THIERRY JEULIN
MARC YOR

Moyennes mobiles et semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 53-77
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__53_0>

Moyennes mobiles et semimartingales.

T. Jeulin[1] et *M. Yor*[2]

(1) *UFR de Mathématiques et URA 1321, Université Paris 7, Tour 45-55, 5ème étage, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cédex 05.*

(2) *Laboratoire de Probabilités, Université P. et M. Curie, Tour 56, 3ème étage, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cédex 05.*

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de 0. On a étudié en [JY] le processus défini pour $t \geq 0$ par :

$$T(X)_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{s} X_s \, ds \;;$$

on a vu en particulier que :

- $T(X)$ est un mouvement brownien réel ;
- pour tout $t > 0$, la tribu $\sigma\{T(X)_s \mid s \leq t\}$ coïncide, aux ensembles négligeables près, avec celle du pont brownien de longueur t, défini pour $u \leq t$ par : $X_u^{(t)} = X_u - \frac{u}{t} X_t$; en conséquence, pour tout $t \geq 0$, $\sigma\{T(X)_s \mid s \leq t\}$ est indépendante de $\sigma\{X_s \mid s \geq t\}$.
- la transformation T est ergodique sur l'espace de Wiener.

On peut aussi écrire : $T(X)_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{s} \int_0^s dX_v \, ds = \int_0^t \left(1 - \mathrm{Log}\frac{t}{v}\right) dX_v$, ce qui incite à introduire :

$$\mathcal{M} \equiv \left\{\rho :]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \text{ fonction mesurable telle que : } 0 < \int_0^1 \rho^2\left(\frac{1}{u}\right) du < \infty\right\}$$

et à étudier pour $\rho \in \mathcal{M}$ le processus $\left(R_t \equiv \int_0^t \rho\left(\frac{t}{s}\right) dX_s\right)_{t\geq 0}$.

On peut chercher, par exemple :

- à quelles conditions R est une semi-martingale dans la filtration de X ou dans sa filtration propre ?
- Quelle est la famille $\mathcal{M}_b$ des fonctions ρ de $\mathcal{M}$ pour lesquelles R est un mouvement <u>brownien</u> et quelles sont dans ce cas les propriétés de la transformation $X \longrightarrow R$?

De fait, on voit aisément que le processus $\tilde{R}$ défini pour $\tau \in \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{R}_\tau = e^{-\tau/2} R_{\exp\tau}$$

est un processus gaussien stationnaire (plus précisément une moyenne mobile) ;

l'étude proposée plus haut traite donc, en fait, de processus gaussiens stationnaires pour lesquels une importante littérature existe ; on apporte ici des compléments aux travaux de JAIN-MONRAD [JMo], EMERY [E], STRICKER [S]. On retrouve ainsi, avec une démonstration différente, le résultat suivant qui figure dans KNIGHT ([Kn] théorème 6.5) :

R *est une $\mathcal{X}$-semi-martingale si et seulement si il existe* $c \in \mathbb{R}$ *et* $\varphi \in \mathcal{M}$ *tels que :* $\rho = c + \int_1^{\cdot} \frac{1}{\psi}\, \varphi(\psi)\, d\psi$; cX *est alors la partie martingale de* R, *tandis que sa partie à variation finie est* $\int_0^{\cdot} \left(\frac{1}{u} \int_0^u \varphi\left(\frac{u}{s}\right) dX_s \right) du.$

Le passage par les processus gaussiens stationnaires permet en outre de donner un autre éclairage à certains résultats de [JY].

Conventions : soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(Z_r)_{r \in J}$ un processus mesurable défini sur l'espace probabilisé [complet] $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;

$\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_r)_{r \in J}$ désigne la filtration engendrée par Z :

$$\mathcal{Z}_r = \sigma\{Z_s \mid s \le r,\ s \in J\} \vee \mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ est la famille des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{A}$.

Pour $L = (L_t)_{t \ge 0}$ processus indexé par $\mathbb{R}_+$, $\tilde{L}$ est le processus défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{L}_\tau = e^{-\tau/2} L_{\exp \tau}$$

1) Quelques réécritures.

Soit $X = (X_t)_{t \ge 0}$ un mouvement brownien ; $\tilde{X}$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé à X : remarquons que, pour $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$,

$$E[\tilde{X}_\tau \tilde{X}_\sigma] = \exp -\tfrac{1}{2}|\tau - \sigma| = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\gamma(\tau - \sigma)} \frac{1}{1 + 4\gamma^2}\, d\gamma\ ;$$

$\tilde{X}$ est gaussien stationnaire ; sa mesure spectrale λ_0 a pour densité $\frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + 4\gamma^2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit aussi } \beta_\tau = \begin{cases} \tilde{X}_\tau - \frac{1}{2} \int_\tau^0 \tilde{X}_s\, ds & \text{si } \tau \le 0 \\ \tilde{X}_\tau + \frac{1}{2} \int_0^\tau \tilde{X}_s\, ds & \text{si } \tau \ge 0 \end{cases} ;$$

β est un mouvement brownien (indexé par $\mathbb{R}$) (ses accroissements sont gaussiens, centrés, indépendants, $E[(\beta_\tau - \beta_\sigma)^2] = |\tau - \sigma|$) et $\beta_0 = \tilde{X}_0 = X_1$) ;

pour φ de classe C^1, à support compact dans $]0,\infty[$,

$$\int_0^\infty \varphi(s)\, dX_s = - \int_0^\infty \varphi'(s)\, X_s\, ds = - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\tau}\left(\varphi(e^\tau)\right) e^{\tau/2}\, \tilde{X}_\tau\, d\tau$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{U}\varphi(\tau)\ (d\tilde{X}_\tau + \tfrac{1}{2}\tilde{X}_\tau\ d\tau) \equiv \int_{\mathbb{R}} \mathcal{U}\varphi(\tau)\ d\beta_\tau$$

où $\mathcal{U}$ est l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$ sur $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ définie par :

$$\mathcal{U}\varphi(\tau) = e^{\tau/2}\ \varphi(e^\tau)\ ;$$

on notera que $\tilde{\mathcal{X}}_\tau$ coïncide avec la tribu $\sigma(\beta_y - \beta_z \mid y \le z \le \tau)$.

Dans la suite, on identifiera (isométriquement) l'espace gaussien de $\tilde{X}$ et $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ en identifiant $\tilde{X}_\tau$ et la fonction $\gamma \longrightarrow e^{i\gamma\tau} \dfrac{1}{\frac{1}{2} + i\gamma}$.

Pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+,ds)$, $\int_0^\infty \varphi(s)\ dX_s$ sera donc identifié avec $\widehat{\mathcal{U}\varphi}$

(pour $f \in L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f ; on notera aussi e_τ la fonction $\gamma \longrightarrow e_\tau(\gamma) = e^{i\gamma\tau}$).

Soit $\rho \in \mathcal{M}$ et, pour $t \ge 0$, $R_t \equiv \int_0^t \rho\left(\frac{t}{s}\right)\ dX_s$; on a :

$$\tilde{R}_\tau = e^{-\tau/2}\ R_{\exp\tau} = e^{-\tau/2} \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma/2}\ \rho(e^{\tau-\sigma})\ 1_{\{\sigma < \tau\}}\ d\beta_\sigma\ ;$$

$\tilde{R}$ est donc la *moyenne mobile adaptée* $\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{\tau} \eta_\rho(\tau - \sigma)\ d\beta_\sigma$ où :

$$\eta_\rho(\tau) = 1_{\{\tau > 0\}}\ e^{-\tau/2}\ \rho(e^\tau) \quad (\eta_\rho \in L^2(\mathbb{R},\lambda))\ ;$$

$\tilde{R}$ est gaussien stationnaire, de fonction de covariance :

$$E[\tilde{R}_\sigma\ \tilde{R}_\tau] = \int_{-\infty}^{\sigma} \eta_\rho(\tau-\upsilon)\ \eta_\rho(\sigma-\upsilon)\ d\upsilon = \int_0^\infty \eta_\rho(\upsilon)\ \eta_\rho(\tau-\sigma+\upsilon)\ d\upsilon \quad (\sigma \le \tau)$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\eta}_\rho(\upsilon)|^2\ e^{i\upsilon(\tau-\sigma)}\ d\upsilon\ ;$$

la mesure spectrale de $\tilde{R}$ est la mesure de densité $(2\pi)^{-1}\ |\hat{\eta}_\rho(\upsilon)|^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$; on a donc :

Lemme 1 : Soit $\rho \in \mathcal{M}$ et $\eta_\rho(\tau) = 1_{\{\tau > 0\}}\ e^{-\tau/2}\ \rho(e^\tau)$; alors ρ appartient à $\mathcal{M}_b$ si et seulement si :

$$\left(\tfrac{1}{4} + \gamma^2\right)\ |\hat{\eta}_\rho(\gamma)|^2 = 1 \qquad \lambda\text{-}p.s.$$

Si on utilise l'identification à $L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\tilde{R}_\tau$ s'identifie à $\overline{\hat{\eta}_\rho\ e_\tau}$.

Soit $t > 0$; l'étude de la tribu $\mathcal{R}_t$ ou de l'espace gaussien engendré par $\{R_s\}_{s \le t}$ revient, avec $\tau = \mathrm{Log}t$, à la recherche du sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ engendré par $\overline{\{\gamma \longrightarrow \hat{\eta}_\rho(\gamma)\ \exp i\gamma\sigma\ ;\ \sigma \le \tau\}}$, ce qui motive les quelques rappels suivants ; les résultats énoncés sont essentiellement dûs à Paley et Wiener [PW] ou à Beurling [B] ; on en trouvera aussi des démonstrations dans le livre de Dym et McKean [DMK] qui a fortement inspiré ce travail (le lien avec les processus stationnaires remonte à Karhunen [Ka]) :

• la *classe de Hardy* $\mathbb{H}^2_+$ est l'ensemble des fonctions H analytiques dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathcal{I}m(z) > 0\}$ et telles que

$$\sup_{b>0} \int_{\mathbb{R}} |H(a+ib)|^2\, da < \infty\ ;$$

H appartient à $\mathbb{H}^2_+$ si et seulement si

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{izt}\, h(t)\, dt \qquad \text{où } h \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\lambda) \qquad (z \in \mathbb{C}_+)\ ;$$

on a alors : $\lim_{b\to 0} H(a+ib) = \hat{h}(a)$ da p.s. et dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\lambda)$;

dans la suite, pour $h \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\lambda)$, nulle p.s. sur $]-\infty,0[$, on notera encore $\hat{h}$ la fonction de $\mathbb{H}^2_+$: $z \in \mathbb{C}_+ \longrightarrow \int_{\mathbb{R}_+} e^{izt}\, h(t)\, dt$; si h n'est pas triviale, $|\hat{h}|$ a la propriété caractéristique : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Log}|\hat{h}(\gamma)|\, \frac{d\gamma}{1+\gamma^2} > -\infty$.

• $H \in \mathbb{H}^2_+$ $(H = \hat{h})$ est dite *extérieure* si $H \not\equiv 0$ et vérifie en un (ou tout) point $a + ib$ de $\mathbb{C}_+$:

$$\mathrm{Log}|H(a+ib)| = \frac{b}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Log}|\hat{h}|(x)}{(x-a)^2 + b^2}\, dx$$

Par exemple, <u>la fonction</u> $\hat{\eta}_1(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - ix}$ <u>est extérieure.</u>

• Une fonction G analytique sur $\mathbb{C}_+$ est dite *intérieure* si $|G| \le 1$ sur $\mathbb{C}_+$ et si $G_{0+}(a) \equiv \lim_{b\to 0} G(a+ib)$ est da p.s. de module 1.

