ que sur $\hat{\Omega}_2$ si l'on a $\hat{\tau}_t = \hat{\tau}_s$ alors nécessairement $\hat{Y}_t - \hat{Y}_s = \hat{H}_s - \hat{H}_t$. ■

Proposition 5.11 $\hat{\mathbb{P}}\left(\hat{Y}_t \in \overline{D(A)}\,; 0 \leqslant t < \infty\right) = 1.$

Démonstration. Puisque $\hat{Y}$ est un processus continu, il suffit de prouver $\hat{\mathbb{P}}(\hat{Y}_t \in \overline{D(A)}) = 1$ pour tout $0 \leqslant t < \infty$. Supposons au contraire qu'il existe $0 < t_0 < \infty$, $\hat{B} \in \hat{\mathcal{F}}$ tels que $\hat{\mathbb{P}}(\hat{B}) > 0$ et $\hat{Y}_{t_0}(\hat{\omega}) \notin \overline{D(A)}$ pour tout $\hat{\omega} \in \hat{B}$. On pose :

$$S = \sup\{0 \leqslant u \leqslant t_0 : \hat{Y}_u \in \overline{D(A)}\}. \tag{5.84}$$

Comme $\hat{Y}_0 = x_0 \in \overline{D(A)}$, et que $\hat{Y}$ est un processus continu, la variable aléatoire $\hat{Y}_S$ prend ses valeurs dans $\overline{D(A)}$ $\hat{\mathbb{P}}$–p.s.. D'après la proposition 5.7, on a nécessairement $\hat{\tau}_S = \hat{\tau}_{t_0}$ sur $\hat{B}$ puisque $\hat{Y}_s \notin \overline{D(A)}$ pour $s \in]S; t_0]$ et $\hat{\omega} \in \hat{B}$. Appliquant la proposition 5.9 sur $\hat{\Omega}_2 \cap \hat{B}$ (qui est de probabilité non nulle) entre S et t_0, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}|\hat{Y}_{t_0} - \hat{Y}_S|^2 &= \tfrac{1}{2}|\hat{H}_{t_0} - \hat{H}_S|^2 \\
&= \int_S^{t_0} \langle \hat{H}_u - \hat{H}_S, d\hat{H}_u \rangle \\
&= -\int_S^{t_0} \langle \hat{Y}_u - \hat{Y}_S, d\hat{H}_u \rangle \\
&\leqslant 0,
\end{aligned}$$

d'où $\hat{Y}_{t_0} = \hat{Y}_S$, ce qui est impossible sur $\hat{B}$. ■

Posons : $\hat{\Omega}_0 = \hat{\Omega}_1 \cap \hat{\Omega}_2 \cap \{\hat{Y}_t \in \overline{D(A)}; 0 \leqslant t < \infty\}$. On sait que $\hat{\mathbb{P}}(\hat{\Omega}_0) = 1$ d'après les étapes précédentes. De plus sur $\hat{\Omega}_0$, si $\hat{\tau}_s = \hat{\tau}_t$ alors :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}|\hat{Y}_t - \hat{Y}_s|^2 &= \tfrac{1}{2}|\hat{H}_t - \hat{H}_s|^2 \\
&= \int_s^t \langle \hat{H}_u - \hat{H}_s, d\hat{H}_u \rangle \\
&= -\int_s^t \langle \hat{Y}_u - \hat{Y}_s, d\hat{H}_u \rangle \\
&\leqslant 0,
\end{aligned}$$

d'où $\hat{Y}_s = \hat{Y}_t$. Ceci termine la démonstration du théorème 5.6. ■

En appliquant $\hat{\mathbb{P}}$-p.s. le théorème 5.3 à $\hat{X}^{(n)}$, $\hat{\theta}^{(n)}$, $\hat{Y}^{(n)}$, $\hat{\tau}^{(n)}$, $\hat{X}$, $\hat{\theta}$, $\hat{Y}$, $\hat{\tau}$ d'une part, et à $\hat{K}^{(n)}$, $\hat{\theta}^{(n)}$, $\hat{H}^{(n)}$, $\hat{\tau}^{(n)}$, $\hat{K}$, $\hat{\theta}$, $\hat{H}$, $\hat{\tau}$ d'autre part, on obtient grâce au théorème 5.6, la convergence $\hat{\mathbb{P}}$-p.s. suivante

$$(\hat{X}^{(n)}, \hat{K}^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\hat{X}, \hat{K}) \qquad \text{dans } C([0; +\infty[; \mathbb{R}^{2d}). \tag{5.85}$$

