Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Michel Émery
Gabriel Mokobodzki

Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 220-233
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__220_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE BARYCENTRE D'UNE PROBABILITÉ DANS UNE VARIÉTÉ

par M. Emery et G. Mokobodzki

> La géométrie a beau être, selon Pascal, la science la plus parfaite pour nous autres hommes, elle n'en prend pas moins, du point de vue même de la démonstration, des aspects fort variés, jusque dans les travaux mathématiques de cet auteur : on ne démontre pas, même lorsqu'on est entré dans le style géométrique, un problème de probabilité comme un problème de centre de gravité.
> J.-P. Cléro,
> *Épistémologie des mathématiques.*

Nous remercions les organisateurs du Colloque en l'honneur de Maurice Sion à Vancouver, à l'occasion duquel ce travail a vu le jour.

Dans une variété, les martingales continues ont été définies par Duncan [5], Meyer [15] et Darling [2]. Meyer et Darling ont mis en évidence la structure géométrique qui permet cette définition : ce sont les connexions. Il est plus difficile de définir les martingales discontinues, ou même simplement les martingales à temps discret, parce qu'en l'absence de structure linéaire (ou affine), il n'est pas possible d'attribuer aux mesures de probabilité un barycentre ni aux v. a. une espérance. Si la variété est riemannienne, on peut chercher à construire le barycentre en minimisant la moyenne du carré de la distance; ce procédé, déjà employé par Cartan pour trouver le point fixe d'un groupe d'isométries ([1] page 267), a été efficacement utilisé par Kendall [12] et Picard [17] pour la construction approchée d'une martingale continue par discrétisation du temps.

Cette définition se généralise sans peine aux variétés munies d'une connexion (c'est le "barycentre exponentiel" que nous verrons plus loin), mais souffre d'un grave défaut : les barycentres ainsi construits n'ont pas la propriété d'associativité; en d'autres termes, si on les utilise pour définir des martingales à temps discret $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans une variété, la définition $M_n = \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ n'entraîne en général pas $M_n = \mathbb{E}[M_{n+k}|\mathcal{F}_n]$ pour $k > 1$. Ce défaut est partagé par toute définition raisonnable du barycentre, même celle de Lobry ([14] page 217).

Il est cependant un cas où la définition du barycentre d'une probabilité ne pose pas de problème. Dans une variété munie d'une connexion et telle que deux points quelconques sont joints par une géodésique et une seule, on peut définir de façon évidente le barycentre de toute probabilité μ portée par au plus deux points : si $\mu = (1-t)\varepsilon_x + t\varepsilon_y$, son barycentre est bien sûr $\gamma(t)$ où γ est la géodésique telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Dans une telle variété, on peut définir des martingales à temps discret $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pourvu que la filtration soit dyadique : chaque tribu $\mathcal{F}_n$ est essentiellement finie, et chaque atome de $\mathcal{F}_n$ contient au plus deux atomes de $\mathcal{F}_{n+1}$. Bien entendu, ce qui rend possible cette construction, c'est la grande pauvreté de l'ensemble des mesures de ce type, ou de l'ensemble des changements de temps qui préservent le caractère dyadique d'une filtration.

Revenons à des mesures générales. Puisque la définition des barycentres est inévitablement imparfaite, nous proposons de troquer un défaut pour un autre, et, pour restaurer l'associativité, d'abandonner l'unicité : au lieu de munir chaque mesure d'un barycentre, nous allons lui en associer plusieurs, et *ce que nous appellerons le barycentre d'une probabilité ne sera pas un point, mais tout un ensemble de points.*

La non-unicité de l'espérance d'une v. a. dans espace métrique n'est pas une idée nouvelle; voir Fréchet [8] page 502, Doss [3], Herer [9], [10], [11]. Nous n'avons pas connaissance de travaux analogues dans le cadre, non métrique, d'une variété pourvue d'une connexion.

Dans toute la suite, nous travaillerons dans une variété connexe V réelle, sans bord, C^∞, de dimension finie; nous la supposerons munie d'une connexion C^∞. Comme nous n'utiliserons cette connexion que pour parler des géodésiques, des fonctions convexes et des martingales continues, on ne change rien en la détordant, et le lecteur peut la supposer sans torsion. Rappelons qu'une fonction réelle sur V est dite convexe si sa restriction à toute géodésique est convexe (considérée comme fonction d'une variable réelle), et que les fonctions convexes sont continues, forment un cône stable par sup et transforment les martingales continues dans V en sous-martingales locales continues [7].

DÉFINITION. — Soit μ une probabilité sur V. Le *barycentre* de μ est l'ensemble $b(\mu)$ des points x de V tels que $f(x) \leq \mu(f)$ pour toute fonction f convexe bornée sur V.

Puisque les fonctions convexes sont continues, $b(\mu)$ est fermé. Il possède aussi une propriété de convexité faible : son intersection avec toute géodésique est un intervalle (fermé) de celle-ci. Dualement, pour x fixé, l'ensemble des lois μ telles que $x \in b(\mu)$ est convexe et étroitement fermé.

Cette définition se traduit immédiatement en termes probabilistes. Si une v. a. X, définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, prend ses valeurs dans V, on appellera *espérance de* X, et on notera $\mathbb{E}[X]$, le barycentre de la loi de X, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points x de V tels que $f(x) \leq \mathbb{E}[f\circ X]$ pour toute f convexe bornée. Si de plus $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on appellera *espérance conditionnelle de* X *sachant* $\mathcal{G}$, et on notera $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, l'ensemble de toutes les v. a. Y mesurables pour $\mathcal{G}$ et à valeurs dans V telles que $f\circ Y \leq \mathbb{E}[f\circ X|\mathcal{G}]$ pour toute f convexe bornée.