• Toute H de $\mathbb{H}^2_+$ s'écrit (de façon unique à une constante multiplicative de module 1 près) comme produit $E \times G$ où $E \in \mathbb{H}^2_+$ est extérieure et G est intérieure ; avec $H = \hat{h}$, le sous espace fermé de $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ engendré par $\{e_\tau \hat{h} |\ \tau \ge 0\}$ coïncide avec $G_{0+}\, \mathbb{H}^2_+$; une expression explicite de E est :

$$E(z) = \exp\left(-\frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\gamma z}{\gamma - z}\, \mathrm{Log}|\hat{h}|(\gamma)\, \frac{d\gamma}{1+\gamma^2}\right) .$$

On notera que pour $h \in L^2(\mathbb{R},\lambda)$, à valeurs réelles, on a la *condition de réalité* : $\overline{\hat{h}(z)} = \hat{h}(-\bar{z})$; "la" partie intérieure et "la" partie extérieure de $\hat{h}$ seront choisies de manière à vérifier la même propriété (elles sont alors définies à la multiplication par ± 1 près).

Pour $\kappa \in \mathcal{M}$, G_κ est un facteur intérieur de $\hat{\eta}_\kappa$ avec $\overline{G_\kappa(z)} = G_\kappa(-\bar{z})$ $(z \in \mathbb{C}_+)$; si $\rho \in \mathcal{M}$, on prendra $G \equiv \dfrac{\hat{\eta}_\rho}{\hat{\eta}_1}$ et si on utilise l'identification de l'espace gaussien de $\tilde{X}$ à $L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\int_0^\infty \varphi(t)\, dR_t$ <u>s'identifie à</u> $(\mathcal{U}\varphi)^\wedge\, \overline{G}_\rho$.

Remarque : Pour φ de classe C^1, à support compact dans $]0,\infty[$, et $\kappa \in \mathcal{M}$,
$-\int_0^\infty \varphi'(s)\, K_s\, ds$ s'identifie dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ à $\gamma \longrightarrow (\frac{1}{2} + i\gamma)\, (\mathcal{U}\varphi)^\wedge(\gamma)\, \overline{\hat{\eta}_\kappa(\gamma)}$

L'application $\varphi \longrightarrow \int_0^\infty \varphi(s)\, dK_s \equiv -\int_0^\infty \varphi'(s)\, K_s\, ds$ se prolonge par continuité aux φ de $L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$ telles que : $\int_{\mathbb{R}} \left|(\mathcal{U}\varphi)^\wedge(\gamma)\right|^2 (\frac{1}{4} + \gamma^2)\, \left|\hat{\eta}_\kappa(\gamma)\right|^2 d\gamma < \infty$
(on retrouve l'intégrale gaussienne classique).

Lemme 2 : *Soit* $\kappa \in \mathcal{M}$; *soit* κ_e *et* ρ_κ *les fonctions de* $\mathcal{M}$ *telles que* :

$$\widehat{\eta_{\kappa_e}}(\gamma) = \exp\left(-\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+\gamma\gamma}{\gamma - \gamma}\, \mathrm{Log}|\hat{h}|(\gamma)\, \frac{d\gamma}{1+\gamma^2}\right), \qquad \widehat{\eta_{\rho_\kappa}} = \hat{\eta}_1 \times \frac{\widehat{\eta_{\kappa_e}}}{\widehat{\eta_\kappa}} .$$

Soit, pour $t > 0$, $K_t \equiv \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$ *et* $Y_t^{(\kappa)} = \int_0^t \rho_\kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$; $Y^{(\kappa)}$ *est un mouvement brownien engendrant la même filtration que* K *et* $K_t \equiv \int_0^t \kappa_e\left(\frac{t}{s}\right) dY_s^{(\kappa)}$.

Démonstration :

On notera que $\widehat{\eta_{\kappa_e}}$ est un facteur extérieur de $\widehat{\eta_\kappa}$ et que $\dfrac{\hat{\eta}_{\rho_\kappa}}{\hat{\eta}_1}$ est intérieure ;
comme $|\widehat{\eta_{\rho_\kappa}}| = |\hat{\eta}_1|$ λ-p.s., $Y^{(\kappa)}$ est un mouvement brownien (lemme 1) ;
si on identifie $\tilde{X}_\tau$ et $\overline{\hat{\eta}_1\, e_\tau}$ $(\tau \in \mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\tilde{K}_\tau$ s'identifie à $\overline{\hat{\eta}_\kappa\, e_\tau}$;
$\int_0^\infty \varphi(s)\, dY_s^{(\kappa)}$ s'identifie à $\overline{G_{\rho_\kappa}}\, (\mathcal{U}\varphi)^\wedge(\gamma)$ $(\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+,dt))$;
$e^{-\tau/2}\int_0^{e^\tau} \kappa_e\left(\frac{1}{s}e^\tau\right) dY_s^{(\kappa)}$ s'identifie à $\overline{G_{\rho_\kappa}}\, e^{-\tau/2}\left\{\mathcal{U}\kappa_e(\frac{1}{\cdot}e^\tau)\right\}^\wedge = \overline{G_{\rho_\kappa}\, \hat{\eta}_{\kappa_e}\, e_\tau} = \overline{\hat{\eta}_\kappa\, e_\tau}$.
En outre, l'espace gaussien engendré par $\{\tilde{K}_\sigma \mid \sigma \le 0\}$ (resp. par $\{\tilde{Y}_\sigma^{(\kappa)} \mid \sigma \le 0\}$ s'identifie au sous espace fermé de $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ engendré par $\{\overline{\hat{\eta}_\kappa\, e_\sigma} \mid \sigma \le 0\}$ (resp. par $\{\overline{\hat{\eta}_{\rho_\kappa}\, e_\sigma} \mid \sigma \le 0\}$) ; $\hat{\eta}_\kappa$ et $\hat{\eta}_{\rho_\kappa}$ ont même facteur intérieur G_{ρ_κ} ; ces deux espaces coïncident donc avec $\overline{G_{\rho_\kappa}}\, H^2_-$; d'où l'égalité des filtrations de $Y^{(\kappa)}$ et de K □

<u>Si</u> $G_\kappa \neq 1$ <u>et</u> $G_\kappa \neq -1$, $\overline{G}_\kappa H^2_- \subseteq H^2_-$, $\overline{G}_\kappa H^2_- \neq H^2_-$; <u>en conséquence</u>, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, <u>la tribu</u> $\mathcal{R}_t$ <u>est contenue strictement dans</u> $\mathcal{X}_t$.

Plus précisément, pour φ, $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+,dt)$, $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \varphi(t)\, dY_t^{(\kappa)} \times \int_0^\infty \psi(t)\, dX_t\right] = 0$

équivaut à : $\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{U}\varphi)^{\wedge}(\gamma)\ \overline{(\mathcal{U}\varphi)^{\wedge}(\gamma)}\ \overline{G}_K(\gamma)\ d\gamma = 0$; par suite :

<u>*Lemme 3*</u> : *Pour* $\varphi \in L^2([0,1],\lambda)$, $\int_0^1 \varphi(t)\ dY_t^{(K)}$ *est indépendante de* $\mathcal{R}_1$ *si* $(\mathcal{U}\varphi)^{\wedge}$ *est orthogonale à* $\overline{G}_K\ \mathbb{H}^2_-$.

Par contre, comme $|G_K| = 1$, on a $G_K\ L^2 = L^2$ et $\sigma\{R_s,\ s \geq 0\} = \sigma\{X_s,\ s \geq 0\}$;

<u>*Lemme 4*</u> :

1) Soit $\overline{X}$ *le mouvement brownien obtenu à partir de* X *par inversion du temps :* $\overline{X}_t = t\ X_{1/t}$ $(t > 0)$; *pour* $f \in L^2(\mathbb{R}_+,dt)$, $\int_0^\infty f(t)\ d\overline{X}_t = \int_0^\infty \mathcal{J}f(t)\ dX_t$ *où* $\mathcal{J}$ *est l'isométrie (involutive) de* $L^2(\mathbb{R}_+,dt)$:

$$f \longrightarrow : \mathcal{J}f(t) = \int_0^{1/t} f(s)ds - \frac{1}{t}\, f\left(\frac{1}{t}\right) ;$$

on a :
$$((\mathcal{U}\circ\mathcal{J})f)^{\wedge}(\gamma) = \frac{\frac{1}{2} + i\gamma}{\frac{1}{2} - i\gamma}\ \overline{(\mathcal{U}\varphi)^{\wedge}(\gamma)} .$$

2) Soit $\rho \in \mathcal{M}_b$ *et* $\overline{R}_t = t\ R_{1/t}$. *i)* $\overline{X}_t = \int_0^t \rho\left(\frac{t}{s}\right)\ d\overline{R}_s$.

ii) Avec $\tilde{\rho}(z) \equiv \int_0^{1/z} \rho\left(\frac{1}{u}\right)\ du - \frac{1}{z}\ \rho(z)$ $(\rho \equiv 0$ *sur* $]-\infty,1[)$, *on a :*

$$X_t = \tilde{\rho}(1)\ R_t + \int_t^\infty \tilde{\rho}\left(\frac{u}{t}\right)\ dR_u ;$$

en particulier $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{R}_t] = \tilde{\rho}(1)\ R_t$ *et* X_t *est indépendant de* $\mathcal{R}_t$ *si et seulement si* $\tilde{\rho}(1) = 0$; *une condition équivalente est :*

$$G_\rho\left(\frac{i}{2}\right) = 0 \qquad \left(\text{et } \gamma \longrightarrow \frac{\frac{1}{2} + i\gamma}{\frac{1}{2} - i\gamma} \text{ est un des "facteurs" de } G_\rho\right).$$

<u>*Démonstration*</u> :

1) Pour φ de classe C^1 à support compact sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\int_0^\infty \varphi(s)\ d\overline{X}_s = - \int_0^\infty \overline{X}_s\ \varphi'(s)\ ds = - \int_0^\infty X_{1/s}\ s\ \varphi'(s)\ ds = - \int_0^\infty X_v\ \varphi'\left(\frac{1}{v}\right)\ v^{-3}\ dv$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \varphi'\left(\frac{1}{v}\right)\ v^{-3}\ dv\right)\ dX_s = \int_0^\infty \mathcal{J}\varphi(s)\ dX_s$$

(on a aussi $e^{-\tau/2}\overline{X}_{\exp\tau} = e^{\tau/2}X_{\exp-\tau}$; $\mathcal{J}$ correspond donc au retournement du temps dans les intégrales "stochastiques" par rapport au mouvement brownien β introduit au début de ce paragraphe). Remarquons de plus que :

$$(\mathcal{U}\circ\mathcal{J})f(v) = e^{v/2} \int_0^{e^{-v}} f(s)ds - e^{-v/2}\ f(e^{-v}) = e^{v/2} \int_{-\infty}^{-v} e^{r/2}\ \mathcal{U}f(r)\ dr - \mathcal{U}f(-v)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x/2}\, \mathcal{U}f(x-v)\, dx - \mathcal{U}f(-v), \text{ d'où : } \qquad ((\mathcal{U}\circ\mathcal{J})f)^{\wedge}(\gamma) = \frac{\frac{1}{2}+i\gamma}{\frac{1}{2}-i\gamma}\, \bar{\widehat{(\mathcal{U}f)}}(\gamma)$$

(lue dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$, $\mathcal{J}$ correspond à la multiplication par une fonction Δ, vérifiant : $\overline{\Delta(\gamma)} = \Delta(-\gamma)$ et $|\Delta(\gamma)| = 1$, suivie d'une conjugaison, ou d'un retournement du temps).