5.6 Passage à la limite dans $EDSM^d(A_n; b; \sigma; x_0)$

On va montrer dans la suite que $(\hat{X}, \hat{K})$ est solution de $EDSM^d(A; b; \sigma; x_0)$ sur l'espace probabilisé $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$ et par rapport au mouvement brownien $\hat{W}$. La proposition suivante donne un premier résultat dans ce sens :

Proposition 5.12 *Le processus $\hat{X}$ est solution de l'équation différentielle stochastique*

$$d\hat{X}_t = b(\hat{X}_t)dt + \sigma(\hat{X}_t)d\hat{W}_t - d\hat{K}_t. \tag{5.86}$$

Démonstration. Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini dans

$$d\hat{X}_t^{(n)} = b(\hat{X}_t^{(n)})dt + \sigma(\hat{X}_t^{(n)})d\hat{W}_t^{(n)} - d\hat{K}_t^{(n)}, \tag{5.87}$$

grâce à la convergence (5.85) (pour l'intégrale stochastique, on pourra utiliser la technique classique d'approximation par des intégrales de Riemann-Stieltjes). ∎

Pour pouvoir affirmer que $(\hat{X}, \hat{K})$ est solution de $EDSM^d(A; b; \sigma; x_0)$, il reste à montrer la condition $\boxed{4}$ du problème. On va pour cela passer à la limite quand n tend vers l'infini dans l'analogue de cette condition au rang n via le lemme 5.8.

Proposition 5.13 *Pour tout couple de processus $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ continus, adaptés, définis sur $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant :*

$$(\hat{\alpha}_u, \hat{\beta}_u) \in \mathrm{Gr}(A), \qquad \forall u \in [0; +\infty[, \tag{5.88}$$

la mesure

$$\langle \hat{X}_u - \hat{\alpha}_u, d\hat{K}_u - \hat{\beta}_u du \rangle \tag{5.89}$$

est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration. Étape 1 : soient $\hat{\alpha}'$ processus continu, adapté, défini sur $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$, à valeurs dans $D(A)$, et $0 \leqslant s \leqslant t$. On suppose que $\hat{\alpha}'$ vérifie :

$$\int_0^t |A^\circ(\hat{\alpha}'_u)| du < \infty. \tag{5.90}$$

On se propose de montrer :

$$\int_s^t \langle \hat{X}_u - \hat{\alpha}'_u, d\hat{K}_u - A^\circ(\hat{\alpha}'_u) du \rangle \geqslant 0. \tag{5.91}$$

On sait d'après la monotonie des A_n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_s^t \langle \hat{X}_u^{(n)} - \hat{\alpha}'_u, d\hat{K}_u^{(n)} - A_n(\hat{\alpha}'_u) du \rangle \geqslant 0. \tag{5.92}$$

De la convergence (5.71) et de la croissance des $\hat{\theta}^{(n)}$, on déduit

$$\hat{\theta}_t^{(n)}(\hat{\omega}) \leqslant C(t, \hat{\omega}). \tag{5.93}$$

D'après (5.59), (5.72) et (5.93), on peut écrire

$$|\hat{K}^{(n)}|_t \leqslant |\hat{H}^{(n)}|_{\hat{\theta}_t^{(n)}} \leqslant \hat{\theta}_t^{(n)} \leqslant C(t, \hat{\omega}), \tag{5.94}$$

d'où l'estimation uniforme

$$|\hat{K}^{(n)}(\hat{\omega})|_t \leqslant C(t, \hat{\omega}), \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{5.95}$$

