

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DAVID NUALART

## **Une remarque sur le développement en chaos d'une diffusion**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 23 (1989), p. 165-168

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1989\\_\\_23\\_\\_165\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__165_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

# Une remarque sur le développement en chaos d'une diffusion

par David Nualart

Le but de cette note est de donner une démonstration directe d'une propriété de continuité présentée par Meyer et Leandre au congrès sur "Stochastic Analysis" en Oberwolfach. Plus précisément il s'agit de voir que si l'on développe en chaos de Wiener une fonction régulière d'une diffusion, les noyaux qu'on obtient dans cette représentation sont des fonctions continues.

Tout d'abord nous allons introduire quelques notations. Soit  $\{W(t), t \geq 0\}$  un mouvement Brownien  $d$ -dimensionnel défini dans l'espace de probabilités canonique  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . On désignera par  $D$  l'opérateur de dérivation dans l'espace de Wiener, considéré comme un opérateur nonborné de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega \times [0, \infty), \mathbf{R}^d)$ . C'est à dire, la dérivée d'une intégrale stochastique du type  $\int_0^\infty h_t dW_t^j$  où  $h$  est une fonction de  $L^2([0, \infty))$ , est donnée par

$$D_t^i \left( \int_0^\infty h_s dW_s^j \right) = \delta_{ij} h(t),$$

avec  $1 \leq i \leq d$  et  $t \geq 0$ . Par itération on peut introduire les dérivées multiples comme des opérateurs nonbornés de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega \times [0, \infty)^k, (\mathbf{R}^d)^k)$ , pour tout entier positif  $k$ . Pour tout  $p > 1$  et tout entier  $k \geq 0$  on considère, comme d'habitude l'espace de type Sobolev  $D_{p,k}$ , défini comme l'ensemble des variables aléatoires qui ont des dérivées multiples jusqu'à l'ordre  $k$  et ces dérivées sont dans  $L^p(\Omega, L^2([0, \infty)^j, (\mathbf{R}^d)^j))$  pour tout  $j \leq k$ . L'espace des variables aléatoires test,  $D_\infty$ , sera l'intersection des  $D_{p,k}$ . Si  $F$  est une variable aléatoire/dans  $D_\infty$ , on notera la dérivée d'ordre  $n$  de  $F$  par  $D_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}(F)$ , ou tout simplement par  $D_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}(F)$ .

On considère des champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}^m$ ,  $A_i$ ,  $0 \leq i \leq d$ , qui sont infiniment différentiables avec toutes les dérivées uniformément bornées. Soit  $\{X_t, t \geq 0\}$  la solution du système d'équations différentielles stochastiques

$$X_t = x_0 + \int_0^t A_i(X_s) dW_s^i + \int_0^t A_0(X_s) ds,$$

où l'on fait la convention usuelle de sommation des indices qui se trouvent répétés en haut et en bas. Ici  $x_0$  est un point fixe de  $\mathbf{R}^m$ . Soit  $t$  un temps positif fixé. Nous allons étudier une variable aléatoire de la forme  $F = h(X_t)$ , où  $h$  est une fonction réelle sur  $\mathbf{R}^m$  infiniment différentiable telle que elle même et toutes ses dérivées ont une croissance

polynomiale. Il est bien connu que cette variable  $F$  appartient à l'espace  $\mathcal{D}_\infty$ . On peut écrire son développement en chaos de Wiener:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

Dans ce développement,  $I_n$  représente l'intégrale multiple d'Ito d'ordre  $n$ , et  $f_n$  est une fonction symétrique de l'espace  $L^2(T^n)$ , où  $T$  est l'espace produit  $[0, \infty) \times \{1, \dots, d\}$  muni du produit de la mesure de Lebesgue par la mesure uniforme. On remarque que les fonctions  $f_n((t_1, j_1), \dots, (t_n, j_n))$  sont nulles presque partout sauf si les points  $t_1, \dots, t_n$  appartiennent à l'intervalle  $[0, t]$ . On observe aussi que par la symétrie de  $f_n$ , l'intégrale multiple  $I_n(f_n)$  ne dépend que des valeurs de  $f_n$  sur l'ensemble

$$\Delta(t) = \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, t]^n : t_1 \leq \dots \leq t_n\}$$

pour tous  $j_1, \dots, j_n$ . Alors, nous voulons démontrer le résultat suivant:

