Jacques Franchi

Chaos multiplicatif : un traitement simple et complet de la fonction de partition

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 29 (1995), p. 194-201

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1995__29__194_0>

CHAOS MULTIPLICATIF :

UN TRAITEMENT SIMPLE ET COMPLET DE LA FONCTION DE PARTITION

J. FRANCHI

Laboratoire de Probabilités - Université Paris VI
(4, Place Jussieu , Tour 56, 3ème étage - 75252 Paris Cedex 05)
et Université Paris XII

I. Introduction

Le modèle dit du chaos multiplicatif a été introduit comme modèle de turbulence par B. Mandelbrot [M] : soient d un entier > 1 , W une variable aléatoire positive non constante d'espérance 1 , et n un entier positif; à chaque intervalle $I_{k,n} = [kd^{-n},(k+1)d^{-n}[$, où $0 \le k < d^n$, on associe une variable aléatoire $W_{k,n}$ de même loi que W, toutes ces variables étant choisies indépendantes; soit f_n la fonction aléatoire sur $[0,1[$ qui vaut $W_{k,n}$ sur $I_{k,n}$ pour $k \in \{0,..,d^n-1\}$; soit μ_n la mesure aléatoire sur $[0,1[$ admettant pour densité le produit $f_1 f_2 .. f_n$.
Le théorème de convergence des martingales positives montre que p.s. μ_n converge vaguement vers μ_∞ lorsque $n \to \infty$.

Kahane ([K],[KP]) a calculé $\mathbb{E}\left(\mu_\infty([0,1[)\right)$, et a caractérisé l'appartenance de $\mathbb{E}\left((\mu_\infty([0,1[))^h\right)$ à $\mathbb{R}_+^*$;

Peyrière ([KP]) a calculé la dimension de Hausdorff du support de μ_∞ .

Le succès de ce modèle est attesté par son intervention dans plusieurs branches de la physique théorique : verres de spin, croissance de polymères ([DS],[CD]) , thermodynamique ([CK]) .
La quantité à laquelle les physiciens théoriciens s'intéressent le plus est la fonction de partition : $\sigma_n(\beta) = d^n \mu_n^\beta([0,1[)$, où β est un réel >0 (représentant l'inverse de la température) et où μ_n^β est formée à partir de W^β comme μ_n l'était à partir de W ; cette fonction de partition est la masse d'une certaine mesure de Gibbs aléatoire; le comportement asymptotique de $Z_n(\beta) = n^{-1}\mathrm{Log}(\sigma_n(\beta))$ est étudié dans [DS],[CD], puis [CK].

Dans [DS] et [CD], le modèle de Mandelbrot est présenté sous la forme isomorphe d'arbre, chaque branche codant une suite décroissante d'intervalles $I_{k_n,n}$, et la variable W y est notée e^X ; alors
$\sigma_n(\beta) = \Sigma\, e^{\beta S_b}$, où la somme porte sur les branches b de longueur n et où S_b est la somme des variables $X_{b'}$, rencontrées le long de la branche b .

On trouve dans [CD](page 513) une expression générale de $Z_\infty(\beta)$ lorsque d=2 , tandis que [CK] calculent $Z_\infty(\beta)$ pour d quelconque mais pour X bornée et β_c finie.

Le but de cet article (qui est repris de la prépublication [F]) est de présenter simplement, élémentairement et rapidemment le détail du calcul de la pression $Z_\infty(\beta)$ dans le cas général, en mettant en évidence que l'argument crucial est l'un de ceux de Kahane ($\delta \Rightarrow \beta$ du théorème 1 de [KP] , mais on peut aussi bien utiliser l'argument principal de [K]) , qui assure en fait l'intégrabilité uniforme de $\mu_n^\beta([0,1[)$ sous le seuil critique; (la réciproque $\beta \Rightarrow \delta$ du théorème 1 de [KP] est en revanche une conséquence du calcul de $Z_\infty(\beta)$).

De plus on relie simplement le seuil critique à la fonctionnelle des grandes déviations de X , et on caractérise simplement la finitude du seuil critique.