D'après la convergence (5.85), l'estimation (5.95) et le lemme 5.8, on a la convergence

$$\int_s^t \langle \hat{X}_u^{(n)} - \hat{\alpha}'_u, d\hat{K}_u^{(n)} \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_s^t \langle \hat{X}_u - \hat{\alpha}'_u, d\hat{K}_u \rangle. \tag{5.96}$$

D'autre part, en utilisant la proposition 2.14, la convergence (5.85), la majoration (5.90), et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$\int_s^t \langle \hat{X}_u^{(n)} - \hat{\alpha}'_u, A_n(\hat{\alpha}'_u)du\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_s^t \langle \hat{X}_u - \hat{\alpha}'_u, A^\circ(\hat{\alpha}'_u)du\rangle. \tag{5.97}$$

On conclut donc que (5.91) est vérifiée en passant à la limite dans (5.92) via les convergences obtenues ci-dessus.

Étape 2 : on considère un couple $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ de processus continus, adaptés, définis sur $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant :

$$(\hat{\alpha}_u, \hat{\beta}_u) \in \mathrm{Gr}(A), \qquad \forall u \in [0; +\infty[. \tag{5.98}$$

D'après l'étape 1, on sait que pour tout processus $\hat{\alpha}'$ continu, adapté, défini sur $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$, à valeurs dans $D(A)$ et vérifiant (5.90) : on a :

$$\int_s^t \langle \hat{X}_u - \hat{\alpha}'_u, d\hat{K}_u - A^\circ(\hat{\alpha}'_u)du\rangle \geqslant 0, \tag{5.99}$$

$$\int_s^t \langle \hat{\alpha}_u - \hat{\alpha}'_u, \hat{\beta}_u du - A^\circ(\hat{\alpha}'_u)du\rangle \geqslant 0. \tag{5.100}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ prenons :

$$\hat{\alpha}'_u = J_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big). \tag{5.101}$$

Alors α' est un processus continu, adapté, défini sur $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})$, à valeurs dans $D(A)$ et vérifiant (5.90) car :

$$\int_0^t |A^\circ(\hat{\alpha}'_u)|du \leqslant \int_0^t |A_p(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2})|du < +\infty, \tag{5.102}$$

d'après $A_p(x) \in A(J_p(x))$ pour tout x dans $\mathbb{R}^d$ (proposition 2.14 (iv)) et le fait que $A^\circ(\hat{\alpha}'_u)$ est par définition l'élément de norme minimale de $A(\hat{\alpha}'_u)$. En appliquant (5.99) et (5.100) avec $\hat{\alpha}'$, on peut écrire :

$$\int_s^t \Big\langle \hat{X}_u - J_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big), d\hat{K}_u - A^\circ(\hat{\alpha}'_u)du\Big\rangle \geqslant 0, \tag{5.103}$$

$$\int_s^t \Big\langle \hat{\alpha}_u - J_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big), \hat{\beta}_u du - A^\circ(\hat{\alpha}'_u)du\Big\rangle \geqslant 0, \tag{5.104}$$

d'où, en ajoutant et retranchant $(\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u)/2$ dans le premier terme de chacun des produits scalaires :

$$\int_s^t \Big\langle \frac{\hat{X}_u - \hat{\alpha}_u}{2} + \frac{1}{p}A_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big), d\hat{K}_u - A^\circ(\hat{\alpha}'_u)du\Big\rangle \geqslant 0, \tag{5.105}$$

$$\int_s^t \Big\langle \frac{\hat{\alpha}(u) - \hat{X}_u}{2} + \frac{1}{p}A_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big), \hat{\beta}_u du - A^\circ(\hat{\alpha}'_u)du\Big\rangle \geqslant 0, \tag{5.106}$$

puis en sommant les équations ainsi obtenues :