2) Soit $\mathcal{D}_\rho$ l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$ définie par $\int_0^\infty \varphi(t)\, dR_t = \int_0^\infty \mathcal{D}_\rho(\varphi)(t)\, dX_t$.

$$[(\mathcal{U}\circ\mathcal{D}_\rho)(\varphi)]^{\wedge} = \bar{G}_\rho \widehat{(\mathcal{U}\varphi)},\ [(\mathcal{U}\circ\mathcal{J}\circ\mathcal{D}_\rho)(\varphi)]^{\wedge}(\gamma) = \frac{\frac{1}{2}+i\gamma}{\frac{1}{2}-i\gamma}\, G_\rho \bar{\widehat{(\mathcal{U}\varphi)}},\ \text{d'où } \mathcal{D}_\rho\circ\mathcal{J}\circ\mathcal{D}_\rho = \mathcal{J}\ ;$$

si $W_t = \int_0^t \rho\left(\frac{t}{s}\right) d\bar{R}_s$, on a :

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, dW_t = \int_0^\infty \mathcal{D}_\rho\varphi(t)\, d\bar{R}_t = \int_0^\infty (\mathcal{J}\circ\mathcal{D}_\rho)\varphi(t)\, dR_t$$

$$= \int_0^\infty (\mathcal{D}_\rho\circ\mathcal{J}\circ\mathcal{D}_\rho)\varphi(t)\, dX_t = \int_0^\infty \mathcal{J}\varphi(t)\, dX_t \quad \text{et } W_t = \bar{X}_t.$$

$$\bar{X}_a = \int_0^a \rho\left(\frac{a}{s}\right) d\bar{R}_s = \int_0^\infty \mathcal{J}\varphi(t)\, dR_t, \qquad \text{où } \varphi(s) = \rho\left(\frac{a}{s}\right) 1_{\{s\le a\}}\ ;$$

$$\mathcal{J}\varphi(t) = \int_0^{\inf(a,1/t)} \rho\left(\frac{a}{s}\right) ds - \frac{1}{t}\,\rho(at)\, 1_{\{t\ge 1/a\}}$$

$$= 1_{\{t\ge 1/a\}}\, a \left(\int_0^{1/at} \rho\left(\frac{1}{s}\right) ds - \frac{1}{at}\,\rho(at)\right) + 1_{\{t<1/a\}}\, a \int_0^1 \rho\left(\frac{1}{s}\right) ds\ ;$$

$$X_b = b\bar{X}_{1/b} = R_b \int_0^1 \rho\left(\frac{1}{s}\right) ds + \int_b^\infty \left(\int_0^{b/t} \rho\left(\frac{1}{s}\right) ds - \frac{b}{t}\,\rho\left(\frac{b}{t}\right)\right) dR_t = \tilde{\rho}(1)\, R_b + \int_b^\infty \tilde{\rho}\left(\frac{u}{b}\right) dR_u \quad \square$$

<u>*Remarques 5*</u> :

1) La transformation T, obtenue pour $\rho(x) \equiv (1 - \mathrm{Log}x)\, 1_{\{x>1\}}$, correspond dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ à la multiplication par $\dfrac{i\gamma - \frac{1}{2}}{i\gamma + \frac{1}{2}}$.

On notera, de façon générale, que pour $\tilde{W}$ processus gaussien stationnaire, le processus W défini sur $\mathbb{R}_+$ par $W_t = t^{1/2}\, \tilde{W}_{\mathrm{Log}t}$ vérifie :

$$\int_{0+} \frac{1}{s}\, |W_s|\, ds \text{ converge p.s et } T(W) \text{ a même loi que } W.$$

2) Soit $\mathcal{K} : L^2(\mathbb{R}_+,dt) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+,dt)$ l'isométrie : $f \longrightarrow \mathcal{K}f(t) = \frac{1}{t}\, f\left(\frac{1}{t}\right)$;

on a : $\qquad (\mathcal{U}\circ\mathcal{K})f(v) = e^{-v/2} f(e^{-v}) = \mathcal{U}f(-v)\ ;\ \mathcal{J} = T\circ\mathcal{K}.$

3) Toute fonction intérieure G se factorise en

$$G(x) = c\, e^{ikx}\, B(x)\, S(x),$$

avec $|c| = 1$, $k \ge 0$,

$$S(\alpha) = \exp i \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma\alpha + 1}{\gamma - \alpha} \frac{d\mu(\gamma)}{1+\gamma^2}$$ où μ est une mesure (positive) singulière

telle que : $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\gamma)}{1+\gamma^2} < \infty$ (S est la partie *singulière* de G) ;

$$B(\alpha) = \prod_{n\in D} \varepsilon_n \frac{a_n - \alpha}{\bar{a}_n - \alpha}, \quad \varepsilon_n = 1 \text{ si } |a_n| \leq 1, \quad \varepsilon_n = \frac{\bar{a}_n}{a_n} \text{ sinon}$$

(les (a_n) sont les zéros de G situés dans le demi-plan supérieur ouvert).

Pour $\rho \in \mathcal{M}_b$, η_ρ étant réelle, $\hat{\eta}_\rho(-u + iv) = \overline{\hat{\eta}_\rho(u + iv)}$ $(u \in \mathbb{R},\ v > 0)$; en conséquence :

- $c = 1$ ou -1 ;
- l'ensemble des zéros de G_ρ est invariant par $\mathcal{R}e\, z \longrightarrow -\mathcal{R}e\, z$;

B se factorise donc en $B_1 B_2$, B_1 correspondant aux zéros imaginaires purs :

$$B_1(\alpha) = \left(\prod_{n\in D_1, v_n \leq 1} \frac{\alpha - iv_n}{\alpha + iv_n}\right)\left(\prod_{n\in D_1, v_n > 1} \frac{-\alpha + iv_n}{\alpha + iv_n}\right) \text{ avec } v_n > 0 \text{ et } \sum_{n\in D_1} \frac{v_n}{1 + v_n^2} < \infty$$

(condition de convergence du produit pour $\mathcal{I}m\,\alpha > 0$) ;

$$B_2(\alpha) = \prod_{n\in D_2}\left(\frac{u_n + iv_n - \alpha}{u_n - iv_n - \alpha} \times \frac{u_n - iv_n + \alpha}{u_n + iv_n + \alpha}\right)$$

$$\left(u_n > 0,\ v_n > 0 \text{ et } \sum_{n\in D_2} \frac{v_n}{1 + u_n^2 + v_n^2} < \infty\right) ;$$

- $S(\alpha) = \exp -i\left(\frac{\ell}{\alpha} + 2\alpha \int_{]0,\infty[} \frac{1}{\alpha^2 - \gamma^2}\, dF_\rho(\gamma)\right)$ où $\ell \in \mathbb{R}_+$ et

F_ρ est une mesure singulière symétrique telle que : $\int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{1+\gamma^2}\, dF_\rho(\gamma) < \infty$

Si G est une fonction intérieure, on a vu en [CJ]-Proposition IV.6.3 que $1 - G$ appartient à H^2_+ si et seulement si $\sum_{n\in D} \mathcal{I}m(a_n) + \mu(\mathbb{R}) < \infty$ et

$$G(\alpha) = B_0(\alpha)\, S(\alpha) \qquad \text{où } B_0(\alpha) = \prod_{n\in D} \frac{a_n - \alpha}{\bar{a}_n - \alpha}$$

On a alors $1 - G = \hat{h}$ et $\int_{\mathbb{R}_+} |h|^2(t)\, dt = \sum_{n\in D} 2\mathcal{I}m(a_n) + \mu(\mathbb{R})$.

2) Propriétés ergodiques.

Soit $C = C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{C}$; ξ est le processus des coordonnées sur C, $\mathcal{C}_t = \sigma(\xi_s \mid s \leq t)$; $\mathbb{W}$ est la mesure de Wiener sur $(C,\mathcal{C})$.
Pour $\rho \in \mathcal{M}_b$, on note Ξ_ρ l'application définie sur $(C,\mathcal{C},\mathbb{W})$ par

$$\xi \longrightarrow \left(\int_0^t \rho\left(\frac{t}{u}\right) d\xi_u\right)_{t\geq 0} ;$$

$\mathbb{W}$ est invariante par Ξ_ρ.

Remarque 6 : *Pour ρ, κ dans $\mathcal{M}_b$, $\Xi_\rho \circ \Xi_\kappa = \Xi_\kappa \circ \Xi_\rho = \Xi_{\rho\circledast\kappa}$ où $G_{\rho\circledast\kappa} = G_\rho\, G_\kappa$; en particulier, $\Xi_\rho^n = \Xi_{\rho_n}$ où $G_{\rho_n} = (G_\rho)^n$.*

Proposition 7 : *Soit $\rho \in \mathcal{M}_b$, $\rho \not\equiv 1$ et $\rho \not\equiv -1$;*

i) la tribu $\bigcap_n (\Xi_\rho^n)^{-1}(\mathcal{C}_1)$ est $\mathbb{W}$-triviale ;

ii) en conséquence, la transformation Ξ_ρ est fortement mélangeante et donc ergodique sur $(C,\mathcal{C},\mathbb{W})$.

Démonstration :

le point essentiel est *i)* ; on en déduit, par "*scaling*", que pour tout $t \geq 0$, $\bigcap_n (\Xi_\rho^n)^{-1}(\mathcal{C}_t)$ est $\mathbb{W}$-triviale ; comme $\Xi_\rho^{-1}(\mathcal{C}_t) \subseteq \mathcal{C}_t$ aux ensembles $\mathbb{W}$-négligeables près, on obtient (théorème de convergence des martingales inverses) :

pour tout $B \in \mathcal{C}_t$, $\lim_n \mathbb{W}[B|(\Xi_\rho^n)^{-1}(\mathcal{C}_t)] = \mathbb{W}[B]$; d'où la propriété de mélange, d'abord sur $\mathcal{C}_t$ puis sur $\mathcal{C} = \bigvee_t \mathcal{C}_t$. D'après le lemme 3, *i)* est conséquence de :

$$\bigcap_n (\overline{G}_\rho^n\, H_-^2) = \{0\} ;$$

ce dernier point résulte de l'unicité (à des constantes multiplicatives près) de la décomposition de $\varphi \in H_+^2$, $\varphi \neq 0$, en un produit $j \times e$ où j est intérieure et e extérieure □

Remarques 8 :

i) Soit $k > 0$: $G_k(\gamma) = e^{ik\gamma}$ correspond à $\kappa = \sqrt{r}1_{[r,\infty[}$ ($r = e^k > 1$) et à la transformation $\xi_t \longrightarrow \sqrt{r}\ \xi_{t/r}$ ("*scaling*").

ii) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $q_m(s) = \frac{1}{(m-1)!}\, s^{-1/2}\, s^{-i\psi}\, \mathrm{Log}^{m-1}\left(\frac{1}{s}\right) 1_{\{s<1\}}$;

$\mathcal{U}q_m(x) = 1_{\{x<0\}} \frac{1}{(m-1)!} (-x)^{m-1} e^{-i\psi x}$, $(\mathcal{U}q_m)\hat{}(\gamma) = \left(\frac{i}{\gamma-\psi}\right)^m$;

Si L_n désigne le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Laguerre, $L_n(\omega) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{1}{k!} \omega^k$, avec $\tau = \mathrm{Log}t$ et $\mathcal{I}m\psi > 0$, $\int_0^t s^{-(\frac{1}{2}+i\psi)} L_n\left(\omega \mathrm{Log}\frac{t}{s}\right) dX_s$ s'identifie dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ à :

$$e^{i(\gamma-\psi)\tau} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \omega^k \left(\frac{i}{\gamma-\psi}\right)^{k+1} = e^{i(\gamma-\psi)\tau}\left(\frac{i}{\gamma-\psi}\right)\left(\frac{\gamma-\psi-i\omega}{\gamma-\psi}\right)^n ;$$

$\int_0^t s^{-1/2}\, s^{-i\psi}\, L_n\left(-2\mathcal{I}m\psi\ \mathrm{Log}\frac{t}{s}\right) dX_s$ s'identifie à $e^{i(\gamma-\psi)\tau}\left(\frac{i}{\gamma-\psi}\right)\left(\frac{\gamma-\overline{\psi}}{\gamma-\psi}\right)^n$.

Si ψ est zéro de multiplicité h de G_ρ ($\mathcal{I}m\psi > 0$), la tribu

$$\sigma\left\{\int_0^t s^{-1/2}\, s^{-i\psi}\, \log^{r-1} s\ dX_s \ ;\ 1 \leq r \leq h\right\}$$

est indépendante de $\mathcal{R}_t$:

pour $n < h$, $G_\rho(\gamma) \dfrac{i}{\gamma - \psi} \left(\dfrac{\gamma - \bar{\psi}}{\gamma - \psi}\right)^n = \dfrac{i}{\gamma - \bar{\psi}} G^\#(\gamma)$ où $G^\#$ est intérieure ; comme

$\dfrac{1}{\gamma - \bar{\psi}} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-i\bar{\psi}x} e^{i\gamma x}\, dx$, $\gamma \longrightarrow G_\rho(\gamma) \left(\dfrac{i}{\gamma - \psi}\right) \left(\dfrac{\gamma - \bar{\psi}}{\gamma - \psi}\right)^n$ appartient à $\mathbb{H}^2_+$ et il suffit d'appliquer le lemme 3.