EXEMPLES. — a) Si V est un ouvert convexe borné d'un espace affine (muni de la connexion plate), alors le barycentre $b(\mu)$ est égal à $\{b_a(\mu)\}$, où $b_a(\mu)$ désigne le barycentre de μ pour la structure affine. En effet, pour f affine, l'inégalité s'applique à f et à $-f$ et est donc une égalité, d'où $b(\mu) \subset \{b_a(\mu)\}$; l'inclusion inverse, qui n'est autre que l'inégalité de Jensen, vient de ce que toute fonction convexe est un supremum de fonctions affines. En revanche, si V est un ouvert borné non convexe d'un espace affine, on a encore $b(\mu) \subset \{b_a(\mu)\}$, mais nous laissons le lecteur vérifier que $b(\mu)$ peut être vide même si $b_a(\mu) \in V$ et V est connexe.

b) Si V est compacte, ou si V est un espace vectoriel muni de la connexion plate, $b(\mu) = V$ quelle que soit μ car toutes les fonctions convexes bornées sont constantes.

c) Si V est la demi-droite $]0,\infty[$ munie de la connexion plate, $b(\mu)$ est l'intervalle $[g,\infty[$, où $g = \int x\,\mu(dx) \leq \infty$ est le barycentre de μ au sens usuel.

d) Si μ est portée par deux points, donc de la forme $(1-t)\varepsilon_x + t\varepsilon_y$, et si γ est une géodésique telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, le point $\gamma(t)$ est dans $b(\mu)$.

PROPOSITION 1 (Associativité des barycentres). — *Soient* $(A, \mathcal{A}, \pi)$ *un espace probabilisé,* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille de probabilités sur* V*, dépendant mesurablement de* α *et* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une v. a. dans* V *telle que* $x_\alpha \in b(\mu_\alpha)$ *pour chaque* α*. Alors*

$$b\big(\textstyle\int \varepsilon_{x_\alpha}\,\pi(d\alpha)\big) \subset b\big(\textstyle\int \mu_\alpha\,\pi(d\alpha)\big)\ .$$

En langage clair : tout point du barycentre d'une famille de barycentres de $\mu = \int \mu_\alpha\,\pi(d\alpha)$ est lui-même dans le barycentre de μ.

DÉMONSTRATION. La définition étant faite pour ça, c'est trivial : si f est convexe, bornée et si $x \in b\big(\int \varepsilon_{x_\alpha}\,\pi(d\alpha)\big)$,

$$f(x) \leq \textstyle\int f(x_\alpha)\,\pi(d\alpha) \leq \int \mu_\alpha(f)\,\pi(d\alpha) = \int f\,d\mu\ . \qquad \blacksquare$$

La réciproque de cette propriété d'associativité est fausse. Étant donnés $\mu = \int \mu_\alpha\,\pi(d\alpha)$ et $x \in b(\mu)$, il peut ne pas exister de points $x_\alpha \in b(\mu_\alpha)$ tels que $x \in b\big(\int \varepsilon_{x_\alpha}\,\pi(d\alpha)\big)$. Par exemple, en géométrie sphérique, si A', B' et C' sont les milieux des côtés d'un triangle ABC, le milieu M du segment géodésique AA' n'est pas sur la géodésique $B'C'$. On a donc $B' \in b(\frac{1}{2}\varepsilon_A + \frac{1}{2}\varepsilon_C)$ et $C' \in b(\frac{1}{2}\varepsilon_A + \frac{1}{2}\varepsilon_B)$, mais M, bien que dans le barycentre de la mesure $\frac{1}{2}\varepsilon_A + \frac{1}{4}\varepsilon_B + \frac{1}{4}\varepsilon_C$, n'est cependant pas dans celui de $\frac{1}{2}\varepsilon_{B'} + \frac{1}{2}\varepsilon_{C'}$. Cet exemple montre bien où se situe le problème : l'ensemble $b(\mu)$ prend en compte les barycentres obtenus en regroupant entre eux de toutes les manières possibles les points chargés par μ; imposer une décomposition $\mu = \int \mu_\alpha\, \pi(d\alpha)$ revient à faire un choix parmi ces regroupements, d'où moins de latitude dans la construction du barycentre.

Il est agréable de traduire l'associativité en termes d'espérance conditionnelle : Si Y est dans $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et si $\mathcal{H}$ est une sous-tribu de $\mathcal{G}$, alors toute v. a. Z qui appartient à $\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$ est aussi dans $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$. La fausseté de la réciproque s'énonce ainsi : étant données une v. a. X dans V, des sous-tribus $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ et une v. a. $Z \in \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$, il n'existe pas nécessairement Y dans $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ telle que $Z \in \mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$.

Si l'on définit dans V une martingale à temps discret $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la propriété $M_n \in \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ pour tout n, on a aussi grâce à l'associativité $M_n \in \mathbb{E}[M_{n+k}|\mathcal{F}_n]$ pour tout $k > 1$. Il devient donc raisonnable de définir les martingales à temps continu par $M_s \in \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$ pour tous s et t tels que $s < t$. Comme le montre l'exemple b) ci-dessus, cette définition peut même dans certains cas être trop générale! Mais il est toujours vrai que, si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue dans V au sens usuel, elle vérifie aussi cette définition puisque $f\circ M$ est une sous-martingale pour f convexe bornée (voir [7]). Réciproquement, si la variété est assez petite, le théorème de Darling (proposition (4.41) de [6]) affirme que, pour les processus continus, la définition des martingales ici proposée équivaut à la définition usuelle. Dans ce cas, imposer la condition de martingale $M_s \in \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$ pour tous les couples (s,t) a donc restauré l'unicité. Dans la suite, nous désignerons simplement par "martingales continues" les martingales au sens habituel.

Revenons aux barycentres, pour expliciter leur lien avec la procédure d'interpolation géodésique, qui consiste à remplacer deux points par leur barycentre pris sur la géodésique qui les joint, procédure que l'on itère en remontant un arbre dyadique depuis les extrémités des branches vers la racine; ceci permet de définir le barycentre de 2^n points de V, pas nécessairement tous distincts, affectés de poids dont la somme est égale à 1, et pris dans un certain ordre. Plutôt que d'indexer les points par les extrémités des branches d'un arbre, nous utiliserons, en bons probabilistes, l'espace canonique $W^n = \{0,1\}^n$, sur lequel le processus des coordonnées sera noté $(\omega_i)_{1\leq i\leq n}$; si p est une probabilité sur W^n, pour $\varepsilon \in \{0,1\}$ on notera p_ε la probabilité sur W^{n-1} égale à la loi conditionnelle de $(\omega_2,\ldots,\omega_n)$ sachant que $\omega_1 = \varepsilon$; si y est une v. a. définie sur W^n, on définit des v. a. y_0 et y_1 sur W^{n-1} par $y_\varepsilon(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}) = y(\varepsilon,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})$.