L'origine de ce travail est l'intérêt porté (dans le cas de X gaussienne) par A. Benassi à la limite de $n^{-1}\mathrm{Max}\{ S_n(t) \mid |t|=n \}$, qui est déduite ici de $Z_\infty(\beta)$.

La présentation du modèle retenue ici est celle de l'arbre comme dans [DS] et [CD] , tandis que la démarche est pour une part adaptée de [CK] .

II. Notations

X est une variable aléatoire réelle (non p.s. constante) ayant tous ses moments exponentiels finis ;

$\bar{x} = \text{ess-sup } X = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X<x)<1\}$; $\underline{x} = \text{ess-inf } X$; $m=\mathbb{E}(X)$;

$\gamma(\beta) = \mathrm{Log}\left(\mathbb{E}(e^{\beta X})\right)$ et $g(\beta) = \beta\gamma'(\beta)-\gamma(\beta)$, pour β réel ;

$I(\theta) = \mathrm{Sup}\{ \theta\beta-\gamma(\beta) \mid \beta\in\mathbb{R} \}$, pour θ réel ;

$I^{-1}(z) = \mathrm{Inf}\{ \theta>m \mid I(\theta)>z \}$, pour z dans $\mathbb{R}_+$;

d est un entier ≥ 2 ;

$\{ X_b \mid b\in\mathcal{A} \}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes distribuées comme X , indexées par les branches (finies) d'un arbre d-adique $\mathcal{A}$ (de chaque branche sont issus d segments); notons $\angle$ l'ordre naturel sur $\mathcal{A}$, et $|b|$ la longueur , i.e. le nombre de minorants , de la branche b de l'arbre ; (de sorte que $\mathcal{A}$ compte d^n branches de longueur n);

pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $b\in\mathcal{A}$, $S_b = \sum_{b'\angle b} X_{b'}$ et $S_n^* = \mathrm{Max}\{ S_b \mid |b| = n \}$.

$\sigma_n(\beta) = \sum_{|b|=n} e^{\beta S_b}$, $Y_n(\beta) = \sigma_n(\beta).\mathbb{E}^{-1}(\sigma_n(\beta))$, et

$Z_n(\beta) = n^{-1}.\mathrm{Log}(\sigma_n(\beta))$, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et β dans $\mathbb{R}_+$.

Le théorème qui suit, dont l'essentiel est le point (ii), énonce ce qui est établi dans cet article. La démonstration est ensuite découpée en 20 courtes étapes.

III. Théorème

i) Il existe une unique valeur critique $\beta_c \in \,]0,+\infty]$ telle que $g(\beta)<\mathrm{Log}d$ si $0\le\beta<\beta_c$ et $g(\beta)>\mathrm{Log}d$ si $\beta>\beta_c$; β_c est finie si et seulement si $d.\mathbb{P}(X=\bar{x}) < 1$; (auquel cas $\beta_c = g^{-1}(\mathrm{Log}d)$);

ii) $Z_n(\beta)$ converge lorsque n tend vers $+\infty$, p.s. et dans L^p pour $1\le p<\infty$, vers $Z_\infty(\beta)$ qui vaut : $\mathrm{Log}d+\gamma(\beta)$ si $0\le\beta\le\beta_c$ et $\beta\gamma'(\beta_c)$ si $\beta\ge\beta_c$;

iii) $n^{-1}S^*_n$ converge p.s. et dans L^p pour $1\le p<\infty$ vers $\gamma'(\beta_c) = I^{-1}(\mathrm{Log}d)$.

Remarques 1) Biggins ([B], corollaire (3.4)) obtient déjà (de façon moins élémentaire) une expression de la limite presque sûre du point (iii).

2) Z_∞ est convexe, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, C^∞ hors de β_c , mais pas C^2 en β_c : c'est ce que les physiciens théoriciens nomment une transition de phase.