L'ensemble des fonctions $\{s \longrightarrow s^{\pm iu}\, s^{-(v+1/2)}\, \mathrm{Log}^n\left(\frac{1}{s}\right) 1_{\{s<1\}},\ n \geq 0\}$ étant total dans $L^2([0,1],ds)$, on retrouve l'ergodicité de Ξ_ρ ; c'est la démarche adoptée en [JY] pour montrer l'ergodicité de T.

iii) Indiquons une autre approche de l'ergodicité dans le cas singulier :

<u>*Lemme 9*</u> :

Soit ν une mesure positive bornée, singulière, à support compact sur $\mathbb{R}$ et N_ν la fonction intérieure définie par $N_\nu(x) \equiv \exp -i\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - \zeta}\, d\nu(\zeta)$ ($\mathcal{I}m x > 0$) ;

1) $1 - N_\nu \in \mathbb{H}^2_+$; plus précisément, si $\psi_\nu(t) \equiv 1_{\{t>0\}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-it\zeta}\, d\nu(\zeta)$,

$y_\nu \equiv - \displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n!} \psi_\nu^{*n}$, on a : $y_\nu \in L^2$, $y_\nu = y_\nu 1_{\mathbb{R}_+}$ et $1 - N_\nu = \hat{y}_\nu$.

2) Si $\nu = \ell\delta_a$ ($\ell > 0$), alors : $y_\nu(t) = 1_{\{t>0\}}\, e^{-iat} \left(\frac{\ell}{t}\right)^{1/2} J_1(2\sqrt{\ell t})$, où J_1 désigne la fonction de Bessel d'ordre 1.

3) Soit a un point du support de ν, et soient $c, \eta > 0$;

$N_{c,\eta}(\gamma) = \lim_{r\to 0+} \exp -ic \displaystyle\int_{]a-\eta,a+\eta]} \frac{1}{\gamma + ir - \zeta}\, d\nu(\zeta)$ ($\gamma \in \mathbb{R}$) ;

$1 - N_{c,\eta}$ converge λ-p.s. et dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ vers $1 - \exp\dfrac{ic}{a - \gamma}$ quand $\eta \longrightarrow 0$.

<u>*Démonstration*</u> :

1) pour $x = s + ip$ avec $p > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{i}{x - \zeta}\, d\nu(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p + i(\zeta - s)}\, d\nu(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty e^{-(p+i\zeta-is)t}\, dt\, d\nu(\zeta)$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-is)t}\, \psi_\nu(t)\, dt = \hat{\psi}_\nu(x) \qquad \text{(noter que } \psi_\nu \text{ est bornée)} ;$$

$$N_\nu(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n!} \hat{\psi}_\nu^n(x) = 1 - \int_0^\infty y_\nu(u)\, e^{iux}\, du ;$$

soit pour $\gamma \in \mathbb{R}$, $N_\nu(\gamma) = \lim_{r\to 0+} N_\nu(\gamma + ir)$ (cette limite existe λ-p.s., est de module 1 et vaut $\exp -i\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\gamma - \zeta}\, d\nu(\zeta)$ si $\gamma \notin \mathrm{Supp}\nu$) ;

si $\mathrm{Supp}\nu \subseteq]-A,+A[$ ($A > 0$), on a :

$$|1 - N_\nu(\gamma)| \leq 2\, 1_{[-2A,2A]}(\gamma) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\gamma - \zeta|}\, d\nu(\zeta)\, 1_{\{|\gamma| > 2A\}}$$

$$\leq 2\, 1_{[-2A,2A]}(\gamma) + \frac{1}{2}\, \nu(\mathbb{R}) \frac{1}{|\gamma| - A}\, 1_{\{|\gamma| > 2A\}} \in L^2(\mathbb{R},\lambda) .$$

2) Si $\nu = \ell\delta_a$ ($\ell > 0$), $\psi_\nu(t) = 1_{\{t>0\}}\, \ell\, e^{-ita}$, $\psi_\nu^{*n}(t) = 1_{\{t>0\}} \dfrac{\ell^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-ita}$

$$y_\nu(t) = e^{-iat}\, 1_{\{t>0\}} \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\ell^n t^{n-1}}{n!(n-1)!} = e^{-iat}\, 1_{\{t>0\}} \left(\frac{\ell}{t}\right)^{1/2} J_1(2\sqrt{\ell t}).$$

3) résulte de la majoration (vérifiée pour $-A < a - \eta < a + \eta < A$) :

$$|1 - N_{c,\eta}| \leq 2\, 1_{[-2A,2A]}(\gamma) + \frac{1}{2}\, \frac{1}{|\gamma| - A}\, 1_{\{|\gamma| > 2A\}} \quad \square$$

Soit donc $\rho \in \mathcal{M}_b$ avec G_ρ *singulière*, $0 < F_\rho(\mathbb{R})$, et $c = 1$;

si N_ν est une fonction intérieure singulière de mesure associée ν vérifiant :

$$\nu(\mathbb{R}) < \infty,\ \nu \ll F_\rho \text{ et } \frac{d\nu}{dF_\rho} \leq 1,$$

$G_\rho\, \overline{N}_\nu$ est intérieure singulière, $1 - N_\nu \in H^2_+$ (lemme 9-*1*), $\overline{N}_\nu\, G_\rho\, (N_\nu - 1) \in H^2_+$

et pour $h \in H^2_-$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{G}_\rho(\gamma) h(\gamma)(1 - N_\nu(\gamma))\, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} h(\gamma)\, \overline{\overline{N}_\nu\, G_\rho\, (N_\nu - 1)}(\gamma)\, d\gamma = 0$

(avec les notations du lemme 9, $\displaystyle\int_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^{1/2} y_\nu \circ \mathrm{Log}\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$ est indépendant de $\mathcal{R}_t$)

$\bigcup_n (\overline{G}^n_\rho H^2_-)^\perp$ contient donc V_ρ, le sous-espace de H^2_- engendré par les $(1 - \overline{G})$ où G est une fonction intérieure singulière de mesure associée ν vérifiant :

$$\nu(\mathbb{R}) < \infty,\ \nu \ll F_\rho \text{ et } \frac{d\nu}{dF_\rho} \text{ bornée ;}$$

d'après le lemme 6-*3*), il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\ell > 0$,

$$\gamma \longrightarrow 1 - \exp\frac{-i\ell}{a - \gamma} \text{ appartient à l'adhérence de } V_\rho \text{ dans } H^2_+ \text{ ;}$$

soit $\hat{h} \in H^2_-$, orthogonal à $\bigcup_n (\overline{G}^n_\rho H^2_-)^\perp$; on a :

$$\int_0^\infty h(t) \exp\text{-}iat \left(\frac{c}{t}\right)^{1/2} J_1(2\sqrt{ct})\, dt = 0 \text{ pour tout } c \geq 0 \text{ ;}$$

pour tout $r > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty h(t^2) \exp\text{-}iat^2\, J_1(rt)\, dt = 0$; la transformée de Hankel de la fonction : $t > 0 \longrightarrow \frac{1}{t} h(t^2) \exp\text{-}iat^2$ est nulle ; h est donc nulle λ-p.s..

iv) Conservons les notations du lemme 9 ; on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |1 - N_\nu|^2(x)\, dx = 2\pi\, \nu(\mathbb{R})$ (voir Remarque 5-3) ; supposons que ν soit une probabilité symétrique [singulière] ; pour $0 \leq a \leq b$, $N_{b\nu}\, \overline{N_{a\nu}}$ est intérieure singulière et $1 - N_{a\nu}$ est orthogonale à $(N_{b\nu} - N_{a\nu})$; par suite :

$$\int_{\mathbb{R}_+} y_{a\nu}(t)\, y_{b\nu}(t)\, dt = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (1 - N_{a\nu})(x)\, \overline{(1 - N_{b\nu})}(x)\, dx$$
$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |1 - N_{a\nu}|^2(x)\, dx = a$$

et $a \geq 0 \rightarrow \displaystyle\int_0^1 s^{-1/2}\, y_{a\nu} \circ \mathrm{Log}\left(\frac{1}{s}\right) dX_s$ est un mouvement brownien.

3) Variations quadratiques.

Proposition 10 :

Soit $\kappa \in \mathcal{M}$ *et pour* $t > 0$, $K_t \equiv \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right)\, dX_s$;

$$\Delta(\tau) \equiv \mathbb{E}[(\tilde{K}_\tau - \tilde{K}_0)^2] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\tau x))\, |\hat{\eta}_\kappa|^2(x)\, dx.$$

K *a une version continue si et seulement si* $\tilde{K}$ *a une version continue ; une condition nécessaire et suffisante pour cela est :*

$$\int_{0+} du \left\{-\log\left(\int_0^1 1_{\{\Delta(\tau) \le u^2\}}\, d\tau\right)\right\}^{1/2} < \infty .$$

Plus précisément, si K *est continu, pour tout* $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $\lim_{t\to 0} t^{-\varepsilon} K_t = 0$.

Démonstration :

Le critère de continuité sur $\tilde{K}$ est celui de Fernique [F2] (voir aussi [JMa]).

Comme $\mathbb{E}[K_t^2] = t\int_0^1 \kappa^2\left(\frac{1}{s}\right) ds$, il reste à vérifier : $\lim_{t\to 0} t^{\varepsilon} K_t = 0$ ($\varepsilon > -\frac{1}{2}$).

Soit donc Z un processus gaussien stationnaire, continu, et pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\xi_n = \sup_{n\le\tau\le n+1} |Z_\tau - Z_n| ;$$

on déduit de : $\sup_{n\le\tau\le n+1}|Z_\tau| \le |Z_n| + \xi_n$ et $\mathbb{E}[\xi_n] = \mathbb{E}[\xi_0] < \infty$, que :

$\forall\, \alpha > 0$, $\sum_{n\le 0} e^{n\alpha} \sup_{n\le\tau\le n+1}|Z_\tau| \in \mathcal{L}^1$ et $\lim_{n\to-\infty}(\sup_{\tau\le n} e^{\alpha\tau}|Z_\tau|) = 0$. □

Remarque : Si H est un processus gaussien stationnaire dont la mesure spectrale admet une densité φ décroissante au voisinage de ∞, Marcus [M] montre que H a une version continue si et seulement si :

$$\int^{\infty}\left(\int_x^{\infty} \varphi(u)\, du\right)^{1/2} \frac{1}{x\sqrt{\log x}}\, dx \quad \text{est fini.}$$

Avec $\varphi(x) \propto \dfrac{1}{x(\log x)^{\alpha}}$ au voisinage de ∞ , on obtient, pour $0 < \alpha \le 1$, des exemples de moyennes mobiles non continues.

Proposition 11 :

Soit $\tilde{W}$ *un processus gaussien stationnaire de mesure spectrale* μ ;

$$\mathbb{E}[(\tilde{W}_\tau - \tilde{W}_0)^2] = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\tau x))\, d\mu(x) \equiv \Delta_\mu(\tau) \equiv \tau\, \tilde{\Delta}_\mu(\tau) .$$

Pour $\mathcal{T}$ *subdivision de* $[a,b]$ ($\mathcal{T} = \{a = \tau_0 \le \tau_1 \le \dots \le \tau_n \le \tau_{n+1} = b\}$, $n \in \mathbb{N}$),

soit $\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})$ *la variation quadratique de* $\tilde{W}$ *le long de* $\mathcal{T}$:

$$\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T}) \equiv \sum_{j=0}^{n} (\tilde{W}_{\tau_{j+1}} - \tilde{W}_{\tau_j})^2 .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})$ *converge en probabilité quand le pas* $|\mathcal{T}|$ ($\equiv \sup\{|\tau_{j+1} - \tau_j|,\ 0 \le j \le n\}$) *tend vers* 0 *est :*

(#1) $c^2 \equiv \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(hx))\, d\mu(x)$ *existe*[1] <u>et</u>

(#2) $0 = \lim_{|\mathcal{T}|\to 0} \iint d\mu(x)d\mu(y)\left|\sum_{j=0}^{n}(\exp ix\tau_{j+1} - \exp ix\tau_j)(\exp iy\tau_{j+1} - \exp iy\tau_j)\right|^2$

$\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})$ *converge alors en probabilité vers* $c^2(b - a)$.