**Proposition 1:** *Pour tout  $n$  le noyau  $f_n$  déterminé par la projection de la variable  $F = h(X_t)$  sur le chaos de Wiener d'ordre  $n$  est une fonction continue sur le sousensemble  $\Delta(t)$  de  $[0, t]^n$ .*

*Preuve:* D'abord nous allons rapeler l'expression suivante (voir, par exemple Stroock [3]) qui relie les noyaux de la représentation en chaos de Wiener d'une variable aléatoire quelconque  $F$  de l'espace  $\mathcal{D}_\infty$  avec l'opérateur  $D$ :

$$f_n((t_1, j_1), \dots, (t_n, j_n)) = \frac{1}{n!} E(D_{t_n}^{j_n} \dots D_{t_1}^{j_1}(F)).$$

Dans le cas particulier  $F = h(X_t)$ , on a:

$$D_{t_n}^{j_n} \dots D_{t_1}^{j_1}(F) = \sum (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} h(X_t)) \left[ \prod_{\alpha \in J_1} D_{t_\alpha}^{j_\alpha} X_t^{i_1} \right] \dots \left[ \prod_{\alpha \in J_m} D_{t_\alpha}^{j_\alpha} X_t^{i_m} \right], \quad (1)$$

où la somme s'étend à toutes les partitions  $\{1, \dots, n\} = J_1 \cup \dots \cup J_m$ . Il faut montrer alors que l'espérance mathématique de l'expression (1) est une fonction continue en les variables  $t_1, \dots, t_n$  dans  $\Delta(t)$ . Pour cela il suffira de voir que pour tout  $i = 1, \dots, m$  et pour tous  $j_1, \dots, j_n = 1, \dots, d$ , la dérivée d'ordre  $n$   $D_{t_n}^{j_n} \dots D_{t_1}^{j_1}(X_t^i)$  a une version continue comme fonction de  $\Delta(t)$  dans  $L^p(\Omega)$  pour tout  $p > 1$ . Cette propriété de continuité se déduit alors des deux lemmes techniques suivants, qui permettent d'achever la démonstration de la proposition.

Les dérivées successives de  $X_t^i$  satisfont à des équations différentielles stochastiques linéaires. Le lemme suivant précise ce résultat.

**Lemme 2:** La dérivée  $D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n}(X_t^i)$  est bornée en  $L^p$  uniformément en  $t_1, \dots, t_n$  et  $t$  dans un intervalle borné, pour tout  $p$ , et on a

$$\begin{aligned} (D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n})(X_t^i) &= \sum_{\epsilon=1}^n (D_{t_1}^{j_1} \dots D_{t_{\epsilon-1}}^{j_{\epsilon-1}} D_{t_{\epsilon+1}}^{j_{\epsilon+1}} \dots D_{t_n}^{j_n})(A_{j_\epsilon}^i(X_{t_\epsilon})) \\ &+ \int_{t_1 \vee \dots \vee t_n}^t \left[ (D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n})(A_\theta^i(X_u)) dW_u^\theta + (D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n})(A_0^i(X_u)) du \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

*Preuve:* Une démonstration détaillée en utilisant des approximations polygonales du mouvement brownien selon les idées de Ikeda et Watanabe, peut se trouver dans Nualart et Sanz [2], dans le cas des équations différentielles stochastiques sur le plan. Si on suppose connu le fait que la variable  $X_t^i$  appartient à l'espace  $\mathcal{D}_\infty$ , alors on peut montrer facilement le lemme par induction, en utilisant les propriétés de l'opérateur  $D$ . En effet, si l'on applique l'opérateur  $D_{t_{n+1}}^{j_{n+1}}$  aux deux membres de l'équation (2), on obtient

$$\begin{aligned} (D_{t_1 \dots t_{n+1}}^{j_1 \dots j_{n+1}})(X_t^i) &= \sum_{\epsilon=1}^n (D_{t_{n+1}}^{j_{n+1}} D_{t_1}^{j_1} \dots D_{t_{\epsilon-1}}^{j_{\epsilon-1}} D_{t_{\epsilon+1}}^{j_{\epsilon+1}} \dots D_{t_n}^{j_n})(A_{j_\epsilon}^i(X_{t_\epsilon})) \\ &+ (D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n})(A_{j_{n+1}}^i(X_{t_{n+1}})) \\ &+ \int_{t_1 \vee \dots \vee t_{n+1}}^t \left[ (D_{t_1 \dots t_{n+1}}^{j_1 \dots j_{n+1}})(A_\theta^i(X_u)) dW_u^\theta + (D_{t_1 \dots t_{n+1}}^{j_1 \dots j_{n+1}})(A_0^i(X_u)) du \right]. \end{aligned}$$

