

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE LÉPINGLE

Orthogonalité et intégrabilité uniforme de martingales discrètes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 167-169

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__167_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

Orthogonalité et intégrabilité uniforme de martingales discrètes

D.Lépingle

A la suite d'une remarque de C. Stricker, I. Karatzas, J.P. Lehoczky et S.E. Shreve ont été amenés [2] pour rectifier un précédent énoncé [1] à donner une réponse négative à la question suivante:

(Q) *si le produit de deux martingales strictement positives est une martingale uniformément intégrable, sont-elles toutes deux obligatoirement uniformément intégrables?*

Le contre-exemple qu'ils proposent est obtenu avec une filtration dont chaque tribu \mathcal{F}_n est engendrée par une partition \mathcal{P}_n de Ω en $2n+1$ éléments, \mathcal{P}_{n+1} étant obtenue en coupant en trois l'un des atomes de \mathcal{P}_n .

En fait il suffit pour trouver des contre-exemples de s'intéresser au cas plus simple où \mathcal{P}_n contient $n+1$ atomes, \mathcal{P}_{n+1} étant obtenue en séparant en deux l'un des atomes de \mathcal{P}_n . On peut dans ce cas caractériser entièrement les situations où la réponse à (Q) est positive ou négative.

Travaillons donc sur la filtration non triviale la plus élémentaire: soit une partition dénombrable $(A_k, k \geq 1)$ de Ω , la série de terme général $p_k = P(A_k) > 0$ étant de somme 1. On pose pour tout $n \geq 0$

$$\begin{aligned} B_n &= \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \\ q_n &= P(B_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(A_1, \dots, A_n, B_n). \end{aligned}$$

On se donne maintenant une suite $(a_k, k \geq 1)$ de nombres réels strictement positifs vérifiant $\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k \leq 1$ et on s'intéresse à la martingale

$$X_n = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k} + \frac{r_n}{q_n} 1_{B_n}$$

où pour tout $n \geq 0$

$$r_n = 1 - \sum_{k=1}^n p_k a_k .$$

La martingale (X_n) converge en tout point vers

$$X_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1_{A_k}$$

et elle est uniformément intégrable si et seulement si

$$E(X_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k = 1 ,$$

ou encore

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 .$$

Si $(Y_n, n \geq 0)$ est une martingale associée dans les mêmes conditions à la suite $(b_k, k \geq 1)$ et si $s_n = 1 - \sum_{k=1}^n p_k b_k$, la suite $(X_n Y_n, n \geq 0)$ est une martingale si et seulement si pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_{n-1}} (X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}) dP \\ &= \left(a_n - \frac{r_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \left(b_n - \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right) p_n + \left(\frac{r_n}{q_n} - \frac{r_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \left(\frac{s_n}{q_n} - \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right) q_n \\ &= \frac{(q_n r_{n-1} - q_{n-1} r_n)(q_n s_{n-1} - q_{n-1} s_n)}{p_n q_{n-1} q_n} . \end{aligned}$$

Les martingales (X_n) et (Y_n) sont donc orthogonales si et seulement si pour tout $n \geq 1$

$$\left(\frac{r_n}{q_n} - \frac{r_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \left(\frac{s_n}{q_n} - \frac{s_{n-1}}{q_{n-1}}\right) = 0 . \quad (1)$$

Supposons que $(X_n Y_n)$ soit une martingale uniformément intégrable: outre la condition (1), cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n s_n}{q_n} = 0 . \quad (2)$$

Deux cas peuvent se présenter:

- (I) $\boxed{\limsup \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1}$.

On peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_p, p \geq 1)$ telle que

$$\prod_{p=1}^{\infty} \frac{q_{n_p}}{q_{n_p-1}} > 0 ,$$

une suite (r_n) strictement décroissante avec $r_0 = 1$, $r > 0$,

$$r_{n_p} = \frac{q_{n_p}}{q_{n_p-1}} r_{n_p-1}, \quad p \geq 1$$

et une suite (s_n) strictement décroissante telle que $s_0 = 1$, que $q_n^{-1} s_n$ soit constant dans chaque intervalle $[n_p, n_{p+1}[$ et que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{s_{n_p}}{q_{n_p}} = 0.$$

Dans ce cas,

$$E(X_\infty) < 1 = E(X_\infty Y_\infty) = E(Y_\infty)$$

et la réponse est **non**.

- (II) $\boxed{\limsup \frac{q_{n+1}}{q_n} < 1}$.

S'il existe une infinité de n tels que $q_{n-1} r_n = q_n r_{n-1}$, alors $r = 0$; sinon, à partir d'un certain rang, $q_n^{-1} s_n$ est constant et la condition (2) exige encore $r = 0$. Nécessairement,

$$E(X_\infty) = E(Y_\infty) = E(X_\infty Y_\infty) = 1$$

et la réponse est **oui**.

Exemple de la situation (I): $q_n = (n+1)^{-1}$.

Exemple de la situation (II): $q_n = 2^{-n}$.

Pour retrouver le cadre de [2], il suffit d'utiliser la filtration $(\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{2n})$. L'intérêt est qu'alors la martingale déduite de X peut éventuellement engendrer toute la filtration.

RÉFÉRENCES

[1] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve. *Equivalent martingale measures and optimal market completions*.

[2] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve. *Retraction of equivalent martingale measures and optimal market completions*.

Département de Mathématiques

Université d'Orléans

F-45067 Orléans Cedex 2