<u>*Démonstration*</u> : D'après Schreiber [Sc], si $(\Sigma_2(\tilde{W},\mathcal{T},[a,b]))_{\mathcal{T}}$ converge en probabilité, elle converge aussi dans tous les espaces L^p. En particulier,

$$\lim_{|\mathcal{T}|\to 0} \mathbb{E}[\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})] \text{ existe.}$$

Or $\mathbb{E}[(\tilde{W}_\tau - \tilde{W}_\sigma)^2] = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\tau - \sigma)x)\, d\mu(x) = \Delta_\mu(\tau - \sigma)$;

en prenant pour $0 < 2h < b - a$, $n = \left[\frac{b - a}{h}\right]$ $\left(n \geq \frac{b - a}{2h} > 1\right)$, on obtient, si $\mathcal{T}$ est la subdivision définie par $\tau_j = a + jh$ pour $0 \leq j \leq n$, $\tau_{n+1} = b$:

$$\mathbb{E}[\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})] = \tilde{\Delta}_\mu(h)\, h \left[\frac{b - a}{h}\right] + \Delta_\mu\left(b - a - \left[\frac{b - a}{h}\right]h\right) ;$$

d'où la nécessité de l'existence de $c^2 = \lim_{h\to 0} \tilde{\Delta}_\mu(h)$;

si cette limite existe, on a : $\lim_{|\mathcal{T}|\to 0} \mathbb{E}[\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})] = c^2(b - a)$.

Rappelons pour mémoire les propriétés élémentaires suivantes :

<u>*Lemme 12*</u> : *i) Pour* (U,V) *vecteur gaussien centré,*

$$\mathbb{E}[U^2V^2] = \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial^2 y}\mathbb{E}[\exp i(xU + yV)]\Big|_{x=y=0} = 2\,(\mathbb{E}[UV])^2 + \mathbb{E}[U^2]\,\mathbb{E}[V^2].$$

ii) Pour $(U_1, \ldots, U_n)$ *vecteur gaussien centré,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *réels,*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j U_j^2\right) = 2\sum_{1\leq j,k\leq n}\alpha_j\,\alpha_k\,\mathrm{cov}(U_j,U_k)^2 \leq 2\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\,\mathbb{E}[U_j^2]\right)^2.$$

On a donc :

$$\mathrm{Var}(\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})) = 2\sum_{1\leq j,k\leq n}\mathbb{E}\left[(W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j})(W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})\right]^2$$

$$= 2\sum_{1\leq j,k\leq n}\left|\int d\mu(x)\,(\exp ix\tau_{j+1} - \exp ix\tau_j)(\exp{-ix\tau_{k+1}} - \exp{-ix\tau_k})\right|^2$$

$$= 2\iint d\mu(x)\, d\mu(y)\, |H_{\mathcal{T}}(x,y)|^2$$

$$\text{où } H_{\mathcal{T}}(x,y) = \sum_{j=0}^{n}(\exp ix\tau_{j+1} - \exp ix\tau_j)(\exp iy\tau_{j+1} - \exp iy\tau_j)$$

$$\left(= -xy\,(1_{\mathcal{D}_{\mathcal{T}}})^{\wedge}(x,y) \text{ si } \mathcal{D}_{\mathcal{T}} = \bigcup_{j=1}^{n}[\tau_j,\tau_{j+1}]^2\right),$$

---

[1] *La condition (#1) assure déjà l'existence d'une version continue de* $\tilde{W}$.

et $\mathrm{Var}(\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T}) - \Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{S})) = 2 \iint d\mu(x)\, d\mu(y)\ |H_{\mathcal{T}}(x,y) - H_{\mathcal{S}}(x,y)|^2$.

La convergence quand $|\mathcal{T}| \to 0$ de $\Sigma_2(\tilde{W},[a,b],\mathcal{T})$ revient donc à celle de $H_{\mathcal{T}}$ dans $L^2(\mu\otimes\mu)$; comme $\lim_{|\mathcal{T}|\to 0} H_{\mathcal{T}}(x,y) = 0$, on a les résultats annoncés □

Remarques 13 :

1) D'après Wiener ([W], Théorème 21), les limites $\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} (1-\cos(hx))d\mu(x)$ et $\lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} \int_{\{0<x\leq T\}} x^2\, d\mu(x)$ existent simultanément et sont égales.

2) Une condition équivalente à (#2) est :

$$\sum_{1\leq j,k\leq n} (\Delta_\mu(\tau_{j+1} - \tau_{k+1}) - \Delta_\mu(\tau_{j+1} - \tau_k) - \Delta_\mu(\tau_j - \tau_{k+1}) + \Delta_\mu(\tau_j - \tau_k))^2 \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} 0$$

Nous n'avons malheureusement pas su trouver de condition équivalente à (#2) ne faisant pas apparaitre de subdivision ...

3) Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à variation finie sur tout intervalle borné ; on suppose g croissante et on s'intéresse à l'existence d'une variation quadratique sur tout intervalle $[a,b]$ pour le processus $f\ \tilde{W}\circ g$.

• Supposons (#1) et (#2) vérifiées ; $\tilde{W}$ est continu et, pour $\mathcal{T}$ subdivision de $[a,b]$ ($\mathcal{T} = \{a = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} = b\}$, $n \in \mathbb{N}$),

$$\Sigma_2(f\ \tilde{W}\circ g,[a,b],\mathcal{T}) = \sum_{j=0}^{n} f^2(\tau_j)\left(\tilde{W}_{g(\tau_{j+1})} - \tilde{W}_{g(\tau_j)}\right)^2 + \sum_{j=0}^{n} \tilde{W}_{g(\tau_{j+1})}(f(\tau_{j+1}) - f(\tau_j))^2$$
$$+ 2 \sum_{j=0}^{n} f(\tau_j)\ \tilde{W}_{g(\tau_{j+1})}(\tilde{W}_{g(\tau_{j+1})} - \tilde{W}_{g(\tau_j)})(f(\tau_{j+1}) - f(\tau_j)) ;$$

quand $|\mathcal{T}|$ tend vers 0, les deux derniers termes convergent vers 0, tandis que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n} f^2(\tau_j)\left(\tilde{W}_{g(\tau_{j+1})} - \tilde{W}_{g(\tau_j)}\right)^2\right] = \sum_{j=0}^{n} f^2(\tau_j)\ \Delta_\mu(g(\tau_{j+1}) - g(\tau_j))$$
$$\xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} c^2 \int_a^b f^2(\tau)\, dg(\tau) ;$$

si $\mathcal{S}$ est la subdivision de $[g(a),g(b)]$ définie par $\sigma_j = g(\tau_j)$,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=0}^{n} f^2(\tau_j)\left(\tilde{W}_{g(\tau_{j+1})} - \tilde{W}_{g(\tau_j)}\right)^2\right) =$$
$$= 2 \sum_{1\leq j,k\leq n} f^2(\tau_j)\ f^2(\tau_k)\left|\int d\mu(x)\ (\exp ix\sigma_{j+1} - \exp ix\sigma_j)(\exp -ix\sigma_{k+1} - \exp -ix\sigma_k)\right|^2$$
$$\leq 2 \sup_{z\in[a,b]} f^4(z) \iint d\mu(x)\ d\mu(y)\ |H_{\mathcal{S}}(x,y)|^2 \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} 0.$$

Inversement, supposons g strictement croissante et f non identiquement nulle ; supposons que $f\ \tilde{W}\circ g$ ait une variation quadratique sur tout intervalle $[a,b]$. Avec une démonstration analogue à celle de la proposition 11, on montre que

$(\#1)$ et $(\#2)$ sont vérifiées et que la variation quadratique de $f\ \tilde{W}\circ g$ sur $[a,b]$ est $c^2 \int_a^b f^2(\tau)\ dg(\tau)$.

Soit en particulier, $W_t = \sqrt{t}\ \tilde{W}_{\log t}$ $(t > 0)$; W a une variation quadratique sur tout intervalle $[a,b] \subseteq]0,\infty[$ si et seulement si $(\#1)$ et $(\#2)$ sont vérifiées ; cette variation est alors $c^2(b - a)$; de plus, W admet une variation quadratique sur $[0,b]$ pour $b > 0$:

si $\mathcal{T} = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq t_{n+1} = b\}$ est une subdivision de $[0,b]$

$$\begin{aligned}\Sigma_2(W,[0,b],\mathcal{T}) = &\sum_{j=0}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{-1}\ W_{t_{j+1}}^2 \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})\ t_j\ t_{j+1}^{-1/2}\ W_{t_{j+1}} (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)}) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} t_j\ (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)})^2\ ;\end{aligned}$$

d'après la proposition 10, pour $u < 1$, il existe une v.a. positive C avec :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{-1}\ W_{t_{j+1}}^2 \leq C \sum_{j=0}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{u-1} \\ &\leq C\ |\mathcal{T}|^{1-v} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(\sqrt{t_{j+1}} + \sqrt{t_j})^2}\ t_{j+1}^{u+v-1}\ (t_{j+1} - t_j) \leq C\ |\mathcal{T}|^{1-v} \int_0^b t^{u+v-2}\ dt\ ;\end{aligned}$$

en choisissant $0 < u, v < 1$ avec $u + v > 1$, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{-1}\ W_{t_{j+1}}^2 \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} 0 \text{ p.s. ;}$$

comme $\left|\sum_{j=1}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})\ t_j\ t_{j+1}^{-1/2}\ W_{t_{j+1}} (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)})\right|$ est majoré par

$\left(\sum_{j=1}^{n} (\sqrt{t_{j+1}} - \sqrt{t_j})^2\ t_{j+1}^{-1}\ W_{t_{j+1}}^2\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} t_j\ (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)})^2\right)$, il reste à

établir que $\Theta_{b,\mathcal{T}} \equiv \sum_{j=1}^{n} t_j (\tilde{W}_{\log(t_{j+1})} - \tilde{W}_{\log(t_j)})^2$ converge dans L^2 vers $c^2 b$, quand $|\mathcal{T}| \to 0$.

Soit $0 < \eta < b$; on peut supposer que la partition $\mathcal{T}$ contient toujours η ;

$$E[\Theta_{b,\mathcal{T}}] = \sum_{j=0}^{n} t_j\ \Delta_\mu \circ \log\left(\frac{t_{j+1}}{t_j}\right) = \int_0^b \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(u)\ du$$

où $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(u) = \sum_{j=0}^{n} 1_{]t_j,t_{j+1}]}(u)\ \frac{t_j}{u}\ \tilde{\Delta}_\mu \circ \log\left(\frac{t_{j+1}}{t_j}\right) \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} c^2$

en étant dominé par $\sup_{h>0} \tilde{\Delta}_\mu(h) < \infty$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\Theta_{b,\mathcal{T}}) &\leq 2\ \mathrm{Var}(\Theta_{\eta,\mathcal{T}|[0,\eta]}) + 2\ b^2\ \mathrm{Var}(\Sigma_2(\tilde{W},[\eta,b],\mathcal{T}_{|[\eta,b]})) \\ &\leq 2\ \eta^2\ \sup_{h>0} \tilde{\Delta}_\mu^2(h) + 2\ b^2\ \mathrm{Var}(\Sigma_2(\tilde{W},[\eta,b],\mathcal{T}_{|[\eta,b]}))\end{aligned}$$

et $\limsup_{|\mathcal{T}|\to 0} \mathrm{Var}(\Theta_{b,\mathcal{T}}) \le 2\,\eta^2 \sup_{h>0} \tilde{\Delta}^2_\mu(h)$ pour tout $\eta > 0$ $\square$

Exemples 14 :