Exemples 1) Si X est gaussienne centrée de variance V, alors $g(\beta)=\gamma(\beta)=V\beta^2/2$, $I(\theta)=\theta^2/2V$, $\beta_c= (2V^{-1}\mathrm{Log}d)^{1/2}$ et $I^{-1}(\mathrm{Log}d)= (2V\mathrm{Log}d)^{1/2}$;

2) Si X vaut +1 et -1 avec probabilité 1/2 , alors $I(\pm1)=\mathrm{Log}2$, $\beta_c= \infty$, et $I^{-1}(\mathrm{Log}d)=1$.

IV. Démonstration du Théorème

Commençons par quelques propriétés de γ,g,I et I^{-1} ;

1) γ est C^∞ strictement convexe, et $\gamma(0)=0$, $\gamma'(0)=m$;

en effet $\gamma''(\beta) = e^{-2\gamma(\beta)}.\left[\mathbb{E}(X^2e^{\beta X})\mathbb{E}(e^{\beta X})-\mathbb{E}^2(Xe^{\beta X})\right]$ est ≥0 par l'inégalité de Schwarz, et >0 car X est p.s. non constante .

2) g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$;

car $g'(\beta) = \beta.\gamma''(\beta) > 0$ sur $\mathbb{R}^*_+$.

3) $\gamma'(+\infty) = \bar{x} = \lim_{\beta\to\infty} \gamma(\beta)/\beta$; si $\bar{x}<\infty$, $\lim_{\beta\to\infty}(\gamma(\beta)-\beta\bar{x}) = \mathrm{Log}(\mathbb{P}(X=\bar{x}))$;

preuve: clairement $\gamma'(\beta)\le\bar{x}$ et $\gamma(\beta)\le\beta\bar{x}$ pour tout $\beta\ge0$; réciproquement fixons $m<y<z<\bar{x}$; on a $\mathbb{E}((X-m)e^{\beta X}) \ge (y-m)\mathbb{E}(e^{\beta X}(1-1_{\{X<y\}}))$ d'où
$\gamma'(\beta) \ge y -(y-m)\mathbb{E}(e^{\beta X}\, 1_{\{X<y\}})\mathbb{E}^{-1}(e^{\beta X}) \ge y - (y-m)e^{\beta(y-z)}\mathbb{P}^{-1}(X\ge z)$
qui tend vers y lorsque β tend vers $+\infty$, ce qui montre que $y<\bar{x} \Rightarrow \gamma'(\infty)\ge y$;
de même, $\gamma(\beta)/\beta \ge y + \beta^{-1}\mathrm{Log}(\mathbb{P}(X\ge y)) \to y$; et si $\bar{x}<\infty$,

$\gamma(\beta)-\beta\bar{x} = \mathrm{Log}\left(\mathbb{E}\left(e^{\beta(X-\bar{x})}\right)\right)$ tend vers $\mathrm{Log}\left(\mathbb{E}\left(1_{\{X=\bar{x}\}}\right)\right)$ lorsque β tend vers ∞ .

4) Si $\underline{x}<\theta<\bar{x}$, alors $I(\theta) = \int_m^\theta (\gamma')^{-1} = g\circ(\gamma')^{-1}(\theta)$;

en effet 1) et 3) montrent que $\theta\beta-\gamma(\beta)$ passe par un maximum strict pour $\beta=\gamma'^{-1}(\theta)$, lorsque $\theta\in]\underline{x},\bar{x}[$, et donc $I(\theta)=\theta\gamma'^{-1}(\theta)-\gamma(\gamma'^{-1}(\theta))=g(\gamma'^{-1}(\theta))$; enfin $g\circ\gamma'^{-1}(m)=0$ et $(g\circ\gamma'^{-1})'=\gamma'^{-1}$.