DÉFINITION. — Sur l'espace fini W^n, soient p une probabilité et y une v. a. à valeurs dans V. On définit inductivement le *barycentre géodésique itéré* $\beta(y,p)$ (ou $\beta_n(y,p)$ si l'on veut préciser le nombre d'itérations) par pour $n = 0$, $\beta_0(y;1)$ est le singleton $\{x\}$, où $x \in V$ est la valeur de la v. a. constante y;

pour $n > 0$, $\beta_n(y,p)$ est l'ensemble des points de V de la forme $\gamma(p\{\omega_1{=}1\})$, où $\gamma : [0,1] \to V$ est une géodésique telle que $\gamma(0)$ soit dans $\beta_{n-1}(y_0,p_0)$ et $\gamma(1)$ dans $\beta_{n-1}(y_1,p_1)$.

Si la loi de ω_1 sous p est dégénérée, l'une des probabilités conditionnelles p_0 ou p_1 n'est pas définie; mais c'est sans importance puisque le barycentre partiel correspondant intervient avec un poids nul dans l'interpolation géodésique qui suit.

Il est clair, par récurrence sur n, que $\beta(y,p)$ est inclus dans le barycentre de la mesure image $y(p) = p{\circ}y^{-1}$ (c'est-à-dire la loi de la v. a. y sous p).

THÉORÈME 1. — *Soit $x \in V$. Dans l'ensemble des probabilités μ telles que $x \in b(\mu)$, celles qui sont de la forme $y(p)$ où le couple (y,p), défini sur un W^n, est tel que $x \in \beta(y,p)$, forment un sous-ensemble dense pour la topologie étroite.*

Plus précisément, si $x \in b(\mu)$, il existe une suite de couples (y_k,p_k), chacun défini sur un $W^{n(k)}$, telle que x soit dans chaque $\beta(y_k,p_k)$ et $y_k(p_k)$ tende étroitement vers μ.

Avant de démontrer ce théorème, il nous faut introduire quelques notations, que nous utiliserons pour construire l'enveloppe convexe inférieure d'une fonction (sa plus grande minorante convexe).

Pour $x \in V$ et $n \geq 1$, désignons par $\beta_n^{-1}(x)$ l'ensemble des paires (y,p) telles que $x \in \beta_n(y,p)$. Cet ensemble n'est pas vide : il contient déjà toutes les (y,p) tels que $y(\omega) = x$ pour tout $\omega \in W^n$.

Si f est une fonction réelle minorée sur V, définissons pour $n \geq 1$

$$\mathrm{G}^n f(x) = \inf_{(y,p)\in\beta_n^{-1}(x)} \int_{W^n} f{\circ}y \, dp$$

(l'intégrale est en fait une somme finie). Il est clair que $\mathrm{G}^n f \leq \mathrm{G}^n g$ si $f \leq g$, que $\inf_V f \leq \mathrm{G}^n f$ et que $\mathrm{G}^n f \leq f$ puisque $(y,p) \in \beta_n^{-1}(x)$ pour $y \equiv x$. En outre, la définition de β_{n+1} entraîne que

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}^1(\mathrm{G}^n f) &= \inf_{(y,p)\in\beta_1^{-1}(x)} \left[p(0)\,\mathrm{G}^n f(y_0) + p(1)\,\mathrm{G}^n f(y_1)\right] \\
&= \inf_{\substack{(y,p)\in\beta_1^{-1}(x)\\ (z_0,q_0)\in\beta_n^{-1}(y_0)\\ (z_1,q_1)\in\beta_n^{-1}(y_1)}} \left[p(0)\int_{W^n} f{\circ}z_0\,dq_0 + p(1)\int_{W^n} f{\circ}z_1\,dq_1\right] \\
&= \inf_{(z,q)\in\beta_{n+1}^{-1}(x)} \int_{W^{n+1}} f{\circ}z\,dq = \mathrm{G}^{n+1} f(x)\ ,
\end{aligned}$$

et G^n n'est autre que la $n^{\text{ième}}$ puissance de G^1.

Comme $G^1 f \leq f$, ceci implique que la suite $G^n f$ est décroissante; puisqu'elle est minorée par $\inf_V f$, il est loisible de poser

$$G^\infty f = \lim_n \downarrow G^n f .$$

LEMME 1. — *Soit f une fonction réelle minorée sur V. Elle est convexe si et seulement si $G^1 f = f$. La fonction $G^\infty f$ est la plus grande fonction convexe majorée par f ; elle est bornée si f l'est.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. Pour que $f = G^1 f$, il faut et il suffit que pour chaque x on ait

$$f(x) = \inf_{\substack{\gamma \text{ géodésique} \\ t\in[0,1]\,,\,\gamma(t)=x}} \left[(1-t)f\big(\gamma(0)\big) + t\, f\big(\gamma(1)\big)\right] ;$$

autrement dit, $f(x) \leq (1-t)f\big(\gamma(0)\big) + t\, f\big(\gamma(1)\big)$ pour toute géodésique γ vérifiant $\gamma(t) = x$ pour un $t \in [0,1]$; et ceci exprime la convexité de f.

Si f_n est une suite décroissante de limite f_∞,

$$\begin{aligned} G^1 f_\infty(x) &= \inf_{(y,p)\in\beta_1^{-1}(x)} \int_{W^1} f_\infty \circ y \, dp \\ &= \inf_{(y,p)\in\beta_1^{-1}(x)} \inf_n \int_{W^1} f_n \circ y \, dp \\ &= \inf_n \inf_{(y,p)\in\beta_1^{-1}(x)} \int_{W^1} f_n \circ y \, dp = \lim_n \downarrow G^1 f_n(x) . \end{aligned}$$

Appliquant ceci à le suite décroissante $f_n = G^n f$ de limite $f_\infty = G^\infty f$, on obtient $G^1 G^\infty f = \lim_n G^{n+1} f = G^\infty f$, donc la fonction $G^\infty f$ est convexe.