1) Supposons qu'au voisinage de 0, Δ_μ soit différence de deux fonctions convexes. La dérivée à droite $x \longrightarrow \Delta'_\mu(x+)$ définit alors une mesure (signée) ν sur un voisinage de 0 (*noter* que ν est symétrique et $\nu[\{0\}] = \Delta'_\mu(0+) \ge 0$) ;

$$|\Delta_\mu(x + h - k) - \Delta_\mu(x + h) - \Delta_\mu(x - k) + \Delta_\mu(x)|^2$$
$$= \left(\int_x^{x+h} du\ \nu(]u-k,u])\right)^2 = \left(\int d\nu(v)\ \lambda_1([x,x+h] \cap [v,v+k])\right)^2$$
$$= \iint d\nu(v)\ d\nu(w)\ \lambda_1([x,x+h] \cap [v,v+k])\ \lambda_1([x,x+h] \cap [w,w+k])\ ;$$

pour h, $k \ge 0$, $\lambda_1([x,x+h] \cap [v,v+k]) \le \inf(h,k)\ 1_{\{x - k < v < x + h\}}$;

pour $\mathcal{T}$ subdivision de $[a,b]$ (avec $b - a$ assez petit),

$$\sum_{1\le j,k\le n} (\Delta_\mu(\tau_{j+1} - \tau_{k+1}) - \Delta_\mu(\tau_{j+1} - \tau_k) - \Delta_\mu(\tau_j - \tau_{k+1}) + \Delta_\mu(\tau_j - \tau_k))^2$$
$$\le \iint d|\nu|(v)d|\nu|(w) \sum_{j,k} \lambda_1([\tau_j,\tau_{j+1}]\cap[v+\tau_k,v+\tau_{k+1}])\ \lambda_1([\tau_j,\tau_{j+1}]\cap[w+\tau_k,w+\tau_{k+1}])$$

De $\displaystyle\sum_{j,k} \lambda_1([\tau_j,\tau_{j+1}] \cap [v+\tau_k,v+\tau_{k+1}])\ \lambda_1([\tau_j,\tau_{j+1}] \cap [w+\tau_k,w+\tau_{k+1}])$

$$\le \sum_{j,k} 1_{\{\tau_j-\tau_{k+1}<v<\tau_{j+1}-\tau_k\}}\ 1_{\{\tau_j-\tau_{k+1}<w<\tau_{j+1}-\tau_k\}}\ \inf(\tau_{j+1} - \tau_j,\tau_{k+1} - \tau_k)^2$$
$$\le \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j)\ \{2|\mathcal{T}| + \lambda_1(]\tau_j-v,\tau_{j+1}-v[\ \cap\ ]\tau_j-w,\tau_{j+1}-w[)\}$$
$$\le \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j)\ \{2|\mathcal{T}| + \lambda_1(]\tau_j,\tau_{j+1}[\ \cap\ ]\tau_j+|v-w|,\tau_{j+1}-|v-w|[)\}$$
$$\le 2|\mathcal{T}|\ (b - a) + \sum_j (\tau_{j+1} - \tau_j)^2 \xrightarrow[|\mathcal{T}|\to 0]{} 0,$$

on déduit que $\tilde{W}$ a une variation quadratique sur $[a,b]$, égale à $(b - a)\ \nu[\{0\}]$.

2) Soit ν une mesure de Radon sur $]0,1]$ telle que $\int_{]0,1]} \sqrt{y}\ d|\nu|(y) < \infty$ et soit $Y_t = \int X_{ty}\ d\nu(y)$; Y est continu et $Y_t = \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$ où $\kappa(x) = \nu\left(\left[\frac{1}{x},1\right]\right)$;

on a en effet : $\displaystyle\int_0^1 \kappa^2\left(\frac{1}{s}\right) ds = \int_0^1 \nu([x,1])^2\ dx \le \int_0^1 |\nu|([x,1])^2\ dx$

$$= \iint u\wedge v\ d|\nu|(u)\ d|\nu|(v) \le \left(\int_{]0,1]} \sqrt{y}\ d|\nu|(y)\right)^2 < \infty\ ;$$

soit N la mesure [bornée] sur $\mathbb{R}_+$ définie pour f borélienne bornée par :

$$\int f\ dN = \int_{]0,1]} \sqrt{y}\ f(-\log y)\ d\nu(y),\qquad \text{et } \check{N} \text{ sa symétrisée.}$$

On a : $\hat{\eta}_\kappa(\gamma) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - i\gamma} \displaystyle\int_{]0,1]} \sqrt{y}\ \exp(i\gamma \log y)\ d\nu(y) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - i\gamma}\ \hat{N}(\gamma)$;

Y est gaussien stationnaire, de mesure spectrale $d\mu(\gamma) = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{1 + 4\gamma^2}\ |\hat{N}(\gamma)|^2\ d\gamma$

$\Delta_\mu(h) = \mathbb{E}[(\tilde{Y}_0 - \tilde{Y}_h)^2] = 2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\exp-\tfrac{1}{2}|y| - \exp-\tfrac{1}{2}|y-h|\right) dN*\check{N}(y)$ est différence de fonctions convexes. Y a donc une variation quadratique sur $[0,t]$, égale à c^2t, où : $c^2 = \Delta'_\mu(0+) = N*\check{N}(\{0\}) = \sum_{x\geq 0} N[x]^2 = \sum_{t\in]0,1]} t\nu[t]^2$.

4) Propriété de semimartingale.

Proposition 15 ([Kn]) :

Soit $\kappa \in \mathcal{M}$ *et pour* $t > 0$, $K_t \equiv \displaystyle\int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$; K *est une* $\mathcal{X}$*-semimartingale si et seulement si* :

$$\kappa(x) = c + \int_1^x \varphi(y)\ \frac{1}{y}\ dy \text{ pour } \lambda \text{ presque tout } x > 1, \text{ où } \int_0^1 \varphi^2\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta < \infty .$$

K *est alors continue ; sa partie martingale est* c X ($[K,K]_t = c^2t$, $[K,X] = ct$) *sa partie à variation finie est* $\displaystyle\int_0^{\cdot} \frac{1}{u} \left(\int_0^u \varphi\left(\frac{u}{s}\right) dX_s\right) du$.

La proposition 15 est conséquence du résumé suivant des résultats de Stricker [S2] sur les semimartingales gaussiennes (voir aussi [JMo]) :

Lemme 16 : *On suppose donnés sur l'espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *une filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1}$ *[vérifiant les conditions habituelles] et un espace gaussien* $\mathcal{G}$.

Soit $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ *un processus gaussien centré, tel que* :

- *pour tous* $0 \leq s \leq t \leq 1$, Z_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et*
- $\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s]$ *appartient à* $\mathcal{G}$.

Z *est une* $\mathcal{F}$*-semimartingale si et seulement si elle est une* $\mathcal{F}$*-quasimartingale ; elle appartient alors à tous les espaces* $\mathcal{H}^p$ *et se décompose en* $Z = Z_0 + M + A$ *où* M *est une* $\mathcal{F}$*-martingale,* A *un processus* $\mathcal{F}$*-prévisible à variation intégrable vérifiant : pour tout* $t \geq 0$, A_t *et* M_t *sont dans* $\mathcal{G}$; A_t *est limite faible dans* L^2 *quand* h *tend vers* 0 *de* $\displaystyle\frac{1}{h}\int_0^t \mathbb{E}[Z_{s+h} - Z_s|\mathcal{F}_s]\ ds$ ($Z_u \equiv 0$ *si* $u \geq 1$; *la limite est forte si* A *est continu).*

Démonstration de la proposition 15 :

Si K est une $\mathcal{X}$-semimartingale, $\tilde{K}_\tau$ est une $\tilde{\mathcal{X}}$-semimartingale sur tout intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$; on a : $\tilde{K}_\tau = \displaystyle\int_{-\infty}^{\tau} \eta_\kappa(\tau-u)\ d\beta_u$ et pour $\sigma < \tau$:

$$\mathbb{E}[\tilde{K}_\tau - \tilde{K}_\sigma |\ \tilde{\mathfrak{X}}_\sigma] = \int_{-\infty}^{\sigma} (\eta_\kappa(\tau-u) - \eta_\kappa(\sigma-u))\ d\beta_u\ ;$$

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[\tilde{K}_\tau - \tilde{K}_\sigma |\ \tilde{\mathfrak{X}}_\sigma]|] = \vartheta \left(\int_{-\infty}^{\sigma} (\eta_\kappa(\tau-u) - \eta_\kappa(\sigma-u))^2\ du\right)^{1/2}$$

$$= \vartheta \left(\int_0^{\infty} (\eta_\kappa(\tau-\sigma+u) - \eta_\kappa(u))^2\ du\right)^{1/2} \quad \text{où } \vartheta \equiv \mathbb{E}[|X_1|]\ ;$$

la propriété de quasimartingale de $\tilde{K}$ équivaut donc à :

$$\int_0^{\infty} (\eta_\kappa(h+u) - \eta_\kappa(u))^2\ du = O(h^2).$$

Suivant Hardy et Littlewood ([HL] théorème 24), introduisons, pour u, $h > 0$,

$$D_h(u) \equiv \frac{1}{h} (\eta_\kappa(h+u) - \eta_\kappa(u))\ ;$$

$\mathcal{D} = \{D_h |\ h > 0\}$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$; il existe donc une suite $(h_n)_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in L^2(\mathbb{R}_+,\lambda)$ avec : $h_n \longrightarrow 0_+$ et D_{h_n} converge faiblement vers γ ;

comme pour λ-presque tout x, $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \eta_\kappa(u)\ du = \eta_\kappa(x)$, on a pour $0 < x < y$:

$$\int_x^y \gamma(t)\ dt = \lim_n \int_x^y D_{h_n}(t)\ dt = \lim_n \left(\frac{1}{h_n}\int_y^{y+h_n} \eta_\kappa(u)\ du - \frac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n} \eta_\kappa(u)\ du\right)$$

$$= \eta_\kappa(y) - \eta_\kappa(x) \text{ pour } \lambda\otimes\lambda \text{ presque tous } (x,y) \text{ de } \mathbb{R}_+^2\ ;$$

soit $c \equiv \operatorname{esslim}_{x\to 0_+} \eta_\kappa(x)$, $q \in \mathcal{M}$ tel que $\frac{1}{2}\eta_\kappa + \gamma = \eta_q$ et $\delta(x) = c + \int_1^x q(y)\frac{1}{y}\ dy$

on a : $\int_1^{\infty} \delta^2(x)\ x^{-2}\ dx < \infty$ et $\eta_\delta(x) = e^{-x/2}\left(c + \int_1^{e^x} q(y)\ \frac{1}{y}\ dy\right)$;

$d\eta_\delta(x) = -\frac{1}{2}\ \eta_\delta(x)\ dx + e^{-x/2}\ q(e^x)\ dx = \gamma(x)\ dx$, i.e. $\eta_\delta = \eta_\kappa$ λ-p.s. .

On a alors : $\mathbb{E}\left[\int_a^b d\sigma \left|\int_{-\infty}^{\sigma} \gamma(\sigma-u)\ d\tilde{X}_u\right|\right] = \vartheta\ (b - a) \left(\int_0^{\infty} \gamma^2(u)\ du\right)^{1/2} < \infty$

et : $\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{h}\int_a^b d\sigma\ \mathbb{E}[\tilde{K}_{\sigma+h} - \tilde{K}_\sigma |\ \tilde{\mathfrak{X}}_\sigma] - \int_a^b d\sigma \int_{-\infty}^{\sigma} \gamma(\sigma-u)\ d\beta_u\right|\right]^2$

$$= \mathbb{E}\left[\left|\int_a^b d\sigma \int_{-\infty}^{\sigma} \left(\frac{1}{h}\int_{\sigma-u}^{\sigma-u+h} \gamma(z)\ dz - \gamma(\sigma-u)\right) d\beta_u\right|\right]^2$$

$$\le \vartheta^2\ (b - a)^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{h}\int_v^{v+h} \gamma(z)\ dz - \gamma(v)\right)^2 dv \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

$\left(\int_a^b d\sigma \int_{-\infty}^{\sigma} \gamma(\sigma-u)\ d\beta_u\right)_{b\ge a}$ est donc la partie à variation finie de la $(\tilde{\mathfrak{X}}_b)_{b\ge a}$-quasimartingale $(\tilde{K}_b - \tilde{K}_a)_{b\ge a}$. On a immédiatement la décomposition canonique de la $\mathfrak{X}$-semimartingale K □

Avec les notations du lemme 2, la proposition 15 a pour conséquence :

<u>Corollaire 17</u> : *Soit* $\kappa \in \mathcal{M}$ *et pour* $t > 0$, $K_t \equiv \int_0^t \kappa\left(\frac{t}{s}\right)\ dX_s$.