5) I est finie sur $]\underline{x},\bar{x}[$, et vaut ∞ sur $]\bar{x},\infty[$; $I(\bar{x})=-\mathrm{Log}\left(\mathbb{P}(X=\bar{x})\right)$;

preuve: pour $\varepsilon>0$ on a $\mathbb{E}(e^{\beta X}) \le e^{\beta(\bar{x}-\varepsilon)} + e^{\beta\bar{x}}\mathbb{P}(X>\bar{x}-\varepsilon)$ et donc
$I(\bar{x}) \ge \beta\bar{x} - \mathrm{Log}(\mathbb{E}(e^{\beta X})) \ge -\mathrm{Log}\left(\mathbb{P}(X>\bar{x}-\varepsilon) + e^{-\beta\varepsilon}\right) \xrightarrow[\beta\to\infty]{} -\mathrm{Log}\left(\mathbb{P}(X>\bar{x}-\varepsilon)\right)$;
d'autre part $I(\bar{x}) \le \mathrm{Sup}_\beta\{\beta\bar{x} - \mathrm{Log}(e^{\beta\bar{x}}\mathbb{P}(X=\bar{x}))\} = -\mathrm{Log}(\mathbb{P}(X=\bar{x}))$;
enfin si $\theta>\bar{x}$: $I(\theta) \ge \theta\beta - \beta\bar{x} \xrightarrow[\beta\to\infty]{} \infty$.

6) I est convexe sur $\mathbb{R}$, et bijective croissante C^∞ de $[m,\bar{x}[$ sur $[0,I(\bar{x})[$;

en effet d'après 4) et 5) $I'= \gamma'^{-1}$ croît strictement sur $]\underline{x},\bar{x}[$; de plus I est s.c.i. et croît sur $\mathbb{R}_+$, d'où la convexité et $I(\bar{x}-)=I(\bar{x})$; d'où :

7) I^{-1} est concave croissante sur $\mathbb{R}_+$, égale à $\bar{x}$ sur $[I(\bar{x}),\infty[$;

8) $I(\bar{x}-)=I(\bar{x})=g(\infty)$ et $\gamma'(\beta_c) = I^{-1}(\mathrm{Log}d) = \mathrm{Inf}\{ (\gamma(\beta)+\mathrm{Log}d)/\beta \mid \beta>0 \}$;

preuve: $I(\bar{x}-)=g(\infty)$ découle de 4) et 3) ; si $\beta_c=\infty$, alors $\mathrm{Log}d \ge g(\infty) = I(\bar{x})$ et donc $I^{-1}(\mathrm{Log}d) = \bar{x} = \gamma'(\beta_c)$; de plus dans ce cas
$\frac{\partial}{\partial\beta}\left((\gamma(\beta)+\mathrm{Log}d)/\beta\right) = (g(\beta)-\mathrm{Log}d)/\beta^2 < 0$ montre que
$\mathrm{Inf}\{ (\gamma(\beta)+\mathrm{Log}d)/\beta \mid \beta>0 \} = \lim_{\beta\to\infty} \gamma(\beta)/\beta = \bar{x}$ aussi ;
enfin si $\beta_c<\infty$, alors $(\gamma(\beta)+\mathrm{Log}d)/\beta$ admet un minimum strict en β_c , égal à $\gamma'(\beta_c)$, et d'après 4) $I^{-1}(\mathrm{Log}d) = \gamma'\circ g^{-1}(\mathrm{Log}d) = \gamma'(\beta_c)$.

9) Le point i) ainsi que l'égalité du point iii) du théorème découlent de 2), 5) et 8) , car $\beta < \infty \Leftrightarrow g(\infty) > \mathrm{Log}d$.

L'estimation classique de Chernoff permet de dominer simplement S^*_n :

10) $\mathbb{P}(S^*_n>n\theta) \le d^n e^{-nI(\theta)}$ pour tout $\theta>0$;

en effet $\mathbb{P}(S_b>n\theta) \le \mathbb{E}\left(e^{\beta(X_{b_1}+..+X_{b_n})-\beta n\theta}\right) = e^{-\beta n\theta}\,\mathbb{E}^n(e^{\beta X}) = e^{-n(\theta\beta-\gamma(\beta))}$
$= e^{-nI(\theta)}$ pour $\beta>0$ bien choisi
et pour $\theta>0$, d'où $\mathbb{P}(S^*_n>n\theta) \le \sum_{|b|=n} \mathbb{P}(S_b>n\theta) \le d^n e^{-nI(\theta)}$.