Enfin, si g est convexe est majorée par f, on a $g = G^n g \leq G^n f$ pour tout n, et à la limite $g \leq G^\infty f$. L'inégalité $\inf_V f \leq G^\infty f \leq f$ montre que $G^\infty f$ est bornée avec f. ∎

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Le point $x \in V$ est fixé; quand n, y et p varient de manière telle que x reste dans $\beta_n(y,p)$, la mesure $y(p)$ décrit un ensemble $C(x)$ non vide (il contient ε_x), dont nous devons établir qu'il est dense dans l'ensemble des probabilités dont le barycentre contient x. Or cet ensemble est convexe. En effet, si λ_0 et λ_1 sont dans $C(x)$, on a $x \in \beta_{n_0}(y_0,p_0)$ avec $y_0(p_0) = \lambda_0$ et $x \in \beta_{n_1}(y_1,p_1)$ avec $y_1(p_1) = \lambda_1$. Comme l'ensemble des lois $y(p)$ où $(y,p) \in \beta_n^{-1}(x)$ croît avec n, on peut supposer $n_0 = n_1$; soit n ce nombre. Si maintenant π est une probabilité sur $\{0,1\}$, en définissant y et p sur W^{n+1} par $y(\omega_1,\ldots,\omega_n) = y_{\omega_1}(\omega_2,\ldots,\omega_n)$ et $p(\omega_1,\ldots,\omega_n) = \pi(\omega_1)\, p_{\omega_1}(\omega_2,\ldots,\omega_n)$, on a $x \in \beta_{n+1}(y,p)$ par définition des barycentres géodésiques itérés, et il en résulte que $y(p) \in C(x)$. Comme $y(p) = \pi(0)\lambda_0 + \pi(1)\lambda_1$, la convexité de $C(x)$ est établie.

Pour établir le théorème, considérons une mesure de probabilité μ qui n'est pas dans l'adhérence de $C(x)$ pour la topologie étroite; nous devons montrer que

x n'est pas dans le barycentre de μ. Grâce à la convexité de $C(x)$, le théorème de Hahn-Banach appliqué aux mesures finies en dualité avec C_0 fournit une fonction f continue, bornée, et telle que $\mu(f) < \inf_{\lambda \in C(x)} \lambda(f)$. On a donc

$$\mu(\mathrm{G}^\infty f) \leq \mu(f) < \inf_{\lambda \in C(x)} \lambda(f)$$
$$= \inf_n \inf_{(y,p)\in\beta_n^{-1}(x)} \int f\circ y\, dp = \inf_n \mathrm{G}^n f(x) = \mathrm{G}^\infty f(x) \,.$$

Comme la fonction $\mathrm{G}^\infty f$ est convexe et bornée, cette inégalité stricte interdit à x d'appartenir à $b(\mu)$; la première partie du théorème est démontrée.

Le reste s'en déduit immédiatement puisque les mesures positives, et a fortiori les probabilités, forment un ensemble métrisable pour la convergence étoite. ∎

Rappelons qu'une semimartingale continue X à valeurs dans V est appelée une martingale continue si, pour toute fonction f de classe C^2 sur V, le processus $f\circ X - \frac{1}{2}\int(\nabla df)(dX, dX)$ est une martingale locale. Dans cette formule, ∇df est la dérivée covariante seconde (la hessienne) de la fonction f, s'écrivant dans un système de coordonnées locales $(x^i)_{1\leq i\leq d}$

$$\nabla df = (D_{ij} f - \Gamma_{ij}^k D_k f)\, dx^i \otimes dx^j$$

(où Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion ; ici comme dans toute la suite, la convention de sommation d'Einstein est en vigueur) ; et, toujours en coordonnées locales, $\int(\nabla df)(dX, dX)$ est le processus v. f. continu de différentielle $(D_{ij} f - \Gamma_{ij}^k D_k f)\circ X\, d[x^i\circ X, x^j\circ X]$.

Une martingale continue dans V est transformée par toute fonction convexe en une sous-martingale locale. Il en résulte que *si X est une martingale continue dans V telle que $X_0 = x$ p. s., pour tout temps d'arrêt fini T le point x est dans le barycentre $\mathbb{E}[X_T]$ de la loi de X_T*. En effet, toute fonction convexe bornée f transforme X en une sous-martingale locale bornée, donc en une vraie sous-martingale ; d'où $f(x) \leq \mathbb{E}[f\circ X_T]$. Dans le cas où la variété n'est pas trop grande et vérifie une condition de convexité, nous allons déduire du théorème 1 une réciproque à cette propriété.

THÉORÈME 2. — *On suppose que V est (affinement[1] difféomorphe à) un ouvert relativement compact d'une variété W, et qu'il existe sur W une fonction de classe C^2 strictement convexe. Si μ est une probabilité sur V et si un point x de V est dans le barycentre de μ (relativement à V), il existe, sur un $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1})$ convenable[2], une martingale continue $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ à valeurs dans $\overline{V}$, telle que $X_0 = x$ et que X_1 ait pour loi μ.*

Si de plus il existe sur W une fonction convexe ϕ telle que V soit l'ensemble $\{x \in W : \phi(x) < 0\}$, la martingale X est à valeurs dans V.

---

1. W est également munie d'une connexion, qui coïncide sur V avec celle de V.
2. Il est clair que l'on peut toujours prendre pour Ω l'espace canonique $\mathrm{C}([0,1], W)$ muni du processus X des coordonnées.

REMARQUE. — La même méthode permettrait d'établir, plus généralement, que si μ et ν sont deux probabilités sur V telles que μ soit une balayée de ν (c'est-à-dire $\nu(f) \leq \mu(f)$ pour toute f convexe bornée), il existe une martingale continue de loi initiale ν et de loi finale μ. Ceci peut aussi se déduire du théorème 2 par l'intermédiaire du théorème de Strassen (XI-53 de [16]).