1) K *est une semimartingale si et seulement si* :

$$\kappa_e(x) = c + \int_1^x q(y)\,\frac{1}{y}\,dy$$ *pour* λ *presque tout* $x > 1$, où $q \in \mathcal{M}$

$\left(\textit{on a donc pour } z \in \mathbb{C}_+,\ \hat{\eta}_{\kappa_e}(z) = \dfrac{c + \hat{\eta}_q(z)}{\frac{1}{2} - iz}\right)$;

sa décomposition canonique est $c\,Y^{(\kappa)} + \int_0^{\cdot} \frac{1}{u}\left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(\kappa)}\right) du$ *où* $Y^{(\kappa)}$ *est le mouvement brownien* $Y_t^{(\kappa)} = \int_0^t \rho_\kappa\left(\frac{t}{s}\right) dX_s$.

2) *La loi de* K *est équivalente à celle de* X *si et seulement si* $\kappa \in \mathcal{M}_b$.

<u>*Démonstration*</u> :

1) découle de la proposition 15 appliquée dans la filtration $\mathcal{Y}^{(\kappa)}$, qui coïncide (lemme 2) avec la filtration $\mathcal{K}$.

2) Si la loi de K est équivalente à celle de X, K est une semi-martingale ;

ainsi $K_t = c\,Y_t^{(\kappa)} + \int_0^t \frac{1}{u}\left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(\kappa)}\right) du$;

puisque $[K,K]_t = c^2 t$, il faut $c^2 = 1$; le théorème de Girsanov impose alors :

$\int_0^t \frac{1}{u}\left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(\kappa)}\right)^2 du < \infty$, ce qui nécessite :

$$\infty > E\left[\int_0^t \frac{1}{u}\left(\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(\kappa)}\right)^2 du\right] = \int_0^t \frac{1}{u}\,du \int_0^\infty q^2\left(\frac{1}{s}\right) ds \text{ et } q \equiv 0. \qquad \square$$

<u>*Remarques 18*</u> : Pour que $K = \int_0^{\cdot} \kappa\left(\frac{\cdot}{s}\right) dX_s$ soit une $\mathcal{X}$-semimartingale, il faut que K soit une $\mathcal{K}$-semimartingale (d'où une condition sur κ_e) et que Y soit une $\mathcal{X}$-semimartingale (d'où une condition sur ρ_κ) ; la première condition est :

$\kappa_e(x) = c + \int_1^x q(y)\,\frac{1}{y}\,dy$ pour λ_1 presque tout $x > 1$ $\left(\int_0^1 q^2\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta < \infty\right)$

$$K_t = cY_t^{(\kappa)} + \int_0^t \left(\frac{1}{u}\int_0^u q\left(\frac{u}{s}\right) dY_s^{(\kappa)}\right) du$$

$\hat{\eta}_{\kappa_e}(z) = \dfrac{c + \hat{\eta}_q(z)}{\frac{1}{2} - iz} = (c + \hat{\eta}_g(z))\,\hat{\eta}_1(z)$ et $(c + \hat{\eta}_g)\,\hat{\eta}_1$ est extérieure ;

la deuxième condition est :

$\rho_\kappa(x) = 1 + \int_1^x \ell(y)\,\frac{1}{y}\,dy$ pour λ_1 presque tout $x > 1$ $\left(\int_0^1 \ell^2\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta < \infty\right)$

et $1 + \hat{\eta}_\ell$ intérieure ; $Y_t^{(\kappa)} = X_t + \int_0^t \left(\frac{1}{u}\int_0^u \ell\left(\frac{u}{s}\right) dX_s\right) du$.

$- \hat{\eta}_\ell = 1 - G_\kappa$ appartient à $\mathbb{H}_+^2$; on a vu à la remarque 5-3) que :

$$G_K(z) = \left(\prod_{n\in D} \frac{a_n - z}{\bar{a}_n - z}\right) \exp -i\left(\frac{\ell}{z} + \int_{]0,\infty[} \frac{2z}{z^2 - \gamma^2}\, dF(\gamma)\right) = B_0(z)\, S(z)$$

où $\{a_n \mid n \in D\} \subseteq \mathbf{C}_+$, stable par $y \longrightarrow -\bar{y}$ et $\sum_{n\in D} \mathcal{I}m(a_n) < \infty$,

F mesure positive bornée singulière.

En outre, $\hat{\eta}_K = (c + \hat{\eta}_g)\,\hat{\eta}_1\,(1 + \hat{\eta}_\ell)$ d'où l'on tire

$\kappa(x) = c + \int_1^x h(y)\, \frac{1}{y}\, dy$ pour λ_1 presque tout $x > 1$ $\left(\int_0^1 h^2\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta < \infty\right)$

ou $\eta_h = c\eta_\ell + \eta_g + \eta_\ell * \eta_g$ soit : $h(t) = c\,\ell(t) + g(t) + \int_1^t \ell(s)\, g\left(\frac{t}{s}\right) s^{-1}\, ds.$

D'après le lemme 4-ii), on a aussi :

$$X_t = \left(1 + \int_1^\infty g(v)\, v^{-2}\, dv\right) Y_t^{(K)} + \int_t^\infty \left(\int_{u/t}^\infty g(v)\, v^{-2}\, dv\right) dY_u^{(K)}$$

$$= Y_t^{(K)} + \int_1^\infty Y_{tv}^{(K)}\, g(v)\, v^{-2}\, dv.$$

Suite de l'exemple 14-ii)

1) Si ν est diffuse, Y $\left(= \int X_y.\, d\nu(y)\right)$ a une variation quadratique nulle ;
Y n'est une semi-martingale que si elle est à variation finie (ou intégrable).
Une condition équivalente est : $\lim_{h\to 0} \tilde{\Delta}(h)$ existe, ou $\int |\hat{N}(\gamma)|^2\, d\gamma < \infty$
ou, ν est absolument continue, de densité φ et $\int_0^1 y\, \varphi^2(y)\, dy < \infty$.

2) Particularisons en prenant $\nu = \lambda\, \delta_1 + \mu\, \delta_{1/a}$ $(a > 1,\ \lambda\mu \neq 0)$; on étudie donc $Y_t = \lambda X_t + \mu X_{t/a}$; on va voir que ce n'est jamais une semi-martingale.

Soit $\alpha > 0$ et $z_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbf{C}$ tels que : $a = e^\alpha$, $\frac{\lambda}{\mu} = \exp -\alpha(\frac{1}{2} - iz_0)$:

$\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| = \exp -\alpha(\frac{1}{2} + v_0)$, $v_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$,

$\alpha u_0 = 0$ ou π selon que $\lambda\mu > 0$ ou $\lambda\mu < 0$)

$$\eta_K(x) = (\lambda + \mu\, 1_{(x \geq \alpha)})\, e^{-x/2},\quad \hat{\eta}_K(z) = -2i\mu \exp -\frac{\alpha}{2}(1 + iz_0 + iz)\, \frac{\sin\alpha(z - z_0)}{\frac{1}{2} - iz} ;$$

__Premier cas__ : $v_0 < 0$, i.e. $\sqrt{a}\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| > 1$;

$\hat{\eta}_K$ *est une fonction extérieure,* $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ *et* Y *n'est pas une semi-martingale.*

__Deuxième cas__ : $v_0 > 0$, i.e. $\sqrt{a}\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| < 1$;

$$\left|\frac{\sin\alpha(z - z_0)}{\sin\alpha(z - \bar{z}_0)}\right| = \frac{\operatorname{ch}2\alpha(v - v_0) + \cos 2\alpha(u - u_0)}{\operatorname{ch}2\alpha(v + v_0) + \cos 2\alpha(u - u_0)} = \frac{\operatorname{ch}2\alpha(v - v_0) + \cos 2\alpha u}{\operatorname{ch}2\alpha(v + v_0) + \cos 2\alpha u}$$

est majoré par 1 sur $\mathbf{C}_+$ et vaut 1 à la frontière ;

la partie intérieure de $\hat{\eta}_\kappa$ est donc $\dfrac{\sin\alpha(z-z_0)}{\sin\alpha(z-\bar{z}_0)}$

et sa partie extérieure est : $- 2i\mu \exp-\frac{\alpha}{2}\vartheta_0 \exp-\frac{\alpha}{2}(1+i\bar{z}_0+iz) \dfrac{\sin\alpha(z-\bar{z}_0)}{\frac{1}{2} - iz}$;

$\kappa_e = \exp-\frac{\alpha}{2}\vartheta_0\ \mu \left(\dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} + 1_{[a,\infty[}\right)$ où $\dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} = \exp-\alpha(\frac{1}{2} - i\bar{z}_0) = \frac{\mu}{\lambda}$,

soit $\kappa_e = \mathrm{sgn}(\lambda\mu)\sqrt{a}\ (\mu + \lambda\ 1_{[a,\infty[})$ $Y_t = \mathrm{sgn}(\lambda\mu)\sqrt{a}\ (\mu Y_t^{(\kappa)} + \lambda Y_{t/a}^{(\kappa)})$;

on est ramené au premier cas et Y n'est pas une semi-martingale.

De plus, $\hat{\eta}_{\rho_\kappa} = \dfrac{\sin\alpha(z-z_0)}{\sin\alpha(z-\bar{z}_0)} \dfrac{1}{\frac{1}{2} - iz}$

$$\eta_{\rho_\kappa}(x) = \exp-(x/2)\left(\exp-2\alpha\vartheta_0 - 2\mathrm{sh}2\alpha\vartheta_0 \sum_{k>0} \exp2k\alpha(\tfrac{1}{2}-\vartheta_0)\ 1_{\{x\geq 2k\alpha\}}\right)$$

$$\rho_\kappa(t) = \exp-2\alpha\vartheta_0 - 2\mathrm{sh}2\alpha\vartheta_0 \sum_{k>0} \exp2k\alpha(\tfrac{1}{2}-\vartheta_0)\ 1_{\{t \geq a^{2k}\}}$$

$$= a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right) \sum_{k>0} \left(a^2\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2k} 1_{\{t \geq a^{2k}\}}$$

$$Y_t^{(\kappa)} = a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 X_t + \left(a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right) \sum_{k>0} \left(a^2\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2k} X_{ta^{-2k}}$$

$Y^{(\kappa)}$ n'est pas une $\mathcal{X}$-semimartingale, ce que l'on constate sur ρ_κ ou sur $\hat{\eta}_{\rho_\kappa}$:
$\dfrac{\sin\alpha(z-z_0)}{\sin\alpha(z-\bar{z}_0)}$ est un produit de Blaschke admettant pour zéros $z_0 \pm n\ \frac{\pi}{\lambda}$).

__Troisième cas__ : $\vartheta_0 = 0$, i.e. $\sqrt{a}\ \left|\dfrac{\lambda}{\mu}\right| = 1$;

$\hat{\eta}_\kappa(z) = \mu\mathrm{sgn}(\lambda\mu)\ \dfrac{1}{\frac{1}{2} - iz} \left(1 + \mathrm{sgn}(\lambda\mu)\exp\alpha iz\right)$ *est extérieure* ; $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ *n'est pas une semimartingale.*

Les considérations précédentes vont nous permettre de caractériser les processus gaussiens stationnaires qui sont aussi des semi-martingales. La fin de l'article est consacrée à la démonstration du résultat suivant :

__Proposition 19__ :

Soit $\tilde{W}$ un processus gaussien stationnaire, de mesure spectrale $\mu = \mu_s + \ell.\lambda$ où μ_s est singulière et $\ell = \frac{d\mu}{d\lambda}$ est la densité de la partie absolument continue de μ par rapport à la mesure de Lebesgue λ (ℓ est paire) ;

$\tilde{W}$ est une semi-martingale (dans sa filtration propre) si et seulement si :

1) $\int \gamma^2\, d\mu(\gamma) < \infty$ (et $\tilde{W}$ est continu, à variation finie)

ou

2) $\int \gamma^2\, d\mu_s(\gamma) < \infty$, $\int \gamma^2\, \ell(\gamma)\, d\gamma = \infty$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\gamma^2} \mathrm{Log}\ell(\gamma)\, d\gamma > -\infty$ et

• *il existe* $c > 0$ *avec* : $c^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \gamma^2 f(\gamma)\, d\gamma$

• $\int (c^2 - 2c\gamma \sqrt{f(\gamma)} \cos\varphi(\gamma) + \gamma^2 f(\gamma))\, d\gamma < \infty$, *où* φ *est la conjuguée de* $\mathrm{Log} f$

i.e. avec $z = x + iy$, $\varphi(x) = \lim_{y\to 0_+} \mathcal{R}e\left(-\frac{z}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\gamma^2 - z^2} \mathrm{Log} f(\gamma)\, d\gamma\right)$.