11) $\limsup_{n\to\infty} n^{-1}S^*_n \le I^{-1}(\mathrm{Logd})$ p.s. ;

en effet $\sum_{n>0} \mathbb{P}(S^*_n > n\theta) \le \sum_{n>0} e^{n(\mathrm{Logd} - I(\theta))} < \infty$ dès que $I(\theta) > \mathrm{Logd}$; donc $\theta > I^{-1}(\mathrm{Logd}) \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} n^{-1}S^*_n \le \theta$ p.s. , d'où le résultat.

12) $\mathbb{E}(\sigma_n(\beta)) = d^n e^{n\gamma(\beta)}$.

13) $Y_n(\beta) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} Y_\infty(\beta) \in \mathbb{R}_+$, et $\mathbb{E}(Y_\infty(\beta)) \le 1$;

preuve: si $|b| = n$ et $|b'| = p$, notant bb' la branche de longueur (n+p) commençant par b et finissant par b', on a : $S_{bb'} = S_b + S^b_{b'}$, où $S^b_{b'}$ est indépendante de S_b et a la loi de $S_{b'}$;
Soit $\mathfrak{F}_n$ la tribu engendrée par les variables $\{X_b \,|\, |b| \le n\}$;
utilisant 12), on a :

$$\mathbb{E}\left(Y_{n+p}(\beta)\middle|\mathfrak{F}_n\right) = \sum_{|b|=n}\left(e^{\beta S_b}\,\mathbb{E}\left(\sum_{|b'|=p} e^{\beta S^b_{b'}}\right)\right).d^{-p}e^{-p\gamma(\beta)}.d^{-n}e^{-n\gamma(\beta)} = Y_n(\beta) \;;$$

donc $Y_n(\beta)$ est une martingale; comme elle est >0 et d'espérance 1, elle converge p.s. selon le résultat classique de Doob, et le lemme de Fatou assure que $\mathbb{E}(Y_\infty(\beta)) \le 1$.

14) $\mathbb{P}(Y_\infty(\beta)>0) = 0$ ou 1 ;

car la loi du 0-1 s'applique à $\mathfrak{F}_n$ et à $\{Y_\infty(\beta)>0\}$; on a en effet

$$Y_\infty(\beta) = \sum_{|b|=n}\left(e^{\beta S_b}\,\mathbb{E}^{-1}(\sigma_n(\beta))\right)Y^b_\infty(\beta) \quad \text{p.s.}$$

, où $Y^b_\infty(\beta)$ est relative au sous-arbre débutant à l'extrémité de la branche b , ce qui montre que $\{Y_\infty(\beta)>0\} = \bigcup_{|b|=n} \{Y^b_\infty(\beta)>0\}$ est indépendant de $\mathfrak{F}_n$.

Passons maintenant au cœur de la démonstration, qui consiste à obtenir l'intégrabilité uniforme des variables $Y_n(\beta)$ sous la valeur critique β_c . 15) ci-dessous est repris de Kahane ([KP], théorème 1 , $\delta \Rightarrow \beta$).

15) $0 \le \beta < \beta_c \Rightarrow Y_\infty(\beta) > 0$ p.s. ;

preuve: on remarque que $\left(\sum_{i=1}^{d} x_i\right)^h \ge \sum_{i=1}^{d}(x_i)^h - 2(1-h).\sum_{i<j}(x_i x_j)^{h/2}$

pour $h \in]h_0,1[$ et $x_i>0$, ce qui appliqué à $Y_n(\beta) = d^{-1}\sum_{i=1}^{d} e^{\beta X_i - \gamma(\beta)}\, Y^i_{n-1}(\beta)$
entraîne :

$$d^h.\mathbb{E}\left((Y_n(\beta))^h\right) \ge d.\mathbb{E}\left(e^{h(\beta X - \gamma(\beta))}\right).\mathbb{E}\left((Y_{n-1}(\beta))^h\right) - d(d-1)(1-h).\mathbb{E}^2\left(e^{h(\beta X-\gamma(\beta))/2}\right).\mathbb{E}^2\left((Y_{n-1}(\beta))^{h/2}\right)$$

puis via l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}\left((Y_n(\beta))^h\right).\left(\exp[(1-h)\mathrm{Logd} - h\gamma(\beta) + \gamma(h\beta)] - 1\right) \le (1-h)d^{1-h}(d-1).\mathbb{E}^2\left((Y_{n-1}(\beta))^{h/2}\right)$$

d'où en faisant croître h vers 1 après division par (1-h) :