$$\int_s^t \frac{1}{2}\langle \hat{X}_u - \hat{\alpha}_u \,,\, d\hat{K}_u - \hat{\beta}_u\, du\rangle \geqslant \frac{2}{p}\int_s^t \Big\langle A_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big), A^\circ\Big(J_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big)\Big)du\Big\rangle$$
$$- \int_s^t \Big\langle \frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2} - J_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big) \,,\, d\hat{K}_u + \hat{\beta}_u du\Big\rangle,$$

or :

$$A_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big) \in A\Big(J_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big)\Big), \tag{5.107}$$

donc :

$$\int_s^t \Big\langle A_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big) \,,\, A^\circ\Big(J_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big)\Big)du\Big\rangle \geqslant 0 \tag{5.108}$$

par définition de A°, d'où :

$$\int_s^t \frac{1}{2}\langle \hat{X}_u - \hat{\alpha}_u \,,\, d\hat{K}_u - \hat{\beta}_u\, du\rangle \geqslant - \int_s^t \Big\langle \frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2} - J_p\Big(\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2}\Big) \,,\, d\hat{K}_u + \hat{\beta}_u du\Big\rangle. \tag{5.109}$$

On passe ensuite à la limite quand $p \to +\infty$ dans l'équation précédente d'après la convergence

$$J_p(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}}(x) \tag{5.110}$$

rappelée dans la proposition 2.13, et, grâce à la convexité de $\overline{D(A)}$ donnée par la proposition 2.9 :

$$\frac{\hat{X}_u + \hat{\alpha}_u}{2} \in \overline{D(A)}, \tag{5.111}$$

on obtient le résultat voulu après application du théorème de convergence dominée de Lebesgue via le caractère contractant de J_p. Ceci termine la démonstration de la proposition 5.13. ∎

Globalement, on peut donc affirmer que $(\hat{X}, \hat{K})$ est une solution faible du problème $EDSM^d(A; b; \sigma; x_0)$. Par conséquent on a bien montré un résultat d'existence faible pour l'équation différentielle stochastique multivoque (1.1) d'où le théorème 3.1 d'existence et d'unicité fortes pour (1.1) d'après le théorème d'unicité trajectorielle pour (1.1) (voir théorème 4.2) et le théorème de Yamada-Watanabe.

⋆ ⋆ ⋆

Note : cet article est un résumé d'une partie des résultats obtenus par l'auteur dans sa thèse [4] : on renvoie le lecteur à [4] pour une rédaction plus détaillée et/ou pour d'éventuels compléments sur le sujet.

Références

[1] A. Bensoussan et J.L. Lions : *Applications des inégalités variationnelles en contrôle stochastique.* Dunod, Paris, 1978.

[2] A. Bensoussan et A. Rascanu : *d-Dimensional stochastic differential equation with a multivalued subdifferential operator in drift.* A paraitre, 1994.

[3] H. Brezis : *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North Holland, Mathematics Studies, New York, 1973.

[4] E. Cépa : *Équations différentielles stochastiques multivoques.* Thèse, 1994.

[5] J. Jacod et A.N. Shiryaev : *Limit theorems for stochastic processes.* Springer Verlag, Berlin, 1987.

[6] P. Krée : *Diffusions equations for multivalued stochastic differential equations.* Journ. of Funct. Anal., 49, p. 73-90, 1982.

[7] T. Kurtz : *Random time change and convergence in distribution under the Meyer-Zheng conditions.* The Annals of probability, vol.19, 3, 1010-1034, 1991.

[8] D.Lépingle et C. Marois : *Équations différentielles stochastiques multivoques unidimensionnelles.* Sém. Prob. 21, p. 520-533, 1987.

[9] J.L. Menaldi : *Stochastic variational inequality for reflected diffusion.* Indiana Univ. Math. Journ., 32, 5, p. 733-744, 1983.

[10] P.A. Meyer et W.A. Zheng : *Tightness criteria for laws of semimartingales.* Ann. Inst. H. Poincaré Proba. Stat., 20, 353-372, 1984.

[11] H. Tanaka : *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions.* Hiroshima Math. Journ., 9, p. 163-177, 1979.