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur k, il est facile de voir que, pour $x \in \beta_k(y,p)$, il existe une martingale continue $(X_t)_{0\leq t\leq k}$ telle que $X_0 = x$ et que X_k a pour loi $y(p)$. En effet, si l'on sait faire cette construction pour k, et si $x \in \beta_{k+1}(y,p)$, soit γ une géodésique telle que $\gamma(p\{\omega_1 = 1\}) = x$, $\gamma(0) \in \beta_k(y_0,p_0)$ et $\gamma(1) \in \beta_k(y_1,p_1)$. On peut construire des martingales indépendantes $(X_t^0)_{1\leq t\leq k+1}$ et $(X_t^1)_{1\leq t\leq k+1}$ telles que pour $\varepsilon \in \{0,1\}$ $X_0^\varepsilon = \gamma(\varepsilon)$ et X_1^ε ait pour loi $y_\varepsilon(p_\varepsilon)$, et une martingale continue réelle $(Y_t)_{0\leq t\leq 1}$ indépendante de (X^0, X^1) telle que $Y_0 = p\{\omega_1 = 1\}$ et Y_1 ait pour loi $(1 - Y_0)\varepsilon_0 + Y_0\varepsilon_1$. Et il suffit de poser $X_t = \gamma \circ Y_t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_t = X_t^0 \mathbb{1}_{\{Y_1=0\}} + X_t^1 \mathbb{1}_{\{Y_1=1\}}$ pour $1 \leq t \leq k+1$.

La variété de référence étant V, ceci établit la première partie du théorème 2 lorsque μ est de la forme $y(p)$, où $x \in \beta(y,p)$. Dans le cas général, nous savons par le théorème 1 que μ est limite étroite d'une suite μ_n de telles probabilités, d'où l'existence de martingales X^n; et nous allons construire X comme valeur d'adhérence des X^n, convenablement changées de temps.

On sait qu'il existe, pour un entier p, un plongement propre $(f^1, \ldots, f^p)$ de W dans $\mathbb{R}^p$ par p fonctions C^∞. Une semimartingale continue $(X_t)_{t\geq 0}$ dans W est une martingale ssi $f^i \circ X - \frac{1}{2}\int (\nabla df^i)(dX, dX)$ est une martingale locale pour chaque indice i (voir [6], (4,14)).

Il existe p^3 fonctions a^i_{jk} de classe C^∞ sur W telles que $\nabla df_i = a^i_{jk}\, df^j \otimes df^k$, ainsi que p^3 fonctions b^i_{jk} sur $\mathbb{R}^p$ telles que $a^i_{jk} = b^i_{jk} \circ (f^1, \ldots f^p)$. Les processus continus

$$M_t^{ni} = f^i \circ X_t^n - f^i(x) - \frac{1}{2}\int_0^t (\nabla df^i)(dX_s^n, dX_s^n)$$

sont des martingales locales, de crochet[3] $[M^{ni}, M^{ni}]_t = [f^i \circ X^n, f^i \circ X^n]_t$. Posons $A_t^n = \sum_{i=1}^p [f^i \circ X^n, f^i \circ X^n]_t$; le changement de temps associé à A^n permet de se ramener au cas où X^n est défini sur $[0,\infty]$ au lieu de $[0,1]$, et où $\sum_i [f^i \circ X^n, f^i \circ X^n]_t = t \wedge A_\infty^n$. Le théorème de tension de Rebolledo [18] entraîne que la suite des lois des martingales $(M^{ni})_{1\leq i\leq p}$ est une suite tendue de probabilités sur l'espace $C([0,\infty[, \mathbb{R}^p)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Après extraction éventuelle d'une sous-suite, le théorème de Skorokhod (voir Dudley [4]) affirme l'existence, sur un certain espace probabilisé, d'une suite N^n de v. a. dans $C([0,\infty[, \mathbb{R}^p)$, ayant chacune même loi que M^n, et qui converge p. s. vers une limite N^∞. Considéré comme un processus, N^∞ est une martingale pour sa filtration naturelle; la matrice de ses crochets $[N^{\infty j}, N^{\infty k}]$ est la limite des $[N^{nj}, N^{nk}]$. Les processus p-dimensionnels

3. Par convention, les crochets et les intégrales stochastiques sont tous nuls en zéro.

$X^{ni} = f^i \circ X^n$, qui sont solution de l'équation différentielle

$$X^{ni} = f^i(x) + M^{ni} + \tfrac{1}{2} \int b^i_{jk}(X^n)\, d[M^{nj}, M^{nk}]$$

ont même loi que les solutions Y^{ni} de

$$Y^{ni} = f^i(x) + N^{ni} + \tfrac{1}{2} \int b^i_{jk}(Y^n)\, d[N^{nj}, N^{nk}] \ ;$$

en passant à la limite dans cette équation différentielle ordinaire, on voit que les Y^{ni} convergent uniformément sur tout compact p. s. vers une limite $Y^{\infty i}$ qui vérifie

$$Y^{\infty i} = f^i(x) + N^{\infty i} + \tfrac{1}{2} \int b^i_{jk}(Y^\infty)\, d[N^{\infty j}, N^{\infty k}] \ .$$

Ceci entraîne que l'on peut définir des processus Y^n dans V par $f^i \circ Y^n = Y^{ni}$ et, l'image de $\overline{V}$ dans $\mathbb{R}^p$ par $(f^1, \ldots, f^p)$ étant fermée, qu'ils convergent, uniformément sur tout compact de $[0, \infty[$ presque sûrement, vers une limite continue Y^∞. Pour la filtration naturelle de N^∞, Y^∞ est une semimartingale continue vérifiant $f^i \circ Y^\infty = f^i(x) + N^{i\infty} + \frac{1}{2} \int (\nabla df^i)(dY^\infty, dY^\infty)$, donc une martingale continue dans $\overline{V}$. Il nous reste à montrer que Y^∞_t a quand t tend vers l'infini une limite Y^∞_∞, dont la loi est la limite μ des lois μ_n des Y^n_∞ ; un changement de temps ramenant ∞ en 1 permettra alors de conclure. Ceci résulte immédiatement du lemme 2 ci-dessous appliqué aux Y^n ; l'hypothèse de tension dans ce lemme est vérifiée grâce au lemme 3 qui suit, selon lequel les v. a. T_n (ce sont ici les A^n_∞) ont leur espérance majorée par C.