$0 < \mathrm{Log}d - g(\beta) \le (d-1)\ \mathbb{E}^2\left[(Y_{n-1}(\beta))^{1/2}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} (d-1)\ \mathbb{E}^2\left[(Y_\infty(\beta))^{1/2}\right]$,

puisque $(Y_n(\beta))^{1/2}$, bornée dans L^2, est équiintégrable; le résultat découle maintenant de 14).

D'après 12) on a $Z_n(\beta) = \mathrm{Log}d + \gamma(\beta) + n^{-1}\mathrm{Log}(Y_n(\beta))$,
et donc 15) donne l'expression de Z_∞ sous la valeur critique :

$$16)\quad 0 \le \beta < \beta_c \Rightarrow Z_n(\beta) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathrm{Log}d + \gamma(\beta) .$$

On va maintenant déduire dans 17) et 18) le comportement lorsque $\beta>\beta_c$ du comportement sous β_c , à l'aide pour la minoration d'un argument de convexité et pour la majoration de la domination de S^*_n .

$$17)\quad \beta \ge \beta_c \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} Z_n(\beta) \ge \beta.\gamma'(\beta_c) \text{ p.s. ;}$$

<u>preuve</u> $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \mathrm{Log}\left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta\right) =$

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta\right)^{-2} . \left(\left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \mathrm{Log}^2 x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta\right) - \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \mathrm{Log}x_i\right)\right) \ge 0$$

par inégalité de Schwarz , pour tous $x_i>0$, ce qui montre que Z_n est p.s. convexe ; on a donc pour $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_c \le \beta$:

$Z_n(\beta) \ge Z_n(\beta_2) + (\beta-\beta_2)(\beta_2-\beta_1)^{-1}(Z_n(\beta_2)-Z_n(\beta_1))$ p.s. , d'où par 16) :

$\liminf_{n\to\infty} Z_n(\beta) \ge \gamma(\beta_2) + \mathrm{Log}d + (\beta-\beta_2)(\beta_2-\beta_1)^{-1}(\gamma(\beta_2)-\gamma(\beta_1))$ p.s. ;

faisant ensuite croître β_1 vers β_2 , puis β_2 vers β_c , on en déduit :

$\liminf_{n\to\infty} Z_n(\beta) \ge \mathrm{Log}d + \gamma(\beta_c) + (\beta-\beta_c)\gamma'(\beta_c)$ p.s. ;

enfin on utilise que $g(\beta_c)=\mathrm{Log}d$, i.e. que $\beta_c\gamma'(\beta_c) = \mathrm{Log}d + \gamma(\beta_c)$.

$$18)\quad \beta \ge \beta_c \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} Z_n(\beta) \le \beta.\gamma'(\beta_c) \text{ p.s. ;}$$

<u>preuve</u>: On a pour $0 < \beta' < \beta_c \le \beta$:

$$\begin{aligned} Z_n(\beta) &= Z_n(\beta') + \left(Z_n(\beta'+(\beta-\beta')) - Z_n(\beta') \right) \\ &= Z_n(\beta') + n^{-1}\mathrm{Log}\left(\left[\sum_{|b|=n} e^{\beta' S_b} e^{(\beta-\beta')S_b}\right].\left[\sum_{|b|=n} e^{\beta' S_b}\right]^{-1}\right) \\ &\le Z_n(\beta') + (\beta-\beta')n^{-1}S^*_n \end{aligned}$$

, d'où par 11) et 16) :

$\limsup_{n\to\infty} Z_n(\beta) \le \mathrm{Log}d + \gamma(\beta') + (\beta-\beta').I^{-1}(\mathrm{Log}d)$ p.s. , d'où le résultat en faisant croître β' vers β_c et en utilisant 8) .