Commençons par quelques rappels sur les filtrations des processus gaussiens stationnaires ; ce sont des conséquences immédiates de l'*alternative de Szegö* (voir par exemple [DMK] chapitre 4, ou [Ka]) (les notations sont celles de la proposition 18) :

1) si $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \gamma^2} \mathrm{Log} f(\gamma)\, d\gamma = -\infty$, $\bigcap_{\tau\in\mathbb{R}} \mathcal{W}_\tau = \mathcal{W}_\infty$.

2) si $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \gamma^2} \mathrm{Log} f(\gamma)\, d\gamma > -\infty$, on peut écrire $\tilde{W} = \tilde{U} + \tilde{V}$ où :

• $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont gaussiens stationnaires *indépendants*, de mesures spectrales respectives μ_s et $f.\lambda$;

• $\bigcap_{\tau\in\mathbb{R}} \mathcal{W}_\tau = \mathcal{U}_\infty$;

• de plus $f = |\hat{\eta}_{K_e}|^2$ où $\hat{\eta}_{K_e}$ est la fonction *extérieure* de $\mathbb{H}^2$ définie par :

$$\hat{\eta}_{K_e}(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \gamma z}{\gamma - z} \mathrm{Log} f(\gamma) \frac{d\gamma}{1 + \gamma^2}\right) = \exp\left(-i\frac{z}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\gamma^2 - z^2} \mathrm{Log} f(\gamma)\, d\gamma\right) ;$$

η_{K_e} appartient à $L^2(\mathbb{R},\lambda)$ et est nulle sur $]-\infty,0[$ et $\tilde{V}_. = \int_{-\infty}^{.} \eta_{K_e}(. - \sigma)\, d\beta_\sigma$ où β est un mouvement brownien (indexé par $\mathbb{R}$) avec $\mathcal{V}_\tau = \sigma\{\beta_x - \beta_y ; y \le x \le \tau\}$

Rappelons aussi que le processus gaussien stationnaire $\tilde{W}$, de mesure spectrale μ a des trajectoires à variation finie si et seulement si μ a un moment d'ordre 2, auquel cas pour $\sigma \le \tau$, $\tilde{W}_\tau - \tilde{W}_\sigma = \int_\sigma^\tau \tilde{w}_x\, dx$, où $\tilde{w}$ est un processus [mesurable] gaussien stationnaire de mesure spectrale ν où $\frac{d\nu}{d\mu}(x) = x^2$.

Supposons maintenant que $\tilde{W}$ soit une semi-martingale, ou ce qui revient au même - voir lemme 16 - une quasi-martingale ; ainsi :

$\forall\ -\infty < a < b < \infty$, $\exists\ K(a,b) \in \mathbb{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ a = \tau_0 \le \tau_1 \le \dots \le \tau_n \le \tau_{n+1} = b$,

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[\tilde{W}_{\tau_{j+1}} | \mathcal{W}_{\tau_j}] - \tilde{W}_{\tau_j}\right|\right] \le K(a,b).$$

Si $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \gamma^2} \mathrm{Log} f(\gamma)\, d\gamma = -\infty$, $\tilde{W}$ est nécessairement à variation finie (puisque $\bigcap_{\tau\in\mathbb{R}} \mathcal{W}_\tau = \mathcal{W}_\infty$) et on vient de rappeler que cela signifie : $\int \gamma^2\, d\mu(\gamma) < \infty$.

Si $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\gamma^2} \operatorname{Log} f(\gamma)\, d\gamma > -\infty$, pour $\sigma \le \tau$,

$$\mathbb{E}[|\tilde{U}_\tau - \tilde{U}_\sigma|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[\tilde{W}_\tau - \tilde{W}_\sigma | \tilde{\mathcal{U}}_\infty]|] = \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbb{E}[\tilde{W}_\tau|\tilde{\mathcal{W}}_\sigma] - \tilde{W}_\sigma \middle| \tilde{\mathcal{U}}_\infty]\right|\right]$$
$$\le \mathbb{E}[|\mathbb{E}[\tilde{W}_\tau|\tilde{\mathcal{W}}_\sigma] - \tilde{W}_\sigma|] ;$$

comme $\mathbb{E}[|\tilde{U}_\tau - \tilde{U}_\sigma|] = \left(\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \{1 - \cos(\tau-\sigma)\gamma\}\, d\mu_s(\gamma)\right)^{1/2}$, on obtient avec $a < b$,

$0 < 2h < b - a$, $n = \left[\frac{b-a}{h}\right]$ $(n \ge \frac{b-a}{2h} > 1)$ et $\sigma_j = \inf(a + jh, n)$ $(0 \le j \le n)$

$$n \left(\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \{1 - \cos h\gamma\}\, d\mu_s(\gamma)\right)^{1/2} \le \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[\tilde{W}_{\sigma_{j+1}}|\tilde{\mathcal{W}}_{\sigma_j}] - \tilde{W}_{\sigma_j}\right|\right] \le K(a,b).$$

On en déduit que $h \longrightarrow h^{-2}\,\Delta_{\mu_s}(h)$ est bornée au voisinage de 0 et (lemme de Fatou) que μ_s a un moment d'ordre 2. $\tilde{U}$ est donc gaussien stationnaire, absolument continu ; pour $\sigma \le \tau$, $\tilde{U}_\tau - \tilde{U}_\sigma = \int_\sigma^\tau \tilde{u}_x\, dx$, où $\tilde{u}$ est un processus [mesurable] gaussien stationnaire de mesure spectrale ν où $\frac{d\nu}{d\mu_s}(x) = x^2$.

La moyenne mobile $\tilde{V}$ est donc une $\tilde{\mathcal{W}}$-quasimartingale ou, ce qui revient au même car $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont indépendants, une $\tilde{\mathcal{V}}$-quasimartingale. D'après le corollaire 17, $(\frac{1}{2} + iz)\, \hat{\eta}_{\kappa_e}(z) = c + \hat{\eta}_q(z)$ et

$$c = \lim_{\mathcal{I}m z\to\infty} (\tfrac{1}{2} + iz)\, \hat{\eta}_{\kappa_e}(z) = \lim_{y\to\infty} \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{y}{\gamma^2 + y^2} \operatorname{Log}\{(\tfrac{1}{4} + \gamma^2) f(\gamma)\}\, d\gamma\right)$$

On a aussi $c - iz\,\hat{\eta}_{\kappa_e}(z) = \frac{1}{2}\hat{\eta}_{\kappa_e}(z) + \hat{\eta}_q(z) \in H^2_+$, ce qui se traduit puisque :

$$\hat{\eta}_{\kappa_e}(t) = \sqrt{f(t)}\, e^{i\varphi(t)}$$

par la finitude de $\int (c^2 - 2c\gamma\sqrt{f(\gamma)}\cos\varphi(\gamma) + \gamma^2 f(\gamma))\, d\gamma$.

Remarques 20 :

Soit $\tilde{W}$ un processus gaussien stationnaire, de mesure spectrale $\mu = f.\lambda$ absolument continue. Des conditions nécessaires pour que $\tilde{W}$ soit une semi-martingale sont :

1) $(1 + \gamma^2)\, f(\gamma) \le A + q(\gamma)$ *où* $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int |q(\gamma)|\, d\gamma < \infty$.

2) $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \gamma^2 f(\gamma)\, d\gamma$ *existe.*

(Notons que *1)* et *2)* suffisent pour que $\tilde{W}$ ait une variation quadratique)

En outre si $\Delta_\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int (1 - \cos\gamma x) \left|\frac{c + \hat{\eta}_q(\gamma)}{\frac{1}{2} + i\gamma}\right|^2 d\gamma$, on a aussi,

$$\Delta_\mu(x) = \int (\exp-\tfrac{1}{2}|y| - \exp-\tfrac{1}{2}|x - y|)\, d(\theta * \check{\theta})(y),$$

où ϑ est la mesure [de Radon, portée par $\mathbb{R}_+$] $c\delta_0 + \eta_{\varphi}.\lambda_1$;

$\lim_{x\to\infty} \Delta_\mu(x) = \mu[\mathbb{R}] \equiv \Delta_\mu(\infty)$ et $\Phi_\mu(x) = \Delta_\mu(\infty) - \Delta_\mu(x)$ est une fonction positive, différence de deux fonctions convexes, telle que la mesure associée à Φ'_μ soit $\frac{1}{4}\,\Phi_\mu.\lambda_1 + \vartheta * \check{\vartheta}$.

Une autre écriture est : $\Delta_\mu(x) = \mathbb{E}\left[\iint L_T^{x+u-v}\, d\vartheta(u)\, d\vartheta(v)\right]$,

où $(L_t^x)_{x\in\mathbb{R},t\geq 0}$ est la famille des temps locaux du mouvement brownien X et

T est une variable exponentielle indépendante de paramètre $\frac{1}{8}$.

Bibliographie :

[B] BEURLING A.: On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81, 239-255, 1949.

[CJ] CHALEYAT-MAUREL M., JEULIN T. : Grossissement gaussien de la filtration brownienne. L.N.Math. 1118, 59-109, Springer,1985.

[DMK] DYM H., McKEAN H.P. : Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem. Academic Press, 1976.

[E] EMERY M. : Covariance des semimartingales gaussiennes. C.R.A.S. Paris, t.295, Série I, 703-705, 1982.

[F1] FERNIQUE X : Des résultats nouveaux sur les processus gaussiens. C.R.A.S. Paris, t.278, Série A, 363-365, 1974.

[F2] FERNIQUE X : Régularité des fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires. Probab.Th.Rel.Fields 88, 521-536, 1991.

[HL] HARDY G.H. , LITTLEWOOD J.E. : Some properties of fractional integrals,I. Math.Zeitschrift 27, 565-606, 1928.

[JMa] JAIN N.C., MARCUS M.B. : Sufficient conditions for the continuity of stationary gaussian processes and applications to random series of functions. Ann.Inst.Fourier 24, 117-141, 1974.

[JMo] JAIN N.C., MONRAD D. : Gaussian quasimartingales. Z.f.W. 59, 139-159, 1982.

[JY] JEULIN T., YOR M. : Filtration des ponts browniens et équations différentielles stochastiques linéaires. Séminaire de Probabilités XXIV, L.N.in Maths 1427, Springer, 1990.

[Ka] KARHUNEN K. : Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen. Arkiv för Mat. 1, 141-160, 1950.

[Kn] KNIGHT F.B. : Foundations of the prediction process. Oxford Studies in Probability 1, Clarendon Press, Oxford 1992.

[M] MARCUS M.B. : Continuity of Gaussian processes and random Fourier series. Annals of Probability 1, 968-981, 1973.

[PW] PALEY R., WIENER N. : Fourier transforms in the complex domain.
American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol.19, 1934

[R] RUDIN W. : Real and complex analysis. Mc Graw Hill, 1970.

[Sc] SCHREIBER M. : Fermeture en probabilité de certains sous-espaces d'un espace L^2. Application aux chaos de Wiener. Z.f.W. 14, 36-48, 1969.

[So] SONG S. : Quelques conditions suffisantes pour qu'une semimartingale soit une quasimartingale. Stochastics 16, 97-109, 1986.

[S1] STRICKER C. : Une caractérisation des quasimartingales.
Séminaire de Probabilités IX, L.N.Math. 465,420-424, Springer, 1975.

[S2] STRICKER C. : Semimartingales gaussiennes. Application au problème de l'innovation. Z.f.W. 64, 303-312, 1983.

[W] WIENER N. : The Fourier integral & certain of its applications.
Cambridge University Press, 1933.