LEMME 2. — *Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus mesurables séparables définis sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ et à valeurs dans un espace métrique (ou un espace uniforme), qui converge uniformément sur tout compact en probabilité vers un processus X. On suppose qu'il existe une suite tendue $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v. a. positives telles que l'on ait, pour tous n et t, $X^n_t = X^n_{T_n \wedge t}$. Il existe alors une v. a. presque sûrement finie T telle que $X_t = X_{T \wedge t}$, et $X^n_\infty = X^n_{T_n}$ converge en probabilité vers $X_\infty = X_T$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. L'hypothèse de tension dit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_\varepsilon \geq 0$ tel que $\mathbb{P}[T_n \geq t_\varepsilon] < \varepsilon$ pour tout n. Pour établir l'existence de T, en nous restreignant grâce au procédé diagonal à une sous-suite, nous pouvons supposer que X^n tend vers X uniformément sur tout compact presque sûrement. Notons $V_I(X)$ et $V_I(X^n)$ les événements "X n'est pas constant sur l'intervalle I" et "X^n n'est pas constant sur I". Pour $t > t_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[V_{[t_\varepsilon, t]}(X)] &\leq \mathbb{P}[\liminf_n V_{[t_\varepsilon, t]}(X^n)] \\ &\leq \mathbb{P}[\liminf_n \{T_n > t_\varepsilon\}] \leq \liminf_n \mathbb{P}[\{T_n > t_\varepsilon\}] \leq \varepsilon \ ; \end{aligned}$$

faisant tendre t vers l'infini, on en tire $\mathbb{P}[V_{[t_\varepsilon, \infty[}(X)] \leq \varepsilon$, et la probabilité pour que X soit constant sur un voisinage de l'infini est arbitrairement voisine de 1, donc égale à 1. La première conclusion s'en déduit en prenant pour T le plus petit entier n tel que X soit constant sur $[n, \infty[$.

Puisque $X^n_{t_\varepsilon}$ tend en probabilité vers X_{t_ε} et que les probabilités $\mathbb{P}[X^n_\infty \neq X^n_{t_\varepsilon}]$ et $\mathbb{P}[X_\infty \neq X_{t_\varepsilon}]$ sont majorées par ε, X^n_∞ tend en probabilité vers X_∞. ∎

LEMME 3. — *Sous les hypothèses du théorème 2, il existe une constante C telle que, pour toute martingale continue $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans V,*

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{p} [f^i \circ X, f^i \circ X]_\infty\Big] \leq C .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. Soit ψ une fonction C^2 strictement convexe sur W. On peut définir sur W deux structures riemanniennes par les tenseurs métriques $g_1 = \sum_{i=1}^{p} df^i \otimes df^i$ et $g_2 = \mathrm{sym}(\frac{1}{2}\nabla d\psi)$: le premier est défini positif car en chaque point les formes df^i engendrent tout l'espace cotangent, le second, égal à la partie symétrique du tenseur $\frac{1}{2}\nabla d\psi$, est défini positif car ψ est strictement convexe. Sur l'ensemble relativement compact V, ces deux métriques sont nécessairement équivalentes; il existe donc une constante $c > 0$ telle que $cg_2 - g_1$ soit de type positif sur V. Il en résulte que, pour toute semimartingale continue X dans V,

$$\sum_{i=1}^{p} [f^i \circ X, f^i \circ X] \leq c\,\tfrac{1}{2} \int (\nabla d\psi)(dX, dX) .$$

Si maintenant X est une martingale continue dans V, $\psi \circ X$ est une sous-martingale bornée de compensateur $\frac{1}{2}\int (\nabla d\psi)(dX, dX)$; ceci entraîne que

$$\mathbb{E}\big[\tfrac{1}{2}\int_0^t \nabla d\psi(dX, dX)\big] = \mathbb{E}[\psi \circ X_t - \psi \circ X_0] \leq \sup_V \psi - \inf_V \psi .$$

Donc $\mathbb{E}\big[\sum_i [f^i \circ X, f^i \circ X]_t\big] \leq c\,(\sup_V \psi - \inf_V \psi)$, et il ne reste qu'à faire tendre t vers l'infini. ∎

Ainsi, la martingale continue $X_t = Y_{t/1-t}$ à valeurs dans $\overline{V}$ satisfait à la première conclusion du théorème 2. Pour achever de démontrer celui-ci, nous n'avons plus qu'à vérifier que l'existence d'une fonction convexe ϕ telle que $V = \{x \in W : \phi(x) < 0\}$ contraint X à rester dans V. La fonction continue ϕ étant bornée sur le compact $\overline{V}$, le processus $\phi \circ X$ est une sous-martingale sur $[0,1]$; X_1, de loi μ, étant p. s. dans V, on a, pour tout temps d'arrêt $T \leq 1$, $\phi \circ X_T \leq \mathbb{E}[\phi \circ X_1 | \mathcal{F}_T] < 0$, d'où $X_T \in V$, et X reste dans V. ∎

Le corollaire de la proposition 4, plus loin, utilisera ce théorème pour fournir une condition suffisante d'existence d'une martingale continue de loi finale donnée. Kendall [12] et Picard [17] ont construit dans les variétés riemanniennes des martingales continues de v. a. finale donnée, sur un espace filtré donné à l'avance (un espace de Wiener); notre but ici est plus modeste (seule la loi finale est donnée), mais nous subissons une contrainte supplémentaire, la donnée de la valeur initiale.

Dans les bons cas, l'ensemble $b(\mu)$ contient un point remarquable, le barycentre exponentiel de μ, que l'on peut définir à l'aide d'une carte normale, ou de l'application exponentielle.

Dans toute la suite, nous supposerons V convexe au sens très fort suivant : Deux points quelconques sont joints par une géodésique et une seule, qui dépend de façon C^∞ des deux points. Pour $x \in V$, si l'on désigne par T_xV l'espace vectoriel tangent en x à V et par U_x l'ouvert étoilé de T_xV formé des vitesses initiales $\dot\gamma(0)$ des géodésiques γ telles que $\gamma(1)$ soit défini, l'application exponentielle $\exp_x : U_x \to V$ qui envoie $\dot\gamma(0)$ sur $\gamma(1)$ est un difféomorphisme de U_x sur V.

DÉFINITION. — Si μ est une probabilité sur V, on appelle *barycentres exponentiels* de μ les points x de V tels que la probabilité $\tilde\mu_x$ sur T_xV, image de μ par $\exp_x^{-1}$, soit centrée dans l'espace vectoriel T_xV (c'est-à-dire que toutes les formes linéaires sur T_xV sont intégrables pour $\tilde\mu_x$ et d'intégrale nulle).

En d'autres termes, x est un barycentre exponentiel de μ si et seulement si l'intégrale vectorielle $\int_{z\in T_xV} z\,\tilde\mu_x(dz)$ existe dans T_xV et est nulle; lorsqu'elle existe, nous noterons $v^\mu(x)$ cette intégrale.