19) La convergence presque sûre du point ii) du théorème est établie par 16),17) et 18). Remarquons ensuite l'encadrement évident :

$$n^{-1}S^*_n \le \beta^{-1}Z_n(\beta) \le n^{-1}S^*_n + \beta^{-1}\mathrm{Log}d \quad ;$$

si l'on y fait tendre n vers +∞, pour $\beta>\beta_c$ si $\beta_c<\infty$, puis β vers +∞ , on obtient la convergence presque sûre du point iii) du théorème, avec l'aide de 3) si $\beta_c = \infty$.

Enfin les convergences dans L^p découlent aussitôt de :

20) $\{\ \exp|n^{-1}S_n^*|\ \mid n\in\mathbb{N}^*\ \}$ est bornée dans L^p pour $1\le p<\infty$, et donc $\{\ |n^{-1}S_n^*|^p\ \mid n\in\mathbb{N}^*\ \}$ et $\{\ |Z_n(\beta)|^p\ \mid n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le\beta\le B\ \}$ sont uniformément intégrables ;

preuve: par convexité de I il existe a et u >0 tels que $\theta\ge u \Rightarrow I(\theta)>a\theta$; fixons p>0 , et $\alpha = \mathrm{Max}\{e^{up},d^{p/a}\}$; on a alors pour tout $n > (1+p)/a$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{pn^{-1}S_n^*}\right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left(e^{pn^{-1}S_n^*} > r\right) dr = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(S_n^* > np^{-1}\mathrm{Log}r\right) dr \\
&\le \alpha + d^n.\int_\alpha^\infty e^{-nI(p^{-1}\mathrm{Log}r)}\, dr \;=\; \alpha + pd^n.\int_{p^{-1}\mathrm{Log}\alpha}^\infty e^{-nI(\theta)}e^{p\theta}\, d\theta \\
&\le \alpha + pd^n.\int_{p^{-1}\mathrm{Log}\alpha}^\infty e^{(p-na)\theta}\, d\theta \;=\; \alpha + p\alpha(na-p)^{-1}e^{n(\mathrm{Log}d-ap^{-1}\mathrm{Log}\alpha)} \\
&\le \alpha(1+p) < \infty ;
\end{aligned}$$

enfin tout ceci étant vrai avec (-X) comme avec X , on peut remplacer S_n^* par $|S_n^*|$.■

BIBLIOGRAPHIE

[B] Biggins J.D. *Chernoff's Theorem in the Branching Random Walk.* J. Appl. Prob. 14, 630-636, 1977.

[CD] Cook J.- Derrida B. *Finite-Size Effects in Random Energy Models and in the Problem of Polymers in a Random Medium.* J. of Stat. Physics, vol 63, 505-539, 1991.

[CK] Collet P.- Koukiou F. *Thermodynamics of the multiplicative chaos.* Preprint du centre de physique théorique de l'école polytechnique, 1992.

[DS] Derrida B.- Spohn H. *Polymers on Disordered Trees, Spin Glasses, and Traveling Waves.* J. of Stat. Physics, vol 51, 817-840, 1988.

[F] Franchi J. *Chaos Multiplicatif: un Traitement Simple et Complet de la Fonction de Partition.* Prépublication n° 148 du Laboratoire de Probabilités de Paris 6, Janvier 1993.

[K] Kahane J.P. *Sur le Modèle de Turbulence de B. Mandelbrot.* C.R.A.S. 278, série A, 621-623, 1974.

[KP] Kahane J.P.- Peyrière J. *Sur certaines Martingales de B. Mandelbrot.* Adv. in Math. 22, 131-145, 1976.

[M] Mandelbrot B. *Multiplications Aléatoires Itérées et Distributions Invariantes par Moyenne Pondérée Aléatoire.* C.R.A.S. 278, série A, 289-292, 1974.