Finalement la majoration des normes  $p$  s'obtient sans difficulté moyennant le lemme de Gronwall et un argument d'induction. ■

**Lemme 3:** L'inégalité suivante est satisfaite

$$\sum_{i, j_1, \dots, j_n} E(|D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n}(X_t^i) - D_{s_1 \dots s_n}^{j_1 \dots j_n}(X_t^i)|^p) \leq C \sum_{i=1}^n |(t_i - s_i|^{p/2} \quad (3)$$

pour tous  $(t_1, \dots, t_n)$  et  $(s_1, \dots, s_n)$  dans  $\Delta(t)$  et pour tout  $p$  plus grand que 1. La constante  $C$  dépend de  $n$ ,  $p$ ,  $t$ , et des normes infini des  $n$  premières dérivées des champs de vecteurs  $A_i$ .

*Preuve:* Il faut faire un argument d'induction. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à

$n - 1$ . On peut écrire:

$$\begin{aligned}
 & D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n}(X_t^i) - D_{s_1 \dots s_n}^{j_1 \dots j_n}(X_t^i) \\
 &= \sum_{\epsilon=1}^n [(D_{t_1}^{j_1} \dots D_{t_{\epsilon-1}}^{j_{\epsilon-1}} D_{t_{\epsilon+1}}^{j_{\epsilon+1}} \dots D_{t_n}^{j_n})(A_{j_\epsilon}^i(X_{t_\epsilon})) \\
 &\quad - (D_{s_1}^{j_1} \dots D_{s_{\epsilon-1}}^{j_{\epsilon-1}} D_{s_{\epsilon+1}}^{j_{\epsilon+1}} \dots D_{s_n}^{j_n})(A_{j_\epsilon}^i(X_{t_\epsilon}))] \\
 &\quad + \int_{t_n}^t [D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n} A_\theta^i(X_u) - D_{s_1 \dots s_n}^{j_1 \dots j_n} A_\theta^i(X_u)] dW_u^\theta \\
 &\quad + \int_{t_n}^t [D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n} A_0^i(X_u) - D_{s_1 \dots s_n}^{j_1 \dots j_n} A_0^i(X_u)] du \\
 &\quad + \left| \int_{[s_n, t_n]} [D_{s_1 \dots s_n}^{j_1 \dots j_n} A_\theta^i(X_u) dW_u^\theta + D_{s_1 \dots s_n}^{j_1 \dots j_n} A_0^i(X_u) du] \right| \\
 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4.
 \end{aligned}$$

Alors, l'hypothèse d'induction et les majorations uniformes des normes  $p$  des dérivées de  $X_t$  permettent de trouver les estimations désirées pour les termes  $a_1$  et  $a_4$ . D'autre part, en utilisant une formule analogue à l'expression (1) on peut décomposer les termes  $a_2$  et  $a_3$  en deux parties. Une première partie contiendra des dérivées d'ordre plus petit que  $n$  et on peut lui appliquer l'hypothèse d'induction. La deuxième partie contient des intégrales sur  $[s_n, t_n]$  de processus de la forme

$$\partial_\alpha A_\theta^i(X_u) [D_{t_1 \dots t_n}^{j_1 \dots j_n}(X_u^\alpha) - D_{s_1 \dots s_n}^{j_1 \dots j_n}(X_u^\alpha)].$$

Finalement, le lemme de Gronwall permet de finir la démonstration. ■

Notons que d'après le critère de continuité de Kolmogorov, la dérivée  $D_{s_1 \dots s_n}^{j_1 \dots j_n}(X_t^i)$  a une version continue en  $t_1, \dots, t_n$  sur  $\Delta(t)$  (pas seulement continue en  $L^p$ ).

### References bibliographiques:

- [1] N. Ikeda and S. Watanabe. "Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes". North-Holland, 1981.
- [2] D. Nualart and M. Sanz. "Malliavin Calculus for Two-parameter Wiener Functionals". Z. Wahrschein. verw. Gebiete 70, 573-590 (1985).
- [3] D.W. Stroock. "Homogeneous chaos revisited". Sémin. Prob. XXI. 1-7. Lecture Notes in Math. 1247.