Contrairement au barycentre de μ, qui est une partie de V, les barycentres exponentiels sont des points de V. Cette différence de notations est justifiée par la proposition 5 plus bas : si V n'est pas trop grande, le barycentre exponentiel est unique.

PROPOSITION 2. — *Soit μ une probabilité sur V. Tout barycentre exponentiel de μ est dans $b(\mu)$.*

DÉMONSTRATION. Soient x un barycentre exponentiel de μ et f une fonction convexe bornée. Par le corollaire 1 de [7], il existe une fonction linéaire h sur T_xV telle que, pour tout $y \in V$, on ait $f(y) - f(x) \geq h\circ\exp_x^{-1}(y)$. Intégrons par rapport à μ : $\mu(f) - f(x) \geq \int h\circ\exp_x^{-1}(y)\,\mu(dy)$. Puisque par hypothèse x est un barycentre exponentiel de μ, l'intégrale est nulle, d'où la proposition. ∎

PROPOSITION 3. — *On suppose V riemannienne (munie de la connexion canonique); soit μ une probabilité telle que, pour un (donc pour tout) point x de V, l'intégrale $f(x) = \int_V \operatorname{dist}(x,y)^2\,\mu(dy)$ soit finie. Les barycentres exponentiels de μ sont alors les points critiques de la fonction f.*

DÉMONSTRATION. Soit ϕ une fonction C^∞ sur V. Sa différentielle $d\phi(x)$ est une forme linéaire sur T_xV. Sur un voisinage U de x_0, la majoration

$$\begin{aligned}\left|d\phi(x)\circ\exp_x^{-1}\right|(y) &\leq \|d\phi(x)\|\,\|\exp_x^{-1}(y)\| \\ &= \|d\phi(x)\|\operatorname{dist}(x,y) \leq \sup_U \|d\phi\|\,\big(\operatorname{diam} U + \operatorname{dist}(x_0,y)\big)\end{aligned}$$

établit l'existence, et, par convergence dominée, la continuité par rapport à x de l'intégrale $\mu\big(d\phi(x)\circ\exp_x^{-1}\big) = v^\mu(x)\phi$; donc le champ de vecteurs v^μ existe et est continu (il n'est pas difficile de voir qu'il est en fait C^∞).

Pour y fixé, le gradient au point x de la fonction $\operatorname{dist}(x,y)^2$ est $-2\exp_x^{-1}(y)$; intégrant en y, on trouve

$$\operatorname{grad} f(x) = -2 \int_{y\in V} \exp_x^{-1}(y)\, \mu(dy) = -2\, v^\mu(x)$$

(la dérivation sous le signe somme étant justifiée par la même majoration que ci-dessus). Ainsi, f est de classe C^1, de gradient $-2v^\mu$ et ses points critiques sont ceux où v^μ s'annule, d'où la proposition. ∎

Voici pour terminer des critères d'existence et d'unicité du barycentre exponentiel, empruntés à Kendall [12].

PROPOSITION 4 (Existence du barycentre exponentiel). — *Toute probabilité sur V portée par un ensemble relativement compact de la forme $\{\phi < 0\}$, où ϕ est une fonction convexe de classe C^2, admet (au moins) un barycentre exponentiel.*

DÉMONSTRATION. Choisissons sur V une structure riemannienne arbitraire (indépendamment de la connexion). Soit f une fonction C^∞. Pour x et y dans le compact $K = \{\phi \le 0\}$, la majoration

$$\left|df\circ \exp_x^{-1}(y)\right| = \left|\langle df(x), \exp_x^{-1}(y)\rangle\right| \le \|df(x)\|\,\|\exp_x^{-1}(y)\| \le c(K)$$

montre, après intégration en y, que la fonction $v^\mu f(x) = \mu\big(df\circ\exp_x^{-1}\big)$ est bien définie et continue sur K. Pour $x\in\partial K$ et $y\in K$, on a $\phi(x)=0$ et $\phi(y)\le 0$, donc ϕ est négative sur l'arc géodésique γ joignant x à y; en différentiant au point x, on obtient

$$\langle \exp_x^{-1}(y), d\phi(x)\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi\circ\gamma)(t) \le 0\ ,$$

et en intégrant en y, on trouve $v^\mu\phi(x) \le 0$, ce qui montre que le champ de vecteurs continu v^μ est rentrant au bord de K. Mais il existe un difféomorphisme transformant K et $\mathring{K}$ en une boule de $\mathbb{R}^d$ et son intérieur (passer par $\exp_z^{-1}$, où z est intérieur à K, puis par un difféomorphisme entre U_z et $\mathbb{R}^d$). Donc le champ de vecteurs v^μ s'annule en au moins un point de K (et même de $\mathring{K}$, en raison de la convexité de ϕ). ∎

COROLLAIRE. — *Toute probabilité vérifiant l'hypothèse de la proposition 4 a un barycentre non vide et est la loi de X_1 pour une martingale continue $(X_t)_{0\le t\le 1}$ dans V.*

Cela résulte des propositions 4 et 2 et du théorème 2 appliqués à la variété $\{\phi < \varepsilon\}$, où ε est choisi tel que l'ensemble $\{\phi \le \varepsilon\}$ soit compact.

PROPOSITION 5 (Unicité du barycentre exponentiel). — *S'il existe sur $V\times V$ une fonction convexe, bornée, nulle sur la diagonale Δ et strictement positive hors de Δ, toute probabilité sur V a au plus un barycentre exponentiel.*

La connexion dont est munie $V \times V$ dans cet énoncé est bien entendu la connexion produit, caractérisée (à la torsion près, mais peu importe) par ses géodésiques, qui sont les courbes $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ où chaque γ_i est une géodésique de V ; la sous-variété Δ de $V \times V$ est totalement géodésique pour cette connexion (cette condition est évidemment nécessaire à l'existence de la fonction convexe sus-mentionnée).

LEMME 4. — *Si μ est une probabilité sur $V \times V$ ayant pour marges ν et π, et si x (respectivement y) est un barycentre exponentiel de ν (respectivement π) dans V, alors (x,y) est un barycentre exponentiel de μ dans $V \times V$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soient ξ et η dans V ; il leur correspond des vecteurs $X \in T_x V$ et $Y \in T_y V$ tels que $\exp_x X = \xi$ et $\exp_y Y = \eta$. La courbe dans $V \times V$ définie par $\gamma(t) = (\exp_x tX, \exp_y tY)$ est une géodésique telle que $\gamma(1) = (\xi, \eta)$ et $\dot\gamma(0) = (X,Y)$; donc $\exp^{-1}_{(x,y)}(\xi,\eta) = (X,Y)$.

Mais toute forme linéaire h sur $T_{(x,y)}(V \times V)$ vérifie $h(X,Y) = f(X) + g(Y)$ pour des formes linéaires f et g sur $T_x V$ et $T_y V$ respectivement ; on en tire l'égalité

$$h \circ \exp^{-1}_{(x,y)}(\xi,\eta) = h(X,Y) = f(X) + g(Y) = f \circ \exp^{-1}_x(\xi) + g \circ \exp^{-1}_y(\eta)$$

qui, puisque ν et π sont les marges de μ, s'intègre en

$$\int_{V \times V} h \circ \exp^{-1}_{(x,y)} \, d\mu = \int_V f \circ \exp^{-1}_x \, d\nu + \int_V g \circ \exp^{-1}_y \, d\pi \ ;$$

ceci est nul car x et y sont des barycentres exponentiels de ν et π. ∎

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5. Soient x et y deux barycentres exponentiels de la même probabilité μ sur V, et soit $\tilde\mu$ la probabilité sur Δ dont les deux projections sur V sont égales à μ. Le lemme qui précède entraîne que (x,y) est un barycentre exponentiel de $\tilde\mu$, donc, par la proposition 2, un point du barycentre de $\tilde\mu$ dans $V \times V$. On a donc $\phi(x,y) \leq \tilde\mu(\phi)$, où ϕ est une fonction convexe bornée sur $V \times V$ nulle sur Δ et positive ailleurs (une telle fonction existe par hypothèse). Puisque $\tilde\mu$ est portée par Δ, ceci implique $\phi(x,y) \leq 0$, donc $x = y$. ∎

Voici, en guise de conclusion, deux questions ouvertes soulevées par ce qui précède.

Certains des énoncés ci-dessus sont vrais sous une hypothèse d'existence d'une fonction convexe convenable. Dans le cas riemannien, Kendall ([12] ; voir aussi [13]) a construit ces fonctions convexes en supposant que V est incluse dans une boule $\mathrm{B}(p,R)$ ne rencontrant pas le cut-locus de p, et sur laquelle la courbure sectionnelle est majorée par une constante plus petite que $(\pi/2R)^2$. Dans le cas général (non nécessairement riemannien), de telles fonctions convexes existent localement (tout point de V a un voisinage sur lequel c'est vrai ; voir [6], (4.59)). Nous conjecturons que ces fonctions convexes existent nécessairement dès lors que la variété ambiante est un ouvert convexe et relativement compact dans une variété elle-même convexe (au sens fort où deux points sont toujours liés par une géodésique et une seule).

Si $(X_t)_{0\le t\le 1}$ est une martingale continue sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1})$, à valeurs dans une variété raisonnablement convexe (voir ci-dessus) et en particulier telle que toute probabilité a un barycentre non vide, on peut construire, pour chaque subdivision dyadique σ_n de $[0,1]$, une martingale discrète $(Y_t^n, \mathcal{F}_t)_{t\in\sigma_n}$ telle que $Y_1^n = X_1$ (définir les Y_t^n par récurrence décroissante sur $t \in \sigma_n$; ils sont loin d'être uniques en général). Si la filtration est brownienne, et si l'on choisit à chaque étape le barycentre exponentiel, les processus $X_t^n = Y^n_{\sup([0,t]\cap\sigma_n)}$ convergent vers X uniformément en probabilité (Kendall [12]; voir aussi Picard [17]). Qu'en est-il pour une filtration générale et des barycentres arbitraires?

RÉFÉRENCES

[1] E. Cartan. Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars, Paris 1928.

[2] R.W.R. Darling. Martingales in Manifolds — Definition, Examples, and Behaviour under Maps. *Séminaire de Probabilités XVI, Supplément Géométrie différentielle stochastique*, Lecture Notes in Mathematics 921, Springer 1982.

[3] S. Doss. Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié. *Bull. Sc. Math.* 73, 1949, 48–72.

[4] R. M. Dudley. Distances on Probability Measures and Random Variables. *Ann. Math. Stat.* 39, 1563–1572, 1968.

[5] T. E. Duncan. Stochastic Integrals in Riemannian Manifolds. *J. Multivariate Anal.* 6, 397–413, 1976.

[6] M. Emery et P.-A. Meyer. Stochastic calculus in manifolds. Springer, 1989.

[7] M. Emery et W. Zheng. Fonctions convexes et semimartingales dans une variété. *Séminaire de Probabilités XVIII*, Lecture Notes in Mathematics 1059, Springer 1984.

[8] M. Fréchet. L'intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque. *Revue Scientifique*, 1944, 483–512.

[9] W. Herer. Espérance mathématique au sens de Doss d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 302, 131–134, 1986.

[10] W. Herer. Martingales à valeurs fermées bornées d'un espace métrique. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 305, 275–278, 1987.

[11] W. Herer. Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique à courbure négative. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 306, 681–684, 1988.

[12] W. S. Kendall. Probability, convexity, and harmonic maps with small image I: uniqueness and fine existence. *Proc. L.M.S.* 61, 371–406, 1990.

[13] W. S. Kendall. Convexity and the hemisphere. Preprint, soumis au *Journal L.M.S.*

[14] C. Lobry. Et pourtant, ils ne remplissent pas $\mathbb{N}$! Aléas, Lyon 1989.

[15] P.-A. Meyer. Géométrie stochastique sans larmes. *Séminaire de Probabilités XV*, Lecture Notes in Mathematics 850, Springer 1981.

[16] P.-A. Meyer. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris, 1966.

[17] J. Picard. Martingales on Riemannian manifolds with prescribed limits. Preprint, INRIA, Sophia Antipolis, soumis au *J.F.A.*

[18] R. Rebolledo. Convergence en loi des martingales continues. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 483–485, 1976.